R
F 2587
1-3.
67
1458

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÎNE
INSTITUTUL DE MECANICĂ APLICATĂ „TRAIAN VUIA"

1
ANUL XIV
1963

MŰSZAKI EGYETEM * BUDAPEST
KÖZPONTI KÖNYVTÁRA
1848

STUDII ȘI CERCETĂRI DE
MECANICĂ APLICATĂ

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

1976

COMITETUL DE REDACŢIE

Redactor responsabil :

ACADEMICIAN E. CARAFOLI

Membri :

ACADEMICIAN N. PROFIRI
A. BELEŞ, membru corespondent al Academiei R.P.R.;
CR. MATEESCU, membru corespondent al Academiei R.P.R.;
R. BOGDAN, conferenţiar la Institutul de petrol, gaze şi geologie, Bucureşti;
N. TIPEI, conferenţiar la Institutul politehnic, Bucureşti;
M. ARCAN, şef secţie, Institutul de cercetări în construcţii şi economia construcţiilor (INCERC), Bucureşti.

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ
APARE DE 6 ORI PE AN
Redacţia : INSTITUTUL DE MECANICĂ APLICATĂ „TRAIAN VUIA"
Str. Const. Mille 15, tel. 17.34.09

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÎNE
INSTITUTUL DE MECANICĂ APLICATĂ „TRAIAN VUIA"

STUDII ŞI CERCETĂRI DE
MECANICĂ APLICATĂ

1

ANUL XIV

1963

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

574/1964

F
2557

1989

Revista

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

publică:

● Studii originale *de înalt nivel cu caracter fundamental de interes general ştiinţific şi reflectare în practică.*

● Note (*lucrări mai scurte*) *cu caracter original sau constituind o punere la punct a unei numite chestiuni.*

● Referate ştiinţifice şi tehnice *în care se expune*: *stadiul actual al unei anumite probleme, subliniindu-se aspectul nou, observaţii şi discuţii asupra unor lucrări de mecanică aplicată.*

● Recenzii *asupra cărţilor şi studiilor romîne sau străine.*

Domeniile de specialitate ale revistei sînt:

● *Astrodinamică* (*optimizarea traiectoriilor, calculul orbitelor sau al segmentelor de orbite, optimizarea transferului interorbital, impactul vehiculelor spaţiale cu meteoriţii, orbite sincrone, astrorelativitate, zborul în atmosfera rarefiată, reintrarea în atmosfera densă, frînarea şi captarea aerodinamică a unui vehicul cosmic*).

● *Aeromecanică* (*mecanica fluidelor, aerodinamică, dinamica gazelor, mecanica avionului, aeroelasticitate, aerodinamica motoarelor cu ardere internă, termo-aerodinamica motoarelor cu reacţie, ventilaţie, aeromotori*).

● *Hidromecanică* (*hidraulică, construcţii hidrotehnice, irigaţie, turbine şi pompe, amenajări hidraulice*).

● *Construcţii de maşini* (*cinematica şi dinamica mecanismelor, frecare, ungere, uzură, metode moderne de calculul maşinilor, automatizare, studiul suprafeţelor, tehnologia mediilor solide continue*).

● *Mecanică generală* (*rezistenţa materialelor, elasticitate, plasticitate, vibraţii şi şocuri, stabilitate, analogii electrice şi hidraulice*).

● *Statica şi dinamica construcţiilor* (*metode pentru calculul static şi dinamic al construcţiilor, studiul materialelor neomogene, geotehnică, stabilitatea terenurilor, metode de executarea lucrărilor de construcţii*).

● *Tehnica măsurătorilor* (*aparate electronice pentru măsurarea mărimilor mecanice, utilizarea ultrasunetului şi a izotopilor radioactivi în tehnică*).

Revista urmăreşte stimularea activităţii ştiinţifice precum şi difuzarea lucrărilor valoroase, primind în acest scop spre publicare articole de la toţi specialiştii din ţară şi de la colaboratorii din străinătate.

★

Articolele vor fi redactate într-o formă concisă şi clară, evitîndu-se introduceri lungi referitoare la părţile cunoscute ale problemei.

Manuscrisele se vor preda în trei exemplare, dactilografiate la două rînduri, iar formulele vor fi scrise clar şi citeţ cu cerneală. Figurile şi graficele se vor desena în tuş pe hîrtie de calc. Se vor utiliza figuri numai cînd este absolut necesar şi în număr cît mai mic.

Literatura citată în text se va insera la sfîrşitul lucrării sub formă de bibliografie. Se va indica numele autorului, titlul lucrării, tomul, pagina, locul, editura, anul de apariţie, iar pentru revistă se va indica şi numărul respectiv. Trimiteri la lucrări nepublicate nu se admit.

Pe lîngă text se vor înainta pentru fiecare exemplar rezumate în limba romînă, eventual în rusă, franceză, engleză şi germană. Rezumatele vor fi în medie una pagină dactilografiată la 20 pagini de text.

Aceleaşi norme sînt valabile şi pentru colaborările din străinătate, care pot fi redactate în limbile rusă, engleză, franceză sau germană.

Manuscrisele se vor trimite la sediul Institutului de mecanică aplicată, Bucureşti str. C. Mille nr. 15, raionul „16 Februarie”.

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM KÖZPONTI KÖNYVTÁRA 1848

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÎNE
INSTITUTUL DE MECANICĂ APLICATĂ „TRAIAN VUIA”

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

Tomul XIV, nr. 1 1963

SUMAR

STUDII

Pag.

M. MIŞICU, Structuri reologice 7
AUGUSTIN PETRE, Flambajul conductelor forţate datorit presiunii interioare . . . 27
P. P. TEODORESCU, Asupra problemei plane a teoriei elasticităţii în coordonate curbilinii oarecare. III. Formularea matematică a problemei. Metode de calcul 37
VALERIU PETCU, Articulaţia plastică în calculul plastic al structurilor de beton armat 55
M. BLUMENFELD, Calculul discurilor de grosime variabilă în mişcare de rotaţie prin metoda de recurenţă a celor trei necunoscute 71
EINAR KEINTZEL, Calculul cadrelor spaţiale etajate axial-simetrice prin ecuaţii cu diferenţe finite 83
DAN PAVELESCU şi IVAN ILIUC, Aspecte privind evoluţia uzurii şi temperaturii unor cupluri radioactive bronz-oţel 95
RADU P. VOINEA şi MIHAIL C. ATANASIU, Contribuţii la determinarea stării cinematice a unui mecanism prin metoda sistemelor conjugate 103
LEON LIVOVSCHI, Proiectarea mecanismelor hidraulice cu elemente bipoziţionale. . 133
I. SZÉKELY, Studii asupra unui angrenaj cilindro-conic 145
ELENA CROITORU, Asupra unor invarianţi cinematici de ordin superior în mişcarea spaţială a solidelor rigide 157
DAN GH. IONESCU, Metoda funcţiilor analitice în hidrodinamica lichidelor vîscoase 169
CONSTANTIN IAMANDI, Determinarea lungimii saltului hidraulic 205
H. PASCAL, Curgerea tranzitorie a gazelor în conducte magistrale. II. Determinarea coeficientului de frecare hidrodinamic 223

NOTE

EMERIC DEUTSCH, Asupra torsiunii semispaţiului elastic 243

MANIFESTĂRI ŞTIINŢIFICE PESTE HOTARE

D. MANGERON, Prima conferinţă de teoria mecanismelor şi maşinilor din regiunea Baltică 251
RECENZII 257
PUBLICAŢII PRIMITE PRIN SCHIMB LA REDACŢIE 269

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

Le périodique

«STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ»
(ÉTUDES ET RECHERCHES DE MÉCANIQUE APPLIQUÉE)

publie:

- *des* études originales *à caractère hautement scientifique, recherches fondamentales d'intérêt général, orientées vers l'activité pratique*;
- *des* notes *(communications brèves) à caractère général, ou constituant une mise au point d'une certaine question*;
- *des* exposés scientifiques et techniques *où l'on expose*: *l'état actuel d'un certain problème, en soulignant son aspect nouveau*; *des remarques et discussions concernant certains travaux de mécanique appliquée*;
- *des* notes bibliographiques *au sujet des livres et des études roumains et étrangers.*

Les domaines de spécialité de la revue sont les suivants:

- *astrodynamique (réalisation des trajectoires optimums, calcul des orbites, ou des segments d'orbites, obtention du transfert interorbital optimum, impact des véhicules spatiaux avec les météorites, orbites synchrones, astrorelativité, vol en atmosphère raréfiée, retour dans l'atmosphère dense, freinage et saisie aérodynamique d'un véhicule cosmique).*
- *aéromécanique (mécanique des fluides, aérodynamique, dynamique des gaz, mécanique de l'avion, aéroélasticité, aérodynamique des moteurs à combustion interne, thermo-aérodynamique des moteurs à réaction, ventilation, aéromoteurs)*;
- *hydromécanique (hydraulique, constructions hydrotechniques, irrigation, turbines hydrauliques et pompes)*;
- *constructions mécaniques (cinématique et dynamique des mécanismes, frottement, lubrification, usure, méthodes modernes de calcul des machines, automation, étude des surfaces, technologie des milieux solides continus)*;
- *mécanique générale (résistance des matériaux, élasticité, plasticité, vibrations et chocs, stabilité, analogies électriques et hydrauliques)*;
- *statique et dynamique des constructions (méthodes de calcul statique et dynamique des constructions, étude des matériaux hétérogènes, mécanique des sols, stabilité des terrains, méthodes d'exécution des travaux de construction)*;
- *technique des mesures (appareils électroniques pour la mesure des grandeurs mécaniques, utilisation des ultra-sons et des isotopes radioactifs en technique).*

La revue tend à stimuler la recherche scientifique et la diffusion des travaux méritoires en publiant, dans ce but, les articles scientifiques des collaborateurs roumains et étrangers.

★

Les articles seront rédigés dans un style concis et clair, étant évitées les introductions trop longues concernant les données connues des problèmes.

Les manuscrits seront envoyés en trois exemplaires, dactylographiés, aux formules écrites de manière lisible, à l'encre. Les figures, ainsi que les diagrammes, seront tracés à l'encre de Chine sur du papier calque. On utilisera le nombre de figures strictement indispensable.

Les références bibliographiques seront mentionnées à la fin de l'article. On y indiquera le nom de l'auteur, le titre de l'ouvrage, le tome, la page, le lieu de la parution et, pour les périodiques, on ajoutera le numéro auquel on se réfère. On ne fera pas mention des travaux non publiés.

Les manuscrits seront accompagnés d'un résumé en roumain ou, éventuellement, en russe, français, anglais ou allemand (environ une page pour 20 pages dactylographiées de texte).

Les mêmes normes sont valables pour les collaborateurs étrangers, qui peuvent rédiger leurs travaux en russe, anglais, français ou allemand.

Les manuscrits seront envoyés à l'adresse suivante: *Institut de Mécanique Appliquée «Traian Vuia», 15, str. Constantin Mille, Bucarest, Roumanie.*

Журнал

„ТРУДЫ И ИССЛЕДОВАНИЯ ПО ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКЕ”

публикует:

- Оригинальные исследования *высокого уровня, представляющие общий научный интерес, связанный с практикой.*
- Заметки (*краткие работы*) *оригинального характера, представляющие уточнение некоторого вопроса.*
- Научные и технические рефераты, *в которых излагаются современное состояние определенной задачи с выявлением нового подхода к ней, замечания и обсуждения некоторых работ по прикладной механике.*
- Рецензии *на румынские или зарубежные книги и исследования. В журнале публикуются работы по следующим специальностям:*
- *Астродинамика (оптимальные траектории, расчет орбит или отрезков орбит, оптимальная межорбитальная теплопередача, удар космических экипажей о метеориты, полет в разреженной атмосфере, возвращение в плотную атмосферу, торможение и аэродинамическое улавливание космического экипажа).*
- *Аэромеханика (механика жидкостей и газов, аэродинамика, газодинамика, механика самолета, аэроупругость, аэродинамика двигателей внутреннего сгорания, термоаэродинамика реактивных двигателей, вентиляция, ветродвигатели).*
- *Гидромеханика (гидравлика, гидромеханические сооружения, орошение, гидравлические турбины и насосы, гидравлические устройства.*
- *Машиностроение (кинематика и динамика механизмов, трение, смазка, износ, современные методы расчета различных машин, автоматизация, исследование поверхностей, механика сплошных твердых сред).*
- *Общая механика (сопротивление материалов, упругость, пластичность, вибрация и удары, устойчивость, электрические и гидравлические аналогии).*

— *Статика и динамика сооружений (методы статистического и динамического расчета сооружений, исследование неоднородных материалов, механика грунтов, устойчивость грунтов, методы производства строительных работ).*

— *Техника измерений (электронные приборы для измерения механических величин, применение ультразвука и радиоактивных изотопов в механике.*

Журнал предназначен для стимулирования научной деятельности, а также для распространения выдающихся работ и принимает с этой целью к опубликованию статьи всех отечественных специалистов и зарубежных сотрудников.

★

Статьи должны быть написаны в сжатой и ясной форме, избегая длинных введений (относящихся к уже известным частям проблемы).

Рукописи следует направлять в трех экземплярах, напечатанных на машинке через два интервала, формулы должны быть вписаны чернилами четко и ясно. Рисунки и графики следует делать китайской тушью на кальке. Присылать рисунки следует только в случае совершенной необходимости и в ограниченном количестве.

Литература, цитированная в тексте должна даваться общим списком в конце статьи. Нужно указывать инициалы и фамилию автора, заглавие, том, страницу, место издания, издательство, год издания, а для журналов — и соответствующий номер. Ссылки на неопубликованные работы не допускаются.

Кроме текста, для каждого экземпляра нужно представлять резюме на румынском языке или же на русском, французском, английском или немецком языках. Резюме должно составлять 1 страницу, написанную на машинке, на 20 страницах текста. Эти же нормы относятся и к работам зарубежных сотрудников, редактированным на русском, английском, французском или немецком языках.

Рукописи препровождаются по адресу: Институт прикладной механики, Бухарест, ул. Константин Милле, № 15, район Г. Георгиу-Деж.

STUDII

STRUCTURI REOLOGICE[1]

DE

M. MIŞICU

539.3

§ 6. CONEXIUNI TENSORIALE ÎN SENS LARG ŞI CONEXIUNI STOHASTICE

Pe baza elementelor preliminare [1], [2], se pot defini mai multe tipuri de conexiuni constituind extinderi naturale ale unor conexiuni geometrice cunoscute (afină, riemanniană, euclidiană). În cadrul unei teorii finite este însă necesară considerarea unor conexiuni mai generale denumite în cele ce urmează conexiuni tensoriale în sens larg. Particularizat, ele pot fi introduse în cadrul geometriei diferenţiale clasice. Astfel, în [1] s-au introdus conexiuni tensoriale de tip special. Acestea au fost studiate şi în [2], [3], [13]. În [5] sînt introduşi m- vectori care se transformă ca $\mathrm{d}^m x'^i/\mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_m$ studiaţi şi în [6], [12].

Sensul acestor conexiuni rezidă în cele ce urmează în posibilitatea geometrizării unor procese mecanice discrete caracterizabile prin categorii mecanice mai complexe (tensorul energiei-impuls în locul forţelor, şi în general tensori cinetici de ordin superior).

Teoria geometrică a conexiunilor tensoriale în sens larg este legată şi de aspectul geometrizării proceselor stohastice, existînd o unitate între proprietăţile geometrice şi mişcarea materială aleatoare.

Conexiunile tensoriale în sens larg constituie un model pentru reprezentarea unor conexiuni mai generale ce vor fi analizate ulterior, denumite de tip valoric.

1. *Legea de conexiune.* Vom nota

$$(\varphi'^{\alpha'_1 \ldots \alpha'_m}_{\underline{\beta}_1 \ldots \underline{\beta}_m} \cdot) = (\varphi'^{\alpha'_1}_{\underline{\beta}_1} \cdot) \ldots (\varphi'^{\alpha'_m}_{\underline{\beta}_m} \cdot).$$

---

[1] Lucrare prezentată la Colocviul de teoria probabilităţilor, octombrie 1962, Braşov. Acest articol reprezintă continuarea articolului apărut în R.M.A. *4* (1962) (I) ; S.C.M.A., *6* (1962) (II) în raport cu care se fac trimiterile şi numerotarea aliniatelor.

În cele ce urmează vom considera simbolul $(\varphi'^{\alpha'_1\cdots\alpha'_m}_{\underline{\beta}_1\cdots\underline{\beta}_m}\cdot)$ de sine stătător independent de dependenţa dată mai sus.

Un tensor de tipul (m, n) se transformă conform legii

$$T^{\alpha'_1\cdots\alpha'_m}_{\underline{\beta}_1\cdots\underline{\beta}_n}=(\varphi'^{\alpha'_1\cdots\alpha'_m}_{\underline{\gamma}_1\cdots\underline{\gamma}_m}\cdot)\,T^{\gamma_1\cdots\gamma_m}_{\underline{\delta}'_1\cdots\underline{\delta}'_n}\,(\varphi'^{\delta'_1\cdots\delta'_n}_{\underline{\beta}_1\cdots\underline{\beta}_n}\cdot),$$

sau

$$T^{\alpha'_1\cdots\alpha'_m}_{\underline{\delta}'_1\cdots\underline{\delta}'_n}(\varphi'^{\delta'_1\cdots\delta'_n}_{\underline{\beta}_1\cdots\underline{\beta}_n}\cdot)=(\varphi'^{\alpha'_1\cdots\alpha'_m}_{\underline{\gamma}_1\cdots\underline{\gamma}_m}\cdot)\,T^{\gamma_1\cdots\gamma_m}_{\underline{\beta}_1\cdots\beta_n}.$$

Vom mai nota

$$\varphi'^{\alpha'_1\cdots\alpha'_m;\,\delta'_1\cdots\delta'_n}_{\underline{\gamma}_1\cdots\underline{\gamma}_m;\,\underline{\beta}_1\cdots\underline{\beta}_n}=(\varphi'^{\alpha'_1\cdots\alpha'_m}_{\underline{\gamma}_1\cdots\underline{\gamma}_m}\cdot)\,(\varphi'^{\delta'_1\cdots\delta'_n}_{\underline{\beta}_1\cdots\underline{\beta}_n})\;\big(=(\varphi'^{\alpha'_1\cdots\alpha'_m;\,\delta'_1\cdots\delta'_n}_{\underline{\beta}_1\cdots\underline{\beta}_n;\,\underline{\gamma}_1\cdots\underline{\gamma}_m}\cdot)\big).$$

Vom presupune în cele ce urmează că aplicaţiile $(\varphi'^{\alpha'}_{\underline{\beta}'})$ şi implicit $(\varphi'^{\alpha'_1\cdots\alpha'_m}_{\underline{\beta}_1\cdots\underline{\beta}_m}\cdot)$ au caracterul unui operator liniar şi pot fi considerate independent de $(\varphi'^{\alpha'}_{\underline{\beta}})$. Vom denumi în acest caz elementele $T^{\alpha'_1\cdots\alpha'_m}_{\underline{\beta}_1\cdots\underline{\beta}_n}$ tensori local-afini.

Conform notaţiilor de la I, § 3.5 vom utiliza sistemul de coordonate $x^\iota+v^\iota(q)$, $\iota\in I$, $x_\iota=v_\iota\,(r)$ definit pentru orice element P al varietăţii V_I. Vom mai considera tensorul de tip (m, n)

$$x^{\alpha_1\ldots\alpha_m}_{\beta_1\ldots\beta_n}=x^{\alpha_1}\ldots x^{\alpha_m}\,x_{\beta_1}\ldots x_{\beta_n},$$

x^α, x_β fiind respectiv contra şi co-varianţi.

Dacă în cîte o acoperire formată din mulţimi de vecinătăţi înzestrate cu repere şi corepere ale elementelor $M, N\in V_I$ *sînt definite 1-formele, denumite 1-forme de conexiune*

$$\overset{L}{\underset{MN}{\omega}}{}^{\alpha_1\ldots\alpha_m;\,\gamma'_1\cdots\gamma'_n}_{\underline{\beta}'_1\cdots\underline{\beta}'_n;\,\underline{\delta}_1\cdots\underline{\delta}_m}\in\mathfrak{D}^{m+n}_L;\quad\alpha_i,\ \beta_j,\ \gamma_k,\ \delta_e\in I$$

(I fiind o mulţime de indici cel mult numărabilă şi în particular local finită în cazul unei dimensii finite a varietăţii V_n, notată ca la II, § 5.4) *astfel ca*

$$d_{MN}\,x^{\alpha_1\ldots\alpha_m}_{\beta'_1\cdots\beta'_n}=\overset{L}{\underset{MN}{\omega}}{}^{\alpha_1\ldots\alpha_m;\,\gamma'_1\cdots\gamma'_n}_{\underline{\beta}'_1\cdots\underline{\beta}'_n;\,\underline{\delta}_1\cdots\underline{\delta}_m}\,(x^{\delta_1\ldots\delta_m}_{\gamma'_1\cdots\gamma'_n})_L\ \text{sau}$$

$$d_{MN}\,x^{\alpha_1\ldots\alpha_m}_{\underline{\beta}'_1\cdots\underline{\beta}'_n}=\overset{L}{\underset{MN}{\omega}}{}^{\alpha_1\ldots\alpha_m;\,\gamma_1\cdots\gamma_n}_{\underline{\beta}'_1\cdots\underline{\beta}'_n;\,\underline{\delta}_1\cdots\underline{\delta}_m}\,(x^{\delta_1\ldots\delta_m}_{\gamma_1\ldots\gamma_n})_L$$

atunci este definită o conexiune tensorială de tip (m, n) *între* $M, N\in V_I$, *relativă la* $L\in V_I$ *(pentru tensori local-afini).*

În particular, o conexiune de tip (1,0) se reduce la următoarea

$$d_{MN}\, x^{\alpha} = \overset{L}{\underset{MN}{\omega}}{}^{\alpha}_{\beta}\, x^{\beta}_{L}\cdot$$

2. *Reprezentarea* φ''. Vom considera următoarea reprezentare:

$$(\varphi''{}^{\alpha_1\dots\alpha_m;\ \gamma'_1\dots\gamma'_n}_{\underline{\beta}'_1\dots\underline{\beta}'_n;\ \underline{\delta}_1\dots\underline{\delta}_m}\cdot)_{MN} = (\varphi'{}^{\alpha_1\dots\alpha_m;\ \gamma'_1\dots\gamma'_n}_{\beta'_1\dots\beta'_n;\ \delta_1\dots\delta_m}\cdot)_{N} -$$

$$-(\varphi'{}^{\alpha_1\dots\alpha_m;\ \gamma'_1\dots\gamma'_n}_{\beta'_1\dots\beta'_n;\ \delta_1\dots\delta_m}\cdot)_{M}$$

În cazul conexiunii tensoriale de tip (m, n) *între* $M, N \in V_n$, *reprezentarea* φ'' *satisface următoarea condiție* (pentru orice $I \in V_I$):

$$(\varphi''{}^{\alpha_1\dots\alpha_m;\ \gamma'_1\dots\gamma'_n}_{\beta'_1\dots\beta'_n;\ \delta_1\dots\delta_m}\cdot)_{IN}\,(x^{\delta_1\dots\delta_m}_{\gamma'_1\dots\gamma'_n})_N + (\varphi''{}^{\alpha_1\dots\alpha_m;\ \gamma'_1\dots\gamma'_n}_{\beta'_1\dots\beta'_n;\ \delta_1\dots\delta_m}\cdot)_{MI}\,(x^{\delta_1\dots\delta_m}_{\gamma'_1\dots\gamma'_n})_M =$$

$$= \overset{L}{\omega}{}'{}^{\alpha^1\dots\alpha_m;\ \gamma'_1\dots\gamma'_n}_{\beta'_1\dots\beta'_n;\ \delta_1\dots\delta_m}\,(\varphi'{}^{\delta_1\dots\delta_m;\ \varepsilon'_1\dots\varepsilon'_n}_{\gamma'_1\dots\gamma'_n;\ \varphi_1\dots\varphi_m}\cdot)_L\,(x^{\varphi_1\dots\varphi_m}_{\varepsilon'_1\dots\varepsilon'_n})_L -$$

$$-(\varphi'{}^{\alpha_1\dots\alpha_m;\ \gamma'_1\dots\gamma'_n}_{\beta'_1\dots\beta'_n;\ \delta_1\dots\delta_m}\cdot)_I\,\overset{L}{\omega}{}^{\delta_1\dots\delta_m;\ \varepsilon'_1\dots\varepsilon'_n}_{\gamma'_1\dots\gamma'_n;\ \varphi_1\dots\varphi_m}\,(x^{\varphi_1\dots\varphi_m}_{\varepsilon'_1\dots\varepsilon'_n})_L,$$

sau, în mod analog

$$(\varphi''{}^{\alpha_1\dots\alpha_m;\ \gamma'_1\dots\gamma'_n}_{\beta'_1\dots\beta'_n;\ \delta'_1\dots\delta'_m}\cdot)_{IN}\,(x^{\delta'_1\dots\delta'_m}_{\gamma'_1\dots\gamma'_n})_N + (\varphi''{}^{\alpha_1\dots\alpha_m;\ \gamma'_1\dots\gamma'_n}_{\beta^1\dots\beta_n;\ \delta'_1\dots\delta'_m}\cdot)_{MI}\,(x^{\delta'_1\dots\delta'_m}_{\gamma'_1\dots\gamma'_n}) =$$

$$= \overset{L}{\omega}{}'{}^{\alpha_1\dots\alpha_m;\ \gamma_1\dots\gamma_n}_{\beta_1\dots\beta_n:\ \delta_1\dots\delta_m}\,(\varphi'{}^{\delta_1\dots\delta_m;\ \varepsilon'_1\dots\text{з}'_n}_{\gamma_1\dots\gamma_n;\ \varphi'_1\dots\varphi_m}\cdot)_L\,(x^{\varphi'_1\dots\varphi'_m}_{\varepsilon_1\dots\varepsilon_n})_L -$$

$$-(\varphi'{}^{\alpha_1\dots\alpha_m;\ \gamma_1\dots\gamma_n}_{\beta_1\dots\beta_n:\ \delta_1\dots\delta_m}\cdot)_I\,\overset{L}{\omega}{}^{\delta_1\dots\delta_m;\ \varepsilon'_1\dots\varepsilon'_n}_{\gamma_1\dots\gamma_n;\ \varphi'_1\dots\varphi_m}\,(x^{\varphi'_1\dots\varphi'_m}_{\varepsilon_1\dots\varepsilon_n})_L\cdot$$

$$(\overset{L}{\omega} = \overset{L}{\underset{MN}{\omega}}).$$

Demonstrație. Efectuînd diferența

$$d_{MN}\,x^{\alpha_1\dots\alpha_m}_{\beta'_1\dots\beta'_n} - (\varphi'{}^{\alpha_1\dots\alpha_m;\ \gamma'_1\dots\gamma'_n}_{\beta'_1\dots\beta'_n;\ \delta_1\dots\delta_m})_I\,d_{MN}\,x^{\delta_1\dots\delta_m}_{\gamma'_1\dots\gamma'_n} =$$

$$= (\varphi'{}^{\alpha_1\dots\alpha_m;\ \gamma'_1\dots\gamma'_n}_{\beta'_1\dots\beta'_n:\ \delta_1\dots\delta_m}\cdot)_N\,(x^{\delta_1\dots\delta_m}_{\gamma'_1\dots\gamma'_n})_N - (\varphi'{}^{\alpha_1\dots\alpha_m;\ \gamma'_1\dots\gamma'_n}_{\beta'_1\dots\beta'_n;\ \delta_1\dots\delta_m}\cdot)_I\,(x^{\delta_1\dots\delta_m}_{\gamma'_1\dots\gamma'_n})_N -$$

$$-(\varphi'{}^{\alpha_1\dots\alpha_m;\ \gamma'_1\dots\gamma'_n}_{\beta'_1\dots\beta'_n;\ \delta_1\dots\delta_m}\cdot)_M\,(x^{\delta_1\dots\delta_m}_{\gamma'_1\dots\gamma'_1})_M + (\varphi'{}^{\alpha_1\dots\alpha_m;\ \gamma'_1\dots\gamma'_m}_{\beta'_1\dots\beta'_n;\ \delta_1\dots\delta_m}\cdot)_I\,(x^{\delta_1\dots\delta_m}_{\gamma'_1\dots\gamma'_n})_M$$

şi aplicînd legile de conexiune tensorială, rezultă, în cazul local afin condiţia enunţată.

În particular, pentru $I = M, L = N$, aceasta se scrie

$$(\varphi''^{\alpha_1\ldots\alpha_m;\,\gamma'_1\ldots\gamma'_n}_{\beta'_1\ldots\beta'_n;\,\delta_1\ldots\delta_m}\cdot)_{MN} = \overset{N}{\omega}{}'^{\alpha_1\ldots\alpha_m;\,\varepsilon'_1\ldots\varepsilon'_n}_{\beta'_1\ldots\beta'_n;\,\varphi_1\ldots\varphi_m}(\varphi'^{\varphi_1\ldots\varphi_m;\,\gamma'_1\ldots\gamma'_n}_{\varepsilon'_1\ldots\varepsilon'_n;\,\delta_1\ldots\delta_m}\cdot)_N -$$

$$-(\varphi'^{\alpha_1\ldots\alpha_m;\,\varepsilon'_1\ldots\varepsilon'_n}_{\beta'_1\ldots\beta'_n;\,\varphi_1\ldots\varphi_m}\cdot)_M\,\overset{N}{\omega}{}^{\varphi_1\ldots\varphi_m;\,\gamma'_1\ldots\gamma'_n}_{\varepsilon'_1\ldots\varepsilon'_n;\,\delta_1\ldots\delta_m},$$

iar pentru $I = N,\ L = M$

$$= \overset{M}{\omega}{}^{\alpha_1\ldots\alpha_m;\,\varepsilon'_1\ldots\varepsilon'_n}_{\beta'_1\ldots\beta'_n;\,\varphi_1\ldots\varphi_m}(\varphi'^{\varphi_1\ldots\varphi_m;\,\gamma'_1\ldots\gamma'_n}_{\varepsilon'_1\ldots\varepsilon'_n;\,\delta_1\ldots\delta_m}\cdot)_M -$$

$$-(\varphi'^{\alpha_1\ldots\alpha_m;\,\varepsilon'_1\ldots\varepsilon'_n}_{\beta'_1\ldots\beta'_n;\,\varphi_1\ldots\varphi_m}\cdot)_N\,\overset{M}{\omega}{}^{\varphi_1\ldots\varphi_m;\,\gamma'_1\ldots\gamma'_n}_{\varepsilon'_1\ldots\varepsilon'_n;\,\delta_1\ldots\delta_m}.$$

În cazul conexiunii vectoriale (contravariante) şi a teoriei infinitezimale, avem

$$(\varphi'^{\alpha'}_{\beta}\cdot)_M = \left(\frac{\partial x'^{\alpha'}}{\partial x^{\beta}}\right)_M,\ (\varphi''^{\alpha'}_{\beta}\cdot)_{MN} = \frac{\partial^2 x'^i}{\partial x^{\gamma}\partial x^{\beta}} d_{MN}\, x^{\gamma},$$

iar condiţia precedentă devine

$$\left(\frac{\partial^2 x'^i}{\partial x^k\,\partial x^j}\right)_M d_{MN}\, x^k = \omega'^i_l\left(\frac{\partial x'^l}{\partial x^j}\right)_M - \left(\frac{\partial x'^i}{\partial x^l}\right)_M \omega^l_j = d_{MN}\left(\frac{\partial x'^i}{\partial x^j}\right).$$

În mod asemănător rezultă şi cealaltă relaţie enunţată.

3. *Transformarea formelor de conexiune.* Observăm că, în general, reprezentarea φ'' se mai scrie astfel

$$(\varphi''^{\alpha_1\ldots\alpha_m;\,\gamma'_1\ldots\gamma'_n}_{\beta'_1\ldots\beta'_n;\,\delta_1\ldots\delta_m}\cdot)_{MN} = d_{MN}(\varphi'^{\alpha_1\ldots\alpha_m;\,\gamma'_1\ldots\gamma'_n}_{\beta'_1\ldots\beta'_n;\,\delta_1\ldots\delta_m}\cdot),$$

astfel că

$$d_{MN}(\varphi'^{\alpha'_1\ldots\alpha'_m;\,\gamma_1\ldots\gamma_n}_{\beta_1\ldots\beta_n;\,\delta'_1\ldots\delta'_m}\cdot) = \overset{L}{\omega}{}'^{\alpha'_1\ldots\alpha'_m;\,\varepsilon_1\ldots\varepsilon_n}_{\beta_1\ldots\beta_n;\,\varphi'_1\ldots\varphi'_m}(\varphi'^{\varphi'_1\ldots\varphi'_m;\,\gamma_1\ldots\gamma_n}_{\varepsilon_1\ldots\varepsilon_n;\,\delta'_1\ldots\delta'_m})_L -$$

$$-(\varphi'^{\alpha'_1\ldots\alpha'_m;\,\varepsilon_1\ldots\varepsilon_n}_{\beta_1\ldots\beta_n;\,\varphi'_1\ldots\varphi'_m}\cdot)_{L'}\,\overset{L}{\omega}{}^{\varphi'_1\ldots\varphi'_m;\,\gamma_1\ldots\gamma_n}_{\varepsilon_1\ldots\varepsilon_n;\,\delta'_1\ldots\delta'_m},$$

unde $L = M,\ L' = N$ sau $L = N,\ L' = M$.

Aplicînd termenilor relaţiei precedente operaţia $(\varphi'^{\mu'_1\ldots\mu'_m;\,\beta_1\ldots\beta_n}_{\nu_1\ldots\nu_n;\,\alpha'_1\ldots\alpha'_m}\cdot)$ şi ținînd seama de ipoteza liniarității acestei aplicații, în care caz $(\varphi'{}^{\mu'_1\ldots\mu'_m;\,\beta_1\ldots\beta_n}_{\nu_1\ldots\nu_n;\,\alpha'_1\ldots\alpha'_m}\cdot)_{L'}(\varphi'{}^{\alpha'_1\ldots\alpha'_m;\,\varepsilon_1\ldots\varepsilon_n}_{\beta_1\ldots\beta_n;\,\varphi_1\ldots\varphi_m}\cdot)_{L'}=(\varepsilon^{\mu'_1\ldots\mu'_m;\,\varepsilon_1\ldots\varepsilon_n}_{\nu_1\ldots\nu_n;\,\varphi_1\ldots\varphi_m}\cdot)_L$, (conform II, § 4),

rezultă condiția

$$\begin{aligned}\overset{L}{\omega}{}^{\mu'_1\ldots\mu'_m;\,\gamma_1\ldots\gamma_n}_{\nu_1\ldots\nu_n;\,\delta'_1\ldots\delta'_m}&=(\varphi'{}^{\mu'_1\ldots\mu'_m;\,\beta_1\ldots\beta_n}_{\nu_1\ldots\nu_n;\,\alpha'_1\ldots\alpha'_m}\cdot)_{L'}\,\overset{L}{\omega}{}'{}^{\alpha'_1\ldots\alpha'_m;\,\varepsilon_1\ldots\varepsilon_n}_{\beta_1\ldots\beta_n;\,\varphi_1\ldots\varphi_m}\times\\&\times(\varphi'{}^{\varphi'_1\ldots\varphi'_m;\,\gamma_1\ldots\gamma_n}_{\varepsilon_1\ldots\varepsilon_n;\,\delta'_1\ldots\delta'_m}\cdot)_L-(\varphi'{}^{\mu'_1\ldots\mu'_m;\,\beta_1\ldots\beta_n}_{\nu_1\ldots\nu_n;\,\alpha'_1\ldots\alpha'_m}\cdot)_{L'}\,d_{MN}(\varphi'{}^{\alpha'_1\ldots\alpha'_m;\,\gamma_1\ldots\gamma_n}_{\beta_1\ldots\beta_n;\,\delta'_1\ldots\delta'_m}\cdot).\end{aligned}$$

În mod analog se putea deduce

$$\begin{aligned}\overset{L}{\omega}{}^{\mu_1\ldots\mu_m;\,\gamma_1\ldots\gamma_n}_{\nu_1\ldots\nu_n;\,\delta_1\ldots\delta_m}&=(\varphi'{}^{\mu_1\ldots\mu_m;\,\beta'_1\ldots\beta'_n}_{\nu_1\ldots\nu_n;\,\alpha'_1\ldots\alpha'_m}\cdot)_{L'}\,\overset{L}{\omega}{}'{}^{\alpha'_1\ldots\alpha'_m;\,\varepsilon'_1\ldots\varepsilon'_n}_{\beta'_1\ldots\beta'_n;\,\varphi'_1\ldots\varphi'_m}\times\\&\times(\varphi'{}^{\varphi'_1\ldots\varphi'_m;\,\gamma_1\ldots\gamma_n}_{\varepsilon'_1\ldots\varepsilon'_n;\,\delta_1\ldots\delta_m}\cdot)_L-(\varphi'{}^{\mu_1\ldots\mu_m;\,\beta'_1\ldots\beta'_n}_{\nu_1\ldots\nu_n;\,\alpha'_1\ldots\alpha'_m}\cdot)_{L'}\,d_{MN}(\varphi'{}^{\alpha'_1\ldots\alpha'_m;\,\gamma_1\ldots\gamma_n}_{\beta'_1\ldots\beta'_n;\,\delta_1\ldots\delta_m}\cdot).\end{aligned}$$

Transformările formelor de conexiune local-afină formează un semigrup tare (cu unitate) și un grup în cazul cînd aceste forme sînt liniare.

Demonstrație. O dată cu relația precedentă este valabilă și următoarea:

$$\begin{aligned}\overset{L}{\omega}{}^{\mu'_1\ldots\mu'_m;\,\gamma'_1\ldots\gamma'_n}_{\nu'_1\ldots\nu'_n;\,\delta'_1\ldots\delta'_m}&=(\varphi'{}^{\mu'_1\ldots\mu'_m;\,\beta''_1\ldots\beta''_n}_{\nu'_1\ldots\nu'_n;\,\alpha''_1\ldots\alpha''_m}\cdot)_{L'}\,\overset{L}{\omega}{}''{}^{\alpha''_1\ldots\alpha''_m;\,\varepsilon''_1\ldots\varepsilon''_n}_{\beta''_1\ldots\beta''_n;\,\varphi''_1\ldots\varphi''_m}\times\\&\times(\varphi'{}^{\varphi''_1\ldots\varphi''_m;\,\gamma'_1\ldots\gamma'_n}_{\varepsilon''_1\ldots\varepsilon''_n;\,\delta'_1\ldots\delta'_m}\cdot)_L-(\varphi'{}^{\mu'_1\ldots\mu'_m;\,\beta''_1\ldots\beta''_n}_{\nu'_1\ldots\nu'_n;\,\alpha''_1\ldots\alpha''_m}\cdot)_{L'}\,d_{MN}(\varphi'{}^{\alpha''_1\ldots\alpha''_m;\,\gamma'_1\ldots\gamma'_n}_{\beta''_1\ldots\beta''_n;\,\delta'_1\ldots\delta'_m}\cdot),\end{aligned}$$

astfel că

$$\begin{aligned}\overset{L}{\omega}{}^{\mu_1\ldots\mu_m;\,\gamma_1\ldots\gamma_n}_{\nu_1\ldots\nu_n;\,\delta_1\ldots\delta_m}&=(\varphi'{}^{\mu_1\ldots\mu_m;\,\beta''_1\ldots\beta''_n}_{\nu_1\ldots\nu_n;\,\alpha''_1\ldots\alpha''_m}\cdot)_{L'}\,\overset{L}{\omega}{}''{}^{\alpha''_1\ldots\alpha''_m;\,\varepsilon''_1\ldots\varepsilon''_n}_{\beta''_1\ldots\beta''_n;\,\varphi''_1\ldots\varphi''_m}\times\\&\times(\varphi'{}^{\varphi''_1\ldots\varphi''_m;\,\gamma_1\ldots\gamma_n}_{\varepsilon''_1\ldots\varepsilon''_n;\,\delta_1\ldots\delta_m}\cdot)_L-(\varphi'{}^{\mu_1\ldots\mu_m;\,\beta''_1\ldots\beta''_n}_{\nu_1\ldots\nu_n;\,\alpha''_1\ldots\alpha''_m}\cdot)_{L'}\,d_{MN}(\varphi'{}^{\alpha''_1\ldots\alpha''_m;\,\varepsilon'_1\ldots\varepsilon'_n}_{\beta''_1\ldots\beta''_n;\,\varphi'_1\ldots\varphi'}\cdot)\\&(\varphi'{}^{\varphi'_1\ldots\varphi'_m;\,\gamma_1\ldots\gamma_n}_{\varepsilon'_1\ldots\varepsilon'_n;\,\delta_1\ldots\delta_m}\cdot)_L-(\varphi'{}^{\mu_1\ldots\mu_m;\,\beta'_1\ldots\beta'_n}_{\nu_1\ldots\nu_n;\,\alpha'_1\ldots\alpha'_n}\cdot)_{L'}\,d_{MN}(\varphi'{}^{\alpha'_1\ldots\alpha'_m;\,\gamma_1\ldots\gamma_n}_{\beta'_1\ldots\beta'_n;\,\delta_1\ldots\delta_m}\cdot).\end{aligned}$$

Dar

$$\begin{aligned}&d_{MN}(\varphi'{}^{\alpha''_1\ldots\alpha''_m;\,\varepsilon'_1\ldots\varepsilon'_n}_{\beta''_1\ldots\beta''_n;\,\varphi'_1\ldots\varphi'_m}\cdot)(\varphi'{}^{\varphi'_1\ldots\varphi'_m;\,\gamma_1\ldots\gamma_n}_{\varepsilon'_1\ldots\varepsilon'_n;\,\delta_1\ldots\delta_m}\cdot)_L+\\&+(\varphi'{}^{\alpha''_1\ldots\alpha''_m;\,\varepsilon'_1\ldots\varepsilon'_n}_{\beta''_1\ldots\beta''_n;\,\varphi'_1\ldots\varphi'_m}\cdot)_{L'}\,d_{MN}(\varphi'{}^{\varphi'_1\ldots\varphi'_m;\,\gamma_1\ldots\gamma_n}_{\varepsilon'_1\ldots\varepsilon'_n;\,\delta_1\ldots\delta_m}\cdot)_L=d_{MN}(\varphi'{}^{\alpha''_1\ldots\alpha''_m;\,\gamma_1\ldots\gamma_n}_{\beta''_1\ldots\beta''_n;\,\delta_1\ldots\delta_m}\cdot),\end{aligned}$$

pentru $L = M$, $L' = N$ sau $L = N$, $L' = M$, conform formulei de F-diferențiere și deci

$$\overset{L}{\omega}{}^{\mu_1\dots\mu_m;\,\gamma_1\dots\gamma_n}_{\nu_1\dots\nu_n;\,\delta_1\dots\delta_m} = (\varphi'^{\mu_1\dots\mu_m;\,\beta''_1\dots\beta''_n}_{\nu_1\dots\nu_n;\,\alpha''_1\dots\alpha''_m}\cdot)_{L'}\,\overset{L}{\omega}{}^{\alpha''_1\dots\alpha''_m;\,\varepsilon'_1\dots\varepsilon'_n}_{\beta''_1\dots\beta''_n;\,\varphi''_1\dots\varphi''_m}$$

$$(\varphi'^{\varphi''_1\dots\varphi''_m;\,\gamma_1\dots\gamma_n}_{\varepsilon''_1\dots\varepsilon''_n;\,\delta_1\dots\delta_m})_L - (\varphi'^{\mu_1\dots\mu_m;\,\beta''_1\dots\beta''_n}_{\nu_1\dots\nu_n;\,\alpha''_1\dots\alpha''_m}\cdot)_{L'}\,d_{MN}\,(\varphi'^{\alpha''_1\dots\alpha''_m;\,\gamma_1\dots\gamma_n}_{\beta''_1\dots\beta''_n;\,\delta_1\dots\delta_n}\cdot).$$

Cu aceasta este stabilită proprietatea de asociativitate. Proprietatea de distributivitate se demonstrează în mod asemănător. Este evidentă existența transformării unitate. În cazul formelor de conexiune liniare, rezultă și transformarea inversă :

$$\overset{L'}{\omega}{}^{\mu'_1\dots\mu'_m;\,\gamma'_1\dots\gamma'_n}_{\nu'_1\dots\nu'_n;\,\gamma'_1\dots\gamma'_m} = (\varphi'^{\mu'_1\dots\mu'_m;\,\beta_1\dots\beta_n}_{\nu'_1\dots\nu'_n;\,\alpha_1\dots\alpha_m}\cdot)_{L'}\,\overset{L}{\omega}{}^{\alpha_1\dots\alpha_m;\,\varepsilon_1\dots\varepsilon_n}_{\beta_1\dots\beta_n;\,\varphi_1\dots\varphi_m}\,\cdot$$

$$\cdot(\varphi'^{\varphi_1\dots\varphi_m;\,\gamma'_1\dots\gamma'_n}_{\varepsilon_1\dots\varepsilon_n;\,\delta'_1\dots\delta'_m}\cdot)_L - (\varphi'^{\mu'_1\dots\mu'_m;\,\beta_1\dots\beta_n}_{\nu'_1\dots\nu'_n;\,\alpha_1\dots\alpha_m}\cdot)_{L'}\,d_{MN}\,(\varphi'^{\alpha_1\dots\alpha_m;\,\gamma'_1\dots\gamma'_n}_{\beta_1\dots\beta_n;\,\delta'_1\dots\delta'_m}\cdot).$$

În cazul conexiunii infinitezimale afine asociativitatea și distributivitatea este evidentă. Proprietățile de inversabilitate și asociativitate rezultă din relațiile următoare :

$$\text{inversabilitate}\left\{\begin{aligned}\omega^i_j &= \frac{\partial x^i}{\partial x'^k}\frac{\partial x'^l}{\partial x^j}\,\omega'^k_l + \frac{\partial x^i}{\partial x'^k}\,d\,\frac{\partial x'^k}{\partial x^j} \Rightarrow\\ \omega'^i_j &= \frac{\partial x'^i}{\partial x^k}\frac{\partial x^l}{\partial x'^j}\,\omega^k_l + \frac{\partial x'^i}{\partial x^k}\,d\,\frac{\partial x^k}{\partial x'^j};\end{aligned}\right.$$

$$\text{asociativitate}\left\{\begin{aligned}\omega''^i_j &= \frac{\partial x''^i}{\partial x'^k}\frac{\partial x'^l}{\partial x''^j}\,\omega'^k_l + \frac{\partial x''^i}{\partial x'^k}\,d\,\frac{\partial x'^k}{\partial x''^j},\\ \omega''^i_j &= \frac{\partial x''^i}{\partial x^k}\frac{\partial x^l}{\partial x''^j}\,\omega^k_l + \frac{\partial x''^i}{\partial x^k}\,d\,\frac{\partial x^k}{\partial x''^j}.\end{aligned}\right.$$

4. *F-diferențiala absolută și paralelismul tensorial de tip (m, n).* F-diferențiala absolută între $M, N \in V_I$ relativă la $L \in V_I$ a unui tensor $T^{\alpha_1\dots\alpha_m}_{\beta_1\dots\beta_n}$ de tip (m, n) este

$$\underset{MN}{\overset{L}{D}}T^{\alpha_1\dots\alpha_m}_{\beta_1\dots\beta_n} = d_{MN}\,T^{\alpha_1\dots\alpha_m}_{\beta_1\dots\beta_n} - \overset{L}{\omega}{}^{\alpha_1\dots\alpha_m;\,\gamma_1\dots\gamma_n}_{\beta_1\dots\beta_n;\,\delta_1\dots\delta_m}\,(T^{\delta_1\dots\delta_m}_{\gamma_1\dots\gamma_n})_L.$$

$(L = M$ sau $N)$.

F- diferențiala absolută $\underset{MN}{\overset{L}{D}}\,T^{\alpha_1\dots\alpha_n}_{\beta_1\dots\beta_m}$ a unui tensor local-afin de tip (m, n) în cadrul unei conexiuni tensoriale de tip (m, n) între M, N se transformă conform relației

$$\underset{MN}{\overset{L}{D}}\,T^{\alpha'_1\dots\alpha'_m}_{\beta'_1\dots\beta'_n} = (\varphi'^{\alpha'_1\dots\alpha'_m;\,\gamma_1\dots\gamma_n}_{\beta'_1\dots\beta'_n;\,\delta_1\dots\delta_m}\cdot)_{L'}\,\underset{MN}{\overset{L}{D}}\,T^{\delta_1\dots\delta_m}_{\gamma_1\dots\gamma_n}$$

(unde dacă $L = M$, $L' = N$; $L = N$, $L' = M$).

Demonstrație. Se calculează

$$\overset{L}{\underset{MN}{D}}\, T^{\alpha'_1 \dots \alpha'_m}_{\beta'_1 \dots \beta'_n} - (\varphi'^{\alpha'_1 \dots \alpha'_m;\, \gamma_1 \dots \gamma_n}_{\beta'_1 \dots \beta'_n;\, \delta_1 \dots \delta_m} \cdot)_I\, \overset{L}{\underset{MN}{D}}\, T^{\delta_1 \dots \delta_m}_{\gamma_1 \dots \gamma_n} =$$

$$= (\varphi'^{\alpha'_1 \dots \alpha'_m;\, \gamma_1 \dots \gamma_n}_{\beta'_1 \dots \beta'_n;\, \delta_1 \dots \delta_m} \cdot)_N\, (T^{\delta_1 \dots \delta_m}_{\gamma_1 \dots \gamma_n} \cdot)_N - (\varphi'^{\alpha'_1 \dots \alpha'_m;\, \gamma_1 \dots \gamma_n}_{\beta'_1 \dots \beta'_n;\, \delta_1 \dots \delta_m} \cdot)_M\, (T^{\delta_1 \dots \delta_m}_{\gamma_1 \dots \gamma_n})_M -$$

$$- \omega'^{L\, \alpha'_1 \dots \alpha'_m;\, \gamma'_1 \dots \gamma'_n}_{\beta'_1 \dots \beta'_n;\, \delta'_1 \dots \delta'_m}\, (\varphi'^{\delta'_1 \dots \delta'_m;\, \varepsilon_1 \dots \varepsilon_n}_{\gamma'_1 \dots \gamma'_n;\, \varphi_1 \dots \varphi_m} \cdot)_L \cdot$$

$$\cdot (T^{\varphi_1 \dots \varphi_m}_{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_n})_L - (\varphi'^{\alpha'_1 \dots \alpha'_m;\, \gamma_1 \dots \gamma_n}_{\beta'_1 \dots \beta'_n;\, \delta_1 \dots \delta_m} \cdot)_I \Big[(T^{\delta_1 \dots \delta_m}_{\gamma_1 \dots \gamma_n})_N - (T^{\delta_1 \dots \delta_m}_{\gamma_1 \dots \gamma_n})_M -$$

$$- \overset{L}{\omega}{}^{\delta_1 \dots \delta_m;\, \varepsilon_1 \dots \varepsilon_n}_{\gamma_1 \dots \gamma_n;\, \varphi_1 \dots \varphi_m} (T^{\varphi_1 \dots \varphi_m}_{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_n})_L \Big] = (\varphi''^{\alpha'_1 \dots \alpha'_m;\, \gamma_1 \dots \gamma_n}_{\beta'_1 \dots \beta'_n;\, \delta_1 \dots \delta_m} \cdot)_{IN}\, (T^{\delta_1 \dots \delta_m}_{\gamma_1 \dots \gamma_n})_N +$$

$$+ (\varphi''^{\alpha'_1 \dots \alpha'_m;\, \gamma_1 \dots \gamma_n}_{\beta'_1 \dots \beta'_n;\, \delta_1 \dots \delta_m} \cdot)_{MI}\, (T^{\delta_1 \dots \delta_m}_{\gamma_1 \dots \gamma_n})_M + (\varphi'^{\alpha'_1 \dots \alpha'_m;\, \gamma_1 \dots \gamma_n}_{\beta'_1 \dots \beta'_n;\, \delta_1 \dots \delta_m} \cdot)_I\, \overset{L}{\omega}{}^{\delta_1 \dots \delta_m;\, \varepsilon_1 \dots \varepsilon_n}_{\gamma_1 \dots \gamma_n;\, \varphi_1 \dots \varphi_m} -$$

$$- \overset{L}{\omega}{}'^{\alpha'_1 \dots \alpha'_m;\, \gamma'_1 \dots \gamma'_n}_{\beta'_1 \dots \beta'_n;\, \delta'_1 \dots \delta'_m}\, (\varphi'^{\delta'_1 \dots \delta'_m;\, \varepsilon_1 \dots \varepsilon_n}_{\gamma'_1 \dots \gamma'_n;\, \varphi_1 \dots \varphi_m} \cdot)_L\, (T^{\varphi_1 \dots \varphi_m}_{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_n})_L =$$

$$= (\varphi''^{\alpha'_1 \dots \alpha'_m;\, \gamma_1 \dots \gamma_n}_{\beta'_1 \dots \beta'_n;\, \delta_1 \dots \delta_m} \cdot)_{IN}\, \delta_{LN} + (\varphi''^{\alpha'_1 \dots \alpha'_m;\, \gamma_1 \dots \gamma_n}_{\beta'_1 \dots \beta'_n;\, \delta_1 \dots \delta_m} \cdot)_{MI}\, \delta_{ML} +$$

$$+ \Big((\varphi'^{\alpha'_1 \dots \alpha'_m;\, \gamma_1 \dots \gamma_n}_{\beta'_1 \dots \beta'_n;\, \delta_1 \dots \delta_m} \cdot)_I\, \overset{L}{\omega}{}^{\delta_1 \dots \delta_m;\, \varepsilon_1 \dots \varepsilon_n}_{\gamma_1 \dots \gamma_n;\, \varphi_1 \dots \varphi_m} -$$

$$- \overset{L'}{\omega}{}^{\alpha'_1 \dots \alpha'_m;\, \gamma'_1 \dots \gamma'_n}_{\beta'_1 \dots \beta'_n;\, \delta'_1 \dots \delta'_m}\, (\varphi'^{\delta'_1 \dots \delta'_m;\, \varepsilon_1 \dots \varepsilon_n}_{\gamma'_1 \dots \gamma'_n;\, \varphi_1 \dots \varphi_m} \cdot)_L \Big) \cdot (T^{\varphi_1 \dots \varphi_m}_{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_n})_L,$$

unde $\delta_{LM} = 1$ dacă $L = M$; $= 0$ dacă $L = M$ etc.

Pentru $I = L'$ se obține condiția de transformare enunțată deoarece, în relația precedentă

$$(\varphi''^{\alpha'_1 \dots \alpha'_m;\, \gamma_1 \dots \gamma_n}_{\beta'_1 \dots \beta'_n;\, \delta_1 \dots \delta_m} \cdot)_{L'N}\, \delta_{LN} + (\varphi''^{\alpha'_1 \dots \alpha'_m;\, \gamma_1 \dots \gamma_n}_{\beta'_1 \dots \beta'_n;\, \delta_1 \dots \delta_m} \cdot)_{ML'}\, \delta_{ML} +$$

$$+ (\varphi'^{\alpha'_1 \dots \alpha'_m;\, \gamma_1 \dots \gamma_n}_{\beta'_1 \dots \beta'_n;\, \delta_1 \dots \delta_m} \cdot)_{L'}\, \overset{L}{\omega}{}^{\delta_1 \dots \delta_m;\, \varepsilon_1 \dots \varepsilon_n}_{\gamma_1 \dots \gamma_n;\, \varphi_1 \dots \varphi_m} -$$

$$- (\overset{L}{\omega}{}'^{\alpha'_1 \dots \alpha'_m;\, \gamma'_1 \dots \gamma'_n}_{\beta'_1 \dots \beta'_n;\, \delta'_1 \dots \delta'_m})\, (\varphi'^{\delta'_1 \dots \delta'_m;\, \varepsilon_1 \dots \varepsilon_n}_{\gamma'_1 \dots \gamma'_n;\, \varphi_1 \dots \varphi_m} \cdot)_L = 0$$

reprezintă condiția de conexiune tensorială de tip $(m\,,\, n)$.

Dacă $\underset{MN}{\overset{L}{D}}\, T^{\alpha_1 \dots \alpha_m}_{\beta_1 \dots \beta_n} = 0$ vom spune că $T^{\alpha_1 \dots \alpha_m}_{\beta_1 \dots \beta_n}$ este transportat prin paralelism tensorial de tip (m, n) din M în N şi relativ la N.

Dacă formele de conexiune sînt *1*- formele :

$$\overset{L}{\omega}{}^{\alpha_1 \dots \alpha_m;\, \gamma_1 \dots \gamma_n}_{\beta_1 \dots \beta_n;\, \delta_1 \dots \delta_m} = \overset{L}{\Gamma}{}^{\alpha_1 \dots \alpha_m;\, \gamma_1 \dots \gamma_n}_{\beta_1 \dots \beta_n;\, \delta_1 \dots \delta_m;\, \varepsilon}\, d_{MN}\, x^{\varepsilon},$$

vom introduce sensul de F- derivată tensorială de tip (m, n) prin formula

$$\underset{MN,\, \varepsilon}{\overset{L}{\nabla}}\, T^{\alpha_1 \dots \alpha_m}_{\beta_1 \dots \beta_n} = X_{x^{\varepsilon},-}\, T^{\alpha_1 \dots \alpha_m}_{\beta_1 \dots \beta_n} - \overset{L}{\Gamma}{}^{\alpha_1 \dots \alpha_m;\, \gamma_1 \dots \gamma_n}_{\beta_1 \dots \beta_n;\, \delta_1 \dots \delta_m;\, \varepsilon}\, (T^{\delta_1 \dots \delta_m}_{\gamma_1 \dots \gamma_n})_L$$

$$(d_{MN} = X_{x^{\varepsilon};d_{MN}x^{\varepsilon}} = X_{x^{\varepsilon},-}\, d_{MN}\, x^{\varepsilon};\ \underset{MN}{\overset{L}{D}} = \underset{MN\,\varepsilon}{\overset{L}{\nabla}}\, d_{MN}\, x^{\varepsilon}).$$

Într-un sens extensiv, dacă

$$\overset{L}{\omega}{}^{\alpha_1 \dots \alpha_m;\, \gamma_1 \dots \gamma_n}_{\beta_1 \dots \beta_n;\, \delta_1 \dots \delta_m} = \overset{L}{\Gamma}{}^{\alpha_1 \dots \alpha_m;\, \gamma_1 \dots \gamma_n;\, \varphi_1 \dots \varphi_n}_{\beta_1 \dots \beta_n;\, \delta_1 \dots \delta_m;\, \varepsilon_1 \dots \varepsilon_m}\, d_{MN}\, x^{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_m}_{\varphi_1 \dots \varphi_n},$$

atunci

$$\underset{MN}{\overset{L}{\nabla}} \binom{\varphi_1 \dots \varphi_n}{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_m}\, T^{\alpha_1 \dots \alpha_m}_{\beta_1 \dots \beta_n} = X_{x^{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_m}_{\varphi_1 \dots \varphi_n};-}\, T^{\alpha_1 \dots \alpha_m}_{\beta_1 \dots \beta_n} - \overset{L}{\Gamma}{}^{\alpha_1 \dots \alpha_m;\, \gamma_1 \dots \gamma_n;\, \varphi_1 \dots \varphi_n}_{\beta_1 \dots \beta_n;\, \delta_1 \dots \delta_m;\, \varepsilon_1 \dots \varepsilon_m}\, (T^{\delta_1 \dots \delta_m}_{\gamma_1 \dots \gamma_n})_L$$

etc.

5. *Paralelismul tensorilor complimentari.* Vom defini prin tensorul complimentar lui $T^{\alpha_1 \dots \alpha_m}_{\beta_1 \dots \beta_n}$, tensorul $T^{\beta_1 \dots \beta_n}_{\alpha_1 \dots \alpha_m}$ astfel că $I_{m+n} = T^{\alpha_1 \dots \alpha_m}_{\beta_1 \dots \beta_n} \times \times T^{\beta_1 \dots \beta_n}_{\alpha_1 \dots \alpha_m}$ să constituie un invariant. Este clar că legea de transformare pentru $T^{\beta_1 \dots \beta_n}_{\alpha_1 \dots \alpha_m}$ este $T^{\beta'_1 \dots \beta'_n}_{\alpha_1 \dots \alpha_m} = (\varphi'^{\beta'_1 \dots \beta'_n;\, \delta'_1 \dots \delta'_m}_{\alpha_1 \dots \alpha_m;\, \gamma_1 \dots \gamma_n}\,\cdot)\, T^{\gamma_1 \dots \gamma_n}_{\delta'_1 \dots \delta'_m}$.

Formînd F- diferenţiala invariantului I_{m+n} rezultă în cazul local-afin,

$$d_{MN}\, I_{m+n} = d_{MN}\, T^{\alpha_1 \dots \alpha_m}_{\beta_1 \dots \beta_n} (T^{\beta_1 \dots \beta_n}_{\alpha_1 \dots \alpha_m})_L + (T^{\alpha_1 \dots \alpha_m}_{\beta_1 \dots \beta_n})_{L'}\, d_{MN}\, T^{\beta_1 \dots \beta_n}_{\alpha_1 \dots \alpha_m} =$$

$$= d_{MN}\, T'^{\alpha'_1 \dots \alpha'_m}_{\beta'_1 \dots \beta'_n} (T^{\beta'_1 \dots \beta'_n}_{\alpha'_1 \dots \alpha'_n})_L + (T'^{\alpha'_1 \dots \alpha'_m}_{\beta'_1 \dots \beta'_n})_{L'}\, d_{MN}\, T^{\beta'_1 \dots \beta'_n}_{\alpha'_1 \dots \alpha'_n},$$

unde $L = M$, $L' = N$ sau $L = N$, $L' = M$.

În definitiv, notînd

$$\underset{MN}{\overset{L'}{D}}\, T^{\beta_1 \dots \beta_n}_{\alpha_1 \dots \alpha_m} = d_{MN}\, T^{\beta_1 \dots \beta_n}_{\alpha_1 \dots \alpha_m} + (T^{\gamma_1 \dots \gamma_n}_{\delta_1 \dots \delta_m})_L\, \overset{L'}{\omega}{}^{\partial_1 \dots \partial_m;\, \beta_1 \dots \beta_n}_{\gamma_1 \dots \gamma_n;\, \alpha_1 \dots \alpha_m}.$$

rezultă egalitatea

$$d_{MN}\, I_{m+n} = \underset{MN}{\overset{L'}{D}}\, T^{\alpha_1\dots\alpha_m}_{\beta_1\dots\beta_n} + \overset{L'}{\omega}{}^{\alpha_1\dots\alpha_m;\,\gamma_1\dots\gamma_n}_{\beta_1\dots\beta_n;\,\delta_1\dots\delta_m}\,(T^{\partial_1\dots\partial_m}_{\gamma_1\dots\gamma_n})_{L'}\,(T^{\beta_1\dots\beta_n}_{\alpha_1\dots\alpha_m})_L +$$

$$+ (T^{\alpha_1\dots\alpha_m}_{\beta_1\dots\beta_n})_{L'}\,(\underset{MN}{\overset{L'}{D}}\, T^{\beta_1\dots\beta_n}_{\alpha_1\dots\alpha_m} - (T^{\gamma_1\dots\gamma_n}_{\delta_1\dots\delta_m})_L\, \overset{L'}{\omega}{}^{\partial_1\dots\partial_m;\,\beta_1\dots\beta_n}_{\gamma_1\dots\gamma_n;\,\alpha_1\dots\alpha_m}) =$$

$$= \underset{MN}{\overset{L'}{D}}\, T^{\alpha^{\mathrm{I}}\dots\alpha_m}_{\beta_1\dots\beta_n}(T^{\beta_1\dots\beta_n}_{\alpha_1\dots\alpha_m})_L + (T^{\alpha_1\dots\alpha_m}_{\beta_1\dots\beta_n})_{L'}\, \underset{MN}{\overset{L'}{D}}\, T^{\beta_1\dots\beta_n}_{\alpha_1\dots\alpha_m} =$$

$$= \underset{MN}{\overset{L'}{D}}\, T^{\alpha'_1\dots\alpha'_m}_{\beta'_1\dots\beta'_n}(T^{\beta'_1\dots\beta'_n}_{\alpha'_1\dots\alpha'_m})_L + (T^{\alpha'_1\dots\alpha'_m}_{\beta'_1\dots\beta'_n})_{L'}\, \underset{MN}{\overset{L'}{D}}\, T^{\beta'_1\dots\beta'_n}_{\alpha'_1\dots\alpha'_m}.$$

$m + n$-formele de conexiune fiind presupuse liniare. În baza legii de transformare satisfăcută de $\underset{MN}{\overset{L'}{D}}\, T^{\alpha_1\dots\alpha_m}_{\beta_1\dots\beta_n}$ rezultă că $\underset{MN}{\overset{L'}{D}}\, T^{\alpha_1\dots\alpha_m}_{\beta_1\dots\beta_n}(T^{\beta_1\dots\beta_n}_{\alpha_1\dots\alpha_m})_L$ este un invariant şi deci şi $(T^{\alpha_1\dots\alpha_m}_{\beta_1\dots\beta_n})_{L'}\, \underset{MN}{\overset{L'}{D}}\, T^{\beta_1\dots\beta_n}_{\alpha_1\dots\alpha_m}$ un invariant astfel că

F- diferenţiala absolută $\underset{MN}{\overset{L}{D}}\, T^{\beta_1\dots\beta_n}_{\alpha_1\dots\alpha_m}$ a unui tensor de tip $(n,\ m)$ în cazul unei conexiuni tensoriale de tip $(m,\ n)$ se transformă conform legii

$$\underset{MN}{\overset{L}{D}}\, T^{\beta'_1\dots\beta'_n}_{\alpha'_1\dots\alpha'_m} = (\varphi'^{\beta'_1\dots\beta'_n;\,\gamma_1\dots\gamma_m}_{\alpha'_1\dots\alpha'_m;\,\partial_1\dots\partial_n}.)_L\, \underset{MN}{\overset{L}{D}}\, T^{\partial_1\dots\partial_n}_{\gamma_1\dots\gamma_m},$$

$$(\underset{MN}{\overset{L}{D}}\, T^{\beta'_1\dots\beta'_n}_{\alpha'_1\dots\alpha'_m} = d_{MN}\, T^{\beta'_1\dots\beta'_n}_{\alpha'_1\dots\alpha'_m} + (T^{\gamma_1\dots\gamma_n}_{\partial_1\dots\partial_m})_{L'}\, \overset{L}{\omega}{}^{\partial_1\dots\partial_m;\,\beta_1\dots\beta_n}_{\gamma_1\dots\gamma_n;\,\alpha_1\dots\alpha_m}).$$

Un tensor de tip $(n,\ m)$ este transportat prin *paralelism* din M, N relativ la L în cadrul unei conexiuni tensoriale de tip $(m,\ n)$ dacă

$$\underset{MN}{\overset{L}{D}}\, T^{\beta_1\dots\beta_n}_{\alpha_1\dots\alpha_m} = 0.$$

De asemenea se introduce F- derivata tensorială de tip $(n,\ m)$

$$\underset{MN\,\varepsilon}{\overset{L}{\nabla}}\, T^{\beta_1\dots\beta_n}_{\alpha_1\dots\alpha_m} = \underset{x^{\varepsilon},-}{X}\, T^{\beta_1\dots\beta_n}_{\alpha_1\dots\alpha_m} + (T^{\gamma_1\dots\gamma_n}_{\partial_1\dots\partial_m})_{L'}\, \underset{MN}{\overset{L}{\Gamma}}{}^{\partial_1\dots\partial_m;\,\beta_1\dots\beta_n}_{\gamma_1\dots\gamma_n;\,\alpha_1\dots\alpha_m}$$

şi cea în sens extensiv

$$\underset{MN}{\overset{L}{\nabla}}\,\binom{\varphi_1\dots\varphi_n}{\varepsilon_1\dots\varepsilon_m}\, T^{\beta_1\dots\beta_n}_{\alpha_1\dots\alpha_m} = X_{\binom{\varepsilon_1\dots\varepsilon_m}{\varphi_1\dots\varphi_n};\,-}\, T^{\beta_1\dots\beta_n}_{\alpha_1\dots\alpha_m} +$$

$$+ (T^{\gamma_1\dots\gamma_n}_{\partial_1\dots\partial_m})_{L'}\, \underset{MN}{\overset{L}{\Gamma}}{}^{\partial_1\dots\partial_m;\,\beta_1\dots\beta_n;\,\varphi_1\dots\varphi_n}_{\gamma_1\dots\gamma_n;\,\alpha_1\dots\alpha_m;\,\varepsilon_1\dots\varepsilon_m}.$$

6. *F-derivarea tensorială a tensorului de tip mixt* $(m+n,\ m+n)$. Fie tensorul $T^{\alpha_1 \ldots \alpha_m ;\, \gamma_1 \ldots \gamma_n}_{\beta_1 \ldots \beta_n ;\, \partial_1 \ldots \partial_m} = T^{\alpha_1 \ldots \alpha_m}_{\beta_1 \ldots \beta_n} T^{\gamma_1 \ldots \gamma_n}_{\partial_1 \ldots \partial_m}$ în cadrul unei conexiuni tensoriale de tip (m, n). Se calculează în ipoteza local-afinităţii

$$d_{MN} T^{\alpha_1 \ldots \alpha_m ;\, \gamma_1 \ldots \gamma_n}_{\beta_1 \ldots \beta_n ;\, \partial_1 \ldots \partial_m} = d_{MN} T^{\alpha_1 \ldots \alpha_m}_{\beta_1 \ldots \beta_n} (T^{\gamma_1 \ldots \gamma_n}_{\partial_1 \ldots \partial_m})_L + (T^{\alpha_1 \ldots \alpha_m}_{\beta_1 \ldots \beta_n})_{L'} d_{MN} T^{\gamma_1 \ldots \gamma_n}_{\partial_1 \ldots \partial_m} =$$

$$= \overset{L'}{\underset{MN}{D}} T^{\alpha_1 \ldots \alpha_m}_{\beta_1 \ldots \beta_n} (T^{\gamma_1 \ldots \gamma_n}_{\partial_1 \ldots \partial_m})_L + \overset{L'}{\omega}{}^{\alpha_1 \ldots \alpha_m ;\, \varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n}_{\beta_1 \ldots \beta_n ;\, \varphi_1 \ldots \varphi_m} (T^{\varphi_1 \ldots \varphi_m}_{\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n})_{L'} (T^{\gamma_1 \ldots \gamma_n}_{\partial_1 \ldots \partial_m})_L +$$

$$+ (T^{\alpha_1 \ldots \alpha_m}_{\beta_1 \ldots \beta_n})_{L'} \overset{L'}{\underset{MN}{D}} T^{\gamma_1 \ldots \gamma_n}_{\partial_1 \ldots \partial_m} - (T^{\alpha_1 \ldots \alpha_m}_{\beta_1 \ldots \beta_n})_{L'} (T^{\varphi_1 \ldots \varphi_n}_{\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_m})_L \overset{L'}{\omega}{}^{\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_m ;\, \gamma_1 \ldots \gamma_n}_{\varphi_1 \ldots \varphi_n ;\, \partial_1 \ldots \partial_m} =$$

$$= \overset{L}{\underset{MN}{D}} T^{\alpha_1 \ldots \alpha_m}_{\beta_1 \ldots \beta_n} (T^{\gamma_1 \ldots \gamma_n}_{\partial_1 \ldots \partial_m})_L + \overset{L}{\omega}{}^{\alpha_1 \ldots \alpha_m ;\, \varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n}_{\beta_1 \ldots \beta_n ;\, \varphi_1 \ldots \varphi_m} (T^{\varphi_1 \ldots \varphi_m}_{\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n})_L (T^{\gamma_1 \ldots \gamma_n}_{\partial_1 \ldots \partial_m}) +$$

$$+ (T^{\alpha_1 \ldots \alpha_m}_{\beta_1 \ldots \beta_n})_{L'} \overset{L}{\underset{MN}{D}} T^{\gamma_1 \ldots \gamma_n}_{\partial_1 \ldots \partial_m} - (T^{\alpha_1 \ldots \alpha_m}_{\beta_1 \ldots \beta_n})_{L'} (T^{\varphi_1 \ldots \varphi_n}_{\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_m})_{L'} \overset{L}{\omega}{}^{\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_m ;\, \gamma_1 \ldots \gamma_n}_{\varphi_1 \ldots \varphi_n ;\, \partial_1 \ldots \partial_m}$$

$(L = M,\ L' = N$ sau $L = N,\ L' = M)$.

Vom defini F- diferenţiala cvasi-absolută a tensorului mixt de tip $(m+n,\ m+n)$ prin formula

$$\overset{L \times L}{\underset{MN}{D}} T^{\alpha_1 \ldots \alpha_m ;\, \gamma_1 \ldots \gamma_n}_{\beta_1 \ldots \beta_n ;\, \partial_1 \ldots \partial_m} = d_{MN} T^{\alpha_1 \ldots \alpha_m ;\, \gamma_1 \ldots \gamma_n}_{\beta_1 \ldots \beta_n ;\, \partial_1 \ldots \partial_m} - \overset{L'}{\omega}{}^{\alpha_1 \ldots \alpha_m ;\, \varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n}_{\beta_1 \ldots \beta_n ;\, \varphi_1 \ldots \varphi_m} (T^{\varphi_1 \ldots \varphi_m}_{\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n})_{L'} \cdot$$

$$\cdot (T^{\gamma_1 \ldots \gamma_n}_{\partial_1 \ldots \partial_m})_L + (T^{\alpha_1 \ldots \alpha_m}_{\beta_1 \ldots \beta_n})_{L'} (T^{\varphi_1 \ldots \varphi_n}_{\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_m})_L \overset{L'}{\omega}{}^{\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_m ;\, \gamma_1 \ldots \gamma_n}_{\varphi_1 \ldots \varphi_n ;\, \partial_1 \ldots \partial_m} =$$

$$= \overset{L'}{\underset{MN}{D}} T^{\alpha_1 \ldots \alpha_m}_{\beta_1 \ldots \beta_n} (T^{\gamma_1 \ldots \gamma_n}_{\partial_1 \ldots \partial_m})_L + (T^{\alpha_1 \ldots \alpha_m}_{\beta_1 \ldots \beta_n})_{L'} \overset{L'}{\underset{MN}{D}} T^{\gamma_1 \ldots \gamma_n}_{\partial_1 \ldots \partial_m},$$

iar prin F- diferenţiala absolută a aceluiaşi tensor, vom înţelege mărimea

$$\overset{LL}{\underset{MN}{D}} T^{\alpha_1 \ldots \alpha_m ;\, \gamma_1 \ldots \gamma_n}_{\beta_1 \ldots \beta_n ;\, \partial_1 \ldots \partial_m} = d_{MN} T^{\alpha_1 \ldots \alpha_m ;\, \gamma_1 \ldots \gamma_n}_{\beta_1 \ldots \beta_n ;\, \partial_1 \ldots \partial_m} -$$

$$- \overset{L}{\omega}{}^{\alpha_1 \ldots \alpha_m ;\, \varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n}_{\beta_1 \ldots \beta_n ;\, \varphi_1 \ldots \varphi_m} (T^{\varphi_1 \ldots \varphi_m ;\, \gamma_1 \ldots \gamma_n}_{\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n ;\, \partial_1 \ldots \partial_m})_L +$$

$$+ (T^{\alpha_1 \ldots \alpha_m ;\, \varphi_1 \ldots \varphi_n}_{\beta_1 \ldots \beta_n ;\, \varepsilon_1 \ldots \varepsilon_m})_{L'} \overset{L}{\omega}{}^{\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_m ;\, \gamma_1 \ldots \gamma_n}_{\varphi_1 \ldots \varphi_n ;\, \partial_1 \ldots \partial_m} = \overset{L}{\underset{MN}{D}} T^{\alpha_1 \ldots \alpha_m}_{\beta_1 \ldots \beta_n} (T^{\gamma_1 \ldots \gamma_n}_{\partial_1 \ldots \partial_m})_L +$$

$$+ (T^{\alpha_1 \ldots \alpha_m}_{\beta_1 \ldots \beta_n})_{L'} \overset{L}{\underset{MN}{D}} T^{\gamma_1 \ldots \gamma_n}_{\partial_1 \ldots \partial_m}.$$

F-diferențiala absolută a tensorului mixt de tip $(m+n,\ m+n)$ în cadrul unei conexiuni tensoriale (local afine) de tip $(m,\ n)$ se transformă conform legii

$$\overset{LL}{\underset{MN}{D}}\, T^{\alpha'_1\dots\alpha'_m:\,\gamma'_1\dots\gamma'_n}_{\beta'_1\dots\beta'_n:\,\partial'_1\dots\partial'_m} =$$

$$=(\varphi'^{\alpha'_1\dots\alpha'_m:\,\varepsilon_1\dots\varepsilon_n}_{\beta'_1\dots\beta'_n:\,\varphi_1\dots\varphi_m})_{L'}(\varphi'^{\gamma'_1\dots\gamma'_n:\,\mu_1\dots\mu_m}_{\partial'_1\dots\partial'_m:\,\nu_1\dots\nu_n})_L\, \overset{LL}{\underset{MN}{D}}\, T^{\varphi_1\dots\varphi_m:\,\nu_1\dots\nu_n}_{\varepsilon_1\dots\varepsilon_n:\,\mu_1\dots\mu_m}.$$

Demonstrație. $\overset{LL}{\underset{MN}{D}}\, T^{\alpha'_1\dots\alpha'_m:\,\gamma'_1\dots\gamma'_n}_{\beta'_1\dots\beta'_n:\,\partial'_1\dots\partial'_m} = \overset{L}{\underset{MN}{D}}\, T^{\alpha'_1\dots\alpha'_m}_{\beta'_1\dots\beta'_n}(T^{\gamma'_1\dots\gamma'_n}_{\partial'_1\dots\partial'_m})_{L'} +$

$$+(T^{\alpha'_1\dots\alpha'_m}_{\beta'_1\dots\beta'_n})_{L'}\, \overset{L}{\underset{MN}{D}}\, T^{\gamma'_1\dots\gamma'_n}_{\partial'_1\dots\partial'_m} = (\varphi'^{\alpha'_1\dots\alpha'_m:\,\varepsilon_1\dots\varepsilon_n}_{\beta'_1\dots\beta'_n:\,\varphi_1\dots\varphi_m}\cdot)_L\, \overset{L}{\underset{MN}{D}}\, T^{\varphi_1\dots\varphi_m}_{\varepsilon_1\dots\varepsilon_n}\cdot$$

$$\cdot(\varphi'^{\gamma'_1\dots\gamma'_n;\,\mu_1\dots\mu_m}_{\partial'_1\dots\partial'_m;\,\nu_1\dots\nu_n}\cdot)_L(T^{\nu_1\dots\nu_n}_{\mu_1\dots\mu_m})_L + (\varphi'^{\alpha'_1\dots\alpha'_m:\,\varepsilon_1\dots\varepsilon_n}_{\beta'_1\dots\beta'_n:\,\varphi_1\dots\varphi_m}\cdot)_{L'}(T^{\varphi_1\dots\varphi_m}_{\varepsilon_1\dots\varepsilon_n})_{L'}\cdot$$

$$\cdot(\varphi'^{\gamma'_1\dots\gamma'_n:\,\mu_1\dots\mu_m}_{\partial'_1\dots\partial'_m:\,\nu_1\dots\nu_n}\cdot)_L\, \overset{L}{\underset{MN}{D}}\, T^{\nu_1\dots\nu_n}_{\mu_1\dots\mu_m}.$$

F- diferențiala cvasi-absolută se transformă ca suma a doi tensori în L, respectiv L′.

Demonstrația acestei afirmații rezultă din expresia F-diferențialei cvasi-absolute obținute mai sus.

Un tensor de tip mixt $(m+n,\ m+n)$ în cadrul unei conexiuni tensoriale de tip $(m,\ n)$ este transportat prin paralelism tensorial din M în N relativ la L dacă

$$\overset{LL}{\underset{MN}{D}}\, T^{\alpha_1\dots\alpha_m:\,\gamma_1\dots\gamma_n}_{\beta_1\dots\beta_n:\,\partial_1\dots\partial_m} = 0$$

și prin cvasi-paralelism dacă

$$\overset{L\times L}{\underset{MN}{D}}\, T^{\alpha_1\dots\alpha_m:\,\gamma_1\dots\gamma_n}_{\beta_1\dots\beta_n:\,\partial_1\dots\partial_m} = 0.$$

În mod analog ca în cazurile anterioare se definește F-derivata tensorială

$$\overset{LL}{\underset{MN}{\nabla}}\, T^{\alpha_1\dots\alpha_m:\,\gamma_1\dots\gamma_n}_{\beta_1\dots\beta_n:\,\partial_1\dots\partial_m} = X_{x^{\varepsilon},-}\, T^{\alpha_1\dots\alpha_m:\,\gamma_1\dots\gamma_n}_{\beta_1\dots\beta_n:\,\partial_1\dots\partial_m} -$$

$$-\overset{L}{\Gamma}{}^{\alpha_1\dots\alpha_m:\,\varepsilon_1\dots\varepsilon_n}_{\beta_1\dots\beta_n:\,\varphi_1\dots\varphi_m}(T^{\varphi_1\dots\varphi_m:\,\gamma_1\dots\gamma_n}_{\varepsilon_1\dots\varepsilon_n:\,\partial_1\dots\partial_m})_L + (T^{\alpha_1\dots\alpha_m:\,\varphi_1\dots\varphi_n}_{\beta_1\dots\beta_n:\,\varepsilon_1\dots\varepsilon_m})_{L'}\overset{L}{\Gamma}{}^{\varepsilon_1\dots\varepsilon_m:\,\gamma_1\dots\gamma_n}_{\varphi_1\dots\varphi_n:\,\partial_1\dots\partial_m}.$$

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM KÖZPONTI KÖNYVTÁRA 1848

7. *F- derivarea tensorială a tensorilor de tip mixt pe un cîmp multipunctual.*

Să considerăm funcția $f\,([x^{\alpha_1}_{M_1}], \dots, [x^{\alpha_s}_{M_s}])$, $\alpha_1, \dots, \alpha_s \in I$ unde $x^{\alpha_i}_{M_i}$, $i = 1, \dots s$ reprezintă elementele de coordonate $x^{1}_{M_i}$, $x^{2}_{M_i}$, în ... $M_i \in V_I$.

Vom defini F- diferențiala pe cîmpul multipunctual $M_1 \times \dots \times M_s$ a funcției f — din $M_1 \dots M_s$ în $N_1 \dots N_s$ prin relația

$$d_{(M_1 \dots M_s)(N_1 \dots N_s)} f = f\,([x^{\alpha_1}_{M_1} + d_{M_1 N_1} x^{\alpha_1}], \dots, [x^{\alpha_s}_{M_s} + d_{M_s N_s} x^{\alpha_s}]) -$$
$$- f\,([x^{\alpha_1}_{M_1}], \dots, [x^{\alpha_s}_{M_s}]).$$

F- diferențiala funcției f pe un cîmp multipunctual de multiplicitate s din $(M_1 \dots M_s)$ în $(N \dots N_s)$ satisface condiția

$$d_{(M_1 \dots M_s)(N_1 \dots N_s)} f = d_{M_1 N_1} f_{(M_1 \dots M_s)} + d_{M_2 N_2} f_{(N_1 M_2 \dots M_s)} + \dots +$$
$$+ d_{M_s N_s} f_{(N_1 \dots N_{s-1} M_s)}.$$

Demonstrație. Această relație se stabilește printr-un procedeu analog ca la I, § 3.5. Astfel, pentru $s = 2$ avem

$$d_{(M_1 M_2)(N_1 N_2)} f = f\,([x^{\alpha_1}_{M_1} + d_{M_1 N_1} x^{\alpha_1}], [x^{\alpha_2}_{M_2} + d_{M_2 N_2} x^{\alpha_2}]) -$$
$$- f\,([x^{\alpha_1}_{M_1}], [x^{\alpha_2}_{M_2}]) - f\,([x^{\alpha_1}_{M_1} + d_{M_1 N_1} x^{\alpha_1}], [x^{\alpha_2}_{M_2}]) + f\,([x^{\alpha_1}_{M_1} +$$
$$+ d_{M_1 N_1} x^{\alpha_1}], [x^{\alpha_2}_{M_2}]) = d_{M_1 N_1} f\,([x^{\alpha_1}_{M_1}], [x^{\alpha_2}_{M_2}]) + d_{M_2 N_2} f\,([x^{\alpha_1}_{N_1}], [x^{\alpha_2}_{M_2}]) \quad \text{etc.}$$

Fie tensorul mixt

$$T\,({}^{\alpha_1 \dots \alpha_m}_{\beta_1 \dots \beta_n})_{M_1}\,({}^{\gamma_1 \dots \gamma_n}_{\partial_1 \dots \partial_m})_{M_2} = (T^{\alpha_1 \dots \alpha_m}_{\beta_1 \dots \beta_n})_{M_1}\,(T^{\gamma_1 \dots \gamma_n}_{\partial_1 \dots \partial_m})_{M_2}$$

pe un cîmp de multiplicitate 2. Se deduce ca în cazul aliniatului precedent

$$d_{(M_1 N_1)(M_2 N_2)}\, T\,({}^{\alpha_1 \dots \alpha_m}_{\beta_1 \dots \beta_n})_{M_1}\,({}^{\gamma_1 \dots \gamma_n}_{\partial_1 \dots \partial_m})_{M_2} = d_{M_1 N_1} T^{\alpha_1 \dots \alpha_m}_{\beta_1 \dots \beta_n}\,(T^{\gamma_1 \dots \gamma_n}_{\partial_1 \dots \partial_m})_{L_2} +$$
$$+ (T^{\alpha_1 \dots \alpha_m}_{\beta_1 \dots \beta_n})_{L'_1}\, d_{M_2 N_2}\, T^{\gamma_1 \dots \gamma_n}_{\partial_1 \dots \partial_m},$$

unde $L_2 = M_2$, $L'_1 = N_1$ sau $L_2 = N_2$, $L'_1 = M_1$. Aplicînd formula F-diferențialei absolute relația se mai scrie

$$d_{(M_1 N_1),(M_2 N_2)}\, T\,({}^{\alpha_1 \dots \alpha_m}_{\beta_1 \dots \beta_n})_{M_1}\,({}^{\gamma_1 \dots \gamma_n}_{\partial_1 \dots \partial_m})_{M_2} = \overset{I}{\underset{M_1 N_1}{D}}\,(T^{\alpha_1 \dots \alpha_m}_{\beta_1 \dots \beta_n})_{M_1}\,(T^{\gamma_1 \dots \gamma_n}_{\partial_1 \dots \partial_m})_{L_2} +$$
$$+ \overset{I}{\underset{M_1 N_1}{\omega}}{}^{\alpha_1 \dots \alpha_m;\, \varepsilon_1 \dots \varepsilon_n}_{\beta_1 \dots \beta_n;\, \varphi_1 \dots \varphi_m}\,(T^{\varphi_1 \dots \varphi_m}_{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_n})_I\,(T^{\gamma_1 \dots \gamma_n}_{\partial_1 \dots \partial_m})_{L_2} +$$
$$+ (T^{\varepsilon_1 \dots \alpha_m}_{\beta_1 \dots \beta_n})_{L'_1}\,\overset{K}{\underset{M_2 N_2}{D}}\, T^{\gamma_1 \dots \gamma_n}_{\partial_1 \dots \partial_m} - (T^{\alpha_1 \dots \alpha_m}_{\beta_1 \dots \beta_n})_{L'_1}\,(T^{\varphi_1 \dots \varphi_n}_{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_m})_{K'}\,\overset{K}{\underset{M_2 N_2}{\omega}}{}^{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_m;\, \gamma_1 \dots \gamma_n}_{\varphi_1 \dots \varphi_n;\, \partial_1 \dots \partial_m}$$

unde $I = M_1$ sau N_1, $K = M_2$, $K' = N_2$ sau $K = N_2$, $K' = M_2$.

În definitiv

$$\overset{IK}{\underset{(M_1N_1).\,(M_2N_2)}{D}} T\binom{\alpha_1\ldots\alpha_m}{\beta_1\ldots\beta_n}_{M_1}\binom{\gamma_1\ldots\gamma_n}{\partial_1\ldots\partial_m}_{M_2} = d_{(M_1N_1)\,(M_2N_2)}\, T\binom{\alpha_1\ldots\alpha_m}{\beta_1\ldots\beta_n}_{M_1}\binom{\gamma_1\ldots\gamma_n}{\partial_1\ldots\partial_m}_{M_2} -$$

$$- \overset{I}{\underset{M_1N_1}{\omega}}{}^{\alpha_1\ldots\alpha_m;\,\varepsilon_1\ldots\varepsilon_n}_{\beta_1\ldots\beta_n;\,\varphi_1\ldots\varphi_m} (T^{\varphi_1\ldots\varphi_m}_{\varepsilon_1\ldots\varepsilon_n})_I\,(T^{\gamma_1\ldots\gamma_n}_{\partial_1\ldots\partial_m})_{L_2} + T\binom{\alpha_1\ldots\alpha_m}{\beta_1\ldots\beta_n}_{L'_1}(T^{\varphi_1\ldots\varphi_n}_{\varepsilon_1\ldots\varepsilon_m})_{K'}\cdot$$

$$\cdot \overset{K}{\underset{M_2N_2}{\omega}}{}^{\varepsilon_1\ldots\varepsilon_m:\,\gamma_1\ldots\gamma_n}_{\varphi_1\ldots\varphi_n:\,\partial_1\ldots\partial_m} = \overset{I}{\underset{M_1N_1}{D}} (T^{\alpha_1\ldots\alpha_m}_{\beta_1\ldots\beta_n})_{M_1}\,(T^{\gamma_1\ldots\gamma_n}_{\partial_1\ldots\partial_m})_{L_2} +$$

$$+ (T^{\alpha_1\ldots\alpha_n}_{\beta_1\ldots\beta_n})_{L'_1}\,\overset{K}{\underset{M_2N_2}{D}}\, T^{\gamma_1\ldots\gamma_n}_{\partial_1\ldots\partial_m},$$

reprezintă F- diferențiala cvasi-absolută a tensorului de tip mixt pe (m_1, m_2) de la M_1, M_2 la N_1, N_2 în raport cu I, K. Pentru $K = L_2$, $I = L'_1$ devine F-diferențiala absolută

$$\overset{L_1L_2}{\underset{(M_1N_1)\,(M_2N_2)}{D}} T\binom{\alpha_1\ldots\alpha_m}{\beta_1\ldots\beta_n}_{M_1}\binom{\gamma_1\ldots\gamma_n}{\partial_1\ldots\partial_m}_{M_2} = d_{(M_1N_1)\,(M_2N_2)}\, T\binom{\alpha_1\ldots\alpha_m}{\beta_1\ldots\beta_n}_{M_1}\binom{\gamma_1\ldots\gamma_n}{\partial_1\ldots\partial_m}_{M_2}$$

$$- \overset{L_1}{\underset{M_1N_1}{\omega}}{}^{\alpha_1\ldots\alpha_m;\,\varepsilon_1\ldots\varepsilon_n}_{\beta_1\ldots\beta_n;\,\varphi_1\ldots\varphi_m} T\binom{\varphi_1\ldots\varphi_m}{\varepsilon_1\ldots\varepsilon_n}_{L_1}\binom{\gamma_1\ldots\gamma_n}{\partial_1\ldots\partial_m}_{L_2} + T\binom{\alpha_1\ldots\alpha_m}{\beta_1\ldots\beta_n}_{L'_1}\binom{\varphi_1\ldots\varphi_n}{\varepsilon_1\ldots\varepsilon_m}_{L'_2}\cdot$$

$$\cdot \overset{L_2}{\underset{M_2N_2}{\omega}}{}^{\varepsilon_1\ldots\varepsilon_m;\,\gamma_1\ldots\gamma_n}_{\varphi_1\ldots\varphi_n;\,\partial_1\ldots\partial_m}$$

care se transformă astfel

$$\overset{L'_1L_2}{\underset{(M_1N_1)\,(M_2N_2)}{D}} T'\binom{\alpha'_1\ldots\alpha'_m}{\beta_1\ldots\beta_n}_{M_1}\binom{\gamma'_1\ldots\gamma'_n}{\partial_1\ldots\partial_m}_{M_2} = (\varphi'^{\alpha'_1\ldots\alpha'_m;\,\varepsilon_1\ldots\varepsilon_n}_{\beta_1\ldots\beta_n;\,\varphi'_1\ldots\varphi'_m}\cdot)_{L'_1}(\varphi'^{\gamma'_1\ldots\gamma'_n;\,\mu_1\ldots\mu_m}_{\partial_1\ldots\partial_m;\,\nu'_1\ldots\nu'_n}\cdot)_{L_2}\cdot$$

$$\overset{L_1}{\underset{M_1N_1}{D}}\, T\binom{\varphi'_1\ldots\varphi'_m}{\varepsilon_1\ldots\varepsilon_n}_{M_1}(T^{\nu'_1\ldots\nu'_n}_{\mu_1\ldots\mu_m})_{L_2} +$$

$$+ (\varphi'^{\alpha'_1\ldots\alpha'_m;\,\varepsilon_1\ldots\varepsilon_n}_{\beta_1\ldots\beta_n;\,\varphi'_1\ldots\varphi'_m}\cdot)_{L_1}(\varphi'^{\gamma'_1\ldots\gamma'_n;\,\mu_1\ldots\mu_m}_{\partial_1\ldots\partial_m;\,\nu'_1\ldots\nu'_n}\cdot)_{L_2}\,\overset{L_2}{\underset{M_2N_2}{D}}\, T^{\nu'_1\ldots\nu'_m}_{\mu_1\ldots\mu_n}.$$

Relația se demonstrează ca în cazul de la aliniatul precedent. Transportul paralel al tensorilor pe $(M_1\ M_2)$ se definește prin condiția de anulare a acestei F- diferențiale absolute.

8. *Conexiuni statistice.* Fie $T\binom{\alpha}{\beta}(M_1) = (T^{\alpha_1\ldots\alpha_m}_{\beta_1\ldots\beta_n})_{M_1}$ şi $T\binom{\gamma}{\delta}(M_2) = (T^{\gamma_1\ldots\gamma_n}_{\partial_1\ldots\partial_m})_{M_2}$ tensori de tip complimentar (m, n) şi (n, m) definiți în $M_1 \in V_I$, $M_2 \in V_I$. (I fiind o mulțime de indici cel mult numărabilă sau finită). Vom nota

$$T\binom{\alpha}{\beta}\binom{\gamma}{\delta}(M_1,\ M_2) = T\binom{\alpha}{\beta}(M_1)\ T\binom{\gamma}{\delta}(M_2).$$

Tensorii $T\binom{\alpha}{\beta}\binom{\gamma}{\delta}(M_1, M_2)$ verifică relaţia

$$T\binom{\varepsilon}{\underline{\varphi}}\binom{\varphi}{\underline{\varepsilon}}(M_2, M_2)\,T\binom{\alpha}{\beta}\binom{\gamma}{\delta}(M_1, M_3) = T\binom{\alpha}{\beta}\binom{\varepsilon}{\underline{\varphi}}(M_1, M_2)\,T\binom{\varphi}{\varepsilon}\binom{\gamma}{\delta}(M_2, M_3), \quad (\mathrm{I})$$

în care indicii subliniaţi au un caracter operant (II § 4.3). Prin M_1, M_2, M_3 se subînţeleg coordonatele respective,

$$\varkappa_1^i,\ \varkappa_2^i,\ x_3^i,\ i \in I.$$

Fie condiţia de transport paralel pentru o conexiune tensorială de tip (m, n) definită pe V_I:

$$\begin{aligned} d_{(M_1N_1)\,(M_2N_2)}\,T\binom{\alpha}{\beta}\binom{\gamma}{\delta}(M_1, M_2) = {} & \overset{L_1}{\underset{M_1N_1}{\omega}}\binom{\alpha}{\beta}\binom{\varepsilon}{\underline{\varphi}}\,T\binom{\varphi}{\underline{\varepsilon}}\binom{\gamma}{\delta}(L_1, L_2) - \\ & - T\binom{\alpha}{\beta}\binom{\varphi}{\underline{\varepsilon}}(L_1', L_2')\overset{L_2}{\underset{M_2N_2}{\omega}}\binom{\varepsilon}{\underline{\varphi}}\binom{\gamma}{\delta}, \end{aligned} \quad (\mathrm{II})$$

unde $\omega\binom{\alpha}{\beta}\binom{\varepsilon}{\varphi} = \omega^{\alpha_1 \ldots \alpha_m;\, \varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n}_{\beta_1 \ldots \beta_n;\, \varphi_1 \ldots \varphi_m}$ sînt forme în sens restrîns (funcţii sau constante multiplicative).

Relaţiile I, II permit o interpretare procesuală, respectiv o geometrizare a unor procese discontinui, denumite în cele ce urmează procese elementare asociate tensorului $T\binom{\alpha}{\beta}\binom{\gamma}{\delta}$ pe V_I pentru o conexiune de tip (m, n).

Fie tensorul sumă:

$$\mathfrak{T}\binom{\alpha}{\beta}\binom{\gamma}{\delta}(M_1, M_2) = \sum_{\genfrac{[}{]}{0pt}{}{\varepsilon}{\varphi}} T^{\genfrac{[}{]}{0pt}{}{\varepsilon}{\varphi}}\binom{\alpha}{\beta}(M_1)\,T_{\genfrac{[}{]}{0pt}{}{\varepsilon}{\varphi}}\binom{\gamma}{\delta}(M_2)$$

$\genfrac{[}{]}{0pt}{}{\varepsilon}{\varphi} = \genfrac{[}{]}{0pt}{}{\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n}{\varphi_1 \ldots \varphi_m}$ fiind sisteme de indici iar $T^{\genfrac{[}{]}{0pt}{}{\varepsilon}{\varphi}}$, $T_{\genfrac{[}{]}{0pt}{}{\varepsilon}{\varphi}}$ tensori complimentari de tip (m, n) respectiv (n, m) în număr de I^n. I^m. Tensorul $\mathfrak{T}$ va satisface ecuaţiile de tip I, II şi i se asociază procese denumite în cele ce urmează compuse.

Vom nota mărimile

$$\mathfrak{T}\binom{\alpha}{\beta}\binom{\gamma}{\delta}(M_1, M_1) = \sum_{\genfrac{[}{]}{0pt}{}{\varepsilon}{\varphi}} T^{\genfrac{[}{]}{0pt}{}{\varepsilon}{\varphi}}\binom{\alpha}{\beta}(M_1)\,T_{\genfrac{[}{]}{0pt}{}{\varepsilon}{\varphi}}\binom{\gamma}{\delta}(M_2) = \Delta\binom{\alpha}{\beta}\binom{\gamma}{\delta}_{M_1}$$

(caracteristica de trecere locală)

$$\sum_{\genfrac{[}{]}{0pt}{}{\gamma}{\delta}} \mathfrak{T}\binom{\alpha}{\beta}\binom{\gamma}{\delta}(M_1, M_2) = \sum_{\genfrac{[}{]}{0pt}{}{\gamma}{\delta}} \sum_{\genfrac{[}{]}{0pt}{}{\varepsilon}{\varphi}} T^{\genfrac{[}{]}{0pt}{}{\varepsilon}{\varphi}}\binom{\alpha}{\beta}(M_1)\,T_{\genfrac{[}{]}{0pt}{}{\varepsilon}{\varphi}}\binom{\gamma}{\delta}(M_2) = \Delta^{\alpha}_{\beta M_1 M_2}$$

(caracteristica de trecere totală) servind la caracterizarea proceselor asociate.

În condiţii destul de generale, procesele asociate compuse constituie o extindere ale unor procese stohastice discontinui cum ar fi acelea descrise de lanţurile Markov multiple pentru o mulţime dată de stări şi chiar pentru procese cu legături complete în sens larg, în sensul dat de O. Onicescu, Gh. Mihoc [8]—[11] şi apoi de alţii [4]. Într-un anumit sens relaţiile (I) constituie extinderea relaţiilor funcţionale ale lanţurilor Markov (stabilite în cazul lanţurilor multiple de către O. Onicescu) iar relaţiile (II) reprezintă extinderea relaţiilor de tip Chapman-Kolmogorov. Pentru a demonstra o proprietate exprimînd posibilitatea asocierii unei conexiuni tensoriale a unor procese Markov, vom face următoarele ipoteze :

1) Sistemului de indici $(\alpha) = (\alpha_1 \ldots \alpha_m)$; $\alpha_1, \ldots, \alpha_m = 1, 2, \ldots, n$ i se asociază sistemul de indici $[\alpha] = [\alpha_i]$, $i = 1, 2, \ldots, n'$ $\alpha_i = 1, \ldots, m'$ numărul total de elemente N al acestor sisteme fiind egal : $N = n^m = m'^{n'}$.

Analog $[\varepsilon]$ reprezintă o numerotare $1, 2, \ldots, m^n$ a elementelor sistemului de indici (ε).

2) Tensorilor $T^{(\alpha)}_{(\delta)}\ (M_1,\ M_2)$ pe $V_I = V_n$ se asociază elementele date de relaţiile

$$\mathcal{T}^{(\alpha)}_{(\delta)}\,(M_1, M_2) = \sum_{[\varepsilon]} T^{(\alpha)}_{[\varepsilon]}\,(M_1)\ T^{[\varepsilon]}_{(\delta)}\,(M_2) = p^{[\alpha]}_{[\delta]}\ (M_1,\ M_2) \geqslant 0,$$

$$\mathcal{T}^{(\alpha)}_{)\delta)}\,(M_1, M_1) = \sum_{[\varepsilon]} T^{(\alpha)}_{[\varepsilon]}\,(M_1)\ T^{[\varepsilon]}_{(\delta)}\,(M_1) = p^{[\alpha]}_{[\delta]}\,(M_1,\ M_1) = \delta^{\alpha}_{\delta}$$

(δ^{α}_{δ} = simbolul lui Kronecker generalizat în sensul de la II, § 4.5), $[\varepsilon] = 1, 2, \ldots, m^n$.

3) $\sum\limits_{(\partial)} \mathcal{T}^{(\alpha)}_{)\delta)}\,(M_1,\ M_2) = (\,\Delta^{(\alpha)}_{M_1 M_2}) = 1.$

4) În relaţia (I), $M_1 < M_2 < M_3$ (în sensul ordonării $x^i_1 \leqslant x^i_2 \leqslant x^i_3$) condiţiile impuse au următoarele consecinţe :

a) $\sum\limits_{[\varepsilon]} \mathcal{T}^{(\alpha)}_{[\varepsilon]}\,(M_1) = 1, \sum\limits_{(\delta)} T^{\ \varepsilon}_{[\delta]}\,(M_2) = 1,$

$$p^{[\alpha]}_{[\delta]}\ (M_1,\ M_2) = p^{[\alpha]}_{[\gamma]}\ (M_1)\, p^{[\gamma]}_{[\delta]}\ (M_2), \tag{I'}$$

$$d_{(M_1N_1)\,(M_2N_2)}\ p^{[\alpha]}_{[\delta]}\ (M_1,\ M_2) = \overset{L_1}{\underset{M_1N_1}{\omega}}\,{}^{(\alpha)}_{(\varphi)}\ p^{[\varphi]}_{[\delta]}\ (L_1,\ L_2) -$$

$$- p^{[\alpha]}_{[\varepsilon]}\ (L_1',\ L_2')\, \overset{L_2}{\underset{M_2N_2}{\omega}}\,{}^{(\varepsilon)}_{(\delta)},$$

b) $d_{(M_1N_1)\,(M_1N_1')}\ p^{[\alpha]}_{[\delta]}\,(M_1,\ M_1) = \overset{L_1}{\underset{M_1N_1}{\omega}}\,{}^{[\alpha]}_{[\delta]} - \overset{L_2}{\underset{M_1N_1'}{\omega}}\,{}^{[\alpha]}_{[\delta]} =$

$$= p^{[\alpha]}_{[\delta]}\ (N_1,\ N_1') - \delta^{(\alpha)}_{(\delta)}.$$

Din b) rezultă condiţiile

$$\left.\begin{aligned} \underset{M_1N_1}{\overset{L_1}{\omega}}{}^{[\alpha]}_{[\delta]} &= p^{[\alpha]}_{[\delta]}\,(N_1,\ M_1) - \delta^{(\alpha)}_{(\delta)} \\ -\underset{M_1N_1'}{\overset{L_2}{\omega}}{}^{(\alpha)}_{(\delta)} &= p^{[\alpha]}_{[\delta]}\,(M_1,\ N_1') - \delta^{(\alpha)}_{(\delta)} \end{aligned}\right\}\begin{aligned} &\geqslant 0 \quad [\alpha] \neq [\delta] \\ &\leqslant 0 \quad [\alpha] = [\delta], \end{aligned}$$

$$\sum_{(\delta)} \underset{M_1N_1}{\overset{L_1}{\omega}}{}^{(\alpha)}_{(\delta)} = \sum_{(\delta)} \big(- \underset{M_1N_1'}{\overset{L_2}{\omega}}{}^{(\alpha)}_{(\delta)}\big) = 0.$$

În cele de mai sus *1*-formele ω au expresia

$$\underset{M_1N_1}{\overset{L_1}{\omega}}{}^{(\alpha)}_{(\delta)} = \underset{M_1N_1}{\overset{L_1}{\Gamma}}{}^{(\alpha)}_{(\delta)\varepsilon}\, d_{MN}\, x^{\varepsilon}$$

şi deci

$$X_{x^{\varepsilon},\, d_{M_1N_1x^{\varepsilon}}}\, p^{[\alpha]}_{[\delta]}\,(M_1,\ N_1) = \underset{M_1N_1}{\overset{L_1}{\Gamma}}{}^{(\alpha)}_{(\varphi)\varepsilon}\, p^{[\varphi]}_{[\delta]}\, d_{M_1N_1}\ x^{\varepsilon},$$

$$\varepsilon = 1,\ 2,\ \ldots,\ n'.$$

Vom presupune că $p^{[\alpha]}_{]\delta]}$ sînt de natura unor măsuri invariante pe cîmpul de evenimente descris de tensorii $\mathfrak{T}^{(\alpha)}_{(\delta)}\,(M_1,\ M_2)$. Se obţine următoarea teoremă:

În condiţiile 1) — 4) procesul compus asociat unor $N = n^m$ tensori $\varphi^{[\alpha]}_{[\varepsilon]}$ elementari înzestraţi cu o conexiune de tip (m, 0) pe V_n este un proces Markov de multiplicitate n′ cu m′ stări pentru orice m, n, n′, m′ întregi pozitivi satisfăcînd condiţia $N = n^m = m'^{n'}$ transportul lor paralel pe V_n' corespunzînd trecerilor procesului asociat pe o subvarietate $V_{n'}$.

Demonstraţia rezultă din compararea condiţiilor precedente cu condiţiile probabilităţilor fundamentale ale proceselor Markov discontinue (O. Onicescu [8], p. 69—71 şi 215—217), relaţiile (I′) corespunzînd ecuaţiilor funcţionale iar (II) ecuaţiilor de tip Chapman-Kolmogorov. Relaţiile (II′) după cum am văzut rezultă prin considerentele făcute mai sus din (I′) cu condiţiile suplimentare admise.

Presupunem următoarele condiţii:

$$2')\quad \mathfrak{T}^{(\alpha)}_{(\delta)}\,(M_1,\ M_2) = p^{[\alpha]}_{[\delta[}\,(M_1,\ M_2) + \Delta\, p^{[\alpha]}_{[\delta]}\,(M_1,\ M_2)$$

$$\Delta p^{[\alpha]}_{[\delta]}\,(M_i,\ M_i) = 0, \qquad i = 1, 2.$$

Vom spune că $\mathfrak{T}^{(\alpha)}_{(\delta)}\,(M_1,\ M_2)$ sînt măsuri probabilistice sau probabilităţi bilocale. Acest din urmă termen este justificat de faptul că $\mathfrak{T}^{(\alpha)}_{(\delta)}\,(M_1,\ M_2)$ satisface condiţia

$$\mathfrak{T}^{(\alpha)}_{(\delta)}\,(M_i,\ M_i) = p^{(\alpha)}_{(\delta)}\,(M_i,\ M_i), \qquad i = 1,\ 2.$$

4′) $\underset{M_iN_i}{\overset{L_i}{\omega}}{}^{(\alpha)}_{(\beta)} = \underset{M_iN_i}{\overset{sL_i}{\omega}}{}^{(\alpha)}_{(\beta)} + \triangle \underset{M_iN_i}{\overset{L_i}{\omega}}{}^{(\alpha)}_{(\beta)}$ satisface condițiile 4.a) b).

5′) Vom mai presupune că $\triangle p^{[\alpha]}_{[\delta]}\,(M_1,\ M_2)$ satisface ,,*condiția de trecere bilocală*''

$$d_{(M_1N_1)\,(M_2N_2)}\triangle\, p^{[\alpha]}_{[\delta]}\,(M_1,\ M_2) = \underset{M_1N_1}{\overset{L_1}{\omega}}{}^{[\alpha]}_{[\varphi]}\triangle\, p^{[\varphi]}_{[\delta]}\,(L_1,\ L_2) +$$

$$+ \triangle \underset{M_1N_1}{\overset{L_1}{\omega}}{}^{(\alpha)}_{(\varphi)} p^{[\varphi]}_{[\delta]}\,(L_1,\ L_2) - \triangle p^{[\alpha]}_{[\varepsilon]}\,(L'_1,\ L'_2) \underset{M_2N_2}{\overset{L_2}{\omega}}{}^{[\varepsilon]}_{[\delta]} -$$

$$- p^{[\alpha]}_{[\varepsilon]}\,(L'_1,\ L'_2) \underset{M_2N_2}{\triangle} \overset{L_2}{\omega}{}^{(\varepsilon)}_{(\delta)}.$$

Vom defini atunci procesul asociat lui $\triangle\, p^{(\alpha)}_{(\delta)}$ proces de trecere bilocală (pt. $\triangle\,\omega = 0$, proces caracterizat printr-un paralelism tensorial). Se obține următoarea proprietate :

În condițiile 1, 2′, 4′, 5′ suprapunerea unui proces Markov discontinuu de multiplicitate n′ cu m′ stări, de probabilități fundamentale $p^{[\alpha]}_{[\delta]}$ *și 1-forme de trecere* ${}^s\omega$, *cu un proces de trecere bilocal* (*descris de 2′, 4′, 5′*) *este asociat unor* $N = n^m$ *tensori* $T^{(\alpha)}_{(\delta)}$ *elementari înzestrați cu o conexiune de tip* (*m, 0*) *pe* V_n (*caracterizați de 1-formele* ω) *pentru orice* $N = n^m = m'^{n'}$ *transportul lor paralel în* $V_{n'}$ *corespunzînd trecerilor procesului asociat.*

Proprietatea se demonstrează observînd că $\mathfrak{T}^{(\alpha)}_{(\delta)}\,(M_1,\ M_2)$ satisfac în condițiile date relațiile de transport paralel de tip II, II′. Invers,

Transportul paralel al tensorului cu o conexiune de tip (*m, 0*) *pe* V_n *și anume* $\mathfrak{T}^{(\alpha)}_{(\beta)}$ *este asociat prin condițiile 1, 2′, 4′, 5′ unui proces Markov discontinuu de multiplicitate n′ cu m′ stări și a unui proces de trecere bilocal.*

Aceste rezultate pot fi extinse cu anumite restricții în cazul unor mulțimi numerabile de stări. În cazul continuu de exemplu trebuie impuse anumite condiții probabilităților fundamentale.

Prin proces de trecere în sens larg se va defini procesul caracterizat prin următoarele condiții

$$p^{[\alpha]}_{[\beta]}\,(M_1,\ M_2) = p^{[\alpha]}_{[\gamma]}\,(M_1)\, p^{[\gamma]}_{[\beta]}\,(M_2) \qquad \text{(I″)}$$

unde

$$[\alpha] = [[\alpha^1], \ldots, [\alpha^{N'}]] \text{ etc. } [\alpha^1] = [\alpha^1_1, \ldots, \alpha^1_{n'_1}]$$

sînt sisteme de indici reperînd elementele $\alpha^1_1, \ldots, \alpha^1_{n'_1} = 1, \ldots, n'_1$ etc., …, … $\alpha^{N'}_1, \ldots, \alpha^{N'}_{n_{N'}} = 1 \div n'_{N'}$ unui produs cartezian $X = \overset{N'}{\underset{1}{\pi}}\ \Omega^i$ de mulțimi de stări admițînd următoarea numerotare :

1′) $[\alpha] \Rightarrow 1,\ \ ,\ldots,\ \overset{N'}{\underset{i\ =1}{\pi}}\ m_i^{n_i}.$

În mod analog ca mai înainte vom considera un sistem de $N = n^m = \overset{N'}{\underset{i=1}{\pi}} m_i'^{\,n_i'}$ tensori $\mathfrak{T}^{[\alpha]}_{[\beta]}$ de tip $(m, 0)$ pe V_n cu o conexiune de tip $(m, 0)$. Atunci, ecuațiile probabilităților fundamentale ale procesului de trecere vor fi de tipul (II′). Sistemul de relații (I″), (II′) va defini astfel un proces de trecere în sens larg asociat. Pentru $N' = 1$, $m = 1$ se obține o asociere a unui proces Markov de multiplicitate n' cu m' stări unui sistem de $m'^{n'}$ vectori de conexiune $(1, 0)$ pe o varietate $V_{m'^{n'}}$ prin transportul lor paralel pe $V_{n'}$.

Primită la redacție la 27 octombrie 1962

RHEOLOGIC STRUCTURES

ABSTRACT

Using results obtained previously [7], the author defines a finite tensor connexion of type (m, n), constituting a direct extension of the affine connexion in the case of a finite theory. The concept of F-absolute differential of the tensors of type (m, n) and (n, m) is introduced, their tensor properties being deduced. The statistical connection is also defined with the aid of an invariant measure of the type probability on the field of the invariants constructed with the elements of the basis of the tensor space of type (m, n) and (n, m). The law of variation with respect to a parameter of these probabilities coincides in particular with certain functional relations characterizing stochastic processes.

BIBLIOGRAFIE

1. BOMPIANI E., Atti Accad. Naz. Lincei. Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat., **8**, 1, 476–482 (1946).
2. COSSU ALDO, *Su una classe di varietà a connessione tensoriale che ammetono un gruppo d'ordine massimo di movimento.* Rend. Mat. e Appl., **5**, *18*, 168–175 (1959).
3. — *Varieta a connessione tensoriale per tensori doppi contravarianti che ammettono un gruppo d'ordine massimo di movimenti*. Rend. Mat. e Appl., **5**, *19*, 265–267 (1960).
4. DOEBLIN W., R. FORTET, *Sur les chaînes à liaisons complètes.* Bull. Soc. Math. France, *65*, 132–148 (1937).
5. KAWAGUCHI AKITSUGU, *On the vectors of higher order and the extended affine connections.* Ann. Math. Pura. Appl., **4**, *55*, 105–117 (1961).
6. LOSIK M. W., *On a certain class of Kawaguchi spaces.* DAN SSR, *134*, 1299–1302 (1960).
7. MIȘICU M., *Structuri reologice. I. Teoria geometrică a structurilor reologice.* St. cerc. mec. apl., Acad. R.P.R., **XIII**, *3*, 597 (1962); Rev. méc. appl. **VII**, *4* (1962); St. cerc. mec. apl., Acad. R.P.R., **XIII**, *6* (1962).
8. ONICESCU O., *Calculul probabilităților.* Ed. tehnică, Buc., 1956.

9. ONICESCU O., MIHOC G., *Sur les chaînes de variables statistiques*. Bull. Sci. Math., **59**, 174—192 (1935).
10. — *Sur les chaînes statistiques*. C.R. Acad. Sci. Paris, **200**, 511—512 (1935); **202**, 2031—3033 (1936).
11. — *Chaînes et mouvements discontinus*. Buletinul matematic al Societății romîne de științe (1947).
12. SRIVASTAVA T. N., MISHRA R. S., *Bianchi identity in special Kawaguchi space Tensor* (N.S.), *11*, 43—50 (1961).
13. TAMÁSSY L., *Über den Affinzusammenhang von zu Tangentialräumen gehörenden Produkträumen*. Acta Math. Ac. Sci. Hung., *11*, 64—82 (1960).
14. TOMINOSUKA OTSUKI, *On metric general connections*. Proc. Jap. Ac., **37**, 183—188 (1961).

STUDII

FLAMBAJUL CONDUCTELOR FORȚATE DATORIT PRESIUNII INTERIOARE

DE

AUGUSTIN PETRE [1]

539.4 : 620.173

Este cunoscut fenomenul datorit căruia o coloană de lichid sub presiune poate flamba, dacă capetele conductei în care se găsește se pot deplasa în direcția axială. Rigiditatea ansamblului coloanei constă numai din rigiditatea conductei și funcție de valoarea acestei rigidități și lungimea conductei, va exista o presiune, în coloana de lichid, de la care fenomenul de flambaj va începe să se producă.

Se presupune o astfel de conductă de lungime l avînd capetele împiedicate să se deplaseze lateral, fiind permisă deplasarea lor axială. Se vor neglija frecările introduse de această deplasare. Se vor neglija, de asemenea, frecările în lungul conductei, produse la o deplasare laterală a acesteia.

Presiunea la capătul de sus al conductei p_1 va fi

$$p_1 = h_1 \gamma, \tag{1}$$

unde h_1 reprezintă înălțimea suprafeței libere a lichidului față de acest punct, iar γ greutatea specifică a lichidului.

Presiunea la capătul de jos al conductei p_2 va fi

$$p_2 = (h_1 + h_2)\gamma, \tag{2}$$

unde h_2 reprezintă diferența de nivel între capetele conductei.

Forța axială într-o secțiune oarecare, situată la distanța x măsurată în lungul conductei, începînd de la capătul superior, se poate scrie

$$P(x) = h_1 A\gamma + h_2 A\gamma \frac{x}{l}. \tag{3}$$

---

[1] Institutul politehnic București.

Ecuația diferențială de echilibru, pentru o asemenea bară se poate scrie [1]

$$EI\,\frac{\mathrm{d}^3 u}{\mathrm{d}x^3} + P(x)\,\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = T, \tag{4}$$

unde u reprezintă deplasarea laterală a unei secțiuni oarecare prin deformație,

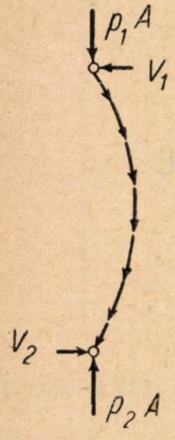


Fig. 1

EI este rigiditatea la o încovoiere a conductei,

T este forța tăietoare, calculată în direcție perpendiculară pe axa barei nedeformate.

În cele ce urmează se admite că forța axială este dirijată după axa conductei deformate (fig. 1), celelalte componente fiind preluate local de conductă și transmise reazemelor din lungul ei.

Forța tăietoare T va avea expresia

$$T = V_1 + \int_0^x h_2\,A\gamma\,\frac{1}{l}\,\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x.$$

Derivînd ecuația (4) se obține

$$EI\,\frac{\mathrm{d}^4 u}{\mathrm{d}x^4} + P(x)\,\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}x^4} + \frac{\mathrm{d}P(x)}{\mathrm{d}x}\,\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{h_2 A\gamma}{l}\,\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \tag{5}$$

respectiv

$$EI\,\frac{\mathrm{d}^4 u}{\mathrm{d}x^4} + \left(h_1 + h_2\,\frac{x}{l}\right) A\gamma\,\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}x^2} = 0. \tag{6}$$

Notînd

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}x^2} = \alpha, \tag{7}$$

cu schimbarea de variabilă

$$\xi = \sqrt{\frac{A\gamma}{EI}\,\frac{l^2}{h_1^2}}\,h_1\left(1 + \frac{h_2}{h_1}\,\frac{x}{l}\right), \tag{8}$$

ecuația (6) devine

$$\frac{\mathrm{d}^2\alpha}{\mathrm{d}\xi^2} + \xi\alpha = 0. \tag{9}$$

Soluția acestei ecuații exprimată prin funcții *Airy* este

$$\alpha = C_1\,U_1\,(\xi,\,1) + C_2\,U_2\,(\xi,\,1). \tag{10}$$

Considerînd capetele conductei articulate, condițiile la limită se vor scrie

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}x^2}\right)_{x=0} = 0,$$
$$\left(\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}x^2}\right)_{x=l} = 0, \tag{11}$$

respectiv

$$\begin{aligned} \alpha_{x=0} &= 0, \\ \alpha_{x=l} &= 0. \end{aligned} \tag{12}$$

Condițiile (12) introduse în (8) conduc la sistemul

$$\begin{aligned} C_1U_1(a,\ 1) + C_2U_2(a,\ 1) &= 0, \\ C_1U_1(b,\ 1) + C_2U_2(b,\ 1) &= 0, \end{aligned} \tag{13}$$

unde s-a notat

$$\begin{aligned} a &= \sqrt[3]{\frac{A\gamma}{EI}\frac{l^2}{h_2^2}}\,h_1, \\ b &= \sqrt[3]{\frac{A\gamma}{EI}\frac{l^2}{h_2^2}}\,h_1\left(1 + \frac{h_2}{h_1}\right). \end{aligned} \tag{14}$$

Pentru ca să se producă flambajul va fi necesar ca ecuația (9) să admită soluții neidentic nule, respectiv,

$$\begin{vmatrix} U_1\ (a,\ 1) & U_2\,(a,\ 1) \\ U_1\ (b,\ 1) & U_2\,(b,\ 1) \end{vmatrix} = 0, \tag{15}$$

sau

$$\frac{U_2\,(a,\ 1)}{U_1\,(a,\ 1)} = \frac{U_2\,(b,\ 1)}{U_1\,(b,\ 1).}. \tag{16}$$

Deoarece din (14) rezultă

$$b = a\left(1 + \frac{h_2}{h_1}\right), \tag{17}$$

condiția (16) se poate scrie

$$\frac{U_2\,(a,\ 1)}{U_1\,(a,\ 1)} = \frac{U_2\left[a\left(1 + \frac{h_2}{h_1}\right), 1\right]}{U_1\left[a\left(1 + \frac{h_2}{h_1}\right), 1\right]}, \tag{18}$$

condiție din care rezultă valoarea critică pentru a. Soluționarea ecuației (18) se face pe cale grafică în modul următor :

Se notează raportul

$$\frac{U_2\,(s,\ 1)}{U_1\,(s,\ 1)} = f(s) \tag{19}$$

care se calculează și se reprezintă pentru diferite valori ale variabilei s.

Calculul funcției $f(s)$ este dat în tabela 1, iar reprezentarea grafică a acestei funcții este dată în figura 2.

Rezolvînd sistemul (14) în raport cu h_1, h_2 se obține

$$
\begin{aligned}
h_1 &= a\,(b-a)^2\,\frac{EI}{Al^2\gamma},\\
h_2 &= (b-a)^3\,\frac{EI}{Al^2\gamma},
\end{aligned}
\tag{20}
$$

sau ținînd seama că secțiunea este tubulară de diametru D și grosimea t a pereților mică

$$
\begin{aligned}
h_1 &= a\,(b-a)^2\,\frac{EDt}{2\,l^2\gamma},\\
h_2 &= (b-a)^3\,\frac{EDt}{2\,l^2\gamma}.
\end{aligned}
\tag{21}
$$

Pentru a se obține valorile critice pentru mărimile a_{cr} și b_{cr} corespunzătoare flambajului, se iau pe figura 2 perechi de puncte la care

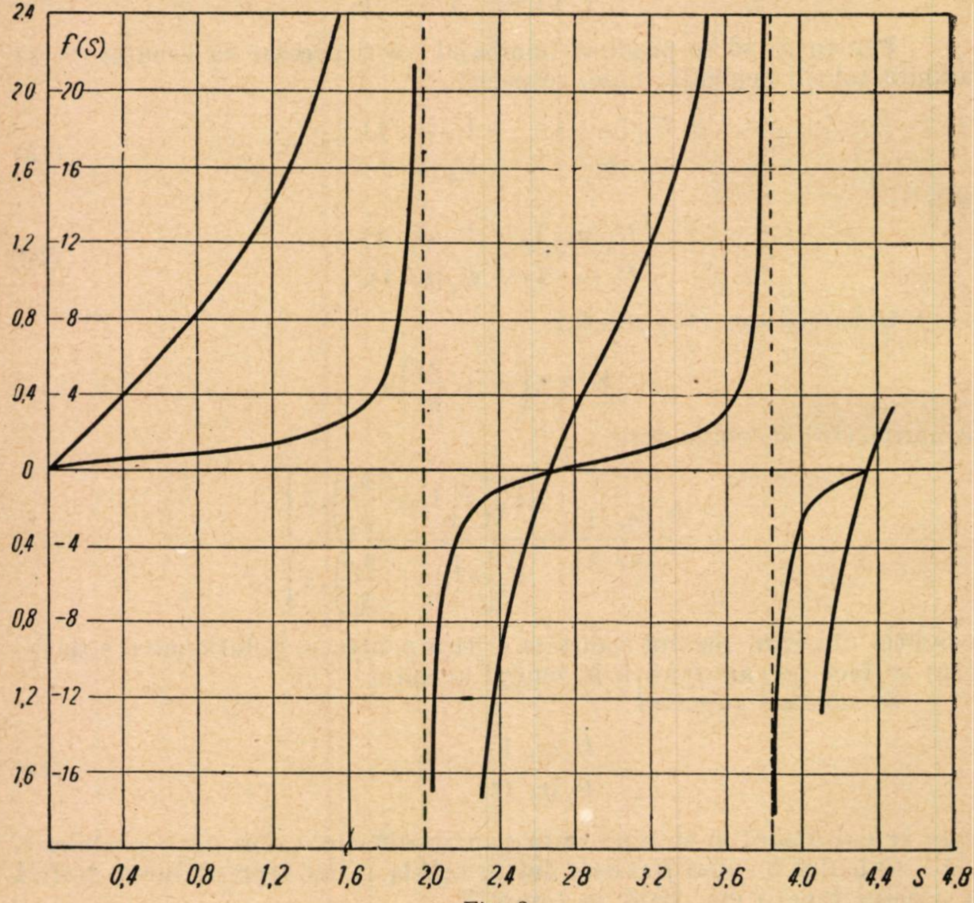


Fig. 2

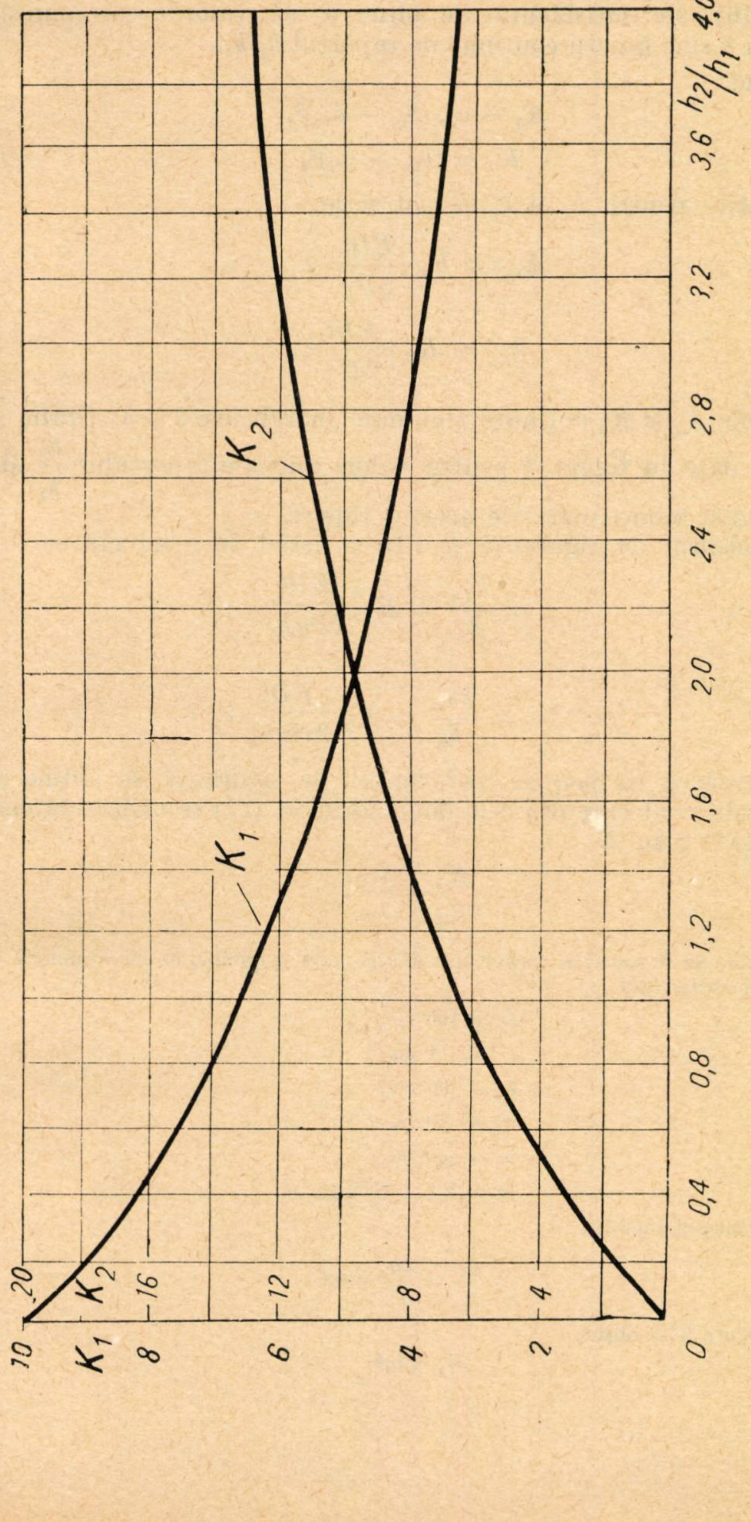


Fig. 3

condiția (16) este satisfăcută. Se observă că valorile corespunzătoare pentru a și b sînt funcții continue de raportul h_2/h_1.

Notînd

$$K_1 = a_{cr}\,(b_{cr} - a_{cr})^2, \qquad K_2 = (b_{cr} - a_{cr})^2, \tag{22}$$

valorile critice pentru h_1 și h_2 se pot scrie

$$k_{1_{cr}} = K_1 \frac{EDt}{2\,l^2\gamma}, \qquad k_{2_{cr}} = K_2 \frac{EDt}{2\,l^2\gamma}. \tag{23}$$

Valorile K_1 și K_2 obținute sînt date în tabelele 2 și 3. Grafic aceste valori sînt date în figura 3 pentru valori mici ale raportului $\frac{h_2}{h_1}$ și în figura 4 pentru valori mari ale acestui raport.

Coeficientul de siguranță pentru o astfel de conductă se va scrie

$$c = \frac{h_{1_{cr}}}{h_1} = K_1 \frac{EDt}{2\,l^2\gamma\,h_1}, \tag{24}$$

sau

$$c = \frac{k_{2_{cr}}}{h_2} = K_2 \frac{EDt}{2\,l^2\gamma h_2}.$$

Se observă că pentru coeficientul de siguranță se obține același rezultat indiferent care din cele două formule (24) se utilizează deoarece din (22), (14) rezultă

$$\frac{K_1}{K_2} = \frac{h_2}{h_1}. \tag{25}$$

Exemplu. Să se calculeze coeficientul de siguranță la flambaj al unei conducte care are următoarele caracteristici :

$D = 100$ cm,
$t = 1$ cm,
$l = 80$ cm,
$h_1 = 40$ m,
$h_2 = 60$ m,
$E = 2{,}1 \times 10^6$ kg/cm^2.

Se calculează raportul

$$\frac{h_2}{h_1} = \frac{60}{40} = 1{,}5$$

Din figura 3 se obține

$$K_1 = 5{,}6.$$

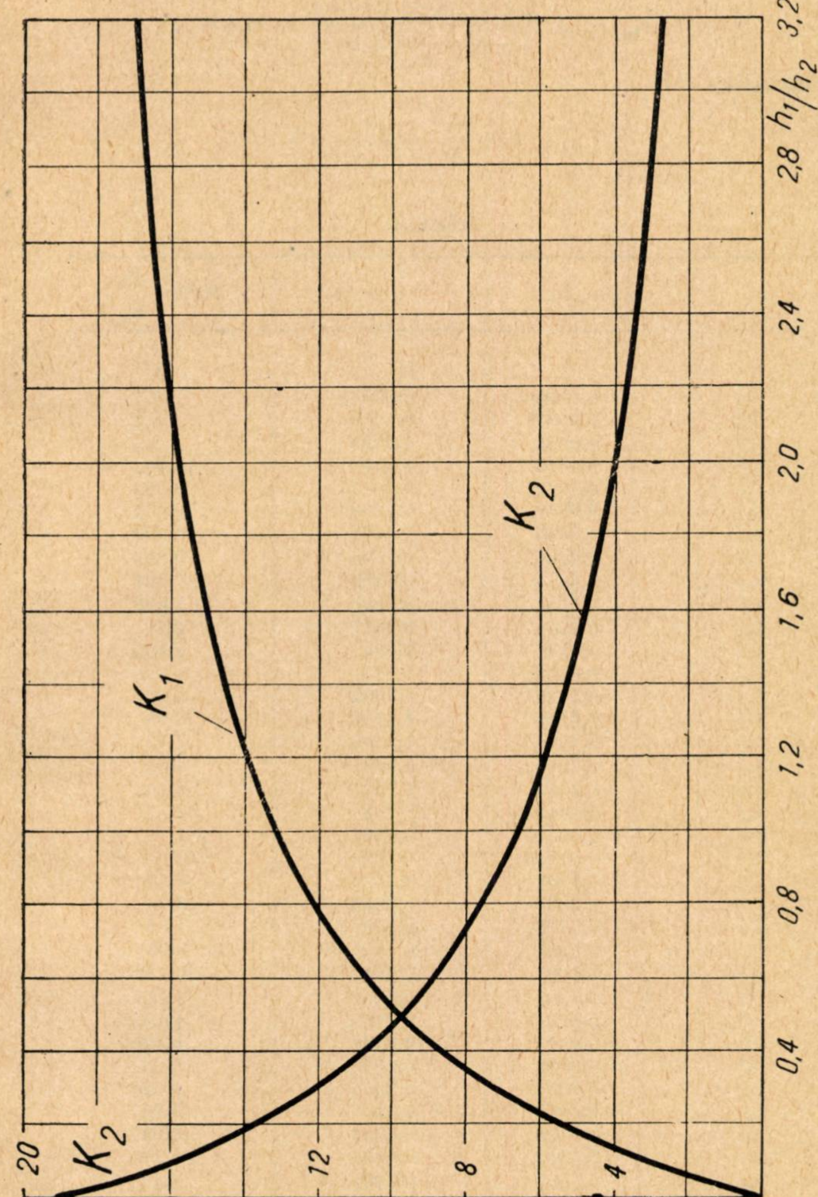


Fig. 4

Din prima relaţie (23) se obţine

$$h_{1_{cr}} = 5{,}6\,\frac{2{,}1 \times 10^{6} \times 100 \times 1}{2 \times 8^{2} \times 10^{6} \times 10^{-6}} = 91{,}8\ \text{m}$$

iar din prima relaţie (24)

$$c = \frac{91{,}8}{40} = 2{,}3.$$

Tabela 1

s	$U_1(s,\ 1)$	$U_2(s,\ 1)$	$f(s) = \dfrac{U_2}{U_1}$
0	1	0	0
0,1	0,9998	0,09999	0,1
0,2	0,9987	0,1999	0,2
0,3	0,9955	0,2993	0,3
0,4	0,9894	0,3979	0,402
0,5	0,9792	0,4948	0,505
0,6	0,9643	0,5893	0,612
0,7	0,9435	0,6801	0,722
0,8	0,9161	0,7663	0,833
0,9	0,8814	0,8463	0,961
1	0,8388	0,9186	1,095
1,1	0,7878	0,9818	1,25
1,2	0,7282	1,0342	1,425
1,3	0,6598	1,0741	1,63
1,4	0,5829	1,1002	1,89
1,5	0,4979	1,1108	2,24
1,6	0,4054	1,1048	2,73
1,7	0,3064	1,181	3,53
1,8	0,2023	1,0391	5,14
1,9	0,0945	0,978	10,35
1,98	0,007	0,9165	131
2,0	−0,01498	0,8992	−60
2,1	−0,1242	0,8020	− 6,47
2,2	−0,2308	0,6880	− 2,98
2,3	−0,3323	0,5590	− 1,68
2,4	−0,4262	0,4171	− 0,98
2,5	−0,5098	0,2653	− 0,522
2,6	−0,5807	0,1069	− 0,184
2,66	−0,6162	0,0102	− 0,01655
2,7	−0,6365	−0,0543	0,0853
2,8	−0,6752	−0,2140	0,317
2,9	−0,695	−0,3676	0,528
3,0	−0,6947	−0,5106	0,737
3,1	−0,6736	−0,6384	0,947
3,2	−0,6317	−0,7463	1,182
3,3	−0,5697	−0,8304	1,465
3,4	−0,4889	−0,8872	1,815
3,5	−0,3915	−0,9139	2,33
3,6	−0,2805	−0,9087	3,24
3,7	−0,1594	−0,8709	5,47
3,8	−0,03254	−0,8009	24,6
3,82	−0,0069	−0,7832	113,5

Tabela 1 (*continuare*)

s	$U_1(s, 1)$	$U_2(s, 1)$	$f(s) = \frac{U_2}{U_1}$
3,9	0,0956	−0,7007	−7,33
4,0	0,2200	−0,5732	−2,602
4,1	0,3356	−0,4229	−1,26
4,2	0,4374	−0,2554	−0,585
4,3	0,521	−0,0771	−0,148
4,34	0,5483	−0,0045	−0,40082
4,4	0,5822	0,1043	0,179
8,84	−0,01191	−0,6400	53,8

Tabela 2

$f(s)$	a_{cr}	b_{cr}	$\frac{h_2}{h_1}$	$\frac{h_1}{h_2}$	K_1	K_2
0	0	2,666	∞	0	0	18,95
0,2	0,2	2,75	12,75	0,0785	1,3	16,58
0,4	0,4	2,84	6,12	0,164	2,48	14,53
0,6	0,59	2,93	3,97	0,252	3,23	12,81
0,8	0,77	3,03	2,93	0,34	3,94	11,54
1	0,93	3,13	2,37	0,422	4,5	10,64
1,2	1,07	3,21	2,01	0,498	4,88	9,80
1,4	1,19	3,27	1,75	0,572	5,15	9,009
1,8	1,36	3,39	1,49	0,672	5,6	8,36
2	1,43	3,44	1,41	0,71	5,77	8,12
8	1,86	3,74	1,01	0,956	6,57	6,64
∞	1,987	3,825	0,925	1,075	6,72	6,21
−2	2,26	4,04	0,788	1,265	7,17	5,64
0	2,666	4,342	0,632	1,59	7,5	4,74
∞	3,825	5,296	0,385	2,6	8,25	3,18
0	4,342	5,741	0,322	3,13	8,5	2,74
∞	8,848	9,874	0,1165	8,7	9,36	1,09

Tabela 3

$\frac{h_1}{h_2}$	K_1	K_2	$\frac{h_1}{h_2}$	K_1	K_2
0	0	18,95	1,2	6,95	5,8
0,1	1,6	16,0	1,4	7,25	5,3
0,2	2,8	13,7	1,6	7,5	4,7
0,3	3,6	12,0	1,8	7,75	4,3
0,4	4,35	10,8	2	7,9	3,9
0,5	4,85	9,7	2,5	8,2	3,2
0,6	5,3	8,8	3	8,4	2,8
0,7	5,7	8,2	5	8,9	1,8
0,8	6,05	7,6	10	9,4	0,9
0,9	6,35	7,0	20	9,7	0,5
1	6,6	6,5	∞	π^2	0

Primită la redacție la 23 octombrie 1962

BUCKLING OF FORCED CONDUITS DUE TO INTERNAL PRESSURE

ABSTRACT

This paper examines the stability of forced conduits whose ends permit axial displacements. The solution of the problem leads finally to a condition expressed by a transcendental equation in Airy functions.

The equation is solved numerically and graphically, buckling criteria being given function of the rigidity and length of the conduit and water pressure at its upper end.

BIBLIOGRAFIE

1. A. PETRE, *Détermination de l'équation différentielle de la ligne élastique dans le cas des barres droites sous l'action des charges longitudinales et transversales*. Bul. Inst. politehnic Bucureşti, XXI, *1* (1959).
2. A. PFLÜGER, *Stabilitätsprobleme der Elastostatik*. Springer, Berlin, 1950.
3. А. Д. СМИРНОВ, *Таблицы функций Эири и специальных вырожденных гипергеометрических функций*. Изд. АН СССР, Москва, 1955.

STUDII

ASUPRA PROBLEMEI PLANE A TEORIEI ELASTICITĂȚII ÎN COORDONATE CURBILINII OARECARE

III. FORMULAREA MATEMATICĂ A PROBLEMEI. METODE DE CALCUL

DE

P. P. TEODORESCU[1]

539.3

Vom arăta, în cele ce urmează, cum se pot formula problemele fundamentale ale teoriei elasticității, în cazul plan, în coordonate curbilinii oarecare. Distingem astfel între rezolvarea în tensiuni a problemelor și rezolvarea lor în deplasări. De asemenea, pentru aceste cazuri vom indica unele procedee de calcul.[2]

§ 5. FORMULAREA PROBLEMEI ÎN TENSIUNI

În cazul primei probleme fundamentale a teoriei elasticității (condiții la limită în tensiuni) este util să se folosească o formulare în tensiuni a problemei (o formulare în care tensiunile sînt alese drept necunoscute). În felul acesta condițiile la limită se pot pune în mod convenabil.

5.1. Reprezentarea stării de solicitare. Pentru o rezolvare în tensiuni a problemei va trebui să scrim ecuația de continuitate a deformațiilor cu ajutorul componentelor tensorului tensiune.

Ținînd seama de legea lui Hooke (2.61), (2.61′), (2,62), se poate scrie relația dintre primii invarianți ai tensorilor tensiune și deformație specifică sub forma

$$\varepsilon_\xi + \varepsilon_\eta - \gamma_{\xi\eta} \operatorname{ctg} \omega = \frac{1-\mu}{E} \left[\sigma_\xi + \sigma_\eta + (\tau_{\xi\eta} + \tau_{\eta\xi}) \operatorname{ctg} \omega\right], \qquad (3.1)$$

---

[1] Facultatea de matematică și mecanică, Universitatea—București.

[2] Folosim notațiile introduse și rezultatele obținute în primele două părți ale acestei lucrări [13], [14].

unde ω este unghiul format de liniile de coordonate, E este modulul de elasticitate longitudinală iar μ este coeficientul de contracție transversală al lui Poisson. În acest caz, ecuația de continuitate (2.50) capătă forma

$$\begin{gathered}\Delta\,[\sigma_\xi + \sigma_\eta + (\tau_{\xi\eta} + \tau_{\eta\xi})\operatorname{ctg}\,\omega] = -\,(1+\mu)\left\{\frac{\partial \Xi}{\partial s_\xi} + \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial s_\eta} + \right.\\ \left. + \operatorname{cosec}\,\omega\left[\left(\frac{\cos\,\omega}{\rho_\xi} + \frac{1}{\rho'_\eta}\right)\Xi + \left(\frac{\cos\,\omega}{\rho_\eta} + \frac{1}{\rho'_\xi}\right)\mathrm{H}\right]\right\},\end{gathered} \tag{3.2}$$

unde Ξ și H sînt componentele forței masice în coordonate curbilinii oarecare, ρ_ξ și ρ_η sînt razele de curbură ale elementului de arc ds_ξ, respectiv ds_η, date de (1.27′), ρ'_ξ și ρ'_η sînt raze precizate de (1.29) iar operatorul lui Laplace este dat de (1.47).

În absența forțelor masice, rezultă că primul invariant al tensorului tensiune este armonic și avem

$$\Delta\,[\sigma_\xi + \sigma_\eta + (\tau_{\xi\eta} + \tau_{\eta\xi})\operatorname{ctg}\,\omega] = 0. \tag{3.3}$$

De altfel, ecuația (3.3) este valabilă și în cazul mai general în care forțele masice sînt astfel încît membrul al doilea al ecuației (3.2) se anulează.

Pentru a putea rezolva problema, vom adăuga ecuațiile de echilibru

$$\begin{gathered}\frac{\partial \sigma_\xi}{\partial s_\xi} + \sin\,\omega\,\frac{\partial \tau_{\eta\xi}}{\partial s_\eta} - \cos\,\omega\,\frac{\partial \sigma_\eta}{\partial s_\eta} + \\ + \frac{\operatorname{cosec}\,\omega}{\rho'_\eta}(\sigma_\xi - \sigma_\eta) + \frac{2}{\rho'_\xi}\,\tau_{\xi\eta} + \Xi\sin^2\omega = 0.\\ \sin\,\omega\,\frac{\partial \tau_{\xi\eta}}{\partial s_\xi} - \cos\,\omega\,\frac{\partial \sigma_\xi}{\partial s_\xi} + \frac{\partial \sigma_\eta}{\partial s_\eta} - \\ - \frac{\operatorname{cosec}\,\omega}{\rho'_\xi}(\sigma_\xi - \sigma_\eta) + \frac{2}{\rho'_\eta}\,\tau_{\eta\xi} + \mathrm{H}\sin^2\omega = 0\end{gathered} \tag{3.4}$$

și relația care există între tensiunile tangențiale

$$\tau_{\xi\eta} - \tau_{\eta\xi} = (\sigma_\xi - \sigma_\eta)\operatorname{ctg}\,\omega. \tag{3.5}$$

În felul acesta soluționarea problemei se reduce la integrarea sistemului de ecuații (3.2), (3.4) și (3.5), cu anumite condiții la limită.

În cele ce urmează vom considera numai ecuațiile omogene (fără forțe masice); forțele masice introduc un sistem de integrale particulare.

Pentru a reprezenta componentele tensorului tensiune cu ajutorul unei funcții de tensiune este convenabil să plecăm de la reprezentarea lui G.-B. Airy [1], [2]

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \qquad \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \tag{3.6}$$

$$\tau_{xy} = -\,\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}, \tag{3.6′}$$

din cazul coordonatelor carteziene ortogonale. Observăm că, ţinînd seama de (2.4), putem scrie

$$\sigma_\xi = \sigma_x \sin^2 \beta + \sigma_y \cos^2 \beta - 2\tau_{xy} \sin \beta \cos \beta =$$

$$= \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \sin^2 \beta + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \cos^2 \beta + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \, \partial y} \sin \beta \cos \beta =$$

$$= \left(\cos \beta \frac{\partial}{\partial x} + \sin \beta \frac{\partial}{\partial y}\right)^2 F + \left(\cos \beta \frac{\partial \beta}{\partial x} + \sin \beta \frac{\partial \beta}{\partial y}\right)\left(\sin \beta \frac{\partial}{\partial x} - \cos \beta \frac{\partial}{\partial y}\right) F =$$

$$= \frac{\partial^2 F}{\partial s_\eta^2} + \frac{\partial \beta}{\partial s_\eta} \frac{1}{\sin \omega} \left(\frac{\partial F}{\partial s_\xi} - \cos \omega \frac{\partial F}{\partial s_\eta}\right),$$

unde am folosit operatorii (1.40), (1.41). Procedînd analog cu celelalte componente (2.4), (2.4′) ale tensorului tensiune şi ţinînd seama de relaţiile (1.27′), (1.29), obţinem în definitiv o reprezentare de tip Airy a stării de tensiune, cu ajutorul unei funcţii de tensiune F,

$$\begin{aligned} \sigma_\xi &= \frac{\partial^2 F}{\partial s_\eta^2} + \frac{\operatorname{cosec} \omega}{\rho_\eta} \left(\frac{\partial F}{\partial s_\xi} - \cos \omega \frac{\partial F}{\partial s_\eta}\right), \\ \sigma_\eta &= \frac{\partial^2 F}{\partial s_\xi^2} + \frac{\operatorname{cosec} \omega}{\rho_\xi} \left(\frac{\partial F}{\partial s_\eta} - \cos \omega \frac{\partial F}{\partial s_\xi}\right), \end{aligned} \tag{3.7}$$

$$\begin{aligned} \tau_{\xi\eta} &= - \operatorname{cosec} \omega \left(\frac{\partial}{\partial s_\xi} - \cos \omega \frac{\partial}{\partial s_\eta}\right) \frac{\partial F}{\partial s_\eta} + \\ &+ \operatorname{cosec}^2 \omega \left(\frac{\cos \omega}{\rho_\eta} + \frac{1}{\rho_\xi'}\right) \left(\frac{\partial F}{\partial s_\xi} - \cos \omega \frac{\partial F}{\partial s_\eta}\right) = \\ &= - \frac{\partial}{\partial s_\eta} \left[\operatorname{cosec} \omega \left(\frac{\partial F}{\partial s_\xi} - \cos \omega \frac{\partial F}{\partial s_\eta}\right)\right] + \frac{1}{\rho_\eta} \frac{\partial F}{\partial s_\eta}, \\ \tau_{\eta\xi} &= - \operatorname{cosec} \omega \left(\frac{\partial}{\partial s_\eta} - \cos \omega \frac{\partial}{\partial s_\xi}\right) \frac{\partial F}{\partial s_\xi} + \\ &+ \operatorname{cosec}^2 \omega \left(\frac{\cos \omega}{\rho_\xi} + \frac{1}{\rho_\eta'}\right) \left(\frac{\partial F}{\partial s_\eta} - \cos \omega \frac{\partial F}{\partial s_\xi}\right) = \\ &= - \frac{\partial}{\partial s_\xi} \left[\operatorname{cosec} \omega \left(\frac{\partial F}{\partial s_\eta} - \cos \omega \frac{\partial F}{\partial s_\xi}\right)\right] + \frac{1}{\rho_\xi} \frac{\partial F}{\partial s_\xi}, \end{aligned} \tag{3.7′}$$

reprezentare corespunzătoare ecuaţiilor (3.4) şi (3.5).

Din (3.7), (3.7′), ţinînd seama de (1.47), obţinem de asemenea

$$\sigma_\xi + \sigma_\eta + (\tau_{\xi\eta} + \tau_{\eta\xi}) \operatorname{ctg} \omega = \Delta F, \tag{3.8}$$

ceea ce era de aşteptat. Rezultă că funcţia de tensiune F este biarmonică

$$\Delta\Delta F = 0, \tag{3.9}$$

operatorul corespunzător fiind obţinut prin aplicarea succesivă a operatorului (1.47). În felul acesta ecuaţia de continuitate (3.3) este de asemenea verificată.

Cu ajutorul legii lui Hooke (2.61), (2.61′), (2.62), putem să calculăm şi componentele ţensorului deformaţie specifică. Integrăm apoi ecuaţiile (2.34), obţinînd componentele u_ξ, u_η ale vectorului deplasare ; ecuaţia (2.34′) ne precizează funcţiile arbitrare ce apar în acest caz.

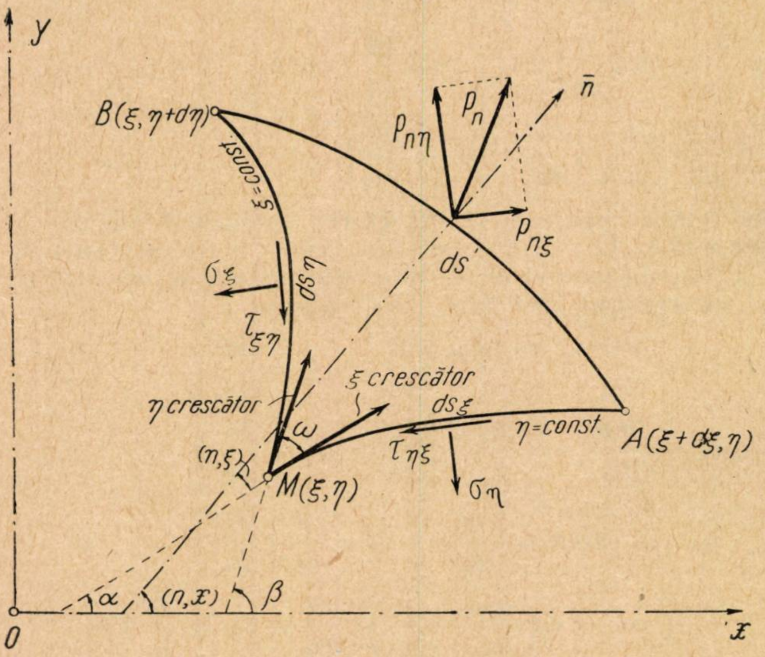

y
B(ξ, η+dη)
ξ=const.
$p_{n\eta}$
p_n
$\bar{n}$
$p_{n\xi}$
ds′
ds_η
σ_ξ
$\tau_{\xi\eta}$
ξ crescător
η crescător
ds_ξ
η=const.
A(ξ+dξ, η)
ω
(n,ξ)
M(ξ,η)
$\tau_{\eta\xi}$
σ_η
α
(n,x)
β
0
x

Fig. 1

5.2. Formularea problemei la limită. În ceea ce priveşte condiţiile pe contur, ele se pun — aproximînd elementele de arc prin corzile corespunzătoare — sub forma (fig. 1)

$$\begin{aligned} p_{n\xi}\, ds' &= \sigma_\xi\, ds_\eta - (\tau_{\eta\xi} \sin \omega - \sigma_\eta \cos \omega)\, ds_\xi, \\ p_{n\eta}\, ds' &= -\sigma_\eta\, ds_\xi + (\tau_{\xi\eta} \sin \omega - \sigma_\xi \cos \omega)\, ds_\eta, \end{aligned} \tag{3.10}$$

sau sub forma

$$\begin{aligned} p_{n\xi} \sin \omega &= \sigma_\xi \cos (n, \xi) + (\tau_{\eta\xi} \sin \omega - \sigma_\eta \cos \omega) \cos (n, \eta), \\ p_{n\eta} \sin \omega &= \sigma_\eta \cos (n, \eta) + (\tau_{\xi\eta} \sin \omega - \sigma_\xi \cos \omega) \cos (n, \xi), \end{aligned} \tag{3.10′}$$

unde $p_{n\xi}$, $p_{n\eta}$ sînt proiecţiile intensităţii sarcinii exterioare, corespunzînd elementului de arc de normală exterioară $\bar{n}$, pe direcţiile normale la liniile de coordonate $\xi =$ const., respectiv $\eta =$ const.

Ţinînd seama de reprezentarea (3.7), (3.7′) şi de formulele (1.27′), (1.29), putem scrie

$$\begin{aligned}
p_{n\xi}\sin\omega &= \frac{\partial^2 F}{\partial s_\eta^2}\cos(n,\xi) + \frac{1}{\sin\omega}\frac{\partial\beta}{\partial s_\eta}\left(\frac{\partial F}{\partial s_\xi} - \cos\omega\frac{\partial F}{\partial s_\eta}\right)\cos(n,\xi) - \\
&- \left(\frac{\partial}{\partial s_\eta} - \cos\omega\frac{\partial}{\partial s_\xi}\right)\frac{\partial F}{\partial s_\xi}\cos(n,\eta) + \\
&+ \frac{1}{\sin\omega}\left(-\cos\omega\frac{\partial\alpha}{\partial s_\xi} + \frac{\partial\alpha}{\partial s_\eta}\right)\left(\frac{\partial F}{\partial s_\eta} - \cos\omega\frac{\partial F}{\partial s_\xi}\right)\cos(n,\eta) - \\
&- \frac{\partial^2 F}{\partial s_\xi^2}\cos\omega\cos(n,\eta) + \operatorname{cotg}\omega\frac{\partial\alpha}{\partial s_\xi}\left(\frac{\partial F}{\partial s_\eta} - \cos\omega\frac{\partial F}{\partial s_\xi}\right)\cos(n,\eta) = \\
&= \frac{\partial^2 F}{\partial s_\eta^2}\cos(n,\xi) + \frac{1}{\sin\omega}\frac{\partial\beta}{\partial s_\eta}\left(\frac{\partial F}{\partial s_\xi} - \cos\omega\frac{\partial F}{\partial s_\eta}\right)\cos(n,\xi) - \\
&- \frac{\partial^2 F}{\partial s_\eta\partial s_\xi}\cos(n,\eta) + \frac{1}{\sin\omega}\frac{\partial\alpha}{\partial s_\eta}\left(\frac{\partial F}{\partial s_\eta} - \cos\omega\frac{\partial F}{\partial s_\xi}\right)\cos(n,\eta).
\end{aligned}$$

Folosind relaţia (1.44), care ne indică influenţa ordinei de aplicare a operatorilor diferenţiali, mai putem scrie

$$\begin{aligned}
p_{n\xi}\sin\omega &= \frac{\partial^2 F}{\partial s_\eta^2}\cos(n,\xi) - \frac{\partial^2 F}{\partial s_\xi\partial s_\eta}\cos(n,\eta) + \\
&+ \frac{1}{\sin\omega}\left[\frac{\partial\beta}{\partial s_\eta}\cos(n,\xi) - \frac{\partial\beta}{\partial s_\xi}\cos(n,\eta)\right]\left(\frac{\partial F}{\partial s_\xi} - \cos\omega\frac{\partial F}{\partial s_\eta}\right).
\end{aligned}$$

Introducînd derivata tangenţială (1.49) şi procedînd analog cu cealaltă componentă a sarcinii exterioare, putem scrie condiţiile la limită sub forma

$$\begin{aligned}
p_{n\xi} &= \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial F}{\partial s_\eta}\right) + \frac{1}{\sin\omega}\frac{\partial\beta}{\partial s}\left(\frac{\partial F}{\partial s_\xi} - \cos\omega\frac{\partial F}{\partial s_\eta}\right), \\
p_{n\eta} &= -\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial F}{\partial s_\xi}\right) + \frac{1}{\sin\omega}\frac{\partial\alpha}{\partial s}\left(\frac{\partial F}{\partial s_\eta} - \cos\omega\frac{\partial F}{\partial s_\xi}\right),
\end{aligned} \qquad (3.11)$$

unde α, β sînt unghiurile formate de tangentele la liniile de coordonate cu axa Ox.

Plecînd de la (3.11) şi folosind operatorul (1.49), găsim cu uşurinţă că

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\sin\beta}{\sin\omega}\frac{\partial F}{\partial s_\xi} - \frac{\sin\alpha}{\sin\omega}\frac{\partial F}{\partial s_\eta}\right) &= -\frac{1}{\sin\omega}(p_{n\xi}\sin\alpha + p_{n\eta}\sin\beta), \\
\frac{\partial}{\partial s}\left(-\frac{\cos\beta}{\sin\omega}\frac{\partial F}{\partial s_\xi} + \frac{\cos\alpha}{\sin\omega}\frac{\partial F}{\partial s_\eta}\right) &= \frac{1}{\sin\omega}(p_{n\xi}\cos\alpha + p_{n\eta}\cos\beta),
\end{aligned} \qquad (3.12)$$

de unde obţinem, prin două cvadraturi, o combinaţie liniară între derivatele $\dfrac{\partial F}{\partial s_\xi}$ şi $\dfrac{\partial F}{\partial s_\eta}$ ale funcţiei de tensiune F.

Operatorii (1.49) ne permit să calculăm derivata tangențială $\frac{\partial F}{\partial s}$ și derivata normală $\frac{\partial F}{\partial n}$, ca forța tăietoare (cu semnul schimbat), respectiv forța axială într-o grindă fictivă de-a lungul conturului, supusă acțiunii sarcinilor exterioare, plecînd de la un punct fix, arbitrar ales, și parcurgînd conturul în sens invers mișcării acelor unui ceasornic (lăsînd domeniul la stînga). Printr-o nouă cvadratură se obține funcția F, ca moment încovoietor în aceeași grindă fictivă, supusă acelorași sarcini exterioare.

Aceste rezultate sînt valabile pentru un domeniu simplu conex. Prin cvadraturile indicate aici apar trei constante arbitrare care, în cazul unui domeniu multiplu conex, trebuie să fie precizate prin condiții pe fiecare contur în parte.

Astfel, prima problemă fundamentală a teoriei elasticității pentru un domeniu plan simplu conex poate să fie formulată în felul următor: să se determine o funcție biarmonică în interiorul unui domeniu dat, cunoscînd pe contur:

— funcția și derivata normală sau

— derivata normală și derivata tangențială (problema biarmonică fundamentală).

Această formulare clasică poate fi deci adaptată și în cazul coordonatelor curbilinii oarecare, folosind formulele de mai sus. Evident funcția de tensiune astfel determinată este unică, abstracție făcînd de o funcție aditivă, corespunzătoare unei stări de tensiune nulă.

Dacă conturul este format din linii de coordonate, condițiile la limită (3.10′) au o formă mai simplă și este adesea mai ușor să fie aplicate direct.

5.3. Alte reprezentări ale stării de tensiune. Dacă folosim sistemul de coordonate (ξ, η) putem scrie ecuația biarmonică sub forma (1.35) (1.35′) sau cu ajutorul operatorului (1.38). Formularea matematică a problemei este aceeași, putînd calcula pe contur și derivatele parțiale $\frac{\partial F}{\partial \xi}$, $\frac{\partial F}{\partial \eta}$.

În mod analog, putem obține o reprezentare a stării de tensiune utilă în diferite aplicații practice, pornind de la relațiile (2.4), (2.4′). Putem scrie astfel

$$\sigma_\xi = \sigma_x \sin^2\beta + \sigma_y \cos^2\beta - 2\tau_{xy} \sin\beta\cos\beta = \left(h_\xi \frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 \left[\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2 \frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2} + \right.$$
$$+ 2\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial y}\frac{\partial^2 F}{\partial \xi\,\partial \eta} + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2 \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2}\frac{\partial F}{\partial \xi} + \left.\frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2}\frac{\partial F}{\partial \eta}\right] +$$
$$+ \left(h_\xi \frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2 \left[\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 \frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial^2 F}{\partial \xi\,\partial \eta} + \left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}\frac{\partial F}{\partial \xi} + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}\frac{\partial F}{\partial \eta}\right] - 2h_\xi^2 \frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial y}\left[\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2} + \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)\frac{\partial^2 F}{\partial \xi\,\partial \eta} + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y}\frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial F}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial F}{\partial \eta}\right],$$

unde am ținut seama de (1.24) și (1.33). Procedînd analog cu celelalte componente ale tensorului tensiune și ținînd seama de (1.20) și (1.25′), obținem

$$\begin{aligned}
\frac{\sigma_\xi}{h_\xi^2} &= D^2\,\frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} + \left[\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - 2\,\frac{\partial \xi}{\partial x}\,\frac{\partial \xi}{\partial y}\,\frac{\partial^2 \xi}{\partial x\,\partial y} + \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2}\right] \frac{\partial F}{\partial \xi} + \\
&+ \left[\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} - 2\,\frac{\partial \xi}{\partial x}\,\frac{\partial \xi}{\partial y}\,\frac{\partial^2 \eta}{\partial x\,\partial y} + \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2}\right] \frac{\partial F}{\partial \eta}, \\
\frac{\sigma_\eta}{h_\eta^2} &= D^2\,\frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2} + \left[\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - 2\,\frac{\partial \eta}{\partial x}\,\frac{\partial \eta}{\partial y}\,\frac{\partial^2 \xi}{\partial x\,\partial y} + \left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2}\right] \frac{\partial F}{\partial \xi} + \\
&+ \left[\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} - 2\,\frac{\partial \eta}{\partial x}\,\frac{\partial \eta}{\partial y}\,\frac{\partial^2 \eta}{\partial x\,\partial y} + \left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2}\right] \frac{\partial F}{\partial \eta},
\end{aligned} \tag{3.13}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\tau_{\xi\eta}}{h_\xi^2} &= -\,\frac{D^2}{h_\xi^2}\,\frac{\partial^2 F}{\partial \xi\,\partial \eta} + D\,\frac{\cos\,\omega}{h_\xi\,h_\eta}\,\frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} + \left\{\frac{\partial \xi}{\partial x}\,\frac{\partial \xi}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2}\right) - \right. \\
&\left. - \left[\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2\right] \frac{\partial^2 \xi}{\partial x\,\partial y}\right\} \frac{\partial F}{\partial \xi} + \left\{\frac{\partial \xi}{\partial x}\,\frac{\partial \xi}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2}\right) - \right. \\
&\left. - \left[\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2\right] \frac{\partial^2 \eta}{\partial x\,\partial y}\right\} \frac{\partial F}{\partial \eta}, \\
\frac{\tau_{\eta\xi}}{h_\eta^2} &= D\,\frac{\cos\,\omega}{h_\xi\,h_\eta}\,\frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2} - \frac{D}{h_\eta^2}\,\frac{\partial^2 F}{\partial \xi\,\partial \eta} - \left\{\frac{\partial \eta}{\partial x}\,\frac{\partial \eta}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2}\right) - \right. \\
&\left. - \left[\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2\right] \frac{\partial^2 \xi}{\partial x\,\partial y}\right\} \frac{\partial F}{\partial \xi} - \left\{\frac{\partial \eta}{\partial x}\,\frac{\partial \eta}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2}\right) - \right. \\
&\left. - \left[\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2\right] \frac{\partial^2 \eta}{\partial x\,\partial y}\right\} \frac{\partial F}{\partial \eta},
\end{aligned} \tag{3.13′}$$

parametrii diferențiali h_ξ, h_η fiind dați de (1.22).

Se poate da o reprezentare analogă, utilă în aplicații practice, folosind operatorii (1.37), (1.37′) și relațiile (1.13), (1.13′) și (1.20′). Obținem astfel

$$\begin{aligned}
\frac{\sigma_\xi}{h_y^2} &= \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} + D\left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\,\frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} - \frac{\partial y}{\partial \eta}\,\frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2}\right)\frac{\partial F}{\partial \xi} - D\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\,\frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} - \frac{\partial y}{\partial \xi}\,\frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2}\right)\frac{\partial F}{\partial \eta}, \\
\frac{\sigma_\eta}{h_x^2} &= \frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2} - D\left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\,\frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} - \frac{\partial x}{\partial \eta}\,\frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2}\right)\frac{\partial F}{\partial \xi} + D\left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\,\frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} - \frac{\partial x}{\partial \xi}\,\frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2}\right)\frac{\partial F}{\partial \eta},
\end{aligned} \tag{3.14}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\tau_{\xi\eta}}{h_y^2} = & -\frac{D}{h_y^2}\frac{\partial^2 F}{\partial\xi\,\partial\eta} + D\frac{\cos\omega}{h_x h_y}\frac{\partial^2 F}{\partial\eta^2} + \frac{D^2}{2}\left[\frac{1}{h_y^2}\left(\frac{\partial y}{\partial\eta}\frac{\partial^2 x}{\partial\xi\,\partial\eta} - \frac{\partial x}{\partial\eta}\frac{\partial^2 y}{\partial\xi\,\partial\eta}\right) - \right.\\
& \left. - \frac{\cos\omega}{h_x h_y}\left(\frac{\partial y}{\partial\eta}\frac{\partial^2 x}{\partial\eta^2} - \frac{\partial x}{\partial\eta}\frac{\partial^2 y}{\partial\eta^2}\right) - \frac{1}{2D^3}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{D^2}{h_y^2}\right)\right]\frac{\partial F}{\partial\xi} - \\
& - \frac{D^2}{2}\left\{\frac{1}{h_y^2}\left[\frac{\partial y}{\partial\eta}\frac{\partial^2 x}{\partial\xi^2} - \frac{\partial x}{\partial\eta}\frac{\partial^2 y}{\partial\xi^2} - 2\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{1}{D}\right)\right] - \frac{\cos\omega}{h_x h_y}\left[\frac{\partial y}{\partial\eta}\frac{\partial^2 x}{\partial\xi\,\partial\eta} - \right.\right.\\
& \left.\left. - \frac{\partial x}{\partial\eta}\frac{\partial^2 y}{\partial\xi\,\partial\eta} - 2\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{1}{D}\right)\right] - \frac{1}{2D^3}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{D^2}{h_y^2}\right)\right\}\frac{\partial F}{\partial\eta}, \qquad (3.14'
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\tau_{\eta\xi}}{h_x^2} = & D\frac{\cos\omega}{h_x h_y}\frac{\partial^2 F}{\partial\xi^2} - \frac{D}{h_x^2}\frac{\partial^2 F}{\partial\xi\,\partial\eta} - \frac{D^2}{2}\left\{\frac{1}{h_x^2}\left[\frac{\partial x}{\partial\xi}\frac{\partial^2 y}{\partial\eta^2} - \frac{\partial y}{\partial\xi}\frac{\partial^2 x}{\partial\eta^2} - 2\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{1}{D}\right)\right] - \right.\\
& \left. - \frac{\cos\omega}{h_x h_y}\left[\frac{\partial x}{\partial\xi}\frac{\partial^2 y}{\partial\xi\,\partial\eta} - \frac{\partial y}{\partial\xi}\frac{\partial^2 x}{\partial\xi\,\partial\eta} - 2\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{1}{D}\right)\right] - \frac{1}{2D^3}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{D^2}{h_x^2}\right)\right\}\frac{\partial F}{\partial\xi} + \\
& + \frac{D^2}{2}\left[\frac{1}{h_x^2}\left(\frac{\partial x}{\partial\xi}\frac{\partial^2 y}{\partial\xi\,\partial\eta} - \frac{\partial y}{\partial\xi}\frac{\partial^2 x}{\partial\xi\,\partial\eta}\right) - \frac{\cos\omega}{h_x h_y}\left(\frac{\partial x}{\partial\xi}\frac{\partial^2 y}{\partial\xi^2} - \frac{\partial y}{\partial\xi}\frac{\partial^2 x}{\partial\xi^2}\right) - \right.\\
& \left. - \frac{1}{2D^3}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{D^2}{h_x^2}\right)\right]\frac{\partial F}{\partial\eta},
\end{aligned}
$$

unde parametrii diferențiali de ordinul întîi ai lui Lamé h_x și h_y sînt dați de (1.10).

În felul acesta problema plană a teoriei elasticității este în întregime formulată în tensiuni în coordonate curbilinii oarecare.

5.4. Coordonate curbilinii izogonale. În cazul coordonatelor curbilinii izogonale, ecuația de continuitate (3.2), pentru forțe masice oarecare, capătă forma

$$
\begin{aligned}
\Delta[\sigma_\xi + \sigma_\eta + (\tau_{\xi\eta} + \tau_{\eta\xi})\operatorname{ctg}\omega] = & -(1+\mu)\left\{\frac{\partial \Xi}{\partial s_\xi} + \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial s_\eta} + \right.\\
& \left. + \frac{1}{\mathrm{d}s_\xi\,\mathrm{d}s_\eta}[\Xi\,\delta(\mathrm{d}s_\eta) + [\text{-}]\,\delta(\mathrm{d}s_\xi)]\right\},
\end{aligned}
\qquad (3.15)
$$

unde $\delta(\mathrm{d}s_\xi)$ și $\delta(\mathrm{d}s_\eta)$ sînt variațiile elementelor de arc $\mathrm{d}s_\xi$ și $\mathrm{d}s_\eta$.

Folosind o funcție de tensiune F, putem scrie expresiile componentelor tensorului tensiune sub forma

$$
\begin{aligned}
\sigma_\xi &= \frac{\partial^2 F}{\partial s_\eta^2} + \frac{\operatorname{cosec}\omega}{\rho_\eta}\left(\frac{\partial F}{\partial s_\xi} - \cos\omega\,\frac{\partial F}{\partial s_\eta}\right),\\
\sigma_\eta &= \frac{\partial^2 F}{\partial s_\xi^2} + \frac{\operatorname{cosec}\omega}{\rho_\xi}\left(\frac{\partial F}{\partial s_\eta} - \cos\omega\,\frac{\partial F}{\partial s_\xi}\right),
\end{aligned}
\qquad (3.16)
$$

$$\begin{aligned}\tau_{\xi\eta} &= -\operatorname{cosec}\omega\,\frac{\partial}{\partial s_\eta}\left(\frac{\partial F}{\partial s_\xi}-\cos\omega\,\frac{\partial F}{\partial s_n}\right)+\frac{1}{\rho_\eta}\,\frac{\partial F}{\partial s_\eta},\\ \tau_{\eta\xi} &= -\operatorname{cosec}\omega\,\frac{\partial}{\partial s_\xi}\left(\frac{\partial F}{\partial s_\eta}-\cos\omega\,\frac{\partial F}{\partial s_\xi}\right)+\frac{1}{\rho_\xi}\,\frac{\partial F}{\partial s_\xi}.\end{aligned} \tag{3.16'}$$

În coordonate carteziene oblice ecuația de continuitate devine $(s_\xi = \xi,\ s_\eta = \eta\,;\ \delta(ds_\xi) = \delta(ds_\eta) = 0)$,

$$\Delta\left[\sigma_\xi+\sigma_\eta+(\tau_{\xi\eta}+\tau_{\eta\xi})\operatorname{ctg}\omega\right] = -(1+\mu)\left(\frac{\partial\Xi}{\partial\xi}+\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial\eta}\right) \tag{3.17}$$

și regăsim reprezentarea dată de noi anterior $(1/\rho_\xi = 1/\rho_\eta = 0)$ [8]

$$\begin{aligned}\sigma_\xi &= \frac{\partial^2 F}{\partial\eta^2},\\ \sigma_\eta &= \frac{\partial^2 F}{\partial\xi^2},\end{aligned} \tag{3.18}$$

$$\begin{aligned}\tau_{\xi\eta} &= -\frac{\partial^2 F}{\partial\xi\,\partial\eta}\operatorname{cosec}\omega+\frac{\partial^2 F}{\partial\eta^2}\operatorname{ctg}\omega,\\ \tau_{\eta\xi} &= -\frac{\partial^2 F}{\partial\xi\,\partial\eta}\operatorname{cosec}\omega+\frac{\partial^2 F}{\partial\xi^2}\operatorname{ctg}\omega.\end{aligned} \tag{3.18'}$$

5.5. Coordonate curbilinii ortogonale. În cazul coordonatelor curbilinii ortogonale, ecuația de continuitate capătă forma

$$\Delta(\sigma_\xi+\sigma_\eta) = -(1+\mu)\left(\frac{\partial\Xi}{\partial s_\xi}+\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial s_\eta}+\frac{1}{\rho_\eta}\,\Xi+\frac{1}{\rho_\xi}\,\mathrm{H}\right), \tag{3.19}$$

pentru coordonate carteziene ortogonale regăsind condiția dată de M. Lévy [5], [10].

Starea de tensiune se exprimă în coordonate $(s_\xi,\ s_\eta)$ sub forma

$$\begin{aligned}\sigma_\xi &= \frac{\partial^2 F}{\partial s_\eta^2}+\frac{1}{\rho_\eta}\,\frac{\partial F}{\partial s_\xi},\\ \sigma_\eta &= \frac{\partial^2 F}{\partial s_\xi^2}+\frac{1}{\rho_\xi}\,\frac{\partial F}{\partial s_\eta},\end{aligned} \tag{3.20}$$

$$\tau_{\xi\eta} = -\frac{\partial^2 F}{\partial s_\xi\,\partial s_\eta}+\frac{1}{\rho_\xi}\,\frac{\partial F}{\partial s_\eta} = -\frac{\partial^2 F}{\partial s_\eta\,\partial s_\xi}+\frac{1}{\rho_\eta}\,\frac{\partial F}{\partial s_\xi}. \tag{3.20'}$$

Condițiile la limită devin

$$\begin{aligned}p_{n\xi} &= \sigma_\xi\cos(n,\xi)+\tau_{\xi\eta}\sin(n,\xi),\\ p_{n\eta} &= \tau_{\xi\eta}\cos(n,\xi)+\sigma_\eta\sin(n,\xi),\end{aligned} \tag{3.21}$$

avînd deci o formă analogă cu cele din cazul coordonatelor carteziene ortogonale.

În coordonate (ξ, η) reprezentarea (3.14), (3.14′) se simplifică de asemenea, căpătînd forma

$$\begin{aligned} \sigma_\xi &= h_y^2 \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} + \frac{D}{h_y \rho_\eta} \frac{\partial F}{\partial \xi} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \eta} (h_y^2) \frac{\partial F}{\partial \eta}, \\ \sigma_\eta &= h_x^2 \frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \xi} (h_x^2) \frac{\partial F}{\partial \xi} + \frac{D}{h_x \rho_\xi} \frac{\partial F}{\partial \eta}, \end{aligned} \tag{3.22}$$

$$\frac{\tau_{\xi\eta}}{D} = - \frac{\partial^2 F}{\partial \xi \, \partial \eta} - \frac{1}{2h_x^2} \frac{\partial}{\partial \eta} (h_x^2) \frac{\partial F}{\partial \xi} - \frac{1}{2h_y^2} \frac{\partial}{\partial \xi} (h_y^2) \frac{\partial F}{\partial \eta}. \tag{3.22′}$$

5.6. Coordonate curbilinii armonice. În cazul coordonatelor curbilinii armonice putem reprezenta starea de tensiune sub forma

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} \sigma_\xi &= h \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} - \frac{\partial h}{\partial \xi} \frac{\partial F}{\partial \xi} + \frac{\partial h}{\partial \eta} \frac{\partial F}{\partial \eta}, \\ \frac{1}{h} \sigma_\eta &= h \frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2} + \frac{\partial h}{\partial \xi} \frac{\partial F}{\partial \xi} - \frac{\partial h}{\partial \eta} \frac{\partial F}{\partial \eta}, \end{aligned} \tag{3.23}$$

$$\frac{1}{h} \tau_{\xi\eta} = - h \frac{\partial^2 F}{\partial \xi \, \partial \eta} - \frac{\partial h}{\partial \eta} \frac{\partial F}{\partial \xi} - \frac{\partial h}{\partial \xi} \frac{\partial F}{\partial \eta}, \tag{3.23′}$$

unde $h = h_x = h_y$ este parametrul diferențial de ordinul întîi al lui Lamé.

§ 6. FORMULAREA PROBLEMEI ÎN DEPLASĂRI

În cazul celei de-a doua probleme fundamentale a teoriei elasticității (condiții la limită în deplasări) este, în general, mai convenabil să se folosească o formulare în deplasări a problemei (o formulare în care deplasările sînt alese ca necunoscute). Această formulare este de asemenea utilă și pentru problema mixtă a teoriei elasticității (condiții la limită în tensiuni pe o parte a conturului și în deplasări pe restul conturului).

6.1. Reprezentarea stării de deformație. Eliminînd tensiunile și deformațiile specifice între ecuațiile de echilibru (2.15), legea lui Hooke (2.61) (2.61′), (2.62) și relațiile (2.34), (2.34′), care leagă deformațiile specifice de deplasări, obținem ecuațiile de tip Lamé pe care trebuie să le verifice componentele vectorului deplasare. Nu vom scrie aceste ecuații, forma lor — destul de complicată — neinteresînd în mod deosebit.

Pentru integrarea acestor ecuații este însă important să reprezentăm componentele vectorului deplasare cu ajutorul unei funcții de deplasare; pentru aceasta vom folosi reprezentarea

$$\begin{aligned} u &= - \frac{1 + \mu}{1 - \mu} \frac{\partial^2 \mathfrak{F}}{\partial x \, \partial y}, \\ v &= \frac{2}{1 - \mu} \frac{\partial^2 \mathfrak{F}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{F}}{\partial y^2}, \end{aligned} \tag{3.24}$$

sau reprezentarea

$$
\begin{aligned}
u &= \frac{2}{1-\mu}\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial x^2},\\
v &= -\frac{1+\mu}{1-\mu}\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial x\, \partial y},
\end{aligned}
\tag{3.24'}
$$

date de K. Marguerre [6] în cazul coordonatelor carteziene ortogonale; aici funcția $\mathcal{F} = \mathcal{F}(x, y)$ este biarmonică.

Pornind de la relațiile (2.28′) și folosind operatorii (1.40), (1.41), (1.45), putem scrie

$$
\begin{aligned}
u_\xi &= \operatorname{cosec}\omega\left[\frac{1+\mu}{1-\mu}\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial x\, \partial y}\sin\beta + \left(\frac{2}{1-\mu}\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial y^2}\right)\cos\beta\right] =\\
&= \operatorname{cosec}\omega\left[\left(\sin\beta\frac{\partial}{\partial x} - \cos\beta\frac{\partial}{\partial y}\right)\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y} - \frac{2}{1-\mu}\left(\cos\beta\frac{\partial}{\partial x} + \sin\beta\frac{\partial}{\partial y}\right)\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x}\right] =\\
&= \operatorname{cosec}^2\omega\left\{\left(\frac{\partial}{\partial s_\xi} - \cos\omega\frac{\partial}{\partial s_\eta}\right)\left[\operatorname{cosec}\omega\left(-\cos\beta\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial s_\xi} + \cos\alpha\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial s_\eta}\right) -\right.\right.\\
&\left.\left. - \frac{2\sin\omega}{1-\mu}\frac{\partial}{\partial s_\eta}\left[\operatorname{cosec}\omega\left(\sin\beta\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial s_\xi} - \sin\alpha\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial s_\eta}\right)\right]\right]\right\}.
\end{aligned}
$$

Procedînd analog pentru u_η și efectuînd calculele, obținem

$$
\begin{aligned}
\sin^3\omega\, u_\xi &= -\cos\beta\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial s_\xi^2} + \cos\alpha\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial s_\xi\, \partial s_\eta} + \frac{1}{1-\mu}[(1-\mu)\cos\beta\cos\omega -\\
&- 2\sin\beta\sin\omega]\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial s_\eta\, \partial s_\xi} - \frac{1}{1-\mu}[(1-\mu)\cos\alpha\cos\omega - 2\sin\alpha\sin\omega]\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial s_\eta^2} +\\
&+ \operatorname{cosec}\omega\left\{\frac{\cos\beta\cos\omega}{\rho_\xi} - \frac{\cos\alpha}{\rho_\xi'} - \frac{1}{1-\mu}[(1-\mu)\cos\alpha\cos\omega -\right.\\
&\left. - 2\sin\alpha\sin\omega]\frac{1}{\rho_\eta} + \frac{\cos\omega}{1-\mu}[(1-\mu)\cos\beta\cos\omega - 2\sin\beta\sin\omega]\frac{1}{\rho_\eta'}\right\}\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial s_\xi} +\\
&+ \operatorname{cosec}\omega\left\{-\frac{\cos\beta}{\rho_\xi} + \frac{\cos\alpha\cos\omega}{\rho_\xi'} + \frac{\cos\omega}{1-\mu}[(1-\mu)\cos\alpha\cos\omega -\right.\\
&\left. - 2\sin\alpha\sin\omega]\frac{1}{\rho_\eta} - \frac{1}{1-\mu}[(1-\mu)\cos\beta\cos\omega - 2\sin\beta\sin\omega]\frac{1}{\rho_\eta'}\right\}\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial s_\eta},
\end{aligned}
\tag{3.25}
$$

$$\sin^3\omega\, u_\eta = \frac{1}{1-\mu}\,[(1-\mu)\cos\beta\cos\omega + 2\sin\beta\sin\omega]\,\frac{\partial^2\mathcal{F}}{\partial s_\xi^2} -$$

$$-\frac{1}{1-\mu}\,[(1-\mu)\cos\alpha\cos\omega + 2\sin\alpha\sin\omega)]\,\frac{\partial^2\mathcal{F}}{\partial s_\xi\,\partial s_\eta} - \cos\beta\,\frac{\partial^2\mathcal{F}}{\partial s_\eta\,\partial s_\xi} +$$

$$+\cos\alpha\,\frac{\partial^2\mathcal{F}}{\partial s_\eta^2} + \operatorname{cosec}\omega\left\{\frac{\cos\alpha}{\rho_\eta} - \frac{\cos\beta\cos\omega}{\rho_\eta'} - \frac{\cos\omega}{1-\mu}\,[(1-\mu)\cos\beta\cos\omega +\right.$$

$$\left.+2\sin\beta\sin\omega]\,\frac{1}{\rho_\xi} + \frac{1}{1-\mu}\,[(1-\mu)\cos\alpha\cos\omega + 2\sin\alpha\sin\omega]\,\frac{1}{\rho_\xi'}\right\}\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial s_\xi} +$$

$$+\operatorname{cosec}\omega\left\{-\frac{\cos\alpha\cos\omega}{\rho_\eta} + \frac{\cos\beta}{\rho_\eta'} + \frac{1}{1-\mu}\,[(1-\mu)\cos\beta\cos\omega +\right.$$

$$\left.+2\sin\beta\sin\omega]\,\frac{1}{\rho_\xi} - \frac{\cos\omega}{1-\mu}\,[(1-\mu)\cos\alpha\cos\omega + 2\sin\alpha\sin\omega]\,\frac{1}{\rho_\xi'}\right\}\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial s_\eta},$$

această reprezentare corespunzînd formulelor (3.24). Evident, plecînd de la formulele (3.24′) putem găsi o reprezentare asemănătoare.

Funcția de deplasare $\mathcal{F} = \mathcal{F}(s_\xi, s_\eta)$ verifică ecuația

$$\Delta\Delta\mathcal{F} = 0, \tag{3.26}$$

iar condițiile la limită se pun sub forma

$$u_\xi = u_{\xi n}, \qquad u_\eta = u_{\eta n}, \tag{3.27}$$

unde $(u_{\xi n}, u_{\eta n})$ sînt deplasările corespunzătoare unui element de contur de normală exterioară $\overline{n}$. În felul acesta problema plană capătă o formulare și în deplasări.

6.2. Coordonate curbilinii izogonale. În cazul coordonatelor curbilinii izogonale, componentele vectorului deplasare pot fi exprimate cu ajutorul unei funcții de deplasare $\mathcal{F}$ sub forma

$$\sin^3\omega\, u_\xi = -\cos\beta\,\frac{\partial^2\mathcal{F}}{\partial s_\xi^2} + \cos\alpha\,\frac{\partial^2\mathcal{F}}{\partial s_\xi\,\partial s_\eta} + \frac{1}{1-\mu}\,[(1-\mu)\cos\beta\cos\omega -$$

$$-2\sin\beta\sin\omega]\,\frac{\partial^2\mathcal{F}}{\partial s_\eta\,\partial s_\xi} - \frac{1}{1-\mu}\,[(1-\mu)\cos\alpha\cos\omega - 2\sin\alpha\sin\omega]\,\frac{\partial^2\mathcal{F}}{\partial s_\eta^2} -$$

$$-\left\{\frac{\sin\beta}{\rho_\xi} + \frac{1}{1-\mu}\,[(1-\mu)\sin\beta\cos\omega + 2\cos\beta\sin\omega]\,\frac{1}{\rho_\eta}\right\}\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial s_\xi} + \tag{3.28}$$

$$+\left\{\frac{\sin\alpha}{\rho_\xi} + \frac{1}{1-\mu}\,[(1-\mu)\sin\alpha\cos\omega + 2\cos\alpha\sin\omega]\,\frac{1}{\rho_\eta}\right\}\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial s_\eta},$$

$$\sin^3\omega\, u_\eta = \frac{1}{1-\mu}\left[(1-\mu)\cos\beta\cos\omega + 2\sin\beta\sin\omega\right]\frac{\partial^2\mathscr{F}}{\partial s_\xi^2} -$$
$$-\frac{1}{1-\mu}\left[(1-\mu)\cos\alpha\cos\omega + 2\sin\alpha\sin\omega\right]\frac{\partial^2\mathscr{F}}{\partial s_\xi\,\partial s_\eta} - \cos\beta\frac{\partial^2\mathscr{F}}{\partial s_\eta\,\partial s_\xi} +$$
$$+\cos\alpha\frac{\partial^2\mathscr{F}}{\partial s_\eta^2} + \left\{\frac{\sin\beta}{\rho_\eta} + \frac{1}{1-\mu}\left[(1-\mu)\sin\beta\cos\omega - 2\cos\beta\sin\omega\right]\frac{1}{\rho_\xi}\right\}\frac{\partial\mathscr{F}}{\partial s_\xi} -$$
$$-\left\{\frac{\sin\alpha}{\rho_\eta} + \frac{1}{1-\mu}\left[(1-\mu)\sin\alpha\cos\omega - 2\cos\alpha\sin\omega\right]\frac{1}{\rho_\xi}\right\}\frac{\partial\mathscr{F}}{\partial s_\eta}.$$

Pentru cazul coordonatelor carteziene oblice ($s_\xi = \xi$, $s_\eta = \eta$; $1/\rho_\xi = 1/\rho_\eta = 0$) putem scrie

$$u_\xi = -\frac{1+\mu}{1-\mu}\left(\frac{\partial^2\mathscr{F}}{\partial\xi\,\partial\eta} - \cos\omega\frac{\partial^2\mathscr{F}}{\partial\eta^2}\right),$$
$$u_\eta = \frac{2}{1-\mu}\frac{\partial^2\mathscr{F}}{\partial\xi^2} - \frac{3-\mu}{1-\mu}\cos\omega\frac{\partial^2\mathscr{F}}{\partial\xi\,\partial\eta} + \frac{\partial^2\mathscr{F}}{\partial\eta^2}. \tag{3.29}$$

6.3. Coordonate curbilinii ortogonale. În coordonate curbilinii ortogonale, componentele vectorului deplasare capătă forma remarcabilă

$$u_\xi = \sin\alpha\frac{\partial^2\mathscr{F}}{\partial s_\xi^2} + \cos\alpha\frac{\partial^2\mathscr{F}}{\partial s_\xi\,\partial s_\eta} - \frac{2\cos\alpha}{1-\mu}\frac{\partial^2\mathscr{F}}{\partial s_\eta\,\partial s_\xi} + \frac{2\sin\alpha}{1-\mu}\frac{\partial^2\mathscr{F}}{\partial s_\eta^2} -$$
$$-\left(\frac{\cos\alpha}{\rho_\xi} - \frac{2\sin\alpha}{1-\mu}\frac{1}{\rho_\eta}\right)\frac{\partial\mathscr{F}}{\partial s_\xi} + \left(\frac{\sin\alpha}{\rho_\xi} + \frac{2\cos\alpha}{1-\mu}\frac{1}{\rho_\eta}\right)\frac{\partial\mathscr{F}}{\partial s_\eta},$$
$$u_\eta = \frac{2\cos\alpha}{1-\mu}\frac{\partial^2\mathscr{F}}{\partial s_\xi^2} - \frac{2\sin\alpha}{1-\mu}\frac{\partial^2\mathscr{F}}{\partial s_\xi\,\partial s_\eta} + \sin\alpha\frac{\partial^2\mathscr{F}}{\partial s_\eta\,\partial s_\xi} + \cos\alpha\frac{\partial^2\mathscr{F}}{\partial s_\eta^2} +$$
$$+\left(\frac{\cos\alpha}{\rho_\eta} + \frac{2\sin\alpha}{1-\mu}\frac{1}{\rho_\xi}\right)\frac{\partial\mathscr{F}}{\partial s_\xi} - \left(\frac{\sin\alpha}{\rho_\eta} - \frac{2\cos\alpha}{1-\mu}\frac{1}{\rho_\xi}\right)\frac{\partial\mathscr{F}}{\partial s_\eta}. \tag{3.30}$$

6.4. Coordonate curbilinii armonice. De asemenea, în cazul coordonatelor curbilinii armonice este interesant să reprezentăm componentele vectorului deplasare în coordonate (ξ, η) sub forma

$$\frac{1}{h^3}u_\xi = -\frac{\partial x}{\partial\eta}\frac{\partial^2\mathscr{F}}{\partial\xi^2} - \frac{1+\mu}{1-\mu}\frac{\partial x}{\partial\xi}\frac{\partial^2\mathscr{F}}{\partial\xi\,\partial\eta} - \frac{2}{1-\mu}\frac{\partial x}{\partial\eta}\frac{\partial^2\mathscr{F}}{\partial\eta^2} -$$
$$-\frac{1+\mu}{1-\mu}\frac{1}{h}\left[\left(\frac{\partial x}{\partial\xi}\frac{\partial h}{\partial\eta} - \frac{\partial x}{\partial\eta}\frac{\partial h}{\partial\xi}\right)\frac{\partial\mathscr{F}}{\partial\xi} + \left(\frac{\partial x}{\partial\xi}\frac{\partial h}{\partial\xi} + \frac{\partial x}{\partial\eta}\frac{\partial h}{\partial\eta}\right)\frac{\partial\mathscr{F}}{\partial\eta}\right],$$
$$\frac{1}{h^3}u_\eta = \frac{2}{1-\mu}\frac{\partial x}{\partial\xi}\frac{\partial^2\mathscr{F}}{\partial\xi^2} + \frac{1+\mu}{1-\mu}\frac{\partial x}{\partial\eta}\frac{\partial^2\mathscr{F}}{\partial\xi\,\partial\eta} + \frac{\partial x}{\partial\xi}\frac{\partial^2\mathscr{F}}{\partial\eta^2} +$$
$$+\frac{1+\mu}{1-\mu}\frac{1}{h}\left[\left(\frac{\partial x}{\partial\xi}\frac{\partial h}{\partial\xi} + \frac{\partial x}{\partial\eta}\frac{\partial h}{\partial\eta}\right)\frac{\partial\mathscr{F}}{\partial\xi} - \left(\frac{\partial x}{\partial\xi}\frac{\partial h}{\partial\eta} - \frac{\partial x}{\partial\eta}\frac{\partial h}{\partial\xi}\right)\frac{\partial\mathscr{F}}{\partial\eta}\right]. \tag{3.31}$$

§ 7. METODE DE CALCUL

În general, se pot folosi metode de calcul foarte variate [1]. În cele ce urmează vom menţiona în special cîteva posibilităţi de a construi funcţii de tensiune F (3.9) sau funcţii de deplasare $\mathcal{F}$ (3.26).

7.1. Coordonate curbilinii oarecare. Astfel este util să căutăm integrale particulare ale ecuaţiei biarmonice de forma

$$\varphi(\xi) + \psi(\eta), \tag{3.32}$$

deci integrale care să fie funcţii de o singură variabilă.

De asemenea, o altă categorie de integrale ce se pot calcula e de forma

$$\varphi(\xi)\, \psi(\eta), \tag{3.33}$$

problema trebuind să fie cercetată de la caz la caz. În cazul în care, pe această cale, nu obţinem rezultate convenabile din punct de vedere al calculului, de exemplu în cazul în care nu putem separa variabilele, putem folosi o idee a lui E. Hampe [4], căutînd integrale de forma

$$\chi(\xi, \eta)\, \varphi(\xi)\, \psi(\eta), \tag{3.34}$$

unde funcţia $\chi(\xi, \eta)$ este determinată astfel încît calculul să fie cît mai simplu.

Funcţiile biarmonice pot fi reprezentate sub forma

$$\Phi(\xi, \eta) + [a + bx + cy + d(x^2 + y^2)]\, \Psi(\xi, \eta), \tag{3.35}$$

dată de E. Almansi [3], unde a, b, c, d sînt constante arbitrare (b, c, d neputînd fi simultan nule, altfel funcţia este armonică), funcţiile $x = x(\xi, \eta)$, $y = y(\xi, \eta)$ sînt relaţiile de transformare a coordonatelor iar $\Phi = \Phi(\xi, \eta)$, $\Psi = \Psi(\xi, \eta)$ sînt funcţii armonice, care verifică ecuaţia

$$\Delta\Omega(\xi, \eta) = 0. \tag{3.36}$$

O funcţie armonică $\Omega(\xi, \eta)$ verifică, în general, o ecuaţie de forma

$$f_{20}\frac{\partial^2\Omega}{\partial\xi^2} + f_{11}\frac{\partial^2\Omega}{\partial\xi\,\partial\eta} + f_{02}\frac{\partial^2\Omega}{\partial\eta^2} + f_{10}\frac{\partial\Omega}{\partial\xi} + f_{01}\frac{\partial\Omega}{\partial\eta} = 0, \tag{3.37}$$

cu coeficienţii variabili $f_{ij} = f_{ij}(\xi, \eta)$ $(i, j = 0,1,2)$.

Pentru o reprezentare de forma (3.32) găsim două ecuaţii diferenţiale de ordinul al doilea cu coeficienţi variabili, corespunzătoare pentru $\varphi(\xi)$ şi pentru $\psi(\eta)$, care ne pot conduce la integrale particulare, diferite de o constantă, dacă coeficienţii corespunzători sînt funcţii de o singură variabilă — deci dacă f_{20} şi f_{10} sînt funcţii numai de ξ, respectiv f_{02} şi f_{01} funcţii numai de η. Eventual putem amplifica pe $\varphi(\xi)$ sau $\psi(\eta)$ cu o funcţie $\chi(\xi, \eta)$ pe care o determinăm astfel — dacă este posibil — încît coeficienţii menţionaţi să fie funcţie de o singură variabilă.

---

[1] Vezi, de exemplu, [10].

În cazul unei reprezentări de forma (3.33) obținem

$$f_{20}\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}\xi^2}\psi+f_{11}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\xi}\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}\eta}+f_{02}\varphi\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}\eta^2}+f_{10}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\xi}\psi+f_{01}\varphi\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}\eta}=0. \tag{3.38}$$

Dacă, de exemplu, coeficienții f_{11} și f_{01} nu depind de η, putem împărți cu $\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}\eta}$ și deriva în raport cu η. Obținem astfel

$$\frac{1}{\varphi}\left(f_{20}\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}\xi^2}+f_{10}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\xi}\right)+f_{02}\frac{\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\eta}\left(\dfrac{\dfrac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}\eta^2}}{\dfrac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}\eta}}\right)}{\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\eta}\left(\dfrac{\psi}{\dfrac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}\eta}}\right)}=0. \tag{3.39}$$

Dacă, mai mult, coeficienții f_{20}, f_{02} și f_{10} sînt funcții de o singură variabilă, rezultă că putem separa variabilele în ecuația (3.39).

De asemenea, dacă f_{11} și f_{10} nu depind de ξ, obținem

$$\frac{1}{\psi}\left(f_{02}\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}\eta^2}+f_{01}\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}\eta}\right)+f_{20}\frac{\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\left(\dfrac{\dfrac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}\xi^2}}{\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\xi}}\right)}{\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\left(\dfrac{\varphi}{\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\xi}}\right)}=0, \tag{3.39'}$$

ecuație care este cu variabile separate dacă coeficienții f_{02}, f_{20} și f_{01} sînt funcții de o singură variabilă.

În cazul în care coeficienții ecuației (3.38) nu îndeplinesc condițiile menționate mai sus, se pot căuta integrale de forma (3.34), încercînd să determinăm funcția $\chi(\xi,\eta)$ astfel ca aceste condiții să fie îndeplinite.

Obținem astfel ecuația

$$\begin{aligned}&f_{20}\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}\xi^2}\psi+f_{11}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\xi}\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}\eta}+f_{02}\varphi\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}\eta^2}+\frac{1}{\chi}\left(2f_{20}\frac{\partial\chi}{\partial\xi}+f_{11}\frac{\partial\chi}{\partial\eta}+f_{10}\chi\right)\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\xi}\psi+\\&+\frac{1}{\chi}\left(f_{11}\frac{\partial\chi}{\partial\xi}+2f_{02}\frac{\partial\chi}{\partial\eta}+f_{01}\chi\right)\varphi\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}\eta}+\frac{1}{\chi}\left(f_{20}\frac{\partial^2\chi}{\partial\xi^2}+f_{11}\frac{\partial^2\chi}{\partial\xi\,\partial\eta}+\right.\\&\left.+f_{02}\frac{\partial^2\chi}{\partial\eta^2}+f_{10}\frac{\partial\chi}{\partial\xi}+f_{01}\frac{\partial\chi}{\partial\eta}\right)\varphi\psi=0,\end{aligned} \tag{3.40}$$

care ne arată că, pentru a putea determina funcția $\chi(\xi,\eta)$ într-un mod convenabil, trebuie ca coeficienții f_{20}, f_{11} și f_{02} să fie funcții de o singură variabilă.

7.2. Coordonate curbilinii ortogonale. Ideile dezvoltate la punctul anterior pot căpăta aspecte interesante în cazul coordonatelor curbilinii ortogonale. Astfel, dacă ne referim la ecuația armonică (3.36), unde operatorul lui Laplace este dat de (1.57) și dacă alegem integrale de forma

$$\Omega\,(s_\xi\,,\,s_\eta) = \varphi\,(s_\xi)\;\psi\,(s_\eta), \tag{3.41}$$

obținem

$$\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}s_\xi^2}\,\psi + \varphi\,\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}s_\eta^2} + \frac{1}{\rho_\eta}\,\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s_\xi}\,\psi + \frac{1}{\rho_\xi}\,\varphi\,\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}s_\eta} = 0. \tag{3.42}$$

De exemplu, în cazul în care $\rho_\xi = \rho_\xi\,(s_\eta)$, $\rho_\eta = \rho_\eta\,(s_\xi)$, deci în cazul în care razele de curbură sînt constante de-a lungul unei linii de coordonate, variind de la o linie la alta — liniile de coordonate fiind astfel familii de cercuri — putem separa cu ușurință variabilele, obținînd integrale particulare interesante ; ecuațiile diferențiale care trebuie integrate au forma

$$\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}s_\xi^2} + \frac{1}{\rho_\eta}\,\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s_\xi} \pm K^2\,\varphi = 0,\\ &\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}s_\eta^2} + \frac{1}{\rho_\xi}\,\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}s_\eta} \mp K^2\,\psi = 0, \end{aligned} \tag{3.43}$$

unde K este o constantă arbitrară.

De altfel, în cazul particular menționat, putem obține cu ușurință și integrale funcții de o singură variabilă, plecînd de la ecuațiile

$$\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}^2\Omega}{\mathrm{d}s_\xi^2} + \frac{1}{\rho_\eta}\,\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}s_\xi} = 0,\\ &\frac{\mathrm{d}^2\Omega}{\mathrm{d}s_\eta^2} + \frac{1}{\rho_\xi}\,\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}s_\eta} = 0\,; \end{aligned} \tag{3.44}$$

se observă că aceste ecuații diferențiale sînt cazuri particulare ale ecuațiilor (3.43), pentru $K = 0$. Aceasta ne conduce la integralele particulare

$$\begin{aligned} &\Omega = \int \mathrm{e}^{-\int \frac{1}{\rho_\eta}\,\mathrm{d}s_\xi}\,\mathrm{d}s_\xi\,,\\ &\Omega = \int \mathrm{e}^{-\int \frac{1}{\rho_\xi}\,\mathrm{d}s_\eta}\,\mathrm{d}s_\eta\,. \end{aligned} \tag{3.45}$$

În cazuri mai complicate, putem alege o funcție $\Omega\,(s_\xi\,,\,s_\eta)$ de forma

$$\Omega = \chi\,(s_\xi\,,\,s_\eta)\;\varphi\,(s_\xi)\;\psi\,(s_\eta)\,, \tag{3.46}$$

procedînd după cum am indicat la punctul precedent.

7.3. Coordonate curbilinii armonice. În particular, în cazul coordonatelor curbilinii armonice, funcția $\Omega\,(\xi,\,\eta)$ are aceeași formă ca și în cazul coordonatelor carteziene ortogonale. În felul acesta — de exemplu — funcțiile

$$x\,(\xi,\,\eta)\,e^{\alpha\xi+\beta\eta},\quad y\,(\xi,\,\eta)\,e^{\alpha\xi+\beta\eta},\quad (\alpha^2+\beta^2=0), \tag{3.47}$$

sînt biarmonice într-un astfel de sistem de coordonate. Aceste coordonate ne conduc și la reprezentări conforme, utile în multe cazuri [7].

7.4. *Considerații finale.* Cu ajutorul integralelor particulare obținute se pot construi funcțiile de tensiune sau funcțiile de deplasare căutate, obținînd eventual un sistem complet de funcții, util în practică. Alegînd un sistem de coordonate astfel încît domeniul considerat să fie mărginit de linii de coordonate, putem pune condițiile la limită într-un mod mai simplu. Am dezvoltat asemenea idei, în diferite cazuri particulare, în [9], [11], [12].

Este interesantă construirea a diferite transformări integrale, care să facă aplicabil calculul operațional în diferite sisteme de coordonate curbilinii.

Primită la redacție la 14 iunie 1962

SUR LE PROBLÈME PLAN DE LA THÉORIE DE L'ÉLASTICITÉ EN COORDONNÉES CURVILIGNES QUELCONQUES

III. FORMULATION MATHÉMATIQUE DU PROBLÈME. MÉTHODES DE CALCUL

RÉSUMÉ

Après avoir écrit l'équation de continuité en tensions, sous la forme (3.2) ou (3.3), on représente la solution du système (3.2), (3.4), (3.5) (dans l'absence des forces massiques) sous la forme (3.7), (3.7′).

Les conditions aux limites, posées sous la forme (3.10), (3.10′), deviennent (3.11) ou (3.12). C'est ainsi que le premier problème fondamental peut être formulé d'une manière classique.

À l'aide du système de coordonnées (ξ, η) on peut utiliser aussi les représentations (3.13), (3.13′) et (3.14), (3.14′).

Ensuite, en utilisant une formulation en coordonnées cartésiennes orthogonales, due à K. Marguerre, on représente la solution des équations de Lamé, en coordonnées curvilignes quelconques, sous la forme (3.25) (dans l'absence des forces massiques). Les conditions aux limites sont posées sous la forme (3.27), le problème étant ainsi formulé en déplacements.

On particularise les résultats obtenus pour les coordonnées curvilignes isogonales, orthogonales et harmoniques.

On discute la possibilité de construire des fonctions harmoniques de la forme (3.32), (3.33) ou (3.34), pour les coordonnées curvilignes quelconques et pour les coordonnées curvilignes orthogonales spécialement. Les fonctions biharmoniques de tension ou de déplacement peuvent alors être construites à l'aide de la formule d'Almansi (3.35).

BIBLIOGRAFIE

1. G.-B. Airy, *On the Strains in the Interior of Beams*. British Assoc. Adv. Sci. Rept., 1862.
2. — *On the Strains in the Interior of Beams*. Phil. Trans., **153**, 49 (1863).
3. E. Almansi, *Sull'integrazione dell'equazione differenziale* $\Delta^{2n} = 0$. Ann. di Matem., seria III, **II**, 1 (1898).
4. E. Hampe, *Zur Berechnung von beliebig begrenzten Scheiben (Rahmenecken, Bogenscheibenbrücken u.s.w.) mit Hilfe der Airyschen Spannungsfunktion*. Baupl. und Bautechn., **9**, *3*, 127 (1955).
5. M. Lévy, *Sur l'équilibre élastique d'un barrage en maçonnerie à section triangulaire*. C. Rend. hebd. des séances de l'Acad. des Sc., **127**, 10 (1898).
6. K. Marguerre, *Ebenes und achsensymmetrisches Problem der Elastizitätstheorie*. Z.A.M.M., **13**, *6*, 437 (1933).
7. Н. И. Мусхелишвили, *Некоторые основные задачи математической теории упругости*. Изд. Акад. Наук СССР, Москва, 1954.
8. P. P. Teodorescu, *Asupra problemei plane a elasticității în coordonate oblice*. St. cerc. mec. apl., Acad. R.P.R., **IX**, *2*, 391 (1958).
9. — *Funcții de tensiune în problema plană a teoriei elasticității*. Acad. R.P.R., Filiala Iași, St. și cerc. științ., matem., **XI**, *2*, 363 (1960).
10. — *Probleme plane în teoria elasticității*. I. Ed. Acad. R.P.R., București, 1961.
11. — *Asupra utilizării funcțiilor de tensiune în problema plană a teoriei elasticității în coordonate oblice*. An. Univ. din București, seria șt. nat., mat.-fizică, **XI**, *33* (1962).
12. — *Considerații în legătură cu problema plană a teoriei elasticității în coordonate triunghiulare*. St. cerc. mec. apl., Acad. R.P.R., **XIII**, *4*, 849 (1962).
13. — *Asupra problemei plane a teoriei elasticității în coordonate curbilinii oarecare*. I. *Introducere. Preliminarii matematice*. St. cerc. mec. apl., Acad. R.P.R., **XIII**, *5*, 1233 (1962).
14. — *Asupra problemei plane a teoriei elasticității în coordonate curbilinii oarecare*. II. *Stare de solicitare*. St. cerc. mec. apl., Acad. R.P.R., **XIII**, *6*, 1387 (1962).

STUDII

ARTICULAȚIA PLASTICĂ ÎN CALCULUL PLASTIC AL STRUCTURILOR DE BETON ARMAT

DE

VALERIU PETCU [1]

539.3

Elaborarea teoriei plastice a structurilor static nedeterminate, ca bază a determinării capacității lor reale de rezistență, este rezultatul luării în considerare, în calculul static, a proprietăților plastice ale materialelor de construcție.

Din punct de vedere static, apariția și dezvoltarea deformațiilor plastice într-o structură static nedeterminată, solicitată de sarcini ce cresc în funcție de un singur parametru, conduce la formarea succesivă a *articulațiilor plastice* în anumite secțiuni — cele mai solicitate — denumite *secțiuni critice*.

Acest fenomen are drept consecință modificarea schemei statice a structurii pentru fiecare articulație plastică nou formată. Datorită acestui fapt, din momentul apariției primei articulații plastice pînă la epuizarea capacității de rezistență a structurii are loc o permanentă redistribuire de eforturi, a cărei mărime, exprimată prin *coeficientul de redistribuție* (raportul dintre sarcina de rupere și sarcina de apariție a primei articulații plastice) este funcție de schema și tipul încărcării, de caracteristicile statico-geometrice ale structurii, de valoarea momentelor plastice ale secțiunilor critice și de proprietățile plastice ale materialelor care intră în alcătuirea structurii considerate.

Epuizarea capacității de rezistență a unei structuri poate fi consecința uneia din următoarele două cauze :

— transformarea structurii, în totalitate sau în parte, în mecanism, ca urmare a procesului de formare succesivă a articulațiilor plastice (tipul I de rupere) ;

---

[1] Institutul de cercetări în construcții și economia construcțiilor (INCERC), București.

— ruperea unei secțiuni critice datorită epuizării capacității de rotire a articulației plastice corespunzătoare înainte, de transformarea structurii în mecanism (tipul II de rupere).

În cazul structurilor din beton armat, care posedă o capacitate redusă de deformare plastică, tipul curent de rupere corespunde epuizării capacității de rotire a unei articulații plastice, înainte de formarea mecanismului de rupere.

Din această cauză, stabilirea capacității de rotire a articulației plastice constitue o condiție indispensabilă a aplicării metodelor plastice de calcul la determinarea capacității de rezistență a acestor structuri.

Scopul studiului ce urmează constă în determinarea capacității de rotire a articulației plastice la elemente încovoiate de beton armat.

Pe baza rezultatelor obținute se deduce valoarea limită a coeficientului de redistribuție, pînă la care redistribuția plastică a eforturilor are loc fără depășirea capacității de rotire în nici una din articulațiile plastice formate.

I. CAPACITATEA DE ROTIRE A ARTICULAȚIEI PLASTICE

Prin definiție, formarea unei articulații plastice într-un element de beton armat corespunde atingerii limitei de curgere în toată armătura întinsă din secțiune.

Distrugerea unei articulații plastice corespunde unei deformații specifice limită de 3,5$^0/_{00}$ a fibrei celei mai comprimate a betonului [1], [2].

Momentul încovoietor corespunzător formării articulației plastice se numește *moment plastic*, iar cel corespunzător distrugerii ei — *moment de rupere*, acesta fiind cu 5—15% mai mare decît momentul plastic.

Creșterea momentului încovoietor de la valoarea momentului plastic la valoarea momentului de rupere reprezintă principala sursă a redistribuirii plastice a eforturilor, întrucît aceasta are drept consecință intrarea în curgere a armăturii pe o anumită zonă situată în vecinătatea secțiunii critice, a cărei lungime atinge valoarea sa maximă în momentul ruperii, fapt care sporește într-o măsură apreciabilă capacitatea de rotire a articulației plastice.

Lungimea maximă a zonei de curgere se numește *lungime a articulației plastice.*

Prin definiție *capacitatea de rotire a unei articulații plastice este mărimea rotirii acesteia din momentul atingerii limitei de curgere în toată armătura întinsă din secțiunea critică pînă în momentul distrugerii zonei comprimate a betonului.*

Această rotire este egală cu aria diagramei rotirilor specifice plastice ale tuturor secțiunilor situate de-a lungul lungimii articulației plastice, în momentul ruperii secțiunii critice.

În cele de mai sus, prin rotire specifică plastică se înțelege diferența dintre rotirea specifică a unei secțiuni situată pe lungimea articulației plastice și rotirea specifică corespunzătoare atingerii limitei de curgere în armătura întinsă a secțiunii considerate.

În consecință, capacitatea de rotire a articulației plastice are expresia (fig. 1):

$$\Phi_a = \int_0^{l_a} (\omega_z - \omega_c)\cdot dz = \omega_p \cdot l_a \cdot \int_0^1 \frac{\omega_z - \omega_c}{\omega_p} \cdot \frac{dz}{l_a}, \tag{1}$$

în care

ω_c este rotirea specifică a secțiunii critice corespunzătoare atingerii limitei de curgere în armătură, a cărei valoare se admite aceeași pentru toate secțiunile situate pe lungimea articulației plastice;

ω_z — rotirea specifică a secțiunii situată la distanța $l_a - z$ de secțiunea critică ($\omega_c \leqslant \omega_z \leqslant \omega_r$), în momentul ruperii acesteia;

ω_r — rotirea specifică a secțiunii critice în momentul ruperii acesteia;

$\omega_p = \omega_r - \omega_c$ — rotirea specifică plastică a secțiunii critice în momentul ruperii acesteia;

l_a — lungimea articulației plastice.

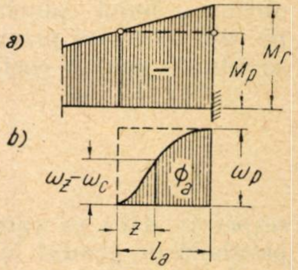


Fig. 1

cu notația

$$\eta = \int_0^1 \frac{\omega_z - \omega_c}{\omega_p} \cdot \frac{dz}{l_a}, \tag{2}$$

expresia (1) devine

$$\Phi_a = \eta \cdot \omega_p \cdot l_a. \tag{3}$$

Coeficientul η reprezintă raportul dintre suprafața diagramei rotirilor specifice plastice și suprafața dreptunghiului avînd ca bază lungimea articulației plastice iar ca înălțime rotirea specifică plastică a secțiunii critice.

În cele ce urmează se prezintă modul de determinare a celor trei factori conținuți de relația (3), care determină mărimea capacității de rotire a articulației plastice.

1. VALOAREA COEFICIENTULUI η

Mărimea coeficientului η este funcție de:

— caracteristicile diagramei de momente pe lungimea articulației plastice;

— variația deformației specifice a armăturii întinse pe lungimea articulației plastice. Această variație depinde de gradul de aderență dintre beton și armătură după atingerea limitei de curgere.

— variația modulului elastico-plastic al betonului comprimat pe lungimea articulației plastice.

Complexitatea fenomenelor care caracterizează ultimii doi factori enumerați fac imposibilă determinarea valorii coeficientului η pe cale teoretică.

Soluția acestei probleme poate fi obținută exclusiv pe cale experimentală.

Studiile experimentale efectuate în această direcție în cadrul *Institutului de cercetări în construcții și economia construcțiilor* au arătat că se obține o bună coincidență a rezultatelor experimentale cu cele deduse pe cale teoretică privind capacitatea de rotire a articulației plastice dacă se admite pentru coeficientul η valoarea

$$\eta = \frac{2}{3}, \tag{4}$$

respectiv dacă se aproximează diagrama rotirilor specifice plastice cu o parabolă de gradul II.

Relația (4) reprezintă un prim rezultat în ce privește valoarea coeficientului η , rămînînd ca studiile ulterioare să aducă precizări suplimentare.

În prezent se consideră însă că valoarea dată de relația (4) este satisfăcătoare, ea putînd fi folosită în scopuri practice.

2. VALOAREA ROTIRII SPECIFICE ω_c

Admițîndu-se ipoteza secțiunilor plane, rotirea specifică a secțiunii critice în momentul atingerii limitei de curgere în armătura întinsă are expresia (fig. 2)

$$\omega_c = \frac{\varepsilon_{ac}}{(1 - \xi_c)\cdot h_0}, \tag{5}$$

în care

ε_{ac} este deformația specifică a armăturii întinse în momentul atingerii limitei de curgere;

ξ_c — înălțimea relativă a zonei comprimate a betonului în momentul atingerii limitei de curgere în armătura întinsă;

h_0 — înălțimea utilă a secțiunii.

Valoarea înălțimii relative a zonei comprimate, stabilită pe baza teoriei lui Murașov [3] aplicată secțiunii dreptunghiulare este dată de relațiile

$$\xi_c = -\frac{\alpha}{2} + \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} + \alpha}, \tag{6}$$

pentru secţiunile simplu armate, respectiv

$$\xi_c = -\frac{\alpha + \alpha'}{2} + \sqrt{\left(\frac{\alpha + \alpha'}{2}\right)^2 + \alpha + \alpha' \cdot \delta'}, \tag{7}$$

pentru secţiunile dublu armate, în care

$$\alpha = 3 \cdot n \cdot \mu; \quad \alpha' = 3 \cdot n \cdot \mu'; \quad n = \frac{E_a}{E_b}; \quad \delta' = \frac{a'}{h_0}.$$

μ, μ' — procentele de armare ale armăturilor întinsă şi comprimată;
E_a, E_b — modulii de elasticitate ai armăturii şi betonului;
a' — distanţa de la centrul de greutate al armăturii comprimate pînă la marginea zonei comprimate a betonului.

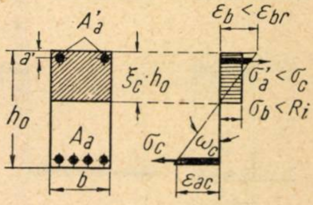


Fig. 2

3. VALOAREA ROTIRII SPECIFICE ω_r

Extinzîndu-se valabilitatea ipotezei secţiunilor plane şi la stadiul III de solicitare, rotirea specifică a secţiunii critice în momentul strivirii zonei comprimate a betonului are expresia (fig. 3)

$$\omega_r = \frac{\varepsilon_{br}}{\xi_r \cdot h_0}, \tag{8}$$

în care

$\varepsilon_{br} = 3{,}5^0/_{00}$ este deformaţia specifică limită a betonului la compresiune;
ξ_r — înălţimea relativă a zonei comprimate a betonului în momentul ruperii secţiunii critice.

Înălţimea relativă a zonei comprimate a betonului în momentul ruperii secţiunii critice rezultă din ecuaţia de proiecţii.

Pentru secţiunile dreptunghiulare simplu armate se obţine

$$\xi_r = \mu \cdot \frac{\sigma_c}{R_i}, \tag{9}$$

unde

σ_c este limita de curgere a armăturii;
R_i — rezistenţa de rupere la compresiune din încovoiere a betonului.

În cazul secţiunilor dreptunghiulare dublu armate, înălţimea relativă a zonei comprimate a betonului este dată de relaţia (fig. 3):

$$\xi_r = \mu \cdot \frac{\sigma_c}{R_i} - \mu' \cdot \frac{\sigma_a'}{R_i}. \tag{a}$$

Valoarea efortului unitar σ'_a este funcție de deformația specifică a armăturii comprimate în stadiul de rupere al secțiunii. Dacă în acest stadiu deformația specifică a armăturii ε'_a este mai mică decît deformația specifică corespunzătoare curgerii ε_{ac}, atunci rezultă $\sigma'_a < \sigma_c$.

Dacă însă $\varepsilon'_a \geqslant \varepsilon_{ac}$, atunci $\sigma'_a = \sigma_c$ indiferent de valoarea deformației specifice ε'_a.

Pentru primul caz, efortul unitar σ'_a se deduce pe baza ipotezei secțiunilor plane.

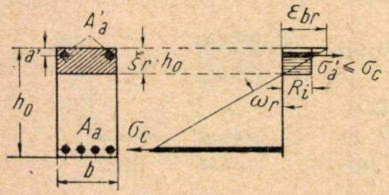


Fig. 3

Din figura 3 rezultă

$$\varepsilon'_a = \frac{\xi_r - \delta'}{\xi_r} \cdot \varepsilon_{br}. \tag{b}$$

Efortul unitar din armătura comprimată are expresia:

$$\sigma'_a = \frac{\varepsilon'_a}{\varepsilon_{ac}} \cdot \sigma_c = \frac{\xi_r - \delta'}{\xi_r} \cdot \frac{\varepsilon_{br}}{\varepsilon_{ac}} \cdot \sigma_c. \tag{c}$$

Făcînd înlocuirea în relația (a) se obține o ecuație de gradul II în raport cu ξ_r, avînd forma

$$\xi_r^2 - (v - w) \cdot \xi_r + \delta' \cdot w = 0, \tag{d}$$

în care s-au făcut notațiile

$$v = \mu \cdot \frac{\sigma_c}{R_i} \text{ și } w = \mu' \cdot \frac{\varepsilon_{br}}{\varepsilon_{ac}} \cdot \frac{\sigma_c}{R_i}. \tag{e}$$

Din ecuația (d) rezultă:

$$\xi_r = \frac{v - w + \sqrt{(v - w)^2 + 4 \cdot \delta' \cdot w}}{2}. \tag{10}$$

Relația (10) este valabilă atîta timp cît $\varepsilon'_a < \varepsilon_{ac}$.

Pentru cazul în care $\varepsilon'_a \geqslant \varepsilon_{ac}$, înălțimea relativă a axei neutre în momentul ruperii secțiunii critice este dată de relația cunoscută

$$\xi_r = (\mu - \mu') \cdot \frac{\sigma_c}{R_i}. \tag{11}$$

4. VALOAREA ROTIRII SPECIFICE PLASTICE ω_p

Rotirea specifică plastică ω_p a secțiunii critice, reprezentînd diferența dintre rotirea specifică la rupere și rotirea specifică la apariția limitei de curgere în armătura întinsă, este dată de relația:

$$\omega_p = \omega_r - \omega_c = \frac{1}{h_0} \cdot \left(\frac{\varepsilon_{br}}{\xi_r} - \frac{\varepsilon_{ac}}{1 - \xi_c} \right). \tag{12}$$

În figura 4 se prezintă diagrama tipică a variației produsului $h_0 . \omega_p$ pentru cazul general al secțiunii dreptunghiulare dublu armate.

Curba care reprezintă această variație prezintă trei zone caracteristice :

— zona *A* — *B*, corespunzătoare unei poziții a axei neutre deasupra sau cel mult la nivelul centrului de greutate al armăturii situate în vecinătatea zonei comprimate, această armătură neintervenind, prin urmare, la stabilirea poziției axei neutre.

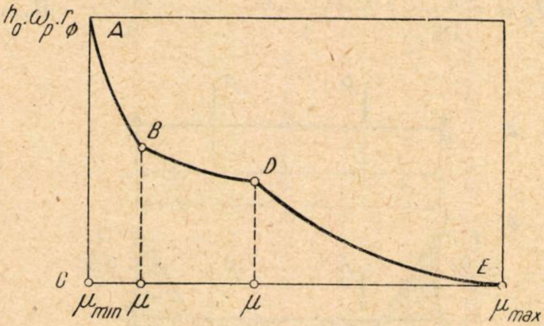


Fig. 4

— zona *B* — *D*, corespunzătoare unui efort unitar în armătura comprimată mai mic decît limita de curgere a oțelului ($\sigma_a' < \sigma_c$).

— zona *D* — *E*, corespunzătoare unui efort unitar în armătura comprimată egal cu limita de curgere a oțelului ($\sigma_a' = \sigma_c$).

5. LUNGIMEA ARTICULAŢIEI PLASTICE l_a

Natura diferită a factorilor care determină lungimea articulației plastice nu permite stabilirea unei expresii generale a acestei mărimi.

Din această cauză, determinarea lungimii articulației plastice trebuie făcută, în principiu, pentru fiecare caz în parte.

Pentru exemplificare, în cele ce urmează se prezintă determinarea lungimii articulațiilor plastice din secțiunile critice de pe reazemele unei grinzi cu secțiunea constantă, încastrată perfect la ambele extremități, solicitate de două sarcini concentrate aplicate la sferturile deschiderii.

În figura 5 *a* se prezintă caracteristicile grinzii.

Determinarea lungimii articulațiilor plastice din secțiunile critice de pe reazeme se face pe baza următoarelor ipoteze :

— armarea secțiunilor critice din cîmp și de pe reazeme asigură formarea primelor articulații plastice simultan pe amîndouă reazemele ;

— în momentul epuizării capacității de rotire a articulațiilor plastice de pe reazeme, momentele încovoietoare din cîmp sînt mai mici decît momentele plastice corespunzătoare.

În figura 5 *b* se prezintă diagrama momentelor încovoietoare corespunzătoare formării articulaţiilor plastice în secţiunile critice de pe reazeme, iar în figura 5 *c* — diagrama momentelor încovoietoare corespunzătoare epuizării capacităţii de rotire a acestor articulaţii.

La această ultimă diagramă momentul încovoietor maxim din cîmp este dat de relaţia

$$M_c = \frac{P_1\cdot l}{16} + \frac{(P_u - P_1)\cdot l}{4} = \frac{4\cdot r_\Phi - 3}{3}\cdot M_{pr}, \tag{a}$$

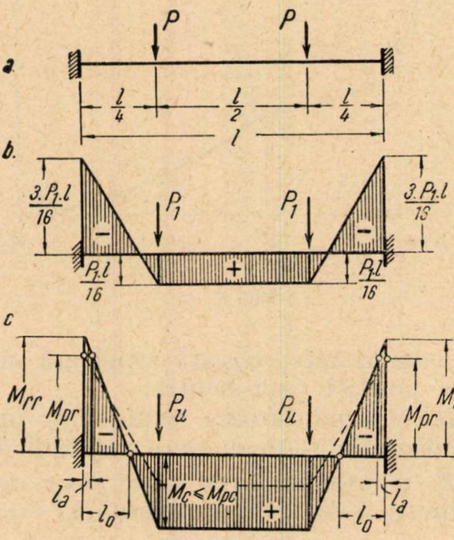


Fig. 5

în care

P_1 este sarcina corespunzătoare formării simultane a articulaţiilor plastice de pe reazeme;
P_u — sarcina corespunzătoare epuizării capacităţii de rotire a articulaţiilor plastice de pe reazeme;
$r_\Phi = \frac{P_u}{P_1}$ — coeficientul de redistribuţie corespunzător capacităţii de rotire a articulaţiilor plastice de pe reazeme;
M_{pr} — momentul plastic al secţiunilor critice de pe reazeme;
l — deschiderea grinzii.

Poziţia punctului de moment nul în stadiul de epuizare a capacităţii de rotire a articulaţiilor plastice este dată de relaţia (fig. 5 *c*)

$$l_0 \approx \frac{M_{pr}}{M_c + M_{pr}}\cdot\frac{l}{4}, \tag{b}$$

în care s-a făcut aproximaţia $M_{rr} \approx M_{pr}$, M_{rr} fiind momentul de rupere al secţiunilor critice de pe reazeme.

Dacă se ține seama de valoarea lui M_c dată de relația (a), atunci expresia (b) devine

$$l_0 \approx \frac{3}{16 \cdot r_\Phi} \cdot l. \qquad \text{(c)}$$

Din figura 5 *c* rezultă următoarea valoare a lungimii articulațiilor plastice :

$$l_a = \frac{M_{rr} - M_{pr}}{M_{rr}} \cdot l_0 . \qquad \text{(d)}$$

Dacă se neglijează influența armăturii comprimate asupra brațului de pîrghie al cuplului interior, atunci momentele încovoietoare care intervin în relația (d) au valorile (fig. 2, 3) :

$$\left.\begin{aligned} M_{pr} &= (1 - 0{,}5\ \xi_c) \cdot h_0 \cdot A_a \cdot \sigma_c , \\ M_{rr} &= (1 - 0{,}5\ \xi_r) \cdot h_0 \cdot A_a \cdot \sigma_c . \end{aligned}\right\} \qquad \text{(e)}$$

După înlocuiri, relația (d) devine

$$l_a = \frac{\xi_c - \xi_r}{2 - \xi_r} \cdot l_0 = \frac{3}{16 \cdot r_\Phi} \cdot \frac{\xi_c - \xi_r}{2 - \xi_r} \cdot l. \qquad (13)$$

★

Aplicarea teoriei capacității de rotire a articulației plastice la încovoiere, prezentată în acest capitol, nu întîmpină dificultăți de ordin matematic. Dezavantajul ei constă în necesitatea efectuării calculului prezentat mai sus pentru fiecare caz întîlnit în practică.

Față de acest inconvenient, ideea care trebuie să stea la baza valorificării în practică a acestei teorii constă în stabilirea valorii limită a coeficientului de redistribuție, permisă de capacitatea de rotire a articulației plastice, valabilă pentru toate tipurile de structuri a căror comportare plastică se caracterizează prin formarea exclusivă a articulațiilor plastice la încovoiere.

O astfel de abordare a problemei revine la determinarea valorii coeficientului de redistribuție pentru structura și tipul de încărcare cele mai defavorabile din punctul de vedere al capacității de rotire a articulațiilor plastice. Respectarea valorii limită astfel obținute asigură implicit condiția referitoare la capacitatea de rotire a articulațiilor plastice pentru toate celelalte tipuri de structuri.

Rezolvarea acestei probleme este prezentată în capitolul ce urmează.

II. VALOAREA LIMITĂ A COEFICIENTULUI DE REDISTRIBUȚIE

Comportarea plastică a grinzilor static nedeterminate de beton armat se caracterizează prin formarea de articulații plastice în cîmp și pe reazeme.

Datorită legăturii monolite a grinzilor cu plăcile planșeelor, secțiunile critice din cîmpuri sînt în formă de T, în timp ce secțiunile critice de pe reazeme au forma dreptunghiulară.

Prezența plăcii în zona comprimată a secțiunilor critice din cîmpuri are o influență deosebit de favorabilă asupra capacității de rotire a articulațiilor plastice corespunzătoare, datorită înălțimii foarte mici a zonei comprimate a betonului în momentul ruperii acestor secțiuni.

La aceasta se adaugă faptul că lungimea articulației plastice din cîmp este în general mai mare decît lungimea articulației plastice de pe reazem, datorită formei aplatisate a diagramei de momente în cîmp.

De asemenea, coeficientul η corespunzător articulației plastice din cîmp este în general mai mare decît cel corespunzător articulației plastice de pe reazem, ca urmare a convexității diagramei de momente în cîmp.

Excepție fac grinzile solicitate de o singură sarcină concentrată, la care lungimea articulației plastice și valoarea coeficientului η ajung să fie egale cu cele ale articulațiilor plastice de pe reazeme.

Avîndu-se în vedere excepția de mai sus, s-a efectuat un studiu al capacității de rotire a articulației plastice din cîmpul unei grinzi încastrate elastic la ambele extremități, solicitată de o sarcină concentrată aplicată în mijlocul deschiderii.

Acest studiu a arătat că dacă gradul de încastrare al extremităților grinzii ρ îndeplinește condiția $\rho \geqslant 0{,}25$, atunci pentru coeficienți de redistribuție $r \leqslant 1{,}5$ limitarea gradului de redistribuire a eforturilor este condiționată exclusiv de capacitatea de rotire a articulațiilor plastice de pe reazeme.

Observație : Această concluzie este valabilă numai dacă rezultatele studiului privind capacitatea de rotire a articulațiilor plastice de pe reazeme se aplică integral și articulațiilor plastice din cîmpuri.

Întrucît condițiile exprimate mai sus sînt îndeplinite de toate structurile monolite de beton armat, problema ce urmează a se studia constă în determinarea capacității de rotire a articulațiilor plastice de pe reazemele grinzii care, din acest punct de vedere, îndeplinește cele mai defavorabile condiții de încărcare și de rezemare.

Din analiza tipurilor curente de încărcări întîlnite în practică rezultă că schema de încărcare formată din două sarcini concentrate aplicate la sferturile deschiderii este cea mai defavorabilă din punctul de vedere menționat, întrucît conduce la valoarea cea mai mică a lungimii articulațiilor plastice de pe reazeme.

Precizarea riguroasă a gradului de încastrare a extremităților ce trebuie adoptat pentru a se realiza scopul propus întîmpină dificultăți, datorită variației rigidității secțiunii în lungul grinzii, produsă de variația procentului de armare, de procesul de fisurare și de variația efortului unitar în armătura întinsă.

Pentru a face posibilă obținerea unor rezultate cu caracter general, este necesar să se recurgă la o soluție aproximativă a problemei rigidității, constînd în considerarea în calcul a unei rigidități medii a secțiunii, constantă pe întreaga lungime a grinzii.

Pentru fixarea valorii acestei rigidități și a gradului de încastrare a extremităților grinzii se face în prealabil observația că prin mărirea gradului de încastrare a capetelor grinzii crește lungimea articulațiilor plastice și rigiditatea zonelor grinzii corespunzătoare momentelor negative, dar scade rigiditatea zonei grinzii corespunzătoare momentelor pozitive. Fenomenul se petrece în sens invers dacă gradul de încastrare se micșorează.

Examinarea variației capacității de rotire a articulațiilor plastice de pe reazeme, în funcție de variația gradului de încastrare al extremităților, conduce la concluzia că rezultatele obținute în cazul grinzii încastrate perfect la extremități, avînd rigiditatea constantă și egală cu rigiditatea secțiunilor critice de pe reazeme, determinată în momentul formării articulațiilor plastice în aceste secțiuni, constituie o bună aproximație pentru toate valorile gradului de încastrare care pot fi întîlnite în practică.

Schema acestei grinzi este dată în figura 5.

Pentru stabilirea valorii limită a coeficientului de redistribuție, în limitele ipotezelor de la punctul 5 al capitolului I, se face observația că sub acțiunea sarcinilor $P - P_1$, $(P_1 \leqslant P \leqslant P_u)$, grinda considerată se comportă simplu rezemată la extremități.

Rotirile grinzii pe reazeme, produse de aceste sarcini, au valoarea

$$\theta = \frac{3}{32} \cdot \frac{(P - P_1) \cdot l^2}{B_r},$$

în care B_r este rigiditatea secțiunilor critice de pe reazeme.

Scriind că pentru $P = P_u$ rotirile grinzii pe reazeme sînt egale cu capacitatea de rotire a articulațiilor plastice se obține

$$\Phi_a = \frac{3}{32} \cdot \frac{(P_u - P_1) \cdot l^2}{B_r}, \tag{14}$$

de unde rezultă

$$P_u - P_1 = \frac{32}{3} \cdot \frac{B_r}{l^2} \cdot \Phi_a.$$

Expresia coeficientului de redistribuție devine în acest caz

$$r_\Phi = \frac{P_u}{P_1} = 1 + \frac{P_u - P_1}{P_1} = 1 + \frac{32}{3} \cdot \frac{B_r}{P_1 \cdot l^2} \cdot \Phi_a. \tag{15}$$

Din relația

$$M_{pr} = \frac{3}{16} \cdot P_1 \cdot l,$$

rezultă

$$P_1 = \frac{16}{3} \cdot \frac{M_{pr}}{l}. \tag{16}$$

Conform teoriei lui Murașov [3], rigiditatea la încovoiere a secțiunilor critice de pe reazeme, în momentul atingerii limitei de curgere în armătură ($\Psi \approx 1$), este dată de relația

$$B_r = \frac{1 - \xi_c}{\varepsilon_{ac}} \cdot h_0 \cdot M_{pr}. \tag{17}$$

Pe baza relațiilor (16) și (17), expresia (15) a coeficientului de redistribuție devine

$$r_\Phi = 1 + 2 \cdot \frac{1 - \xi_c}{\varepsilon_{ac}} \cdot \frac{h_0}{l} \cdot \Phi_a \cdot \qquad (18)$$

Dacă se ține seama de valoarea capacității de rotire a articulației plastice dată de relația (3), precum și de expresiile (4), (12) și (13) ale factorilor η, ω_p și l_a, formula (18) devine o ecuație de gradul II în raport cu r_Φ, avînd forma

$$r_\Phi^2 - r_\Phi - \frac{\chi}{4} = 0, \qquad (19)$$

în care

$$\chi = (1 - \xi_c) \cdot \left(\frac{\varepsilon_{br}}{\varepsilon_{ac} \cdot \xi_r} - \frac{1}{1 - \xi_c} \right) \cdot \frac{\xi_c - \xi_r}{2 - \xi_r} \cdot \qquad (20)$$

Rădăcina supraunitară a ecuației (19) este

$$r_\Phi = \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \sqrt{1 + \chi}\right). \qquad (21)$$

Relația (21) reprezintă valoarea limită a coeficientului de redistribuție permisă de capacitatea de rotire a articulațiilor plastice din secțiunile critice de pe reazemele grinzii încastrate perfect la capete, solicitată de două sarcini concentrate egale, aplicate la sferturile deschiderii.

Această valoare mărginește superior domeniul în care redistribuția plastică de eforturi, la structuri de beton armat, nu conduce la epuizarea capacității de rotire a articulațiilor plastice.

Studiile experimentale privind comportarea plastică a grinzilor static nedeterminate de beton armat, efectuate în cadrul *Institutului de cercetări în construcții și economia construcțiilor* [4], [5], [6], [7], au condus, fără excepție, la coeficienți de redistribuție superiori valorii date de relația (21), fapt care subliniază rezerva de siguranță pe care o prezintă adoptarea acestei valori limită.

În figura 4 se prezintă variația tipică a coeficientului de redistribuție r_Φ. Caracteristicile acestei variații sînt identice cu cele ale produsului $h_0 \cdot \omega_p$.

III. ELEMENTE PRACTICE DE CALCUL

Aplicarea directă în practică a formulei (21) nu este indicată, datorită volumului de calcule pe care-l necesită. Din această cauză apare necesară prezentarea explicită a valorilor coeficientului de redistribuție r_Φ.

Pornind de la această idee, s-a efectuat un studiu al valorilor coeficientului de redistribuție r_Φ pentru structurile de beton armat din beton de marcă B 200, avînd armătura din oțel OL 38.

Studiul s-a făcut pe baza metodei de calcul la stări limită.

Caracteristicile de calcul ale materialelor folosite au fost stabilite pe baza normativului [8]. Pentru betonul luat în consideraţie, rezistenţa de calcul este $R = 110$ kg/cm².

Rezistenţa de rupere la compresiune din încovoiere a betonului a fost stabilită cu formula

$$R_i = 1{,}25 \cdot \frac{1\,300 + R}{1\,450 + 3\,R} \cdot R$$

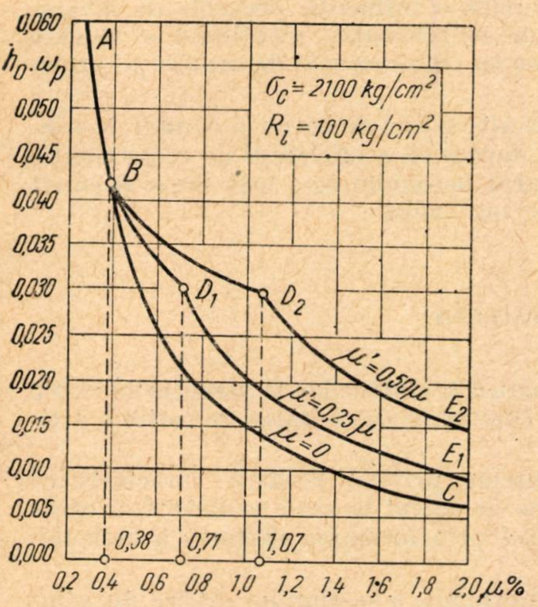


Fig. 6

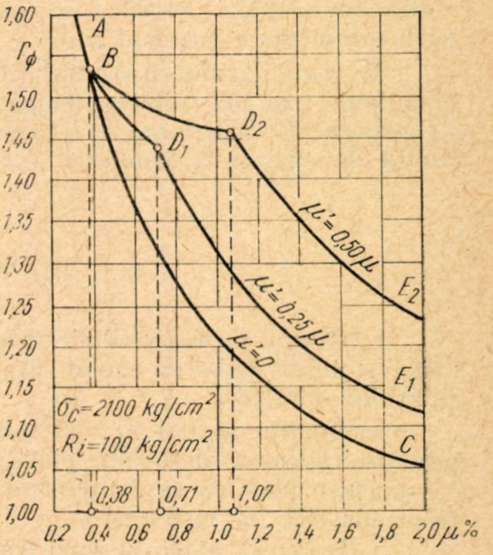


Fig. 7

iar modulii de elasticitate — cu formula

$$E_b = \frac{1\,000\,000}{1{,}7 + \frac{360}{\mathrm{R}}}.$$

Limita de curgere de calcul a oţelului este $\sigma_c = 2\,100$ kg/cm².

În diagrama din figura 6 este reprezentată variaţia produsului $h_0 . \omega_p$ în funcţie de rezistenţele de calcul ale materialelor folosite şi de procentele de armare ale armăturilor întinsă şi comprimată din secţiunile critice, pentru un raport $\delta' = \frac{a'}{h_0} = 0{,}08$.

Importanța acestei diagrame constă în aceea că ea stă la baza determinării capacității de rotire a articulațiilor plastice ale grinzilor avînd scheme de încărcare și moduri de rezemare oarecare.

Diagrama din figura 7 reprezintă variația coeficientului de redistribuție r_Φ în funcție de aceiași factori care determină produsul $h_0 \cdot \omega_p$, pentru $\delta' = 0{,}08$.

Din examinarea acestei diagrame se desprind următoarele concluzii :

— coeficientul de redistribuție este cu atît mai mare cu cît procentul de armare al armăturii întinse este mai mic.

— armătura comprimată exercită o influență deosebit de favorabilă asupra valorii coeficientului de redistribuție, menținînd o valoare ridicată a acestuia, cu atît mai mare cu cît procentul de armare al armăturii comprimate este mai mare.

În cazul extinderii studiului la alte mărci de beton și de oțel, la concluziile de mai sus trebuie adăugat faptul că coeficientul de redistribuție r_Φ este cu atît mai mare cu cît marca betonului este mai mare și cu cît limita de curgere a armăturii este mai mică.

IV. CONCLUZII

1. Gradul de redistribuire plastică a eforturilor la structurile static nedeterminate de beton armat este limitat de capacitatea de rotire a articulațiilor plastice.

2. Stadiul actual al cunoștințelor privind această caracteristică permite aplicarea metodelor plastice de calcul la acele structuri, a căror comportare plastică se caracterizează prin formarea exclusiv a articulațiilor plastice la încovoiere.

3. Prezența plăcii în zona comprimată a secțiunilor critice din cîmpuri are o influență deosebit de favorabilă asupra capacității de rotire a articulațiilor plastice din aceste secțiuni. De aceea studiul acestei caracteristici trebuie să se refere în primul rînd la articulațiile plastice de pe reazeme, urmînd ca rezultatele obținute să se aplice integral și articulațiilor plastice din cîmpuri.

4. Capacitatea de rotire a articulațiilor plastice este funcție de schema de încărcare și de modul de rezemare a grinzilor. Ea este cu atît mai mare cu cît marca betonului și procentul de armare al armăturii comprimate sînt mai mari și cu cît limita de curgere a oțelului și procentul de armare al armăturii întinse sînt mai mici.

5. În lucrare se stabilește valoarea limită a coeficientului de redistribuție care mărginește superior domeniul în care redistribuția plastică de eforturi nu conduce la epuizarea capacității de rotire a articulațiilor plastice.

Primită la redacție la 2 iulie 1962

THE PLASTIC HINGE IN THE PLASTIC DESIGN OF REINFORCED CONCRETE STRUCTURES

ABSTRACT

This paper establishes the general expression of the rotation capacity of the plastic hinge in bending and gives practical procedures for determining its factors.

On the basis of the results obtained, the limit value of the re-distribution coefficient is determined which is the upper bound of the region in which the plastic re-distribution of stresses in statically indetermined reinforced concrete structures does not lead to the exhausting of the rotation capacity of the plastic hinges.

The final part of the paper includes practical results obtained by using the ennunciated theory.

BIBLIOGRAFIE

1. A. L. L. BAKER, *Note for discussion at Monaco*, C.E.B. Bulletin d'information, *30* (1961).
2. * * * *Ultimate load design of concrete structures.* Proceedings of the Institution of Civil Engineers, February, 1962.
3. В. И. МУРАШЕВ, *Трещиноустойчивость, жесткость и прочность железобетона.* Машстройиздат, Москва, 1950.
4. M. COHN, V. PETCU, *On the influence of steel percentage on the plastic adaptability of redundant reinforced concrete beams.* Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences. Série des sciences techniques, *11—12* (1960).
5. M. COHN, V. PETCU, *Studiu experimental asupra capacităţii portante a grinzilor de beton armat dublu încastrate.* Buletinul INCERC — ISCAS, *3* (1961).
6. V. PETCU, M. COHN, *On the moment redistribution in redundant highly-reinforced concrete beams.* Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences, Série des sciences techniques, *10* (1961).
7. М. КОН, В. ПЕТКУ, *Несущая способность статически неопределимых железобетонных балок с переменной жесткостью.* Бетон и железобетон, *1* (1962).
8. * * * *Normativ pentru calculul şi alcătuirea constructivă a elementelor de construcţii din beton, beton armat şi beton precomprimat.* Redactarea a II-a, Institutul de construcţii, Bucureşti, 1961.

CALCULUL DISCURILOR DE GROSIME VARIABILĂ ÎN MIŞCARE DE ROTAŢIE PRIN METODA DE RECURENŢĂ A CELOR TREI NECUNOSCUTE

DE

M. BLUMENFELD [1]

539.4

1. INTRODUCERE

Într-un articol precedent [1] am arătat aplicarea metodei de recurenţă a celor trei necunoscute, pentru calculul deformaţiei barelor drepte arătînd în acelaşi timp că această metodă are diferite aplicaţii în rezistenţa materialelor. Scopul articolului de faţă este aplicarea metodei de recurenţă a celor trei necunoscute, pentru studiul discurilor în mişcare de rotaţie, cu grosime variabilă.

Pentru rezolvarea acestei probleme deosebit de importantă, s-au elaborat o serie de metode [2], [3], [4], [5], [6] bazate pe împărţirea discurilor în inele de grosime constantă, conice, hiperbolice etc. Împărţirea discului în inele de grosime constantă dă rezultate bune, cu condiţia ca numărul de inele să fie destul de mare, ceea ce duce însă la un volum mare de calcule. Metoda de recurenţă prezentată mai jos permite o rapidă rezolvare a problemei, prin reducerea substanţială a volumului de calcule.

2. EFORTURI UNITARE ÎN DISCUL DE GROSIME CONSTANTĂ ÎN MIŞCARE DE ROTAŢIE

Într-un element oarecare al unui disc în mişcare de rotaţie apar eforturi unitare radiale σ_r şi circumferenţiale σ_t. Pentru simplificarea notaţiei se face convenţia de a se nota efortul unitar σ_r cu σ fără indice.

---

[1] Institutul politehnic, Bucureşti.

Eforturile unitare $\sigma_r = \sigma$ şi σ_t la o distanţă oarecare r de axul de rotaţie pentru un disc cu notaţiile din figura 1 sînt date de relaţiile [7]

$$\sigma_r = \sigma = \frac{\gamma\omega^2}{8g}\left[(3+\mu)\frac{(R_i^2 - r^2)(r^2 - R_{i-1}^2)}{r^2}\right] + \\ + \sigma_i' \frac{R_i^2}{R_i^2 - R_{i-1}^2}\left(1 - \frac{R_{i-1}^2}{r^2}\right) - \sigma_{i-1}\frac{R_{i-1}^2}{R_i^2 - R_{i-1}^2}\left(1 - \frac{R_i^2}{r^2}\right), \tag{1}$$

$$\sigma_t = \frac{\gamma\omega^2}{8g}\left[(3+\mu)\left(R_i^2 + R_{i-1}^2 + \frac{R_i^2 R_{i-1}^2}{r^2}\right) - (1+3\mu)\,r^2\right] + \\ + \sigma_i' \frac{R_i^2}{R_i^2 - R_{i-1}^2}\left(1 + \frac{R_{i-1}^2}{r^2}\right) - \sigma_{i-1}\frac{R_{i-1}^2}{R_i^2 - R_{i-1}^2}\left(1 + \frac{R_i^2}{r^2}\right), \tag{2}$$

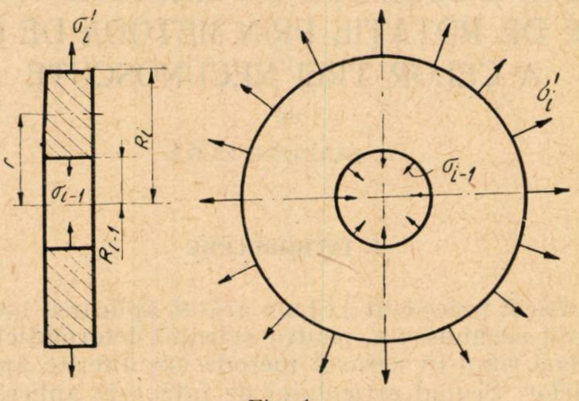

σ_i'
r
R_i
σ_{i-1}
R_{i-1}
σ_i'
σ_{i-1}

Fig. 1

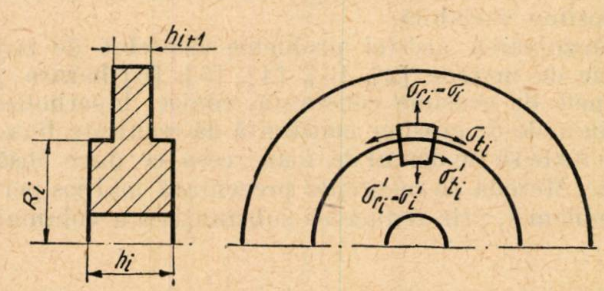

h_{i+1}
R_i
h_i
$\sigma_{r_i}-\sigma_i$
σ_{t_i}
σ_{t_i}'
$\sigma_{r_i}'-\sigma_i'$

Fig. 2

unde γ este greutatea specifică a materialului discului,
ω — viteza unghiulară,
μ — coeficientul de contracţie transversală,
σ_i' şi σ_{i-1} — eforturile unitare radiale respectiv la razele R_i şi R_{i-1}.

Eforturile unitare circumferențiale σ_t la exteriorul și interiorul discului se obțin înlocuind în relația (2), raza r respectiv prin R_1 și R_{i-1}

$$\sigma'_{t_i} = \frac{\gamma\omega^2}{4g}\left[(3+\mu)R_{i-1}^2 + (1-\mu)R_i^2\right] + \sigma'_i\frac{R_i^2 + R_{i-1}^2}{R_i^2 - R_{i-1}^2} - \sigma_{i-1}\frac{2R_{i-1}^2}{R_i^2 - R_{i-1}^2}, \tag{3}$$

$$\sigma_{t_{i-1}} = \frac{\gamma\omega^2}{4g}\left[(3+\mu)R_i^2 + (1-\mu)R_{i-1}^2\right] + \sigma'_i\frac{2R_i^2}{R_i^2 - R_{i-1}^2} - \sigma_{i-1}\frac{R_i^2 + R_{i-1}^2}{R_i^2 - R_{i-1}^2}. \tag{4}$$

Efortul unitar la exteriorul discului se notează cu σ'_{t_i}.

3. RELAȚII ÎNTRE EFORTURI UNITARE ÎN PUNCTELE DE VARIAȚIE DE GROSIME ALE UNUI DISC

În punctele de variație de grosime ale unui disc apar variații de eforturi unitare, atît radiale cît și circumferențiale. Astfel notînd cu σ'_i și σ'_{t_i} eforturile unitare la raza R_i corespunzătoare grosimii h_i și cu σ_i și σ_{t_i} cele corespunzătoare grosimii h_{i+1} (fig. 2), între ele există relația [5]

$$\sigma'_i = \sigma_i \cdot \frac{h_{i+1}}{h_i} = \sigma_i \cdot \eta_i, \tag{5}$$

$$\sigma'_{t_i} - \sigma_{t_i} = \mu(\sigma'_i - \sigma_i) = \mu(\sigma_i\eta_i - \sigma_i) = \mu\sigma_i(\eta_i - 1), \tag{6}$$

unde s-a notat prin η_i raportul

$$\eta_i = \frac{h_{i+1}}{h_i}. \tag{7}$$

4. RELAȚIA DE RECURENȚĂ BAZATĂ PE METODA CELOR TREI NECUNOSCUTE PENTRU CALCULUL DISCURILOR CU VARIAȚIE DE GROSIME

Se consideră un disc cu notațiile din figura 3, avînd mai multe variații de grosime Se desparte discul dat, în mai multe inele, de grosime constantă, înlocuind influența unui inel asupra celui alăturat prin eforturi unitare radiale necunoscute. Se notează eforturile unitare de la interiorul fiecărui inel cu indicele razei corespunzătoare. La exteriorul inelelor se introduce efortul unitar radial calculat cu relația (5), ținînd seama de variaţia de grosime ; astfel la raza R_i se introduce efortul unitar $\sigma'_i = \sigma_i \frac{h_{i+1}}{h_i} = \sigma_i \cdot \eta_i$, la raza R_{i+1} respectiv $\sigma_{i+1} \cdot \eta_{i+1}$ etc.

Se studiază două inele alăturate i şi $i+1$, la care eforturile unitare radiale necunoscute ce apar sînt σ_{i+1}, σ_i şi σ_{i-1}. Pentru aplicarea metodei celor trei necunoscute, se calculează efortul unitar σ'_{t_i} din inelul i la raza exterioară R_i în funcţie de σ_i şi σ_{i-1} (cu relaţia (3)) şi efortul unitar σ_{t_i} din inelul $i+1$ la raza interioară R_i în funcţie de σ_i şi σ_{i+1} (cu relaţia (4)) ; apoi pe baza relaţiei (6) dintre σ_{t_i} şi σ'_{t_i} se obţine o relaţie de recurenţă între eforturile unitare σ_{i+1}, σ_i şi σ_{i-1}.

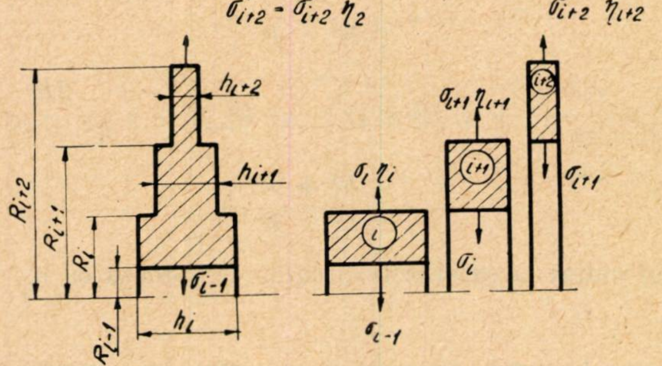


Fig. 3

Efortul unitar σ'_{t_i} este dat de relaţia (3), în care se înlocuieşte σ'_i cu $\sigma_i\ \eta_i$

$$\sigma'_{t_i} = \frac{\gamma\omega^2}{4g}\left[(3+\mu)R^2_{i-1} + (1-\mu)R_i^2\right] + \eta_i\,\sigma_i\,\frac{R_i^2 + R^2_{i-1}}{R_i^2 + R^2_{i-1}} - \\ - \sigma_{i-1}\,\frac{2R^2_{i-1}}{R_i^2 - R^2_{i-1}}. \tag{8}$$

Efortul unitar σ_{t_i} la interiorul inelului $i+1$ se obţine din relaţia (4) înlocuind însă indicele i prin $i+1$, iar efortul unitar la raza exterioară σ'_{i+1}, prin $\sigma_{i+1}\cdot\eta_{i+1}$

$$\sigma_{t_i} = \frac{\gamma\omega^2}{4g}\left[(3+\mu)R^2_{i+1} + (1-\mu)R_i^2\right] + \sigma_{i+1}\cdot\eta_{i+1}\,\frac{2R^2_{i+1}}{R^2_{i+1} - R^2_{i-1}} - \\ - \sigma_i\,\frac{R^2_{i+1} + R_i^2}{R^2_{i+1} - R_i^2}. \tag{9}$$

Înlocuind relațiile (8) și (9) în (6) și făcînd unele reduceri se obține următoarea relație de recurență

$$\begin{aligned}&-\sigma_{i-1}\frac{2R_i^2}{R_i^2-R_{i-1}^2}+\sigma_i\left[\frac{R_{i+1}^2+R_i^2}{R_{i+1}^2-R_i^2}+\mu+\eta_i\left(\frac{R_i^2+R_{i-1}^2}{R_i^2-R_{i-1}^2}-\mu\right)\right]-\\&-\sigma_{i+1}\eta_{i+1}\frac{2R_{i+1}^2}{R_{i+1}^2-R_i^2}=\frac{\gamma\omega^2}{4g}(3+\mu)(R_{i+1}^2-R_{i-1}^2).\end{aligned}\tag{10}$$

Notînd $\alpha_i=\dfrac{R_i}{R_{i-1}}$,

$$\alpha_{i+1}=\frac{R_{i+1}}{R_i}\tag{11}$$

și înlocuind produsul

$$\frac{\gamma\omega^2}{4g}(3+\mu)=\frac{\gamma(3+\mu)}{4g}\cdot\left(\frac{\pi n}{30}\right)^2=\frac{\gamma(3+\mu)\,\pi^2}{3\,600\,g}\cdot n^2=kn^2\tag{12}$$

unde n este turația în rot/min, relația (10) devine

$$\begin{aligned}&-\sigma_{i-1}\frac{2}{\alpha_i^2-1}+\sigma_i\left[\left[\left(\frac{\alpha_i^2+1}{\alpha_i^2-1}-\mu\right)\eta_i+\left(\frac{\alpha_{i+1}^2+1}{\alpha_{i+1}^2-1}+\mu\right)\right]-\right.\\&-\sigma_{i+1}\eta_{i+1}\frac{2\alpha_{i+1}^2}{\alpha_{i+1}^2-1}=kn^2\,(R_{i+1}^2-R_{i-1}^2).\end{aligned}\tag{13}$$

Făcînd mai departe notația

$$\left.\begin{aligned}M_i&=\frac{\alpha_i^2+1}{\alpha_i^2-1},\\M_{i+1}&=\frac{\alpha_{i+1}^2+1}{\alpha_{i+1}^2-1},\end{aligned}\right\}\tag{14}$$

relația (13) se poate scrie în formă finală

$$\begin{aligned}&-\sigma_{i-1}(M_i-1)+\sigma_i[(M_i-\mu)\cdot\eta_i+(M_{i+1}+\mu)]-\\&-\sigma_{i+1}-\eta_{i+1}(M_{i+1}+1)=kn^2(R_{i+1}^2-R_{i-1}^2).\end{aligned}\tag{15}$$

Expresia $M=\dfrac{\alpha^2+1}{\alpha^2-1}$ este dată în tabela anexă în funcție de α.
Constanta k pentru un disc de oțel are valoarea

$$k=\frac{\gamma(3+\mu)\pi^2}{3\,600\text{ g}}=\frac{7{,}85}{10^3}\times\frac{3{,}3\times\pi^2}{3\,600\times981}=7{,}2\times10^{-8}\text{ kg min}^2/\text{cm}^4.\tag{16}$$

Relația (15) se aplică de atîtea ori cîte variații de grosime are discul; se obține astfel un sistem de ecuații din care se determină eforturile unitare radiale la *interiorul* tuturor inelelor de grosime constantă. Eforturile unitare la exteriorul inelelor se obțin aplicînd relația (5) la fiecare variație de grosime. În felul acesta fiecare din inelele de grosime constantă se reduce la cel dat în figura 1, deoarece eforturile unitare radiale la extremități devin cunoscute.

Efortul unitar circumferențial $\sigma_{t_{i-1}}$ ce apare în inelul i la raza interioară, este dat de relația (4), unde introducînd pe rînd notațiile (11), (12) și (14) și $\sigma_i' = \sigma_i \eta_i$ se obține

$$\sigma_{t\,i-1} = \frac{\gamma\omega^2}{4g}(3+\mu)\,R_{i-1}^2\left(\alpha_i^2 + \frac{1-\mu}{3+\mu}\right) + \sigma_i\,\eta_i\frac{2\alpha_i^2}{\alpha_i^2-1} - \sigma_{i-1}\frac{\alpha_i^2+1}{\alpha_i^2-1},$$

$$\sigma_{t_{i-1}} = kn^2R_{i-1}^2\,N_i + \sigma_i\,\eta_i\,(M_i+1) - \sigma_{i-1}\,.\,M_i, \tag{17}$$

unde $N_i = \alpha_i^2 + \dfrac{1-\mu}{3+\mu}$. (18)

Expresia (18) este calculată pentru diferite valori ale lui α și pentru $\mu = 0{,}3$, în tabela anexă.

Eforturile unitare σ_{t_i}, care de altfel sînt mai mici, se pot calcula din relația (6).

Observații

1. La raza exterioară R_{ext} a discului în trepte, se va introduce în relația (15)

$$\eta_{ext} = 1. \tag{19}$$

2. Rezolvarea sistemului de ecuații se poate face prin metodele obișnuite ale algebrei, sau prin metoda indicată în articolul [1], bazată pe principiul metodei *celor două calcule* aplicat în studiul discurilor de secțiune variabilă.

5. CONDIȚII LA EXTREMITĂȚI

În sistemul de ecuații care se scrie pe baza ecuației (15), apar pentru un disc cu n variații de grosime, $n+2$ necunoscute. Sistemul se rezolvă utilizînd cele n ecuații ce se pot scrie în punctele de variație ale grosimii, la care se adaugă două condiții la extremități. Aceste condiții pot fi în cazul cel mai simplu următoarele:

a) La raza R_0 din interiorul discului, efortul unitar radial σ_0 este egal cu presiunea p_i dintre disc și arborele pe care este așezat (fig. 4)

$$\sigma_0 = -p_i; \tag{20}$$

b) La raza exterioară R_{ext}, efortul unitar radial σ_{ext} este produs de forța de inerție a elementelor prinse pe obadă. Presupunînd cunoscută presiunea exterioară p_e se poate pune condiția

$$\sigma_{ext} = p_e\,; \tag{21}$$

c) La discul fără gaură centrală, ecuația de recurență (15) își modifică forma pe primul interval. Astfel dacă se consideră discurile 1—2 (fig. 5), în care discul 1 este negăurit, relația (15) devine

$$\sigma_1 [M_2 + \mu - \eta_1 (\mu - 1)] - \sigma_2 \eta_2 (M_2 + \\ + 1) = kn^2 R_2^2, \tag{22}$$

unde $M_2 = \dfrac{R_2^2 + R_1^2}{R_2^2 - R_1^2}.$

Această relație se adaugă celorlalte ecuații ale sistemului, care apoi se rezolvă. Efortul unitar în centrul discului $\sigma_{r_0} = \sigma_0 = \sigma_{t_0}$ se determină apoi din relația

$$\sigma_{t_0} = \sigma_{r_0} = \sigma_0 = \frac{\gamma\omega^2}{8g} R_1^2 (3 + \mu) + \sigma_1 \eta_1 \tag{23}$$

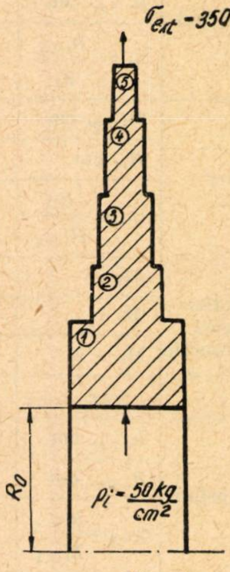


Fig. 4

6. EXEMPLU DE CALCUL

Ca exemplu de calcul se reia aplicația dată în lucrarea [2] unde rezolvarea este făcută prin altă metodă.

Exemplu. Discul de turbină din figura 4, format din butuc și un disc de grosime variabilă se rotește cu $n = 3\,000$ rot/min. Dimensiunile discului sînt date în tabela 1. Discul este montat forțat pe arbore, presiunea la turația de funcționare fiind $p_i = 50$ kg/cm²; efortul unitar produs la raza exterioară de către forța de inerție a paletelor și a obadei discului este

$$\sigma_{ext} = \sigma_5 = 350 \text{ kg/cm}^2.$$

Discul se împarte în 5 inele de grosime constantă, avînd grosimea măsurată la raza medie.

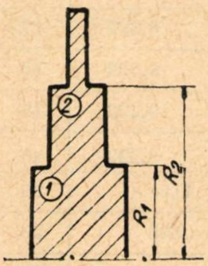


Fig. 5

Toate dimensiunile sînt trecute în tabela 1, în liniile: 1, 2, 4, 5, 11, 12, 14, 15. Toate calculele necesare scrierii celor 4 relații de recurență (15) corespunzătoare celor 4 variații de grosime sînt trecute în aceeași tabelă. Astfel pe baza datelor amintite mai sus s-au calculat în liniile 3, 6, 13, 16 coeficienții η și α. De remarcat că s-a înlocuit în linia 13, $\eta_5 = 1$. Din tabela anexă s-au extras în liniile 7

Tabela 1

			Grupul de inele				Nr. liniei
			1−2	2−3	3−4	4−5	
Inelul i	Grosimi	h_i, cm	7,5	4,2	3,525	2,775	1
		h_{i+1}, cm	4,2	3,525	2,775	1,8	2
		$\eta_i = \frac{h_{i+1}}{h_i}$	0,56	0,84	0,786	0,65	3
	Raze	R_{i-1}, cm	10,5	16	20	25	4
		R_i, cm	16	20	25	30	5
		$\alpha_i = \frac{R_i}{R_{i-1}}$	1,52	1,25	1,25	1,2	6
	Coeficienţi funcţie de α_i	M_i	2,526	4,555	4,555	5,545	7
		M_{i-1}	1,526	3,555	3,555	4,545	8
		$M_i - \mu$	2,226	4,255	4,255	5,245	9
		$\eta_i (M_i - \mu)$	1,25	3,58	3,35	3,41	10
Inelul $i+1$	Grosimi	h_{i+1}, cm	4,2	3,525	2,775	1,8	11
		h_{i+2}, cm	3,525	2,775	1,8	—	12
		$\eta_{i+1} = \frac{h_{i+2}}{h_{i+1}}$	0,84	0,786	0,65	1	13
	Raze	R_i, cm	16	20	25	30	14
		R_{i+1}, cm	20	25	30	34	15
		$\alpha_{i+1} = \frac{R_{i+1}}{R_i}$	1,25	1,25	1,2	1,13	16
	Coeficienţi funcţie de α_{i+1}	M_{i+1}	4,555	4,555	5,545	8,222	17
		$M_{i+1} + \mu$	4,855	4,855	5,845	8,522	18
		$M_{i+1} + 1$	5,555	5,555	6,545	9,222	19
		$\eta_{i+1}(M_{i+1}+1)$	4,67	4,38	4,25	9,222	20
Membrul doi al ecuaţiei (15)		R^2_{i+1}	400	625	900	1156	21
		R^2_{i-1}	110,25	256	400	625	22
		$R^2_{i+1} - R^2_{i-1}$	289,75	369	500	531	23
		0,684 $(R^2_{i+1} - R^2_{i-1})$	187	239	324	344	24
Suma coeficienţilor $\eta_i (M_i - \mu) + M_{i+1} + \mu$			6,105	8,435	9,195	11,932	25

şi 17, coeficienţii M_i şi M_{i+1}, în funcţie de rapoartele α. În liniile 8, 9, 10, 18, 19, 20 s-au făcut operaţiile elementare indicate, luînd $\mu = 0{,}3$. În liniile 21—24 s-a calculat membrul doi al ecuaţiei (15) înlocuindu-se

$$kn^2 = 7{,}2 \times 10^{-8} \times 3\,000^2 = 0{,}648 \text{ kg/cm}^4.$$

În ultima linie, 25, s-a calculat termenul $\eta_i (M_i - \mu) + M_{i+1} + \mu$ din ecuaţia (15), adunînd coeficienţii din liniile 10 şi 19.

Utilizînd rezultatele din liniile 9, 25, 20 şi 24 se scrie direct sistemul de ecuaţii

$$\begin{cases} -1{,}526\,\sigma_0 + 6{,}105\,\sigma_1 - 4{,}67\,\sigma_2 = 187, \\ -3{,}555\,\sigma_1 + 8{,}435\,\sigma_2 - 4{,}38\,\sigma_3 = 239, \\ -3{,}555\,\sigma_2 + 9{,}195\,\sigma_3 - 4{,}25\,\sigma_4 = 324, \\ -4{,}545\,\sigma_3 + 11{,}932\,\sigma_4 - 9{,}222\,\sigma_5 = 344. \end{cases} \tag{24}$$

În prima ecuaţie se introduce condiţia extremă (20), $\sigma_0 = -p_i = -50$ kg/cm², iar în ultima ecuaţie condiţia (21), $\sigma_5 = 350$ kg/cm². În acest fel se obţine un sistem de ecuaţii, care duce la soluţiile

$$\sigma_1 = 275 \text{ kg/cm}^2;\ \sigma_2 = 335 \text{ kg/cm}^2;\ \sigma_3 = 368 \text{ kg/cm}^2;\ \sigma_4 = 440 \text{ kg/cm}^2.$$

Pentru calculul eforturilor unitare $\sigma_{t_{i-1}}$ s-au determinat coeficienţii relaţiei (17) în ultimele trei linii ale tabelei 2, utilizînd tabela anexă.

Tabela 2

Inelul	1	2	3	4	5
α_i	1,52	1,25	1,25	1,2	1,13
η_i	0,56	0,84	0,786	0,65	1
M_i	2,526	4,555	4,555	5,545	8,222
$M_i + 1$	3,526	5,555	5,555	6,545	9,222
$\eta_i (M_i + 1)$	1,98	4,67	4,38	4,25	9,222
N_i	2,522	1,775	1,775	1,652	1,489

$$i = 1;\ \sigma_{t_0} = 0{,}648 \times 110{,}25 \times 2{,}522 + 275 \times 1{,}98 - (-50) \times 2{,}526 = 852 \text{ kg/cm}^2;$$

$$i = 2;\ \sigma_{t_1} = 0{,}648 \times 256 \times 1{,}775 + 335 \times 4{,}67 - 275 \times 4{,}555 = 604 \text{ kg/cm}^2;$$

$$i = 3;\ \sigma_{t_2} = 0{,}648 \times 400 \times 1{,}775 + 368 \times 4{,}38 - 335 \times 4{,}555 = 545 \text{ kg/cm}^2;$$

$$i = 4\,;\ \sigma_{t_3} = 0{,}648 \times 625 \times 1{,}625 + 440 \times 4{,}25 - 368 \times 5{,}545 = \\ = 499\ \mathrm{kg/cm}^2\,;$$

$$i = 5\,;\ \sigma_{t_4} = 0{,}648 \times 900 \times 1{,}489 + 350 \times 9{,}222 - 440 \times 8{,}222 = \\ = 480\ \mathrm{kg/cm}^2.$$

ANEXĂ

α	*M*	*N*	α	*M*	*N*	α	*M*	*N*
1,01	100,5024	1,2322	1,43	2,9140	2,2570	2,20	1,5208	5,0521
1,02	50,5049	1,2525	1,44	2,8628	2,2857	2,22	1,5091	5,1405
1,03	33,8407	1,2727	1,45	2,8140	2,3146	2,24	1,4978	5,2297
1,04	25,5098	1,2937	1,46	2,7674	2,3467	2,26	1,4869	5,3197
1,05	20,5121	1,3146	1,47	2,7228	2,3730	2,28	1,4763	5,4105
1,06	17,1812	1,3357	1,48	2,6801	2,4025	2,30	1,4662	5,5021
1,07	14,8026	1,3570	1,49	2,6392	2,4322	2,32	1,4563	5,5945
1,08	13,0192	1,3785	1,50	2,6000	2,4621	2,34	1,4468	5,6877
1,09	11,6326	1,4002	1,52	2,5262	2,5225	2,36	1,4376	5,7817
1,10	10,5238	1,4221	1,54	2,4581	2,5837	2,38	1,4287	5,8765
1,11	9,6169	1,4442	1,56	2,3950	2,6457	2,40	1,4201	5,9721
1,12	8,8616	1,4665	1,58	2,3365	2,7085	2,42	1,4118	6,0685
1,13	8,2228	1,4890	1,60	2,2820	2,7721	2,44	1,4037	6,1657
1,14	7,6755	1,5117	1,62	2,2312	2,8365	2,46	1,3959	6,2637
1,15	7,2015	1,5346	1,64	2,1837	2,9017	2,48	1,3883	6,3625
1,16	6,7870	1,5577	1,66	2,1392	2,9677	2,50	1,3809	6,4621
1,17	6,4215	1,5810	1,68	2,0974	3,0345	2,52	1,3738	6,5625
1,18	6,0968	1,6041	1,70	2,0582	3,1021	2,54	1,3668	6,6637
1,19	5,8065	1,6282	1,72	2,0212	3,1705	2,56	1,3601	6,7657
1,20	5,5454	1,6521	1,74	1,9863	3,2397	2,58	1,3535	6,8685
1,21	5,3094	1,6762	1,76	1,9534	3,3097	2,60	1,3472	6,9721
1,22	5,0950	1,7005	1,78	1,9223	3,3805	2,62	1,3410	7,0765
1,23	4,8993	1,7250	1,80	1,8928	3,4521	2,64	1,3350	7,1817
1,24	4,7202	1,7497	1,82	1,8649	3,5245	2,66	1,3291	7,2877
1,25	4,5555	1,7746	1,84	1,8383	3,5977	2,68	1,3234	7,3945
1,26	4,4036	1,7997	1,86	1,8131	3,6717	2,70	1,3179	7,5021
1,27	4,2631	1,8250	1,88	1,7891	3,7465	2,72	1,3125	7,6105
1,28	4,1328	1,8505	1,90	1,7662	3,8221	2,74	1,3073	7,7197
1,29	4,0115	1,8762	1,92	1,7444	3,8985	2,76	1,3022	7,8297
1,30	3,8985	1,9021	1,94	1,7236	3,9757	2,78	1,2972	7,9405
1,31	2,7929	1,9282	1,96	1,7038	4,0537	2,80	1,2923	8,0521
1,32	3,6939	1,9545	1,98	1,6848	4,1325	2,82	1,2876	8,1645
1,33	3,6011	1,9810	2,00	1,6666	4,2121	2,84	1,2830	8,2777
1,34	3,5138	2,0077	2,02	1,6492	4,2925	2,86	1,2785	8,3917
1,35	3,4316	2,0346	2,04	1,6325	4,3737	2,88	1,2741	8,5065
1,36	3,3540	2,0617	2,06	1,6165	4,4557	2,90	1,2699	8,6221
1,37	3,2807	2,0890	2,08	1,6012	4,5385	2,92	1,2657	8,7385
1,38	3,2114	2,1165	2,10	1,5865	4,6221	2,94	1,2616	8,8557
1,39	3,1456	2,1442	2,12	1,5723	4,7065	2,96	1,2576	8,9737
1,40	3,0833	2,1721	2,14	1,5588	4,7917	2,98	1,2537	9,0925
1,41	3,0240	2,2002	2,16	1,5456	4,8777	3,00	1,2500	9,2121
1,42	2,9677	2,2285	2,18	1,5329	4,9645			

Primită la redacţie la 25 iunie 1962.

CALCUL DES DISQUES D'ÉPAISSEUR VARIABLE, EN MOUVEMENT DE ROTATION, PAR LA MÉTHODE DE RÉCURRENCE DES TROIS INCONNUES

RÉSUMÉ

La résolution de plusieurs problèmes, dans le domaine de la résistance des matériaux, tels que : déformation des poutres, disques en mouvement de rotation, vibrations à un ou plusieurs degrés de liberté, flambage, plaques planes circulaires symétriquement chargées, etc., est fondée sur l'intégration d'une équation différentielle linéaire, à coefficients constants. L'intégration de ces équations dans un domaine où les grandeurs intervenant sont continuellement variables, est relativement simple ; au cas où il y a plusieurs domaines d'intégration, le problème se complique par l'apparition des constantes d'intégration, souvent difficiles à déterminer. Afin d'éliminer cette difficulté, diverses méthodes particulières ont été imaginées, permettant de trouver la solution pour chacun des problèmes mentionnés.

La méthode des trois inconnues est une méthode unitaire, fondée sur l'établissement d'une relation de récurrence entre trois inconnues, convenablemnt choisies dans deux domaines consécutifs d'intégration. L'auteur indique l'application de la méthode au calcul des disques à profil variable en mouvement de rotation.

BIBLIOGRAFIE

1. M. BLUMENFELD, *Metoda de recurență a celor trei necunoscute, aplicată la calculul deformațiilor grinzilor drepte.* Buletinul Institutului politehnic București, **XXIII**, *4* (1961).
2. И. Н. БУДИКА, *Расчет дисков паровых турбин на прочность*. Машгиз, Москва, 1956.
3. Г. С. ЖИРИЦКИЙ, *Конструкция и расчет на прочность деталей паровых турбин.* Госэнергоиздат, Москва, 1955.
4. А. В. ЛЕВИН, *Рабочие лопатки и диски паровых турбин.* Госэнергоиздат., Москва, 1953.
5. S. D. PONOMAREV, V. L. BIDERMAN, K. K. LIHAREV, V. M. MAKUȘIN, N. N.MALININ, V. I. FEODOSIEV, *Calculul modern de rezistență în construcția de mașini* (*calculul la solicitări dinamice*). **I**, Ed. tehnică, București, 1956.
6. * * * *Справочник машиностроителя.* Машгиз, Москва, 1956.
7. * * * *Manualul inginerului mecanic.* **I**, Ed. tehnică, București, 1959.

STUDII

CALCULUL CADRELOR SPAȚIALE ETAJATE AXIAL-SIMETRICE PRIN ECUAȚII CU DIFERENȚE FINITE

DE

EINAR KEINTZEL [1]

621.01

Calculul cadrelor spațiale etajate axial-simetrice — de exemplu al infrastructurilor ale castelelor de apă sau ale turnurilor de răcire — întîmpină dificultăți importante din cauza numărului mare de necunoscute statice. Astfel, în cazul general, calculul prin metoda deformațiilor a unei structuri, avînd n stîlpi și m nivele, duce la rezolvarea unui sistem de $4\,n\,(m-1)+3$ ecuații statice [1]. Ca atare, simplificarea sistemului de ecuații statice prin folosirea la maximum a particularităților geometrice și de încărcare ale acestor construcții este o problemă de primă importanță pentru calculul lor.

Astfel, din considerarea simetriei axiale a acestor structuri rezultă următoarele simplificări :

1. În cazul încărcării cu sarcini verticale, axial-simetrice, singura deformare a structurii este rotirea radială cu același unghi a tuturor nodurilor unui inel [1], [2]. În acest caz numărul necunoscutelor se reduce la $m-1$.

2. În cazul încărcării cu sarcini orizontale, provenite din vînt sau cutremur, se demonstrează [3], [4] că inelele de rigidizare nu-și schimbă configurația geometrică. Ca atare, toți stîlpii unui etaj se vor roti cu același unghi ψ față de verticală.

3. Dacă α_i reprezintă unghiul format de direcția forței orizontale și de raza ce corespunde stîlpului i, iar θ' și θ'' reprezintă valorile maxime ale rotirilor de nod la un anumit nivel pe direcția radială și pe cea tangențială,

---

[1] Direcția de sistematizare, arhitectură și proiectare a construcțiilor (DSAPC), Brașov.

rotirea de nod radială φ_i', respectiv cea tangențială φ_i'' la același nivel se pot exprima sub forma [1].

$$\varphi_i' = \theta' \cos \alpha_i ,$$

$$\varphi_i'' = \theta'' \sin \alpha_i .$$

În figura 1 se arată vectorii rotire θ', θ'', φ' și ψ''.

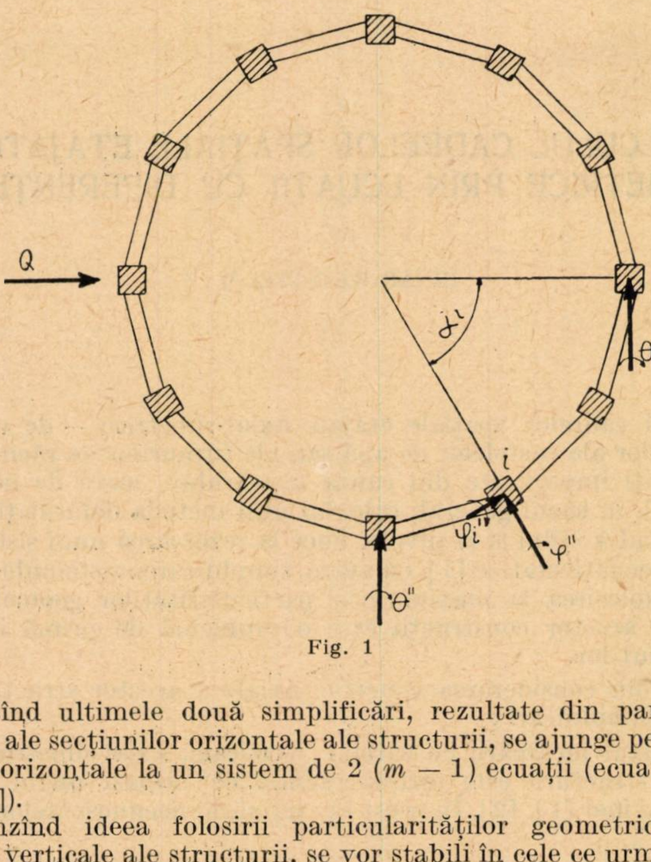


Fig. 1

Aplicînd ultimele două simplificări, rezultate din particularitățile geometrice ale secțiunilor orizontale ale structurii, se ajunge pentru calculul la sarcini orizontale la un sistem de 2 (m — 1) ecuații (ecuațiile VIII 48, 49 din [1]).

Extinzînd ideea folosirii particularităților geometrice și asupra secțiunilor verticale ale structurii, se vor stabili în cele ce urmează expresii analitice directe pentru soluțiile acestui sistem de ecuații statice, eliminînd astfel necesitatea rezolvării lui.

1. REZOLVAREA SISTEMULUI DE ECUAȚII STATICE CU AJUTORUL ECUAȚIILOR CU DIFERENȚE FINITE

Cadrele spațiale etajate axial-simetrice sînt folosite în primul rînd ca infrastructuri ale castelelor de apă și ale turnurilor de răcire. Deoarece la aceste infrastructuri nici sarcinile verticale, nici cele orizontale nu variază puternic pe înălțimea structurii, se pot alcătui structuri raționale cu stîlp de secțiune constantă de sus pînă jos și cu inele de rigidizare la distanțe egale, avînd toate aceeași secțiune. Aceste cadre spațiale se pot deci considera ca fiind generate prin repetarea unor panouri identice.

În ce privește rezultanta forțelor orizontale la nivelul x, ea se poate aproxima în bune condițiuni prin expresia

$$Q_x = P + px.$$

Aici s-a notat

Q_x — rezultanta forțelor orizontale la nivelul P avînd numărul de ordine x;

P — forța orizontală aplicată construcției pe care o susține cadrul spațial (adică, de exemplu, rezervorului castelului de apă sau coșului turnului de răcire);

p — forța orizontală aplicată la fiecare nivel al cadrului spațial; (nivelele se numerotează de sus în jos, nivelul încastrării stîlpilor în inelul de bază al construcției pe care o susțin avînd numărul de ordine 0, iar nivelul încastrării stîlpilor în fundație avînd numărul de ordine m).

Se arată ([5], p. 481, [6]) că structurile *monotone* (alcătuite din panouri identice), încărcate cu sarcini ce se exprimă analitic în funcție de numărul de ordine al panoului duc la sisteme de ecuații statice ce se pot interpreta ca ecuații cu diferențe finite cu coeficienți constanți [6], [7], [8] și se pot rezolva ca atare (pentru exemple de rezolvare pe această cale a problemelor de statică vezi calculul conlucrării arcului cu grinda tablierului [5], p. 902 și calculul cadrelor tip shed [9]).

În cele ce urmează se va aplica această metodă și la sistemul de ecuații VIII 48,49 din [1].

Dacă n este numărul stîlpilor, θ_x' și θ_x'' este rotirea radială și cea tangențială maximă a nodurilor la nivelul x, iar h este înălțimea nivelului, aceste ecuații iau forma:

$$(1-a)\ \theta_x' + b\theta_{x+1}' + (1-a)\ \theta_{x+2}' - ka\theta_x'' - c\theta_{x+1}'' - ka\theta_{x+2}'' = -\frac{Q_x + Q_{x+1}}{2(1+k)n}\,h, \tag{1}$$

Aci s-a notat

$$-a\theta_x' - e\theta_{x+1}' - a\theta_{x+2}' + (1-a)\,k\theta_x'' + d\theta_{x+1}'' + (1-a)\,k\,\theta_{x+2}'' = -\frac{Q_x + Q_{x+1}}{2(1+k)n}\,h.$$

$\frac{I_1}{h} = 1$ — rigiditatea la încovoiere a stîlpului pe direcția radială, considerată rigiditate unitară,

$\frac{I_2}{h} = k$ — rigiditatea la încovoiere a stîlpului pe direcția tangențială,

$\frac{I_g}{2} = k'$ — rigiditatea la încovoiere a grinzii de rigidizare,

$\frac{I_t}{42}\,\frac{G}{E} = k''$ — rigiditatea la torsiune a grinzii de rigidizare,

$$a = \frac{3}{2\,(1 + k)},$$

$$b = 4 + 6\,k' \sin^2 \frac{\pi}{n} - (k' - 2k'') \sin^2 \frac{2\,\pi}{n} - 2a,$$

$$c = 2ka - (k' - 2\,k'') \sin^2 \frac{2\,\pi}{n},$$

$$d = 4k + 6k' \cos^2 \frac{\pi}{n} - (k' - 2\,k'') \sin^2 \frac{2\pi}{n} - 2\,ka,$$

$$e = 2a - (k' - 2\,k'') \sin^2 \frac{2\pi}{n}.$$

Considerînd relațiile (1) ca un sistem de două ecuații cu diferențe finite, neomogene și cu coeficienți constanți, soluțiile acestui sistem de ecuații vor fi

$$\theta'_x = C_1\,\beta_1^x + C_2\,\beta_2^x + C_3\,\beta_3^x + C_4\,\beta_4^x + \theta'_{1x}$$

$$\theta''_x = C_1\varepsilon_1\beta_1^x + C_2\varepsilon_2\,\beta_2^x + C_3\varepsilon_3\beta_3^x + C_4\varepsilon_4\,\beta_4^x + \theta''_{1x}\,.$$

Soluțiile particulare ale sistemului neomogen se caută sub forma :

$$\theta'_{1x} = A_1\,[P + p\,(x - 0{,}5)],$$

$$\theta''_{1x} = A_2\,[P + p\,(x - 0{,}5)].$$

Valorile A_1 și A_2 se determină prin identificarea coeficienților din sistemul de ecuații

$$[2\,(1 - a) + b]\,A_1 - (2\,ka + c)\,A_2 = -\,\frac{h}{(1 + k)\,n},$$

$$-(2\,a + e)\,A_1 + [2\,(1 - a)\,k + d]\,A_2 = -\,\frac{h}{(1 + k)\,n}\,.$$

Valorile $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ se determină din ecuația caracteristică a sistemului de ecuații cu diferențe finite

$$\begin{vmatrix} (1 - a)\,\beta^2 + b\,\beta + (1 - a) & -\,ka\,\beta^2 - c\,\beta - ka \\ -\,a\,\beta^2 - e\,\beta - a & (1 - a)\,k\,\beta^2 + d\,\beta + (1 - a)\,k \end{vmatrix} = 0.$$

Rezultă ecuația reciprocă de gradul 4

$$(1 - 2a)\,k\,\beta^4 + [(1 - a)\,(kb + d) - a\,(ke + c)]\,\beta^3 +$$
$$+\,[2\,(1 - 2\,a)\,k + db - ec]\,\beta^2 +$$
$$+\,[(1 - a)\,(kb + d) - a\,(k\,e + c)]\,\beta + (1 - 2a)\,k = 0.$$

Cele patru valori ε ce corespund celor patru valori β se determină din relaţia

$$\varepsilon = \frac{a\beta^2 + e\beta + a}{(1-a)k\beta^2 + d\beta + (1-a)k}.$$

Se poate arăta, că din cauza reciprocităţii ecuaţiei caracteristice, dacă β_1, β_2 şi β_3, β_4 sînt cele două perechi de soluţii conjugate ale ecuaţiei caracteristice

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_1,$$
$$\varepsilon_4 = \varepsilon_3.$$

Constantele C_1, C_2, C_3, C_4 se determină din condiţiile la limită:

$$\begin{aligned}
\theta_0' &= C_1 + C_2 + C_3 + C_4 + \theta_{10}' = 0,\\
\theta_0'' &= C_1\varepsilon_1 + C_2\varepsilon_2 + C_3\varepsilon_3 + C_4\varepsilon_4 + \theta_{10}'' = 0,\\
\theta_m' &= C_1\beta_1^m + C_2\beta_2^m + C_3\beta_3^m + C_4\beta_4^m + \theta_{1m}' = 0,\\
\theta_m'' &= C_1\varepsilon_1\beta_1^m + C_2\varepsilon_2\beta_2^m + C_3\varepsilon_3\beta_3^m + C_4\varepsilon_4\beta_4^m + \theta_{1m}'' = 0.
\end{aligned}$$

Dacă se notează astfel valorile β, încît $|\beta_2| < |\beta_1|$ şi $\beta_4| < |\beta_3|$, se vor putea neglija valorile β_2^m şi β_4^m care sînt foarte mici.

Notînd $\frac{A_2}{A_1} = \alpha$, se obţine

$$C_1 = -\frac{(\varepsilon_3 - \alpha)\,\theta_1^{\prime m}}{(\varepsilon_3 - \varepsilon_1)\,\beta_1^m}, \qquad C_2 = -\frac{(\varepsilon_3 - \alpha)\,(\theta_{10}'\beta_1^m - \theta_{1m}')}{(\varepsilon_3 - \varepsilon_1)\,\beta_1^m},$$

$$C_3 = \frac{(\varepsilon_1 - \alpha)\,\theta_{1m}'}{(\varepsilon_3 - \varepsilon_1)\,\beta_3^m}, \qquad C_4 = \frac{(\varepsilon_1 - \alpha)\,(\theta_{10}'\beta_3^m - \theta_{1m}')}{(\varepsilon_3 - \varepsilon_1)\,\beta_3^m}.$$

Momentele maxime în stîlpi şi grinzi se calculează după formulele VIII 52, 53, 54, 55 din [1]

momentul încovoietor radial în stîlp

$$M'_{(x+1)-x} = 4\,\theta'_{x+1} + 2\,\theta'_x + 6\,\psi;$$

momentul încovoietor tangenţial în stîlp:

$$M''_{(x+1)-x} = k\,(4\,\theta''_{x+1} + 2\,\theta''_x + 6\,\psi);$$

momentul încovoietor în grindă

$$M_x^i = 6\,k'\left(\theta'_x \sin^2\frac{\pi}{n} + \theta''_x \cos^2\frac{\pi}{n}\right);$$

momentul de torsiune în grindă:

$$M_x^t = 4\,k''\sin\frac{2\pi}{n}\cdot(\theta'_x - \theta''_x).$$

Unghiul de înclinare ψ al stîlpilor etajului $x - (x+1)$ se determină din ecuaţia VIII 47 [1]

$$3\,(\theta'_x + \theta'_{x+1}) + 3\,k\,(\theta''_x + \theta''_{x+1}) + 6\,(1+k)\,\psi = \frac{Q_x h}{n}.$$

2. CAZ PARTICULAR : STRUCTURA CU STÎLPI DE SECŢIUNE PĂTRATĂ

Se va mai considera cazul structurii cu stîlpi de secţiune pătrată. După cum se arată în [1] p. 436, aceasta este structura optimă din punct de vedere static.

În acest caz avem :

$$a = 0{,}75,$$

$$b = 2{,}5 + 6\,k'\sin^2\frac{\pi}{n} - (k' - k'')\sin^2\frac{2\pi}{n},$$

$$c = e = 1{,}5 - (k' - k'')\sin^2\frac{2\pi}{n},$$

$$d = 2{,}5 + 6\,k'\cos^2\frac{\pi}{n} - (k' - 2\,k'')\sin^2\frac{2\pi}{n},$$

$$A_1 = \frac{2 + c + d}{c^2 - bd - 0{,}5\,b + 3c - 0{,}5\,d + 2}\cdot\frac{h}{2n},$$

$$A_2 = \frac{2 + b + c}{c^2 - bd - 0{,}5\,b + 3c - 0{,}5\,d + 2}\cdot\frac{h}{2n}.$$

Pentru valorile β se obţine

$$\beta_{1.2} = \frac{y_1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{y_1}{2}\right)^2 - 1} \qquad \beta_{3,4} = \frac{y_2}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{y_2}{2}\right)^2 - 1}$$

unde

$$y_{1.2} = -[1{,}5\,c - 0{,}25\,(b+d)] \pm \sqrt{[1{,}5\,c - 0{,}25\,(b+d)]^2 - 2\,(c^2 - bd)}.$$

Valorile β_2 şi β_4 rezultînd din scăderea a două numere apropiate, se face un calcul mai exact, dezvoltînd radicalii în serie. Dacă se consideră numai primii doi termeni, se obţine

$$\beta_{2,4} = \frac{1}{y_{1.2}}.$$

Pentru a simplifica la maximum calculul acestor structuri, vom mai admite că raportul între înălţimea şi lăţimea secţiunii grinzii de rigidizare este 1,5. Pentru acest caz s-au stabilit expresii empirice ce aproximează valorile A, α, β şi ε ca funcţii simple de numărul de stîlpi n şi de rigiditatea relativă k' a grinzilor de rigidizare (expresiile empirice au fost stabilite pentru n variind între 4 şi 12 şi pentru k' variind între 0,6 şi 2,0).

S-a obţinut

$$\beta_1 = 1{,}56 + 0{,}054\,n + \frac{100k'}{13{,}75 + 0{,}689\,n},$$

$$\beta_2 = \frac{1}{(6{,}95 - 0{,}92\sqrt[4]{n-4})\,k' + 1{,}44 + 0{,}6\sqrt[4]{n-4}},$$

$$\beta_3 = (0{,}05n - 1{,}71)\,k' - 3{,}54 - 0{,}0575\,n,$$

$$\beta_4 = 0{,}0365\,k' - 0{,}222,$$

$$\theta'_{1x} = \frac{1 + \left(1{,}32 - \dfrac{5{,}26}{n}\right)k'}{(0{,}96 - 7{,}6\,k')\,n}\,[P + p\,(x - 0{,}5)]\,h,$$

$$\theta''_{1x} = \frac{1}{(0{,}96 - 7{,}6\,k')\,n}\,[P + p\,(x - 0{,}5)]\,h,$$

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{\left(0{,}365 - \dfrac{1{,}46}{n}\right)k' + 1 + 0{,}095\sqrt[3]{n-4}},$$

$$\varepsilon_3 = \frac{-1}{1 + 0{,}196\sqrt[4]{n-4} + 0{,}169\,k'\sqrt[4]{(n-4)^3}},$$

$$C_1 = -S'\,\frac{\theta'_{1m}}{\beta_1^m}$$

$$C_2 = -S'\,\frac{\theta'_{10}\,\beta_1^m - \theta'_{1m}}{\beta_1^m},$$

$$C_3 = -S''\,\frac{\theta'_{1m}}{\beta_3^m},$$

$$C_4 = -S''\,\frac{\theta'_{10}\,\beta_3^m - \theta'_{1m}}{\beta_3^m}$$

S-a notat

$$S'' = 0{,}0675\,k'\sqrt[3]{n-4},$$

$$S' = 1 - S''.$$

3. EXPRESII DIRECTE PENTRU MOMENTELE ÎN STÎLPI. OBSERVAŢII CALITATIVE

Prin calcule comparative se poate arăta că soluţia generală a sistemului de ecuaţii cu diferenţe finite are o influenţă foarte redusă asupra momentelor din stîlpi, aceste momente putîndu-se calcula cu o precizie suficientă, folosind numai soluţiile particulare ale sistemului neomogen θ'_{1x} şi θ''_{1x}. Această observaţie permite stabilirea unor formule aproximative directe pentru calculul momentelor în stîlpi. Eliminînd unghiul de înclinare al stîlpilor ψ şi înlocuind pe θ'_x şi θ''_x prin θ'_{1x} şi θ''_{1x} se obţin formulele

$$M'_{x-(x+1)} = \frac{Q_x h}{2n} - \frac{\left(1,32 - \frac{5,26}{n}\right) k' \left(3\, Q_x - p\right) - p}{(7,6\, k' - 0,96)\, n}\, h,$$

$$M'_{(x+1)-x} = \frac{Q_x h}{2n} - \frac{\left(1,32 - \frac{5,26}{n}\right) k' \left(3\, Q_x + p\right) + p}{(7,6\, k' - 0,96)\, n}\, h,$$

$$M''_{x-(x+1)} - \frac{Q_h h}{2n} + \frac{\left(1,32 - \frac{5,26}{n}\right) k' \,.\, 3\, Q_x + p}{(7,6\, k' - 0,96)\, n}\, h,$$

$$M''_{(x+1)-x} = \frac{Q_x h}{2n} + \frac{\left(1,32 - \frac{5,26}{n}\right) k' \,.\, 3\, Q_x - p}{(7,6\, k' - 0,96)\, n}\, h.$$

Pentru stîlpii primului nivel se obţine

$$M'_{0-1} = \frac{Q_x h}{2n} - \frac{\left[0,5 \left(1,32 - \frac{5,26}{n}\right) k' - 1\right] (P + 0,5\, p)}{(7,6\, k' - 0,96)\, n}\, h,$$

$$M'_{1-0} = \frac{Q_x h}{2n} - \frac{\left[2,5 \left(1,32 - \frac{5,26}{n}\right) k' + 1\right] (P + 0,5\, p)}{(7,6\, k' - 0,96)\, n}\, h,$$

$$M''_{0-1} = \frac{Q_x h}{2n} + \frac{\left[1,5 \left(1,32 - \frac{5,26}{n}\right) k' + 1\right] (P + 0,5\, p)}{(7,6\, k' - 0,96)\, n}\, h,$$

$$M''_{1-0} = \frac{Q_x h}{2n} + \frac{\left[1,5 \left(1,32 - \frac{5,26}{n}\right) k' - 1\right] (P + 0,5\, p)}{(7,6\, k' - 0,96)\, n}\, h.$$

Pentru ultimul nivel se vor folosi aceleaşi formule ca şi pentru primul nivel, înlocuind însă $P + 0,5\, p$ prin $P + p\, (m - 1,5)$. Momentul $M_{m-(m-1)}$

va corespunde momentului M_{0-1}, iar momentul $M_{(m-1)-m}$ va corespunde momentului M_{1-0}.

Pe baza expresiilor aproximative de mai sus se fac următoarele observaţii calitative.

1. Primul termen din fiecare formulă reprezintă momentul de încastrare perfectă a stîlpului la nivelul respectiv. Influenţa rotirii nodurilor apare ca o corecţie ce se adaugă la momentul de încastrare perfectă.

2. Prin adăugarea corecţiei, momentele radiale se micşorează faţă de momentele de încastrare perfectă, iar momentele tangenţiale cresc. Rezultă că momentele tangenţiale vor fi întotdeauna mai mari decît cele radiale.

3. Corecţia ce se adaugă la momentele de încastrare perfectă este proporţională cu factorul $1{,}32 - \dfrac{5{,}26}{n}$. Cu cît numărul stîlpilor este mai mare, acest factor va fi mai mare şi depăşirea momentelor radiale de către cele tangenţiale va fi mai accentuată.

4. EXEMPLU DE CALCUL

Se calculează momentele de încovoiere şi de torsiune ce apar sub acţiunea forţelor seismice în structura de rezistenţă a unui castel de apă de 100 m³. Structura de rezistenţă este alcătuită (conf. figura 2) din 6 stîlpi şi 2 inele de rigidizare ($m = 3$). Înălţimea unui nivel este 3,0 m, rigiditatea la încovoiere a stîlpului pe înălţimea unui nivel şi a inelului de rigidizare între doi stîlpi se consideră egale cu unitatea. Stîlpul este de secţiune pătrată, iar raportul între înălţimea şi lăţimea secţiunii rigidizării este 1,5. Forţa seismică se ia egală cu $\dfrac{1}{20}$ din greutatea elementului respectiv. Pentru un rezervor de 100 m³ se obţine forţa seismică de 100/20 = 5 t. Forţele seismice aplicate elementelor structurii castelului de apă se neglijează :

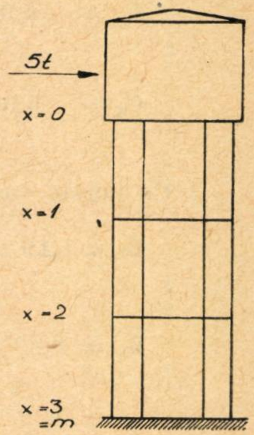


Fig. 2

Pentru datele problemei se obţin valorile :

$$\beta_1 = 1{,}56 + 0{,}054 \times 6 + \frac{100 \times 1}{13{,}75 + 0{,}689 \times 6} = 7{,}48,$$

$$\beta_2 = \frac{1}{(6{,}95 - 0{,}92\sqrt{2}) \times 1 + 1{,}44 + 0{,}6\sqrt[4]{2}} = 0{,}128,$$

$$\beta_3 = (0{,}05 \times 6 - 1{,}71) \times 1 - 3{,}54 - 0{,}0575 \times 6 = -5{,}30,$$

$$\beta_4 = 0{,}0365 \times 1 - 0{,}222 = -0{,}186,$$

$$\theta'_{1x} = \frac{1 + \left(1{,}32 - \dfrac{5{,}26}{6}\right) \times 1}{(0{,}96 - 7{,}6 \times 1) \times 6} \times 5 \times 3{,}0 = -0{,}545,$$

$$\theta''_{1x} = \frac{1}{(0{,}96 - 7{,}6 \times 1) \times 6} \times 5 \times 3{,}0 = -\,0{,}378,$$

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{\left(0{,}365 - \frac{1{,}46}{6}\right) \times 1 + 1 + 0{,}095\sqrt[3]{2}} = 0{,}805,$$

$$\varepsilon_3 = \frac{-\,1}{1 + 0{,}196\sqrt[4]{2} + 0{,}169 \times 1 \times \sqrt[4]{2^3}} = -\,0{,}660,$$

$$S'' = 0{,}0675 \times 1 \times \sqrt[3]{2} = 0{,}085,$$

$$S' = 1 - 0{,}085 = 0{,}915,$$

$$C_1 = 0{,}915 \times \frac{0{,}545}{7{,}48^3} = 1{,}19 \times 10^{-3},$$

$$C_2 = 0{,}915 \times \frac{0{,}545\,(7{,}48^3 - 1)}{7{,}48^3} = 0{,}50,$$

$$C_3 = -\,0{,}085 \times \frac{0{,}545}{5{,}30^3} = -\,0{,}31 \times 10^{-3},$$

$$C_4 = \;\; 0{,}085 \times \frac{0{,}545\,(5{,}30^3 - 1)}{5{,}30^3} = 0{,}046.$$

Cu aceste valori, rotirile θ'_x și θ''_x devin

$$\theta'_1 = 1{,}19 \times 10^{-3} \times 7{,}48 + 0{,}50 \times 0{,}128 + 0{,}31 \times 10^{-3} \times 5{,}30 - \\ - 0{,}046 \times 0{,}186 - 0{,}545 = -\,0{,}478,$$

$$\theta''_1 = 0{,}805\,(1{,}19 \times 10^{-3} \times 4{,}48 + 0{,}50 \times 0{,}128) - 0{,}66\,(0{,}31 \times \\ \times 10^{-3} \times 5{,}30 - 0{,}046 \times 0{,}186) - 0{,}378 = -\,0{,}315,$$

$$\theta'_2 = 1{,}19 \times 10^{-3} \times 7{,}48^2 + 0{,}50 \times 0{,}128^2 - 0{,}31 \times 10^{-3} \times 5{,}30^2 \\ + 0{,}046 \times 0{,}186^2 - 0{,}545 = -\,0{,}477,$$

$$\theta''_2 = 0{,}805\,(1{,}19 \times 10^{-3} \times 7{,}48^2 + 0{,}50 \times 0{,}128^2) + 0{,}66\,(0{,}31 \times \\ \times 10^{-3} \times 5{,}30^2 - 0{,}046 \times 0{,}186^2) - 0{,}378 = -\,0{,}313.$$

Cu aceste rotiri de noduri se calculează momentele în mod obișnuit. În figura 3 se arată diagramele momentelor încovoietoare maxime în stîlpi ce rezultă din acest calcul.

În figura 4 se dau momentele rezultate din aplicarea formulelor aproximative. Comparînd valorile din figura 3 cu cele din figura 2, se constată că eroarea maximă din calculul aproximativ este 0,08 tm, ceea ce reprezintă 4,5 % din momentul maxim. Folosirea formulelor aproximative este deci bine justificată.

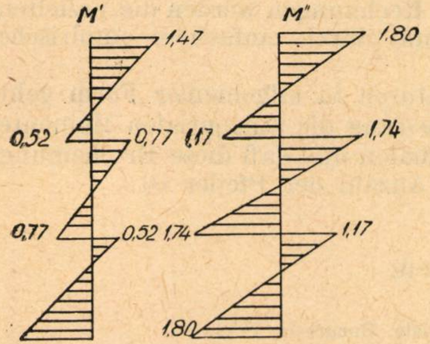


Fig. 3

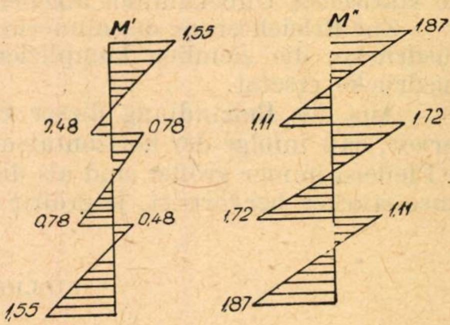


Fig. 4

5. CONCLUZII

Se arată că cadrele spaţiale etajate, axial-simetrice, sînt structuri monotone şi se pot calcula ca atare prin ecuaţii cu diferenţe finite.

Deoarece această metodă permite exprimarea directă a tuturor necunoscutelor, indiferent de numărul lor, aplicarea ei este avantajoasă mai ales la structuri cu multe nivele.

Expresiile obţinute fiind destul de complicate, ele s-au înlocuit prin expresii empirice simple. Pe lîngă faptul că aceste expresii empirice simplifică mult calculul practic al cadrelor etajate axial-simetrice, ele permit şi urmărirea directă a influenţei configuraţiei geometrice a acestor structuri asupra eforturilor, putîndu-se alege astfel soluţiile optime.

Primită la redacţie la 12 iulie 1962

BERECHNUNG AXIALSYMMETRISCHER RÄUMLICHER STOCKWERKRAHMEN MIT HILFE VON DIFFERENZENGLEICHUNGEN

ZUSAMMENFASSUNG

Die Berechnung axialsymmetrischer Stockwerkrahmen, die infolge der großen Anzahl von statischen Unbekannten schwierig ist, läßt sich durch die Verwendung gewisser geometrischer und Belastungseigenschaften dieser Struktur wesentlich vereinfachen.

Einen praktisch wichtigen Fall bilden die „monotonen" (aus identischen Stockwerken bestehenden) axialsymmetrischen räumlichen Rahmen.

Mit Hilfe der Differenzengleichungen wurden für diese Rahmen bei horizontaler Belastung durch Wind oder Erdbeben direkte Ausdrücke für die statischen Unbekannten abgeleitet.

Zur Erleichterung der numerischen Rechnungen werden die erzielten Ausdrücke, die ziemlich kompliziert sind, durch einfachere empirische Ausdrücke ersetzt.

Aus der Behandlung dieser Strukturen in allgemeiner Form geht hervor, daß infolge der horizontalen Belastung die tangentialen Momente in Pfeilern immer größer sind als die radialen und daß diese Erscheinung umso stärker hervortritt, je größer die Anzahl der Pfeiler ist.

BIBLIOGRAFIE

1. M. Hangan, *Betonul armat*. Construcţii industriale, Bucureşti, 1958.
2. M. Mutafolo, *Calculul turnurilor spaţiale etajate prin metoda „modelelor plane"*. Industria construcţiilor şi a materialelor de construcţii, X (1957).
3. — *Contribuţii la calculul turnurilor spaţiale etajate axial-simetrice*. Bucureşti, 1959.
4. — *Calculul iterativ al structurilor spaţiale axial-simetrice pe modele plane*. Comunicare făcută la Sesiunea ştiinţifică a cadrelor didactice din Institutul de construcţii Bucureşti, mai 1957 (sub tipar).
5. P. Mazilu, *Statica construcţiilor*. II. Bucureşti, 1959.
6. Bleich Melan, *Die gewöhnlichen und partiellen Differenzengleichungen der Baustatik*. Berlin, 1927.
7. A. O. Ghelfond, *Calculul cu diferenţe finite*. Bucureşti, 1956.
8. W. Hort, A. Thoma, *Die Differentialgleichungen der Technik und Physik*. Leipzig, 1954.
9. T. Cărare, C. Amzulescu, *Calculul cadrelor tip shed prin ecuaţii cu diferenţe finite*. St. cerc. mec. apl., I (1957).

ASPECTE PRIVIND EVOLUȚIA UZURII ȘI TEMPERATURII UNOR CUPLURI RADIOACTIVE BRONZ-OȚEL

DE

DAN PAVELESCU și IVAN ILIUC

620.178.1 : 539.16

Cercetările efectuate anterior [1], [2], privind determinarea calității de ungere a uleiurilor şi a rezistenței la uzură a materialelor, au condus la realizarea unei instalații [2] de încercat uleiuri şi metale, care se pretează însă şi la studierea unor aspecte fundamentale privind evoluția uzurii.

În linii esențiale, părțile componente ale acestei instalații, sînt următoarele :

— un cuplu de frecare, cufundat în baie de ulei format din bucşa activată (material antifricțiune) şi o placă fixă (oțel) cu suprafață plană, contactul făcîndu-se astfel pe generatoarea bucşei rotitoare ;

— determinarea vitezei de uzură a materialului bucşei, se face prin măsurarea periodică a activității întregii cantități de ulei din cuva experimentală — ceea ce elimină recircularea uleiului ; după perioada de lucru, cuva cu ulei, glisează pe verticală, în interiorul unui sistem traductor G—M ; se urmăreşte în afară de activitate (uzură), încărcarea cuplului şi temperatura de termostatare. Funcție de materialul cuplului, ulei (aditiv), sarcină etc., s-au obținut prin măsurători cu intermitență, curbe de uzură — drepte cu pante diferite — ce pot caracteriza fie materialul cuplului, fie lubrifiantul. Sensibilitatea metodei este de ordinul 10^{-7} g, metal/cm^3, ulei, iar reproductibilitatea $\pm 25\%$.

Cercetările ce au urmat, şi care fac obiectul prezentei lucrări, au căutat să răspundă la mai multe întrebări dintre care :

— Dacă curbele de uzură obținute au într-adevăr forma arătată, sau această formă este un rezultat al procedeului de măsură? (curbele de uzură în porțiunile inițiale, cînd uzura suprafețelor nu este mare, au fost asimilate cu nişte drepte).

— Care este viteza de uzură în momentele inițiale, cînd suprafețele au o anumită stare bine cunoscută? Diferă oare viteza de uzură în această perioadă, de viteza de uzură din momentele următoare?

Pentru a se studia aceste aspecte, s-a completat instalaţia expusă mai sus în linii mari, astfel ca ea să permită măsurarea, continuă sau la intervale foarte mici, în mod simultan, a temperaturilor cuplului şi uleiului, şi de asemenea evoluţia uzurii bucşei (fig. 1).

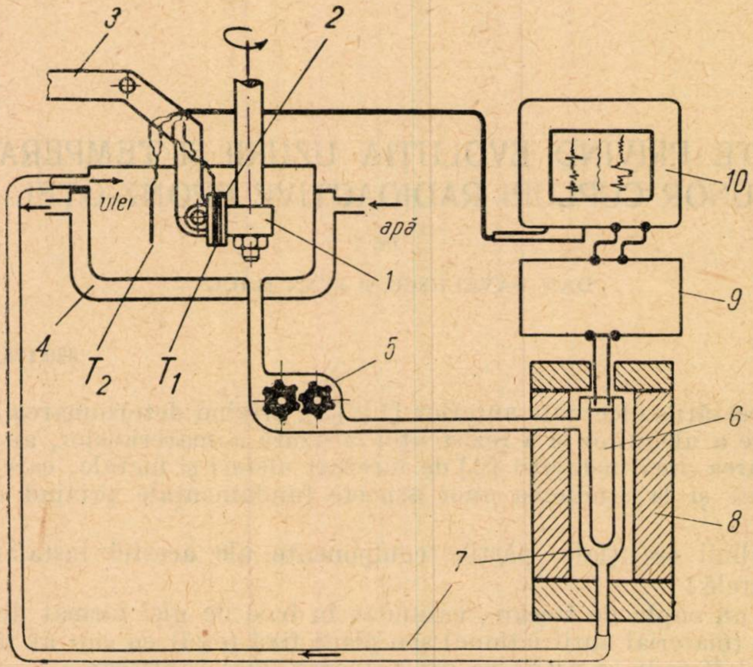


Fig. 1. — Schiţă de principiu a instalaţiei experimentale.

1 – bucşe radioactivă de Bz; *2* – placa de oţel; *3* – pîrghia de încărcare; *4* – cuva de ulei cu pereţi dubli*; *5* – pompă pentru recirculare ulei; *6* – contor G–M; *7* – circuit ulei; *8* – protecţie Pb; *9* – numărător-integrator; *10* – potenţiometru electronic inregistrator.

Experienţele din lucrările anterioare [1], [2] au lămurit mai bine care sînt principalele cauze care conduc la fluctuarea rezultatelor în determinările vitezei de uzură. În ceea ce priveşte influenţa recirculării uleiului radioactiv, s-a constatat că, dacă se iau anumite măsuri privind forma circuitului de ulei şi a vitezei de recirculare, şi totodată particulele de uzură îşi păstrează dimensiuni obişnuite (de ordinul micronilor, deci nu se intră în regim de uzură intensă), importanţa fluctuaţiilor rezultatelor cauzate de repartizarea neomogenă a uzurii în volumul de ulei, este neglijabilă.

În cazul de faţă, menţinîndu-se acelaşi cuplu studiat anterior, s-a adaptat cuvei experimentale un sistem de circulaţie cu pompă şi un grup de traductori G–M cufundaţi.

S-a determinat în prealabil variaţia activităţii în traductor, la un salt de activitate în cuva de ulei, prin introducerea în baia de ulei (fără particule de uzură radioactive) a unei anumite cantităţi de pulbere radioactivă de Co^{60}. S-a găsit timpul de răspuns al instalaţiei egal cu circa 20 secunde.

Pentru măsurarea temperaturii uleiului şi a cuplului s-au utilizat traductoare cu rezistenţă. Măsurarea continuă a temperaturii uleiului s-a dovedit necesară, întrucît datorită volumului relativ mic al lubrifiantului (condiţie impusă de specificul metodei de determinare a cantităţii de metal uzat), s-au constatat unele variaţii ale acestei mărimi la modificarea altor parametri.

S-au luat măsurile necesare pentru realizarea unui coeficient de transfer de căldură ridicat (s-a ajuns la o variaţie a temperaturii uleiului de ±1°C indiferent de sarcină).

Pentru măsurarea temperaturii cuplului s-a montat traductorul rezistiv, prin înfăşurare, într-un şanţ în pastila de oţel, situat cît mai aproape de suprafaţa de frecare.

Diferenţa între temperatura cuplului şi temperatura uleiului, dacă se presupun constante mărimile care determină coeficientul de transfer de căldură de la pastilă la lubrifiant, va fi proporţională cu energia termică degajată în cuplu. Considerînd că această energie provine toată din lucrul mecanic efectuat la locul de contact, se obţine în acelaşi timp şi o mărime proporţională cu forţa de frecare şi coeficientul de frecare (la aceeaşi sarcină).

Cu ajutorul unui potenţiometru electronic s-au înregistrat automat cei trei parametri amintiţi (uzura bucşei şi temperaturile medii ale plăcii de oţel şi uleiului).

S-a creat deci posibilitatea sesizării anumitor fenomene tranzitorii care sînt importante în special prin aceea că pot contribui la lămurirea mecanismului complex al uzurii.

S-au studiat în primul rînd două calităţi de bronzuri : cu 6 % şi respectiv 14 % staniu (STAS Bz6 şi Bz14). Pentru activare, ca şi în lucrările precedente, s-a introdus în aliaj, ca trasor, indiu, în proporţie de 1 %.

Etalonarea grupului de traductori folosiţi s-a făcut cu ajutorul unei mici cantităţi de aliaj, iradiată în condiţii similare cu bucşa.

Cealaltă piesă a cuplului de frecare, plăcuţa cu suprafaţa plană, a fost confecţionată din oţel de arbore, călit, suprafaţa de lucru fiind rectificată şi şlefuită.

REZULTATE ŞI CONCLUZII

1. La încărcări pînă la circa 3 000 kg/cm² (calculat cu relaţia corespunzătoare a lui Hertz), în cazul bronzului, curbele de uzură pot fi asimilate cu linii drepte a căror pantă variază în limitele cca ± 25 %

Această concluzie este valabilă pentru un anumit timp de funcţionare, timp în care uzura suprafeţelor nu conduce la modificări însemnate ale formei geometrice a cuplului.

Un exemplu de o asemenea curbă este arătat în figura 2 (curba *1*).

În figura 3 sînt prezentate vitezele de uzură pentru Bz6 şi curbele medii) în funcţie de sarcină şi timp. Curbele respective au fost deduse

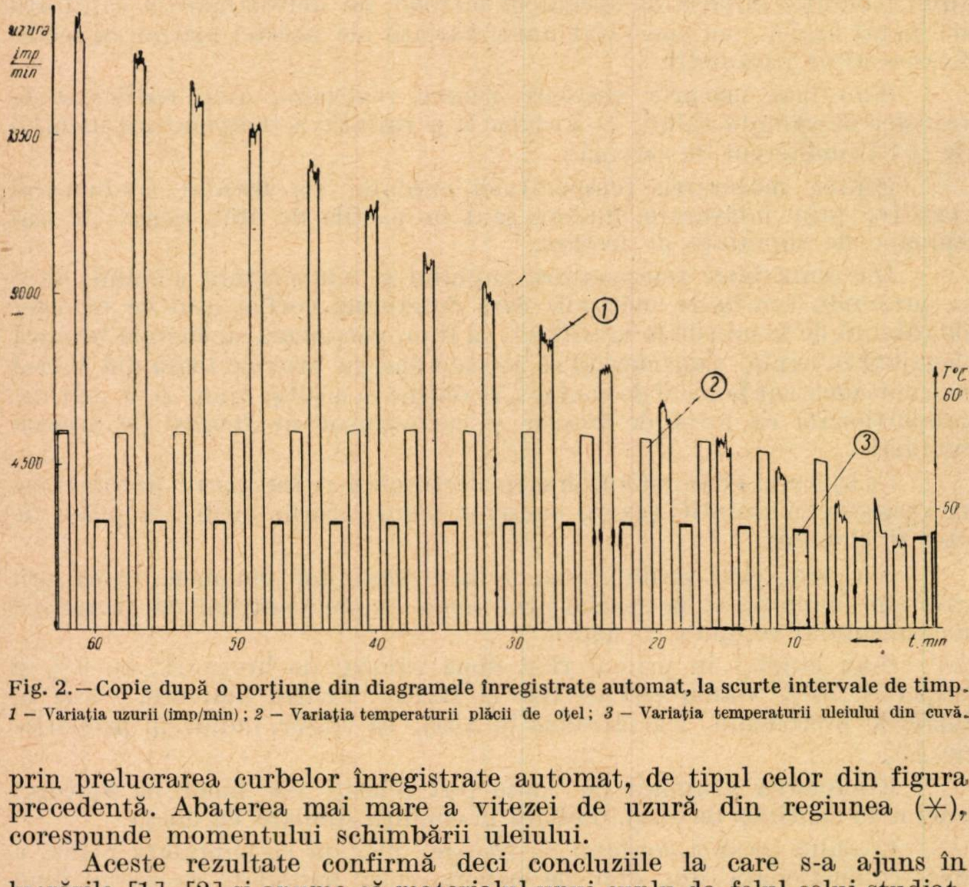


Fig. 2. — Copie după o porţiune din diagramele înregistrate automat, la scurte intervale de timp. *1* — Variaţia uzurii (imp/min); *2* — Variaţia temperaturii plăcii de oţel; *3* — Variaţia temperaturii uleiului din cuvă.

prin prelucrarea curbelor înregistrate automat, de tipul celor din figura precedentă. Abaterea mai mare a vitezei de uzură din regiunea (✳), corespunde momentului schimbării uleiului.

Aceste rezultate confirmă deci concluziile la care s-a ajuns în lucrările [1], [2] şi anume că materialul unui cuplu de felul celui studiat, şi un lubrifiant, pot fi caracterizate, din punctul de vedere al comportării la uzură, prin panta dreptei care reprezintă evoluţia uzurii în timp (cu abaterea menţionată); concluziile respective sînt valabile însă pînă la anumite sarcini. Depăşirea acestor sarcini conduce la neregularităţi (fluctuaţii) însemnate în curbele de uzură.

2. O altă constatare este aceea că, chiar în momentele iniţiale ale procesului, cînd suprafeţele utilizate au o stare bine determinată, obţinută prin prelucrare, viteza de uzură nu diferă esenţial de viteza de uzură din momentele următoare. Acest lucru este ilustrat în porţiunea iniţială a curbei *1* din figura 2.

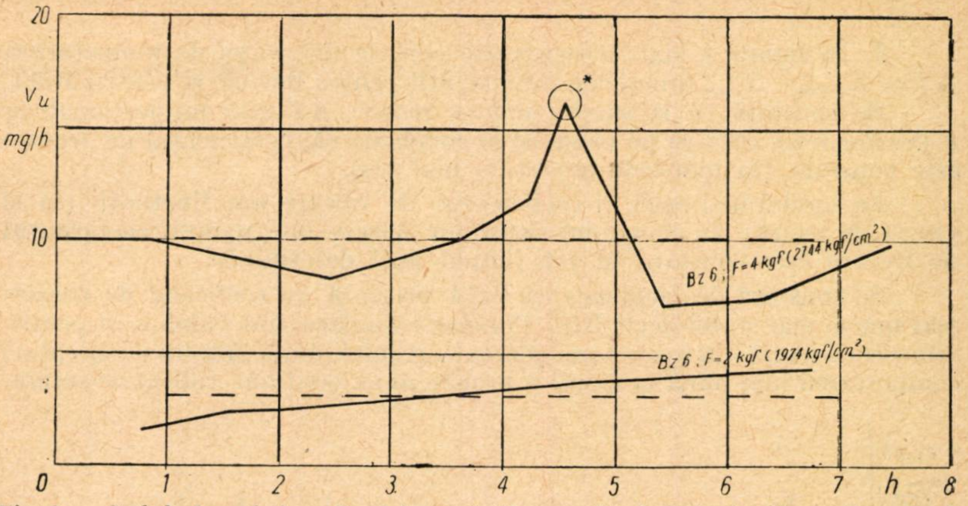


Fig. 3. — Curbele de variaţie a vitezei de uzură (V_u — mg/h), la Bz6, funcţie de timp şi cele două sarcini. – – – Variaţii medii ale vitezelor de uzură.

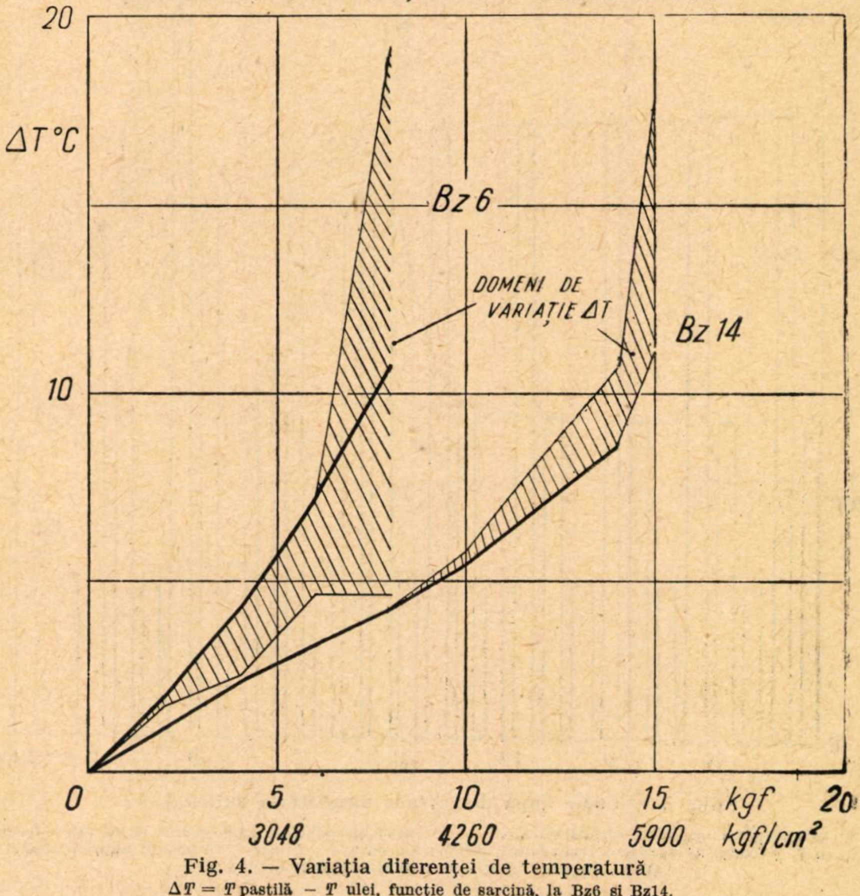


Fig. 4. — Variaţia diferenţei de temperatură

$\Delta T = T$ pastilă − T ulei, funcţie de sarcină, la Bz6 şi Bz14.

3. În figura 4 sînt reprezentate curbele diferenței de temperatură $\Delta T = T_{\text{pastilă}} - T_{\text{ulei}}$, funcție de sarcină, atît pentru Bz6 cît și pentru Bz14. Se constată că la sarcini relativ reduse ΔT este proporțional cu F (încărcarea), ceea ce ne conduce la concluzia că, coeficientul de frecare este constant (în ipotezele acceptate mai sus).

La sarcini mai mari, și coeficientul de frecare are fluctuații (ca și viteza de uzură). În domeniul sarcinilor relativ mai reduse, coeficientul de frecare este constant în tot timpul unei determinări.

Se constată de asemenea că Bz14 prezintă un coeficient de frecare mai mic și mai stabil decît Bz6. Concluzii similare sînt valabile și pentru vitezele de uzură. Ca o concluzie generală, rezultă (după cum era de așteptat) comportarea mai bună la uzură a bronzului cu conținut ridicat de staniu.

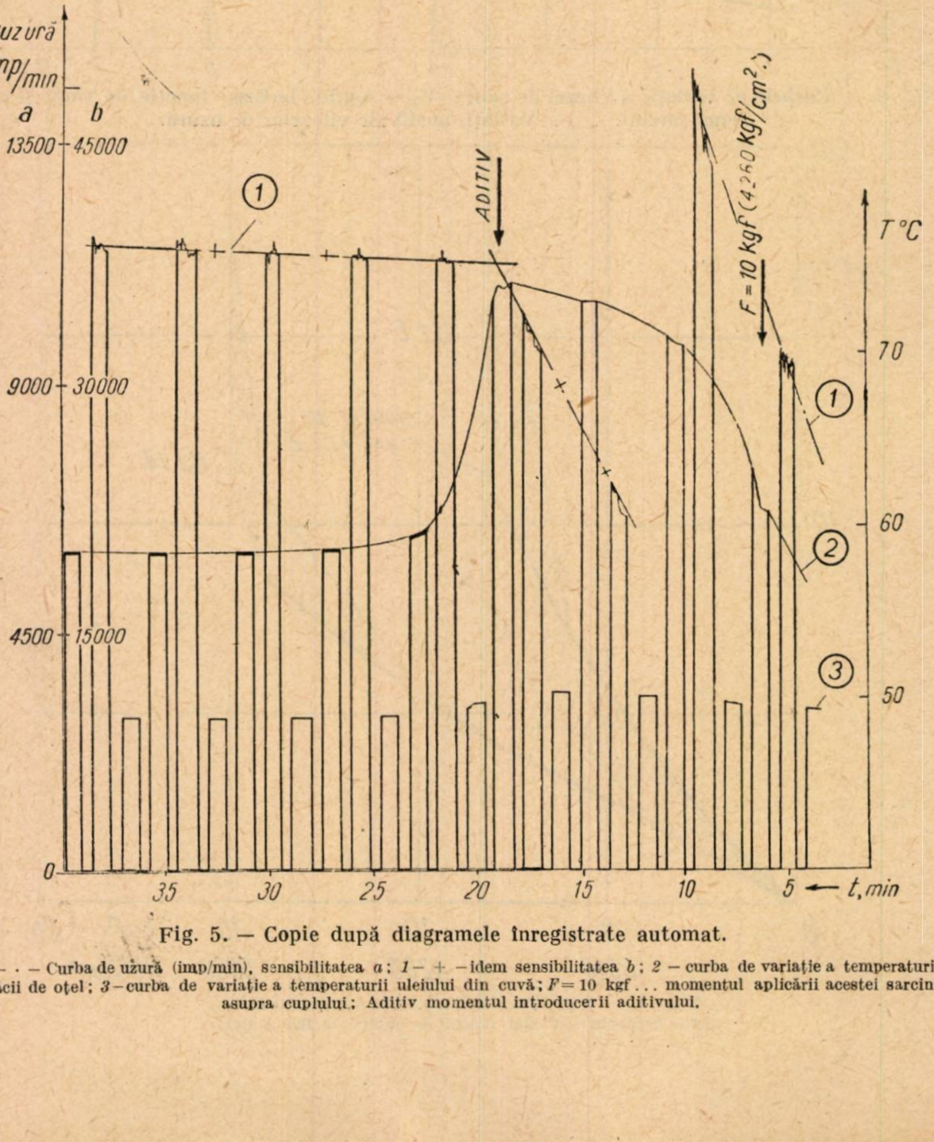


Fig. 5. — Copie după diagramele înregistrate automat.

1 — · — Curba de uzură (imp/min), sensibilitatea *a*; *1* — + — idem sensibilitatea *b*; *2* — curba de variație a temperaturii plăcii de oțel; *3* — curba de variație a temperaturii uleiului din cuvă; $F = 10$ kgf . . . momentul aplicării acestei sarcini asupra cuplului; Aditiv momentul introducerii aditivului.

4. Pentru a verifica și cu această instalație acțiunea unui aditiv de extremă presiune, în cazul Bz6, la sarcini de 4 260 kgf/cm^2 și lubrifiant, uleiul STAS 410, s-a introdus în ulei 2,5% aditiv (1,5% ulei sulfurizat și 1% ditiofosfat de zinc).

În figura 5, se poate observa în ce măsură au fost reduse uzura și coeficientul de frecare. S-a constatat că în acest caz uzura a fost redusă de circa 28 ori iar coeficientul de frecare de circa 2,5 ori.

De asemenea, rezultă că timpul de acțiune al aditivului, din momentul introducerii în ulei, este foarte scurt.

★

În încheiere se poate spune că instalația utilizată în lucrarea de față a permis (prin măsurători continue și simultane) observarea unor fenomene de scurtă durată în procesul de uzură și în același timp a confirmat și precizat posibilitățile instalației ce a făcut obiectul lucrării [2], care datorită simplității poate fi folosită în determinări rapide.

Pentru studiul fenomenului de uzură și în special în condițiile unor sarcini mari, ce conduc la neregularități însemnate în alura curbelor de uzură și de asemenea în cea a curbelor de temperatură ale cuplului, se dovedește adecvată o instalație experimentală ce permite urmărirea acestor variații, continuu sau la intervale scurte de timp.

S-a verificat, de asemenea, că erorile datorită recirculării uleiului ce conține produse (radioactive) de uzură, au o pondere mai mică dacă se iau anumite măsuri (forma circuitului, viteza de recirculare etc.), iar condițiile de lucru nu sînt așa grele.

Primită la redacție la 22 octombrie 1962

ON THE EVOLUTION OF WEAR AND TEMPERATURE OF RADIOACTIVE BRONZE-STEEL LUBRICATED SYSTEMS

ABSTRACT

By a corresponding modification of the installation described in [2], this paper aims at measuring and recording simultaneously several parameters determined in the wear process (wear measured with radioactive tracers, lubricant temperature and the temperature of the lubricated system measured with resistive gages).

The correlation of the instantaneous values of these parameters has made possible to draw certain conclusions on the short-duration phenomena. The conclusions reached at in paper [2] on the linear character of wear curves are also verified.

BIBLIOGRAFIE

1. D. PAVELESCU, I. ILIUC, S. BARBUL, *Studiul unei metode radioactive pentru aprecierea calităților lubrifiante a uleiurilor aditivate prin priza uzurii suprafețelor.* St. cerc. mec. apl., Acad. R.P.R., **XII**, *2* (1961).
2. — Idem. Partea a II-a, St. cerc. mec. apl., Acad. R.P.R., **XIII**, *1* (1962).

CONTRIBUŢII LA DETERMINAREA STĂRII CINEMATICE A UNUI MECANISM PRIN METODA SISTEMELOR CONJUGATE [1]

DE

RADU P. VOINEA [2] şi MIHAIL C. ATANASIU [2]

621.01

În două lucrări anterioare [7] şi [14] am arătat că mobilitatea unui lanţ cinematic este determinată de proprietăţile sale topologice, în particular de conexiunea lanţului [3] precum şi proprietăţile proiective ale axelor cuplelor de clasa a V-a, echivalente cuplelor cinematice ale lanţului dat [4].

În prezenta lucrare vom arăta că aceleaşi proprietăţi sînt determinate şi pentru metodica de rezolvare a problemelor legate de aflarea stării cinematice a unui mecanism.

Metoda pe care o propunem este, în esenţă, metoda ,,sistemelor conjugate'' [1], [4], [6], [9] utilizată mult în Statica Construcţiilor la calculul deformaţiilor.

În cazul mecanismelor această metodă capătă unele aspecte noi, particulare, legate şi de faptul că ea poate servi nu numai la determinarea vitezelor, ci şi a acceleraţiilor.

---

[1] Această lucrare reprezintă o tratare detaliată a comunicării *Contribuţii la determinarea stării cinematice a unui mecanism*, prezentată de prof. A. Beleş, membru corespondent al Academiei R.P.R., în şedinţa din 20.VI.1962, a secţiei de ştiinţe tehnice.

[2] Institutul politehnic Bucureşti.

[3] Prin conexiunea unui lanţ cinematic se înţelege conexiunea domeniului format prin înlocuirea cuplelor cinematice cu încastrări. Fiecare element al lanţului trebuie considerat simplu conex.

[4] Prin cuple cinematice de clasa a V-a echivalente unei cuple de clasa k ce leagă două elemente ale lanţului se înţeleg un număr de $6-k$ cuple şurub-piuliţă (în particular cuple de rotaţie sau de translaţie), care, înlocuind cupla cinematică de clasa k, nu modifică mişcarea relativă infinitesimală a celor două elemente.

A) CONSIDERAȚIUNI CINEMATICE GENERALE

1. *Formularea problemei.* Să considerăm un lanț cinematic deschis (simplu conex). Să notăm cu E_0 elementul fix și cu $E_1, E_2, \ldots, E_n$ elementele sale mobile, în ordinea în care ele se succed, de la elementul fix (fig. 1).

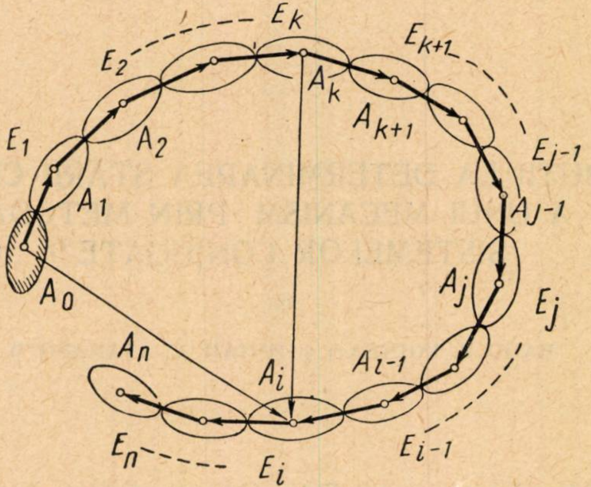


Fig. 1

Să considerăm triedrele $T_0, T_1, T_2, \ldots, T_n$, solidare respectiv cu elementele $E_0, E_1, E_2, \ldots E_n$ ale lanțului. Fie $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n$ o serie de puncte aparținînd acestor elemente.

Să notăm cu $\bar{\omega}_{ij}$ și $\bar{\varepsilon}_{ij}$ respectiv viteza unghiulară și accelerația unghiulară a triedrului T_i în mișcarea sa relativă față de triedrul T_j. Să notăm de asemenea cu $\bar{v}_{ij}$ și $\bar{a}_{ij}$ respectiv viteza și accelerația punctului A_i în mișcarea sa relativă față de triedrul T_j.

Să presupunem că se cunosc parametrii cinematici ce caracterizează mișcarea relativă a fiecărui element al lanțului față de elementul precedent. Ne propunem să determinăm parametrii cinematici ce determină mișcarea absolută a unui element oarecare E_i.

2. *Determinarea vitezelor.* Pentru a stabili expresiile vitezei unghiulare absolute $\bar{\omega}_{i0}$ a elementului E_i și a vitezei absolute $\bar{v}_{i0}$ a punctului A_i, vom folosi o formulă de recurență. Vom presupune anume că se cunosc viteza unghiulară absolută $\bar{\omega}_{j-1,0}$ a unui element oarecare E_{j-1} și viteza absolută $\bar{v}_{j-1,0}$ a unui punct A_{j-1} de pe acest element. Vom presupune de asemenea că se cunosc viteza unghiulară $\bar{\omega}_{j,j-1}$ și viteza $\bar{v}_{j,j-1}$ ce caracterizează mișcarea relativă a triedrului T_j, solidar cu elementul E_j, în raport cu triedrul T_{j-1}, solidar cu elementul E_{j-1}. Ne propunem să determinăm viteza unghiulară absolută $\bar{\omega}_{j0}$ a elementului E_j și viteza absolută $\bar{v}_{j0}$ a punctului A_j. În acest scop vom utiliza teoria compunerii miș-

cărilor relative. Viteza unghiulară absolută $\overline{\omega}_{j0}$ va fi dată, în baza acestei teorii, de expresia

$$\overline{\omega}_{j0} = \overline{\omega}_{j-1.0} + \overline{\omega}_{j.j-1}. \tag{1}$$

Înlocuind succesiv în această formulă $j = 1, 2, 3, \ldots, i$ şi adunînd relaţiile astfel obţinute, rezultă

$$\overline{\omega}_{i0} = \sum_{j=1}^{i} \overline{\omega}_{j.j-1}. \tag{2}$$

Viteza absolută $\overline{v}_{j0}$ a punctului A_j se va obţine însumînd viteza relativă, $\overline{v}_{j.j-1}$ cu viteza de transport a cărei expresie este

$$\overline{v}_{j-1.0} + \overline{\omega}_{j-1.0} \times \overline{A_{j-1} A_j}.$$

Rezultă atunci pentru $\overline{v}_{j0}$ expresia

$$\overline{v}_{j0} = \overline{v}_{j.j-1} + \overline{v}_{j-1.0} + \overline{\omega}_{j-1.0} \times \overline{A_{j-1} A_j}. \tag{3}$$

Înlocuind succesiv în formula (3) $j = 1, 2, 3, \ldots, i$ şi adunînd relaţiile astfel obţinute, rezultă

$$\overline{v}_{i0} = \sum_{j=1}^{i} \overline{v}_{j.j-1} + \sum_{j=1}^{i} \overline{\omega}_{j-1.0} \times \overline{A_{j-1} A_j}. \tag{4}$$

Formulele (2) şi (4) rezolvă problema determinării vitezelor.

3. *Determinarea acceleraţiilor*. Vom folosi aceeaşi metodă a stabilirii unei formule de recurenţă. Vom presupune că se cunosc acceleraţia unghiulară absolută $\overline{\varepsilon}_{j-1.0}$ a unui element oarecare $E_{j-1.0}$ şi acceleraţia absolută $\overline{a}_{j-1.0}$ a unui punct oarecare A_{j-1} aparţinînd acestui element. Vom presupune de asemenea că se cunosc acceleraţia unghiulară $\overline{\varepsilon}_{j.j-1}$ şi acceleraţia $\overline{a}_{j.j-1}$ ce caracterizează mişcarea relativă a elementului E_j în raport cu triedrul T_{j-1}, solidar cu elementul E_{j-1}. Ne propunem să determinăm acceleraţia unghiulară absolută $\overline{\varepsilon}_{j0}$ a elementului E_j şi acceleraţia absolută $\overline{a}_{j0}$ a punctului A_j de pe acest element. În acest scop vom folosi de asemenea teoria compunerii mişcărilor relative.

Acceleraţia unghiulară absolută $\overline{\varepsilon}_{j0}$ se obţine prin derivarea în raport cu timpul a relaţiei (2). La această derivare va trebui să ţinem seama că vectorii $\overline{\omega}_{j.j-1}$ sînt definiţi în raport cu triedrele T_{j-1} ale căror viteze unghiulare absolute sînt $\overline{\omega}_{j-1.0}$. Rezultă atunci, folosind regula de derivare corespunzătoare, următoarea expresie pentru $\overline{\varepsilon}_{i0}$:

$$\overline{\varepsilon}_{i0} = \sum_{j=1}^{i} \left[\frac{\partial \overline{\omega}_{j.j-1}}{\partial t} + \overline{\omega}_{j-1.0} \times \overline{\omega}_{j.j-1} \right]. \tag{5}$$

Derivata locală $\dfrac{\partial \overline{\omega}_{j.j-1}}{\partial t}$ reprezintă din punct de vedere cinematic accelerația unghiulară $\bar{\varepsilon}_{j,j-1}$ în mișcarea relativă a triedrului T_j față de triedrul T_{j-1}. Expresia (5) se mai poate scrie deci

$$\bar{\varepsilon}_{i0} = \sum_{j=1}^{i} \left[\bar{\varepsilon}_{j.j-1} + \bar{\omega}_{j-1.0} \times \bar{\omega}_{j.j-1} \right]. \tag{6}$$

Accelerația absolută $\bar{a}_{j0}$ a punctului A_j solidar cu elementul E_j se va obține însumînd accelerația relativă $\bar{a}_{j,j-1}$, accelerația Coriolis a cărei expresie este

$$2\bar{\omega}_{j-1.0} \times \bar{v}_{j.j-1}$$

și accelerația de transport, care se compune din trei termeni :

$$\bar{a}_{j-1.0},$$

$$\bar{\omega}_{j-1.0} \times (\bar{\omega}_{j-1.0} \times \overline{A_{j-1} A_j}) \text{ și}$$

$$\bar{\varepsilon}_{j-1.0} \times \overline{A_{j-1} A_j}.$$

Obținem atunci pentru accelerația absolută $\bar{a}_{j0}$ expresia

$$\begin{aligned} \bar{a}_{j0} = \bar{a}_{j.j-1} + 2\bar{\omega}_{j-1.0} \times \bar{v}_{j.j-1} + \bar{a}_{j-1.0} + \bar{\omega}_{j-1.0} \times (\bar{\omega}_{j-1.0} \times \overline{A_{j-1} A_j}) + \\ + \bar{\varepsilon}_{j-1.0} \times \overline{A_{j-1} A_j}. \end{aligned} \tag{7}$$

Înlocuind în formula (7) $j = 1, 2, 3, \ldots, i$ și adunînd relațiile astfel obținute, rezultă pentru accelerația absolută a_{i0} expresia :

$$\begin{aligned} \bar{a}_{i0} = \sum_{j=1}^{i} \bar{a}_{j.j-1} + \sum_{j=2}^{i} 2\bar{\omega}_{j-1.0} \times \bar{v}_{j.j-1} + \\ + \sum_{j=1}^{i} \bar{\omega}_{j-1.0} \times (\bar{\omega}_{j-1.0} \times \overline{A_{j-1} A_j}) + \sum_{j=2}^{i} \bar{\varepsilon}_{j-1.0} \times \overline{A_{j-1} A_j}. \end{aligned} \tag{8}$$

Formulele (6) și (8) rezolvă problema determinării accelerațiilor.

B) PARTICULARITĂȚILE PROBLEMEI DETERMINĂRII VITEZELOR ȘI ACCELERAȚIILOR UNUI MECANISM

1. *Generalități.* Problema generală, examinată în paragrafele precedente, nu se întîlnește în practică decît extrem de rar și anume la mecanismele al căror lanț cinematic este simplu conex (deschis). La un asemenea lanț este necesar, într-adevăr să se cunoască toți parametrii cinematici ce caracterizează mișcarea relativă a elementelor sale. În marea majoritate a mecanismelor însă acești parametri cinematici sînt necunoscuți. În acest caz formulele stabilite la paragrafele precedente nu mai pot fi utilizate în forma prezentată ci trebuie transformate. Astfel în formulele (4) și (8) trebuie să apară în mod nemijlocit nu numai vitezele relative $\bar{v}_{j.j-1}$ și $\bar{a}_{j.j-1}$ ci și vitezele unghiulare relative $\bar{\omega}_{j.j-1}$ și accelerațiile unghiulare relative $\bar{\varepsilon}_{j.j-1}$.

2. *Transformările formulelor* (*4*) *și* (*8*). Aceste transformări pot fi efectuate cu ușurință dacă se înlocuiesc $\bar{\omega}_{j0}$ și $\bar{\varepsilon}_{j0}$ respectiv cu expresiile (2) și (6) în care se face schimbarea de indici $i \rightarrow j$ și $j \rightarrow k$. Rezultă

$$\sum_{j=1}^{i} \bar{\omega}_{j-1.0} \times \overline{A_{j-1} A_j} = \sum_{j=1}^{i} \left[\left(\sum_{k=1}^{j-1} \bar{\omega}_{k.k-1} \right) \times \overline{A_{j-1} A_j} \right] = \\ = \sum_{k=1}^{i} \left[\bar{\omega}_{k.k-1} \times \left(\sum_{j=k+1}^{i} \overline{A_{j-1} A_j} \right) \right] \tag{9}$$

$$\sum_{j=1}^{i} \varepsilon_{j-1.0} \times \overline{A_{j-1} A_j} = \sum_{j=1}^{i} \left[\left(\sum_{k=1}^{j-1} \bar{\varepsilon}_{k.k-1} + \bar{\omega}_{k-1.0} \times \bar{\omega}_{k.k-1} \right) \times \overline{A_{j-1} A_j} \right] = \\ = \sum_{k=1}^{i} \left[\left(\bar{\varepsilon}_{k.k-1} + \bar{\omega}_{k-1.0} \times \bar{\omega}_{k.k-1} \right) \times \left(\sum_{j=k+1}^{i} \overline{A_{j-1} A_j} \right) \right]. \tag{10}$$

Să observăm (v. fig. 1) că

$$\sum_{j=k+1}^{i} \overline{A_{j-1} A_j} = \overline{A_k A_{k+1}} + \overline{A_{k+1} A_{k+2}} + \ldots + \overline{A_{i-1} A_i} = \overline{A_k A_i} = -\overline{A_i A_k}. \tag{11}$$

Introducînd această expresie în (9) și (10) și inversînd ordinea factorilor în produsele vectoriale, obținem

$$\sum_{j=1}^{i} \bar{\omega}_{j-1.0} \times \overline{A_{j-1} A_j} = \sum_{k=1}^{i-1} \overline{A_i A_k} \times \bar{\omega}_{k.k-1} \tag{12}$$

$$\sum_{j=1}^{i} \bar{\varepsilon}_{j-1.0} \times \overline{A_{j-1} A_j} = \sum_{k=1}^{i-1} \overline{A_i A_k} \times \left(\bar{\varepsilon}_{k.k-1} + \bar{\omega}_{k-1.0} \times \bar{\omega}_{k.k-1} \right). \tag{13}$$

Efectuînd o schimbare de indice mut $(k \rightarrow j)$ în relațiile (12) și (13) și introducînd expresiile obținute respectiv în relațiile (4) și (9), obținem:

$$\bar{v}_{i0} = \sum_{j=1}^{i} \bar{v}_{j.j-1} + \sum_{j=1}^{i-1} \overline{A_i A_j} \times \bar{\omega}_{j.j-1} \tag{14}$$

$$\bar{a}_{i0} = \sum_{j=1}^{i} \bar{a}_{j.j-1} + \sum_{j=2}^{i} 2\bar{\omega}_{j-1.0} \times \bar{v}_{j.j-1} + \\ + \sum_{j=2}^{i} \bar{\omega}_{j-1} \times \left(\bar{\omega}_{j-1} \times \overline{A_{j-1} A_j} \right) + \sum_{j=1}^{i-1} \overline{A_i A_j} \times \left[\bar{\varepsilon}_{j.j-1} + \bar{\omega}_{j-1.0} \times \bar{\omega}_{j.j-1} \right]. \tag{15}$$

Formulele (14) și (15) împreună cu formulele (2) și (6) sînt fundamentale pentru determinarea vitezelor și accelerațiilor unghiulare și liniare la un mecanism cu lanț deschis, sau la un mecanism oarecare pentru care se cunosc mișcarea absolută a unui element și mișcările relative ale elementelor interpuse între acest element și acela a cărui stare cinematică dorim s-o determinăm. În cazul cînd mecanismul este dublu conex — adică lanțul său cinematic este simplu închis — putem întotdeauna să-l considerăm ca un lanț deschis în care ultimul element E_{n+1} coincide cu elementul fix E_0. (S-a presupus că lanțul are n elemente mobile). În aceste condiții avem :

$$\bar{\omega}_{n+1,0} = 0, \quad \bar{\varepsilon}_{n+1,0} = 0, \quad \bar{v}_{n+1,0} = 0, \quad \bar{a}_{n+1,0} = 0 \tag{16}$$

Înlocuind pe i cu $n+1$ în formulele (2), (6), (14) și (15) și ținînd seama de (16) obținem, pentru un lanț dublu conex condițiile :

a) *Pentru viteze*

$$\sum_{j=1}^{n+1} \bar{\omega}_{j,j-1} = 0 \tag{17}$$

$$\sum_{j=1}^{n+1} \bar{v}_{j,j-1} + \sum_{j=1}^{n+1} \overline{A_0 A_j} \times \bar{\omega}_{j,j-1} = 0. \tag{18}$$

b) *Pentru accelerații*

$$\sum_{j=1}^{n+1} (\bar{\varepsilon}_{j,j-1} + \bar{\omega}_{j-1,0} \times \bar{\omega}_{j,j-1}) = 0 \tag{19}$$

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{n+1} \bar{a}_{j,j-1} + \sum_{j=2}^{n+1} 2\bar{\omega}_{j-1,0} \times \bar{v}_{j,j-1} + \\ &+ \sum_{j=2}^{n+1} \bar{\omega}_{j-1} \times [\bar{\omega}_{j-1} \times \overline{A_{j-1} A_j}] + \sum_{j=1}^{n+1} \overline{A_0 A_j} \times (\bar{\varepsilon}_{j,j-1} + \bar{\omega}_{j-1,0} \times \bar{\omega}_{j,j-1}) = 0. \end{aligned} \tag{20}$$

La un mecanism oarecare condițiile (17), (18), (19) și (20) pot fi scrise pentru fiecare contur topologic independent. Se obține astfel în cazul general un număr de ecuații de condiție care, întotdeauna trebuie să fie egal cu numărul de necunoscute. Aceste ecuații de condiții permit determinarea vitezelor și accelerațiilor relative unghiulare și liniare, necunoscute. O dată aceste necunoscute determinate, se pot aplica în continuare, formulele (2), (6), (14) și (15) pentru un lanț cinematic simplu conex ce ar lega elementul fix de elementul a cărui stare cinematică ne interesează.

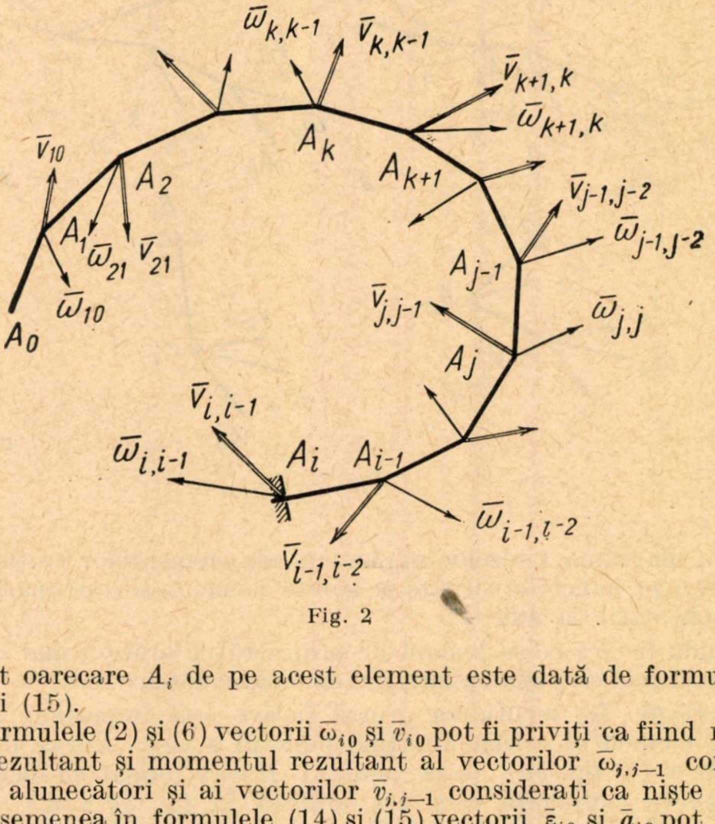
Aplicarea practică a condițiilor (17), (18), (19), (20) și a formulelor (2), (6), (14), (15) este mult ușurată de o interpretare ce li se poate da cu ajutorul noțiunii de sistem conjugat. Așa cum se va arăta mai jos fiecărui mecanism îi corespunde o grindă sau un sistem de corpuri ce poartă numele de sistem conjugat, pentru care se pot aplica procedeele cunoscute din statica Construcțiilor. Corespondența ce va fi stabilită între un mecanism și sistemul conjugat depinde de conexiunea mecanismului. De aceea, în continuare se vor analiza, mai întîi mecanismele simplu conexe (cu lanț cinematic deschis), apoi cele dublu conexe (cu lanț cinematic simplu închis) și se va încheia studiul cu acela al mecanismelor complexe.

C) MECANISME CU LANȚ CINEMATIC SIMPLU CONEX (DESCHIS)

La un mecanism cu lanț cinematic simplu conex este necesar, pentru a se putea determina vitezele și accelerațiile tuturor punctelor elementelor sale, să se cunoască toți parametrii cinematici

$$\overline{\omega}_{j,j-1},\quad \overline{v}_{j,j-1},\quad \overline{\varepsilon}_{j,j-1}\quad \text{și}\quad \overline{a}_{j,j-1}$$

ce caracterizează mișcarea relativă a unui element oarecare față de elementul precedent. Starea cinematică a unui element oarecare E_i și a unui punct oarecare A_i de pe acest element este dată de formulele (2), (6), (14) și (15).



$\overline{\omega}_{k,k-1}$
$\overline{v}_{k,k-1}$
$\overline{v}_{k+1,k}$
$\overline{\omega}_{k+1,k}$
$\overline{v}_{10}$
A_k
A_{k+1}
A_2
$\overline{v}_{j-1,j-2}$
A_1
$\overline{\omega}_{21}$
$\overline{v}_{21}$
$\overline{\omega}_{j-1,j-2}$
A_{j-1}
$\overline{\omega}_{10}$
$\overline{v}_{j,j-1}$
$\overline{\omega}_{j,j}$
A_0
A_j
$\overline{v}_{i,i-1}$
$\overline{\omega}_{i,i-1}$
A_i
A_{i-1}
$\overline{\omega}_{i-1,i-2}$
$\overline{v}_{i-1,i-2}$

Fig. 2

În formulele (2) și (6) vectorii $\overline{\omega}_{i0}$ și $\overline{v}_{i0}$ pot fi priviți ca fiind respectiv vectorul rezultant și momentul rezultant al vectorilor $\overline{\omega}_{j,j-1}$ considerați ca vectori alunecători și ai vectorilor $\overline{v}_{j,j-1}$ considerați ca niște cupluri.

De asemenea în formulele (14) și (15) vectorii $\overline{\varepsilon}_{i0}$ și $\overline{a}_{i0}$ pot fi priviți ca fiind respectiv vectorul rezultant și momentul rezultant al vectorilor $(\overline{\varepsilon}_{j,j-1} + \overline{\omega}_{j-1,0} \times \overline{\omega}_{j,j-1})$ considerați ca vectori alunecători și ai vectorilor $\overline{a}_{j,j-1}$, $2\,\overline{\omega}_{j-1} \times \overline{v}_{j,j-1}$, și $\overline{\omega}_{j-1} \times (\overline{\omega}_{j-1} \times \overline{A_{j-1} A_j})$ considerați ca niște cupluri.

Această interpretare ce poate fi dată pe de o parte vectorilor $\overline{\omega}_{i0}$ și $\overline{v}_{i0}$, iar pe de altă parte vectorilor $\overline{\varepsilon}_{i0}$ și $\overline{a}_{i0}$ sugerează o analogie cu Statica Construcțiilor.

Într-adevăr să considerăm o grindă fictivă, redusă la axa ei (fig. 2) ce ar uni în ordine punctele $A_0\, A_1\, A_2 \ldots A_i$ și care ar fi liberă la capătul

A_0 și încastrată în punctul A_i (fig. 2). Dacă vitezele unghiulare relative $\bar{\omega}_{j,j-1}$ ar fi forțe exterioare, iar $\bar{v}_{j,j-1}$ ar fi cupluri exterioare, atunci $\bar{\omega}_{i0}$ și $\bar{v}_{i0}$ sînt egale cu eforturile din încastrare, în sensul în care aceste eforturi sînt definite în Statica Construcțiilor.

Diagrama eforturilor în lungul acestei grinzi, calculate după regulile cunoscute din Statica Construcțiilor, reprezintă, în cinematica acestui mecanism, diagrama vitezelor unghiulare ale elementelor lanțului și diagrama vitezelor punctelor situate pe aceste elemente și care aparțin grinzii (redusă schematic la axa ei).

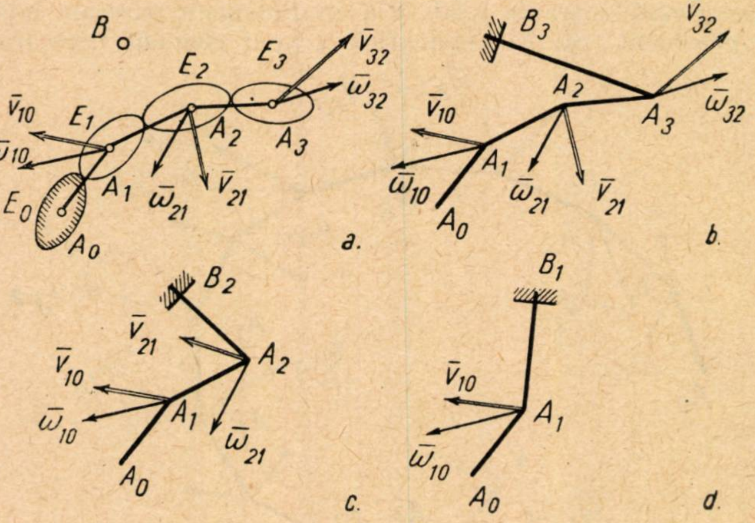

B
E_2
E_3
$\bar{v}_{32}$
$\bar{\omega}_{32}$
$\bar{v}_{10}$
E_1
$\bar{\omega}_{10}$
E_0
A_1
$\bar{\omega}_{21}$
$\bar{v}_{21}$
A_2
A_3
A_0
a.
B_3
$\bar{v}_{32}$
A_2
$\bar{\omega}_{32}$
$\bar{v}_{10}$
A_3
$\bar{\omega}_{10}$
A_1
$\bar{\omega}_{21}$
$\bar{v}_{21}$
A_0
b.
B_2
$\bar{v}_{21}$
$\bar{v}_{10}$
A_2
$\bar{\omega}_{10}$
A_1
$\bar{\omega}_{21}$
A_0
c.
B_1
$\bar{v}_{10}$
A_1
$\bar{\omega}_{10}$
A_0
d.

Fig. 3

Grinda fictivă ce se bucură de proprietățile arătate mai sus poartă numele de *grindă conjugată* a lanțului cinematic deschis dat.

Observație. La alcătuirea grinzii fictive este important să se țină seama de elementul căruia aparține punctul a cărui viteză dorim să o aflăm. Astfel (v. fig. 3*a*), dacă punctul B este solidar cu elementul E_3 atunci grinda conjugată este cea arătată în fig. 3*b* adică trece prin $A_0.A_1.A_2$ și A_3. Va trebui calculată rezultanta și momentul rezultant al vectorilor $\bar{\omega}_{10}$, $\bar{v}_{10}$, $\bar{\omega}_{21}$, $\bar{v}_{21}$, $\bar{\omega}_{32}$ și $\bar{v}_{32}$ față de B (care poate fi notat în acest caz B_3). Dacă același punct B este solidar elementului E_2, atunci grinda conjugată este cea arătată în fig. 3*c* adică trece numai prin A_0, A_1 și A_2. Va trebui deci calculată rezultanta și momentul rezultant al vectorilor $\bar{\omega}_{10}$, $\bar{v}_{10}$, $\bar{\omega}_{21}$ și $\bar{v}_{21}$ față de B (care pote fi notat în acest caz B_2). În sfîrșit dacă același punct B este solidar cu elementul E_1 grinda conjugată este cea arătată în fig. 3*d* adică trece numai prin A_0 și A_1. Vor trebui deci calculate rezultanta și momentul rezultant ale vectorilor $\bar{\omega}_{01}$ și $\bar{v}_{01}$ în raport cu punctul B (care poate fi notat în acest caz B_1).

APLICAŢII

Se consideră lanţul simplu conex din fig. 4 *a* alcătuit din trei elemente : barele E_1, E_2 şi culisa E_3. Lanţul are în A_1 şi A_2 cuple cilindrice de clasa a V-a avînd axele paralele cu Oz iar în A_3 o cuplă de translaţie care permite elementului E_3 deplasări relative în lungul barei E_2. Se cunosc vitezele unghiulare relative $\bar{\omega}_{10}$ şi $\bar{\omega}_{21}$, viteza relativă $\bar{v}_{32}$, acceleraţiile unghiulare relative $\bar{\varepsilon}_{10}$ şi $\bar{\varepsilon}_{21}$ şi acceleraţia relativă $\bar{a}_{32}$. Ne propunem să determinăm viteza absolută $\bar{v}_{30}$ şi acceleraţia absolută $\bar{a}_{30}$ a elementului E_3.

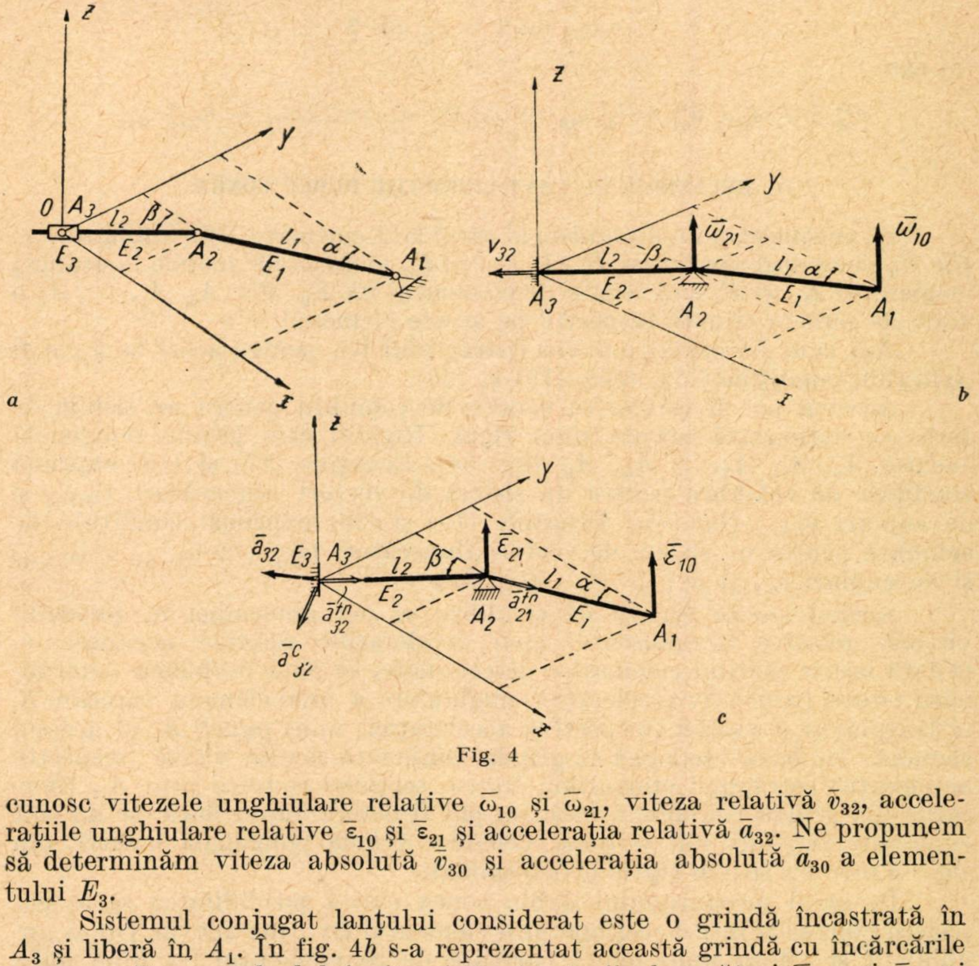


Fig. 4

Sistemul conjugat lanţului considerat este o grindă încastrată în A_3 şi liberă în A_1. În fig. 4*b* s-a reprezentat această grindă cu încărcările corespunzătoare calculului vitezei $\bar{v}_{30}$ (vectorii alunecători $\bar{\omega}_{10}$, şi $\bar{\omega}_{21}$ şi cuplul $\bar{v}_{32}$) iar în fig. 4*c* s-a reprezentat aceeaşi grindă cu încărcările corespunzătoare calculului acceleraţiei $\bar{a}_{30}$ (vectorii alunecători $\bar{\varepsilon}_{10}$, şi $\bar{\varepsilon}_{21}$ şi cuplurile $\bar{a}_{32}$, $\bar{a}^c_{32}$, $\bar{a}^{tn}_{32}$ şi $\bar{a}^{tn}_{21}$ reprezentînd respectiv acceleraţia Coriolis şi acceleraţiile de transport)

Calculul vitezei $\bar{v}_{30}$

$$v^x_{30} = \omega_{10}\,(l_1 \sin\alpha + l_2 \sin\beta) + \omega_{21}\, l_2 \sin\beta - v_{32}\cos\beta$$
$$v^y_{30} = -\omega_{10}\,(l_1 \cos\alpha + l_2 \cos\beta) - \omega_{21}\, l_2 \cos\beta - v_{32}\sin\beta.$$

Calculul accelerației $\bar{a}_{30}$

$$a_{30}^{x} = \varepsilon_{10}\,(l_1 \sin\alpha + l_2 \sin\beta) + \varepsilon_{21}\, l_2 \sin\beta + a_{21}^{tn}\cos\alpha + a_{32}^{tn}\cos\beta -$$

$$- a_{32}\cos\beta + a_{32}^{c}\sin\beta.$$

$$a_{30}^{y} = -\,\varepsilon_{10}\,(l_1\cos\alpha + l_2\cos\beta) - \varepsilon_{21}\, l_2\cos\beta + a_{21}^{tn}\sin\alpha + a_{32}^{tn}\sin\beta -$$

$$- a_{32}\sin\beta - a_{32}^{c}\cos\beta\,,$$

în care

$$a_{21}^{tn} = l_1\omega_{10}^{2};\; a_{32}^{tn} = l_2(\omega_{10} + \omega_{21})^2;\; a_{32}^{c} = 2\,(\omega_{10} + \omega_{21})\, v_{32}.$$

D) MECANISME CU LANȚ CINEMATIC DUBLU CONEX

Să considerăm un mecanism al cărui lanț cinematic este dublu conex. Fie E_0 elementul său fix iar $E_1, E_2, \ldots, E_n$ elementele mobile în ordine; elementele E_1, și E_n sînt legate de elementul fix E_0. Fie $A_0, A_1, \ldots, A_n$ o serie de puncte situate respectiv pe aceste elemente.

Așa cum s-a arătat mai sus (paragraful B), pentru acest lanț pot fi aplicabile condițiile (17), (18), (19) și (20).

Acestea pot fi privite ca ecuații de echilibru pentru un sistem de forțe ce acționează asupra unui rigid. Rigidul este grinda poligonală închisă $A_0, A_1, A_2 \ldots, A_n, A_0$ (fig. 5*a*). Ecuațiile (17) și (18) exprimă condițiile de echilibru pentru un sistem de vectori alunecători $\bar{\omega}_{j,j-1}$ și de cupluri $\bar{v}_{j,j-1}$ (fig. 5*b*). Ecuațiile (19) și (20) exprimă condițiile de echilibru pentru un sistem de vectori alunecători $(\bar{\varepsilon}_{j,j-1} + \bar{\omega}_{j-1,0} \times \bar{\omega}_{j,j-1})$ și de cupluri $\bar{a}_{j,j-1}$, $\bar{a}_{j,j-1}^{c}$, $\bar{a}_{j,j-1}^{tn}$ (fig. 5*c*).

Scriind aceste ecuații de echilibru se pot determina în prealabil vitezele relative necunoscute, apoi accelerațiile relative necunoscute. O dată aceste mărimi cinematice determinate, se pune problema determinării vitezei (respectiv accelerației) unghiulare a unui element oarecare E_i al lanțului și a vitezei (respective accelerației) unui punct A_i al acestui element. În baza analogiei cu grinda conjugată aceste viteze (respectiv accelerații) corespund eforturilor dintr-o secțiune ce trece prin A_i. Eforturile din grinda conjugată, însă, nu pot fi determinate, dacă ele nu sînt cunoscute într-una din secțiuni, deoarece grinda poligonală închisă, din fig. 5*a* este un sistem static nedeterminat.

În cazul mecanismului dublu conex există posibilitatea să se cunoască eforturile într-o secțiune prin elementul fix. Într-adevăr viteza unghiulară și viteza unui punct oarecare de pe elementul fix fiind nule, rezultă că și eforturile din grinda conjugată, în secțiunea corespunzătoare vor fi nule. Totul se petrece ca și cînd din grinda conjugată s-ar elimina porțiunea corespunzătoare elementului fix al mecanismului. Grinda ar deveni astfel simplu conexă și liberă la extremități.

Mărimile cinematice cunoscute pentru mecanism corespund cu sarcini exterioare pentru grinda conjugată, iar mărimile cinematice necunoscute pentru mecanism corespund cu reacțiunile din reazeme. Astfel o viteză sau o accelerație unghiulară relativă, necunoscută poate fi pusă în corespondență cu o reacțiune normală dintr-un reazem simplu iar o viteză sau o accelerație liniară relativă necunoscută poate fi pusă în corespondență cu un cuplu dintr-o încastrare pe o singură direcție.

Se verifică cu ușurință că la un mecanism, grinda conjugată obținută după regulile de mai sus este static determinată. Grinzi conjugate static

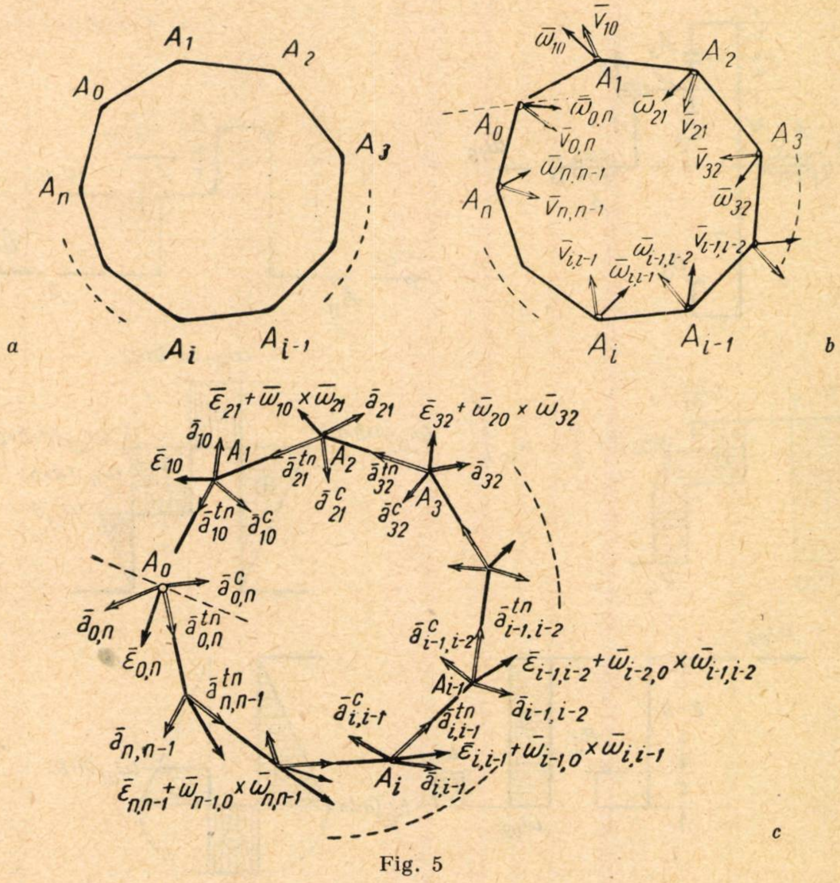

A1
A2
A0
A3
An
Ai
Ai-1
a
v10
ω10
A2
A1
ω0,n
ω21
v21
A0
v0,n
A3
ωn,n-1
v32
An
vn,n-1
ω32
vi,i-1
ωi-1,i-2
vi-1,i-2
ωi,i-1
Ai
Ai-1
b
ε21+ω10×ω21
a21
ε32+ω20×ω32
a10
A1
ε10
a21 tn
A2
a32 tn
a32
a21 c
a32 c
A3
a10 tn
a10 c
A0
a0,n c
a0,n tn
a0,n
ε0,n
ai-1,i-2 tn
ai-1,i-2 c
εi-1,i-2+ωi-2,0×ωi-1,i-2
an,n-1 tn
Ai-1
ai,i-1 c
ai,i-1 tn
ai-1,i-2
an,n-1
εi,i-1+ωi-1,0×ωi,i-1
εn,n-1+ωn-1,0×ωn,n-1
Ai
ai,i-1
c

Fig. 5

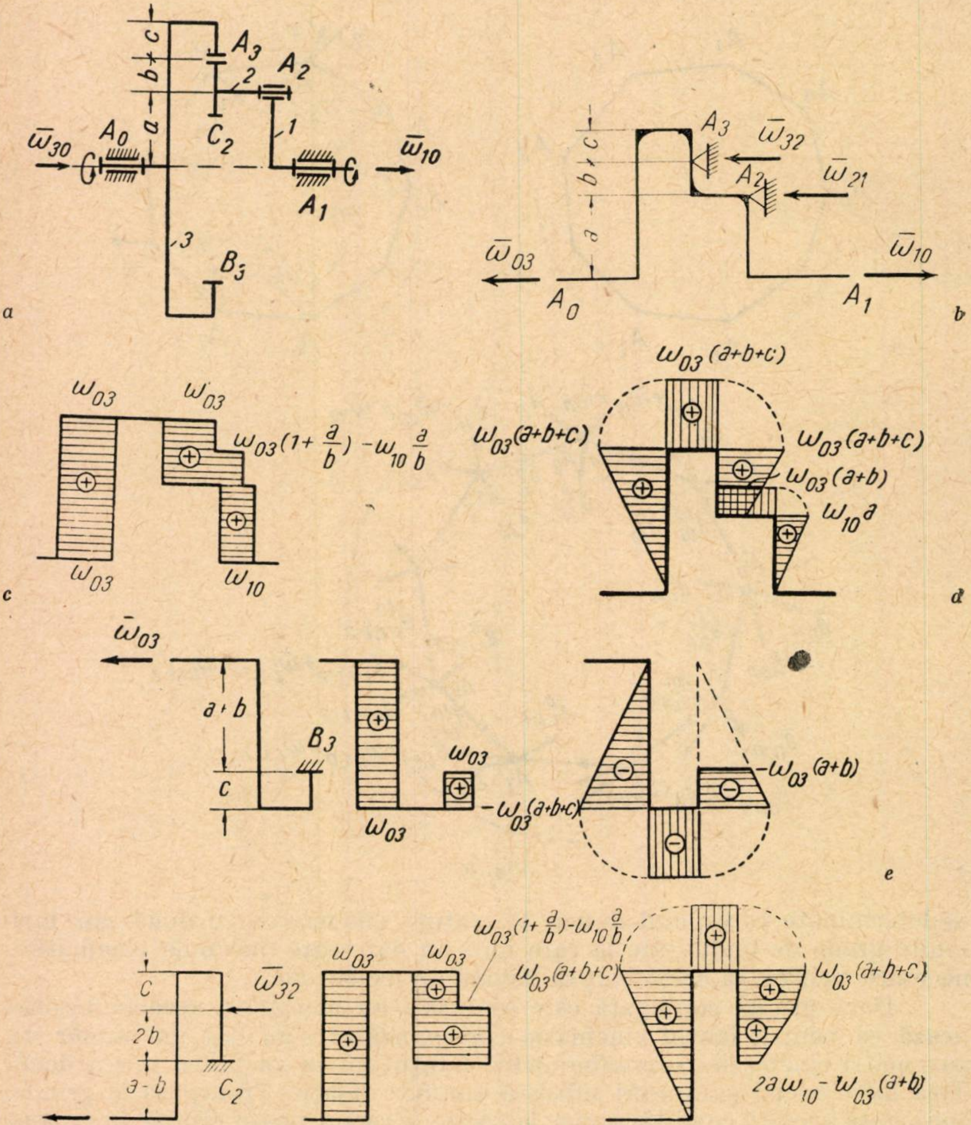
nedeterminate corespund numai la lanțuri cinematice cu două sau mai multe grade de mobilitate la care nu s-au dat toate mărimile cinematice necesare pentru ca acest lanț să devină un mecanism.

Dacă grinda conjugată este ea însăși un mecanism aceasta înseamnează că pentru lanțul cinematic corespunzător s-au dat un număr de parametri cinematici supraabundent. Lanțul nu se va putea mișca decît dacă între acești parametri subsistă anumite relații. Transpusă la grinda conjugată această condiție revine la aceea că ea nu poate rămîne în repaus pentru orice fel de încercări exterioare.

În cele ce urmează vor fi date numai exemple de mecanisme, la care sistemul conjugat este o grindă static determinată.

APLICAȚII

1° *Mecanism planetar*. Să considerăm mecanismul planetar reprezentat schematic în fig. 6*a*. El se compune din brațul 1 și roțile dințate 2 și 3. Mecanismul are 4 cuple cinematice în A_1, A_2, A_3 și A_0. Lanțul cinematic



a
$\bar{\omega}_{30}$
A_0
a
$b+c$
c
A_3
A_2
2
1
C_2
$\bar{\omega}_{10}$
A_1
3
B_3
b
A_3
$\bar{\omega}_{32}$
A_2
$\bar{\omega}_{21}$
$\bar{\omega}_{03}$
$\bar{\omega}_{10}$
A_0
A_1
c
ω_{03}
ω_{03}
$\omega_{03}(1+\frac{a}{b})-\omega_{10}\frac{a}{b}$
ω_{03}
ω_{10}
⊕
d
$\omega_{03}(a+b+c)$
$\omega_{03}(a+b+c)$
$\omega_{03}(a+b+c)$
$\omega_{03}(a+b)$
$\omega_{10}a$
e
$\bar{\omega}_{03}$
$a+b$
B_3
c
ω_{03}
ω_{03}
$-\omega_{03}(a+b+c)$
$-\omega_{03}(a+b)$
⊖
f
c
$2b$
$a-b$
$\bar{\omega}_{32}$
C_2
$\bar{\omega}_{03}$
ω_{03}
ω_{03}
$\omega_{03}(1+\frac{a}{b})-\omega_{10}\frac{a}{b}$
$\omega_{03}(a+b+c)$
$\omega_{03}(a+b+c)$
$2a\omega_{10}-\omega_{03}(a+b)$

Fig. 6

corespunzător are mobilitatea $w = 2$. Notînd cu E_0 elementul fix şi cunoscînd vitezele unghiulare absolute $\bar{\omega}_{10}$ şi $\bar{\omega}_{30}$ respectiv ale elementelor 1 şi 3 se cere să se determine starea cinematică de viteze a mecanismului planetar considerat.

Din punct de vedere topologic mecanismul este dublu conex, iar din punct de vedere al proprietăţilor proiective vitezele unghiulare relative $\bar{\omega}_{10}$, $\bar{\omega}_{21}$, $\bar{\omega}_{32}$, $\bar{\omega}_{03}$ formează un sistem de vectori paraleli şi coplanari. Sistemul conjugat, reprezentat în fig. 6*b* este o grindă plană cotită $A_1 A_2 A_3 A_0$, liberă în A_0 şi A_1 unde acţionează „forţele" cunoscute $\bar{\omega}_{10}$ şi $\bar{\omega}_{03} = -\bar{\omega}_{30}$ şi simplu rezemată în A_2 şi A_3, deoarece vitezele unghiulare relative $\bar{\omega}_{21}$ şi $\bar{\omega}_{32}$ sînt necunoscute ; aceste viteze unghiulare necunoscute sînt „reacţiunile" din reazemele A_2 şi A_3 ale grinzii conjugate.

Pentru determinarea „reacţiunilor" $\bar{\omega}_{21}$ şi $\bar{\omega}_{32}$ se scriu ecuaţiile de momente în raport cu reazemele A_2 şi A_3. Ţinînd seamă de distanţele indicate în figură, aceste ecuaţii se scriu

$$(\Sigma M_{A_3} = 0) \quad \omega_{21} b - (\omega_{10} - \omega_{03})(a + b) = 0$$

$$(\Sigma M_{A_2} = 0) \quad \omega_{32} b + (\omega_{10} - \omega_{03}) a = 0.$$

Din aceste ecuaţii rezultă

$$\omega_{21} = (\omega_{10} - \omega_{03}) \frac{a+b}{b}; \qquad \omega_{32} = (\omega_{03} - \omega_{10}) \frac{a}{b}.$$

Vitezele unghiulare absolute sînt egale cu forţele secţionale din grinda conjugată. Rezultă :

$$\omega_{10} = \omega_{10}$$

$$\omega_{20} = \omega_{10} + \omega_{21} = \omega_{10} + (\omega_{10} - \omega_{03}) \frac{a+b}{b} = \frac{a+2b}{b} \omega_{10} - \frac{a+b}{b} \omega_{03}$$

$$\omega_{30} = \omega_{03}.$$

Diagrama vitezelor unghiulare este arătată în fig. 6*c*.

Vitezele liniare absolute sînt egale cu momentele secţionale din grinda conjugată. Rezultă :

$$v_{A_1} = 0$$

$$v_{A_2} = a\omega_{10}$$

$$v_{A_3} = (a + b)\,\omega_{10} - b\omega_{21} = (a + b)\,\omega_{10} - b\,(\omega_{10} - \omega_{03}) \frac{a+b}{b} =$$

$$= (a + b)\,\omega_{03}$$

$$v_{A_0} = 0.$$

Pe porțiunile dintre puncte, neexistînd „încărcări", diagramele de momente secționale vor fi liniare. În fig. 6d este arătată diagrama de viteze liniare.

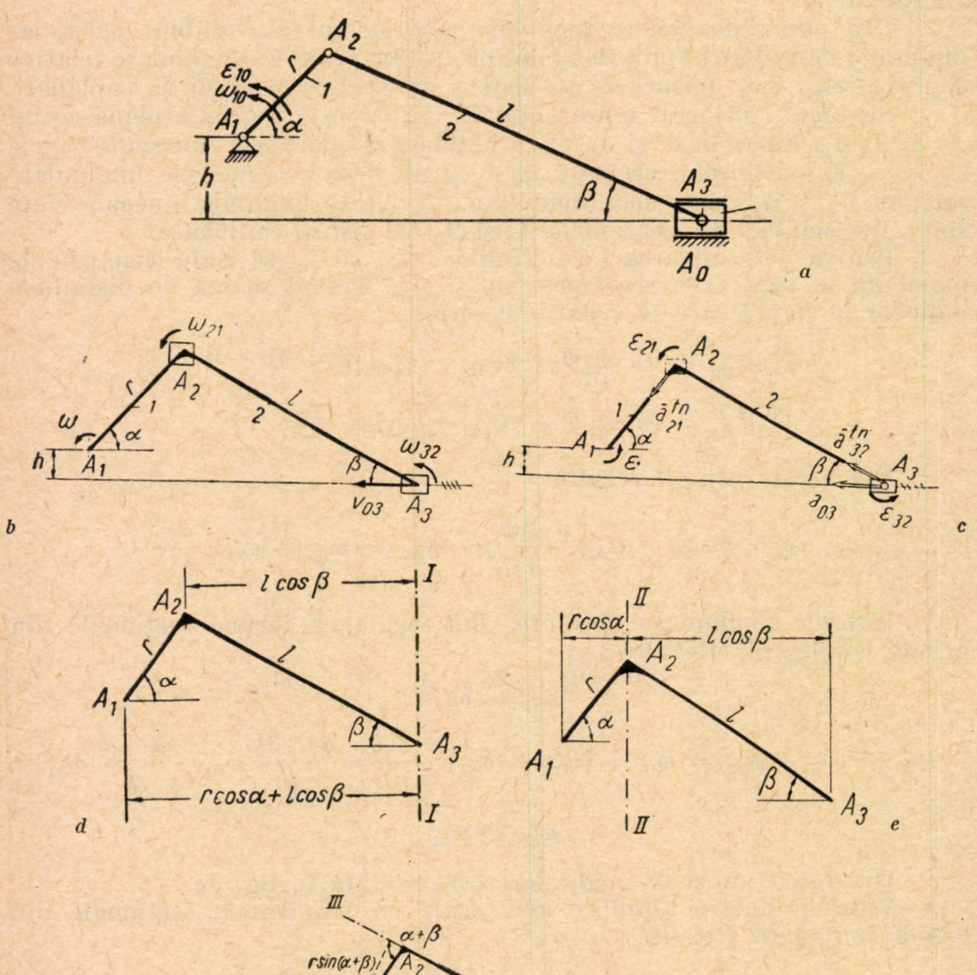

A2
ε10
ω10
r
1
A1
α
l
2
h
β
A3
A0
a
ω21
A2
r
1
l
2
ω
α
h
A1
ω32
β
v03
A3
b
ε21
A2
1
ā21tn
2
ā32tn
A1
α
ε
h
β
A3
a03
ε32
c
l cos β
I
A2
r
l
A1
α
β
A3
r cos α + l cos β
I
d
II
r cos α
l cos β
A2
r
l
α
A1
β
A3
II
e
III
α+β
r sin(α+β)
A2
r
α
A1
β
A3
v03
β
III
f

Fig. 7

Observație. O dată determinate vitezele unghiulare relative de pe conturul $A_1\ A_2\ A_3\ A_0$ al lanțului cinematic al mecanismului se poate calcula viteza oricărui alt punct aparținînd unui element oarecare al mecanismului, considerînd drept grindă conjugată o grindă care să unească un punct de pe elementul fix cu punctul a cărui viteză ne interesează. Grinda conjugată este liberă la extremitatea din elementul fix şi încastrată în punctul în care căutăm viteza.

De exemplu dacă dorim să aflăm viteza în punctul B situat pe elementul 3 (notat în fig. 6*a* cu B_3) vom considera conturul $A_0 B_3$ din fig. 6*e*. În această figură s-au reprezentat şi diagramele de viteze unghiulare şi liniare.

De asemenea dacă dorim să aflăm viteza în punctul C de pe elementul 2 (notat în fig. 6*a* cu C_2) putem considera conturul $A_0\, A_3\, C_2$ din fig. 6*f*. În această figură s-a reprezentat viteza punctului C_2, $v_2 = \omega_{03}(a - b) - \omega_{32}2b = 2a\,\omega_{10} - \omega_{03}\,(a + b)$, precum şi diagramele de viteze unghiulare şi liniare.

2° *Mecanismul bielă-manivelă.* Să considerăm mecanismul din fig. 7*a* alcătuit din manivela 1, biela 2 şi pistonul 3. Mecanismul are trei articulaţii în A_1, A_2 şi A_3 şi o cuplă de translaţie în A_0, între piston şi elementul fix E_0.

Mobilitatea lanţului cinematic corespunzător mecanismului este $w = 1$. Vom presupune cunoscute viteza unghiulară $\omega_{10} = \omega$ şi acceleraţia unghiulară $\varepsilon_{10} = \varepsilon$ ale manivelei 1 în poziţia din figură. Ne propunem să determinăm viteza şi acceleraţia pistonului 3 în funcţie de datele geometrice şi cinematice.

Din punct de vedere topologic, mecanismul din fig. 7*a* este dublu conex, iar din punct de vedere al proprietăţilor proiective ale vitezelor unghiulare şi acceleraţiilor unghiulare relative acestea formează fascicule de vectori paraleli situaţi la distanţă finită sau infinită.

Sistemul conjugat este grinda cotită plană $A_1\, A_2\, A_3$ (fig. 7*b*) liberă în extremitatea A_1 (unde acţionează normal pe planul grinzii „forţa" $\bar{\omega}$) simplu rezemată în A_2 şi A_3 (suporturile reacţiunilor $\bar{\omega}_{21}$ şi $\bar{\omega}_{32}$ din aceste reazeme fiind normale pe planul grinzii) şi încastrată în A_3 pe direcţia vectorului $\bar{v}_{03}$.

În fig. 7*b* s-a reprezentat grinda conjugată „încărcată" cu viteze, iar în fig. 7*c* aceeaşi grindă „încărcată" cu acceleraţii.

DETERMINAREA VITEZELOR RELATIVE

Ecuaţiile de momente în raport cu axele I—I (fig. 7*d*), II—II (fig. 7*e*) şi III—III (fig. 7*f*), pentru „încărcarea" cu viteze arătată în fig. 7*b*, sînt :

$$\begin{aligned} &\omega_{21} \cdot l \cos\beta + \omega\,(r \cos\alpha + l \cos\beta) = 0 \\ &\omega_{32} \cdot l \cos\beta - \omega \,.\, r \cos\alpha = 0 \qquad\qquad \text{(a)} \\ &v_{03} \cos\beta - \omega \cdot r \sin(\alpha + \beta) = 0\,. \end{aligned}$$

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM KÖZPONTI KÖNYVTÁR 1848

Din aceste ecuații deducem

$$\omega_{21} = -\left(1 + \frac{r}{l}\cdot\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}\right)\omega\,;$$

$$\omega_{32} = \frac{r}{l}\cdot\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}\,\omega\,; \qquad v_{03} = r\omega\cdot\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\beta}\,. \tag{b}$$

DETERMINAREA ACCELERAȚIILOR RELATIVE

Ecuațiile de momente în raport cu axele I—I, II—II și III—III pentru „încărcarea" cu accelerații arătată în fig. 7*c*, sînt

$$\varepsilon_{21}\,.\,l\cos\beta + \varepsilon\,(r\cos\alpha + l\cos\beta) - a_{21}^{tn}\sin\alpha + a_{32}^{tn}\sin\beta = 0$$

$$\varepsilon_{32}\,.\,l\cos\beta - \varepsilon\,.\,r\cos\alpha + a_{21}^{tn}\sin\alpha - a_{32}^{tn}\sin\beta = 0 \tag{c}$$

$$a_{03}\,.\,\cos\beta + \varepsilon\,.\,r\sin(\alpha+\beta) - a_{21}^{tn}\cos(\alpha+\beta) - a_{32}^{tn} = 0\,.$$

Înlocuind pe a_{21}^{tn}, a_{32}^{tn} cu expresiile lor :

$$a_{21}^{tn} = r\omega_{10}^{2} = r\omega^{2}\,; \quad a_{32}^{tn} = l\omega_{20}^{2} = \frac{r^{2}\,\omega^{2}}{l}\cdot\frac{\cos^{2}\alpha}{\cos^{2}\beta}\,; \tag{d}$$

obținem din rezolvarea ecuațiilor de momente :

$$\varepsilon_{21} = -\left(1 + \frac{r}{l}\cdot\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}\right)\varepsilon + \left[\frac{r}{l}\cdot\frac{\sin\alpha}{\cos\beta} - \frac{r^{2}}{l^{2}}\cdot\frac{\cos^{2}\alpha\sin\beta}{\cos^{3}\beta}\right]\omega^{2}$$

$$\varepsilon_{32} = \frac{r}{l}\cdot\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}\cdot\varepsilon - \left[\frac{r}{l}\,\frac{\sin\alpha}{\cos\beta} + \frac{r^{2}}{l^{2}}\cdot\frac{\cos^{2}\alpha\sin\beta}{\cos^{3}\beta}\right]\omega^{2} \tag{e}$$

$$a_{03} = r\varepsilon\cdot\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\beta} + r\omega^{2}\left[\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos\beta} + \frac{r}{l}\cdot\frac{\cos^{2}\alpha}{\cos^{3}\beta}\right].$$

Observații. În fig. 7*b* și 7*c* au fost figurate $\bar{v}_{03}$ și $\bar{a}_{03}$. Viteza $\bar{v}_{30}$ și $\bar{a}_{30}$, care reprezintă respectiv viteza și accelerația pistonului 3 vor avea sensuri inverse celor indicate în fig. 7*b* și 7*c*.

3° *Diada*. În fig. 8*a* și *b* este arătată o diadă de aspectul I, alcătuită din barele 1 și 2 articulate între ele în A_2. Cunoscînd elementele geometrice, vitezele absolute și accelerațiile absolute ale extremităților libere A_1 și A_0 ale celor două bare ne propunem să determinăm vitezele unghiulare absolute ale barelor, accelerațiile lor unghiulare absolute, viteza și accelerația absolută a articulației A_2.

Din punct de vedere topologic diada este dublu conexă, iar din punct de vedere al proprietăților proiective, axele mișcărilor de rotație relative formează un fascicul de drepte paralele în spațiu.

Sistemul conjugat este grinda plană cotită rezemată normal pe planul ei în A_1, A_2 și A_0.

În fig. 8*c* s-au reprezentat ,,încărcările'' cu viteze ale grinzii conjugate care sînt : ,,cuplurile'' $\bar{v}_{10}$ și $\bar{v}_{02} = -\bar{v}_{20}$ reprezentate prin componentele lor pe două direcții din planul grinzii și ,,reacțiunile'' $\bar{\omega}_{10}$, $\bar{\omega}_{21}$ și $\bar{\omega}_{02} = -\bar{\omega}_{20}$ din reazeme, normale pe planul grinzii.

În fig. 8*d* s-au reprezentat ,,încărcările'' cu accelerații ale grinzii conjugate care sînt : ,,cuplurile'' $\bar{a}_{10}$ și $\bar{a}_{02} = -\bar{a}_{20}$ reprezentate prin proiecțiile lor pe două direcții din planul grinzii, cuplurile $\bar{a}^{tn}_{21}$ și $\bar{a}^{tn}_{02} = -\bar{a}^{tn}_{20}$ dirijate în lungul barelor 1 și 2 și ,,reacțiunile'' $\bar{\varepsilon}_{10}$, $\bar{\varepsilon}_{21}$ și $\bar{\varepsilon}_{02} = -\bar{\varepsilon}_{20}$ din reazeme.

1) *Determinarea vitezelor*

Se scriu ecuațiile de momente în raport cu axele A_0A_2, A_1A_0 și A_1A_2 pentru ,,încărcările'' din fig. 8*c* ; se obține :

$$\omega_{10}\cdot a\sin(\beta-\alpha)-(v_{20.x}-v_{10.x})\cos\beta-(v_{20.y}-v_{10.y})\sin\beta=0$$

$$\omega_{21}\cdot a\sin(\alpha-\gamma)-(v_{20.x}-v_{10.x})\cos\gamma-(v_{20.y}-v_{10.y})\sin\gamma=0 \quad \text{(a)}$$

$$\omega_{20}\cdot b\sin(\beta-\alpha)-(v_{20.x}-v_{10.x})\cos\alpha-(v_{20.y}-v_{10.y})\sin\alpha=0.$$

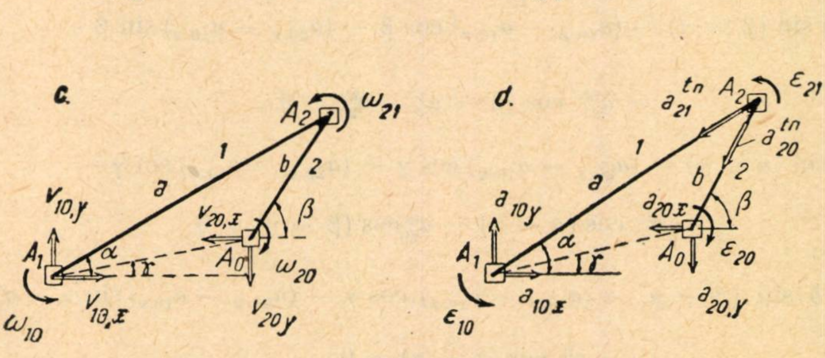

a.
A2
1
2
b
a
v20y
β
v10y
α
γ
A0
v20x
A1
v10x
b.
A2
2
1
a20y
a10y
β
α
γ
A0
a20x
A1
a10x
c.
A2
ω21
1
b
2
a
v10,y
v20,x
β
A1
α
γ
A0
ω20
ω10
v10,x
v20y
d.
tn
a21
A2
ε21
tn
a20
1
b
2
a
a10y
a20x
β
α
A1
γ
A0
ε20
ε10
a10x
a20,y

Fig. 8

Din aceste ecuaţii deducem vitezele unghiulare

$$\omega_{10} = (v_{20.x} - v_{10.x}) \frac{\cos \beta}{a \sin (\beta - \alpha)} + (v_{20.y} - v_{10.y}) \frac{\sin \beta}{a \sin (\beta - \alpha)}$$

$$\omega_{21} = (v_{20.x} - v_{10.x}) \frac{\cos \gamma}{a \sin (\alpha - \gamma)} + (v_{20.y} - v_{10.y}) \frac{\sin \gamma}{a \sin (\alpha - \gamma)} \qquad \text{(b)}$$

$$\omega_{20} = (v_{20.x} - v_{10.x}) \frac{\cos \alpha}{b \sin (\beta - \alpha)} + (v_{20.y} - v_{10.y}) \frac{\sin \alpha}{b \sin (\beta - \alpha)}.$$

Viteza punctului A_2 este egală cu momentul secţional din punctul A_2 al grinzii conjugate. Considerînd în acest punct două axe paralele cu ox şi cu oy şi scriind suma momentelor încărcărilor de pe grindă situate la stînga secţiunii A_2 obţinem proiecţiile pe axe ale vitezei absolute a punctului A_2. Rezultă

$$\begin{aligned} v_{20.x} &= v_{10.x} - \omega_{10} \cdot a \sin \alpha \\ v_{20.y} &= v_{10.y} - \omega_{10} \cdot a \cos \alpha \end{aligned} \qquad \text{(c)}$$

unde ω_{10} trebuie înlocuit cu valoarea sa din (b).

2) *Determinarea acceleraţiilor*

Se scriu ecuaţii de momente în raport cu axele A_0A_2, A_1A_0 şi A_1A_2 pentru „încărcările" din fig. 8*d*. Se obţine :

$$\varepsilon_{10} \cdot a \sin (\beta - \alpha) - (a_{20.x} - a_{10.x}) \cos \beta - (a_{20.y} - a_{10.y}) \sin \beta -$$
$$- a_{21}^{tn} \cos (\beta - \alpha) - a_{20}^{tn} = 0$$

$$\varepsilon_{21} \cdot a \sin (\alpha - \gamma) - (a_{20.x} - a_{10.y}) \cos \gamma - (a_{20.y} - a_{10.y}) \sin \gamma -$$
$$- a_{21}^{tn} \cos (\alpha - \gamma) - a_{20}^{tn} \cos (\beta - \gamma) = 0 \qquad \text{(d)}$$

$$\varepsilon_{20} \cdot b \sin (\beta - \alpha) - (a_{20.x} - a_{10.x}) \cos \alpha - (a_{20.y} - a_{10.y}) \sin \alpha - a_{21}^{tn} -$$
$$- a_{20}^{tn} \cos (\beta - \alpha) = 0.$$

Din aceste ecuații deducem accelerațiile unghiulare

$$\varepsilon_{10} = (a_{20.x} - a_{10.x})\frac{\cos\beta}{a\sin(\beta-\alpha)} + (a_{20.y} - a_{10.y})\frac{\sin\beta}{a\sin(\beta-\alpha)} +$$

$$+ a_{21}^{tn}\frac{\operatorname{cotg}(\beta-\alpha)}{a} + a_{20}^{tn}\frac{1}{a\sin(\beta-\alpha)}.$$

$$\varepsilon_{21} = (a_{20.x} - a_{10.x})\frac{\cos\gamma}{a\sin(\alpha-\gamma)} + (a_{20.y} - a_{10.y})\frac{\sin\gamma}{a\sin(\alpha-\gamma)} +$$

$$+ a_{21}^{tn}\frac{\operatorname{cotg}(\alpha-\gamma)}{a} + a_{20}^{tn}\frac{\cos(\beta-\gamma)}{a\cos(\alpha-\gamma)}. \tag{e}$$

$$\varepsilon_{20} = (a_{20.x} - a_{10.x})\frac{\cos\alpha}{b\sin(\beta-\alpha)} + (a_{20.y} - a_{10.y})\frac{\sin\alpha}{b\sin(\beta-\alpha)} +$$

$$+ a_{21}^{tn}\frac{1}{b\sin(\beta-\alpha)} + a_{20}^{tn}\frac{\operatorname{cotg}(\beta-\alpha)}{b}.$$

În aceste expresii a_{12}^{tn} și a_{20}^{tn} au valorile

$$a_{21}^{tn} = a\omega_{10}^2, \quad a_{20}^{tn} = b\omega_{20}^2 \tag{f}$$

ω_{10} și ω_{20} fiind dați de relațiile (b).

Accelerația punctului A_2 este egală cu momentul secțional din punctul A_2 al grinzii conjugate din fig. 8*d*. Procedînd analog ca în cazul vitezei, găsim pentru $\bar{a}_{20}$ componentele

$$\begin{aligned} a_{20.x} &= a_{10.x} - \varepsilon_{10}\cdot a\sin\alpha - a_{21}^{tn}\cos\alpha \\ a_{20.y} &= a_{10.y} + \varepsilon_{10}\cdot a\cos\alpha - a_{21}^{tn}\sin\alpha \end{aligned} \tag{g}$$

unde ε_{10} și a_{21}^{tn} trebuie înlocuiți cu valorile lor din (e) și (f).

4° *Mecanismul unei mașini de găurit.* Mecanismul din fig. 9*a*, utilizat la mașina de găurit este alcătuit din elementele 1, 2 și 3. Cuplele din A_1 și A_4 sînt cuple cilindrice de clasa a V-a, iar din A_2 și A_3 sînt cuple cilindrice de clasa a IV-a.

Din punct de vedere topologic mecanismul este dublu conex iar din punct de vedere al proprietăților proiective ale axelor cuplelor de clasa a V-a echivalente ele sînt paralele cu planul *oz* fiind situate, unele la distanță finită, altele la distanță infinită.

Sistemul conjugat este grinda cotită în spațiu, reprezentată în fig. 9*b*. Grinda conjugată are în A_2 un reazem simplu și o încastrare în direcția axei *ox*, în A_3 un reazem simplu și o încastrare în direcția axei *ox*, iar în A_0 un reazem simplu în direcția axei *oz*.

În fig. 9*c* sînt reprezentate „încărcarea" cu viteza $\overline{\omega}_{10} = \overline{\omega}$ şi „reacţiunile" din reazeme. În fig. 9*d* sînt reprezentate „încărcările" cu acceleraţii şi „reacţiunile" din reazemele grinzii.

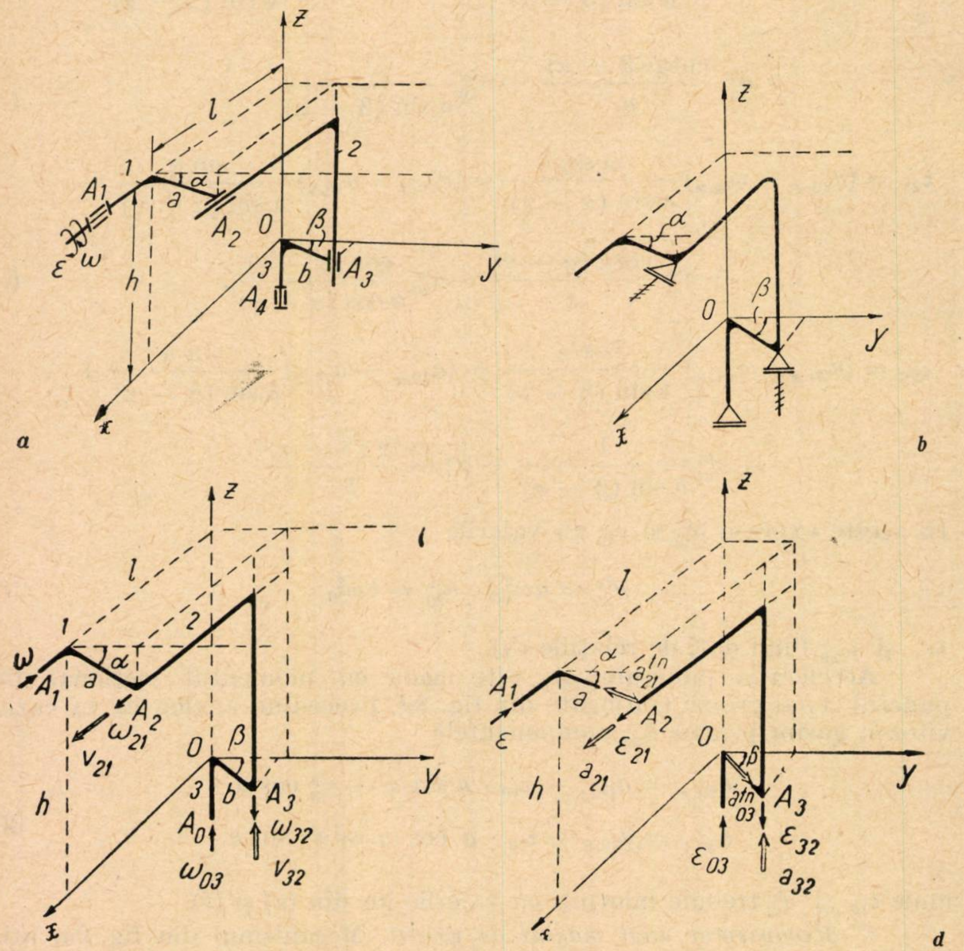

z
l
1
2
A1
α
a
A2
0
β
ε
ω
h
3
b
A3
A4
y
x
a
z
α
β
0
y
x
b
z
l
1
2
ω
α
A1
a
A2
ω21
v21
0
β
h
3
b
A3
A0
ω03
ω32
v32
y
x
z
l
α
tn
a21
A1
a
A2
ε
ε21
0
β
a21
h
tn
a03
A3
ε03
ε32
a32
y
x
d

Fig. 9

Calculul vitezelor. Scriind ecuaţiile de echilibru pentru încărcarea şi reacţiunile din fig. 9c, obţinem :

$$(\sum X_{i\,1} = 0)\ -\omega + \omega_{21} = 0 \qquad (\sum M_{ix} = 0)\ v_{21} - \omega_{23} \cdot a \cos \alpha = 0$$

$$(\sum \mathrm{Y}_i = 0)\ 0 = 0 \text{ (identitate)} \qquad (\sum M_{iy} = 0)\ \omega_{21} (h - a \sin \alpha) +$$

$$+ \omega_{32} \cdot b \sin \beta - \omega h = 0 \qquad \text{(a)}$$

$$(\sum Z_i = 0)\ \omega_{03} - \omega_{32} = 0 \qquad (\sum M_{iz} = 0)\ v_{32} - \omega_{21} \cdot a \cos \alpha = 0.$$

Rezolvînd acest sistem de ecuații, obținem :

$$\begin{aligned}
&\omega_{21} = \omega \\
&\omega_{32} = \omega \frac{a \sin \alpha}{b \sin \beta} \qquad && v_{21} = \frac{a^2 \omega \sin \alpha \cos \alpha}{b \cdot \sin \beta} \\
&\omega_{03} = \omega \frac{a \sin \alpha}{b \sin \beta} && v_{32} = a\omega \,.\, \cos \alpha \,\cdot
\end{aligned} \tag{b}$$

Calculul accelerațiilor. Vom da mai întîi unele explicații cu privire la „încărcările" cu accelerații din fig. 9*d* : lipsesc accelerațiile Coriolis deoarece în A_2 și A_3, unde există viteze relative, vectorii viteze unghiulare de transport sînt colineari cu vitezele relative : accelerațiile unghiulare relative $\bar{\varepsilon}$, $\bar{\varepsilon}_{21}$, $\bar{\varepsilon}_{32}$, $\bar{\varepsilon}_{03}$ acționează ca forțe iar accelerațiile de transport normale $a^{tn}_{21} = a\omega^2$ și $a^{tn}_{03} = b\omega^2_{03} = b\left(\omega \frac{a \sin \alpha}{b \sin \beta}\right)^2 = \frac{a^2 \omega^2 \sin^2 \alpha}{b \sin \beta}$ acționează ca niște cupluri ; $a^{tn}_{32} = 0$ deoarece bara A_2A_3 are o mișcare de translație (se poate verifica : $\bar{\omega}_{20} = \bar{\omega}_{10} + \bar{\omega}_{21} = - \omega \bar{i} + \omega \bar{i} = 0$).

Lipsesc de asemenea vectorii $\bar{\omega}_{01} \times \bar{\omega}_{21}$ și $\bar{\omega}_{02} \times \bar{\omega}_{32}$ (termenii complimentari de la accelerațiile unghiulare) deoarece $\bar{\omega}_{01} = - \omega \bar{i}$, $\bar{\omega}_{21} = + \omega \bar{i}$, $\bar{\omega}_{02} = 0$. Deci $\bar{\omega}_{01} \times \bar{\omega}_{21} = 0$ deoarece $\bar{\omega}_{01} \parallel \bar{\omega}_{21}$ și $\bar{\omega}_{02} \times \bar{\omega}_{32} = 0$ deoarece $\bar{\omega}_{02} = 0$.

Scriind ecuațiile de echilibru pentru încărcările și reacțiunile din fig. 9*d*, obținem

$$\begin{aligned}
&(\textstyle\sum X_i = 0)\ - \varepsilon + \varepsilon_{21} = 0 \qquad && (\textstyle\sum M_{ix} = 0)\ a_{21} - \varepsilon_{32} \cdot a \cos \alpha + \\
& && \quad + a^{tn}_{03} \sin \beta = 0 \\
&(\textstyle\sum Y_i = 0)\ 0 = 0 \text{ (identitate)} && (\textstyle\sum M_{iv} = 0)\ \varepsilon_{21} (h - a \sin \alpha) + \\
& && \quad + \varepsilon_{32} \cdot b \sin \beta - \varepsilon h + a^{tn}_{03} \cos \beta - a^{tn}_{21} \cos \alpha = 0 \\
&(\textstyle\sum Z_i = 0)\ \varepsilon_{03} - \varepsilon_{32} = 0 && (\textstyle\sum M_{iz} = 0)\ a_{32} - \varepsilon_{21}\, a \cos \alpha + a^{tn}_{21} \sin \alpha = 0.
\end{aligned} \tag{c}$$

Rezolvînd acest sistem de ecuații, obținem

$$\begin{aligned}
&\varepsilon_{21} = \varepsilon \qquad && a_{21} = a\varepsilon \cdot \frac{a \sin \alpha}{b \sin \beta} \cdot \cos \alpha + \\
&\varepsilon_{32} = \varepsilon \frac{a \sin \alpha}{b \sin \beta} + && \quad + a\omega^2 \left[\frac{a \cos^2 \alpha}{b \sin \beta} - \frac{a^2 \sin^2 \alpha}{b^2 \sin^2 \beta} \cos \beta \cos \alpha\right] \\
&\quad + \omega^2 \left[\frac{a \cos \alpha}{b \sin \beta} - \frac{a^2 \sin^2 \alpha}{b^2 \sin^2 \beta} \cos \beta\right] && \\
&\varepsilon_{03} = \varepsilon \frac{a \sin \alpha}{b \sin \beta} + && a_{32} = a\varepsilon \cdot \cos \alpha. \\
&\quad + \omega^2 \left[\frac{a \cos \alpha}{b \sin \beta} - \frac{a^2}{b^2} \frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 \beta} \cos \beta\right] &&
\end{aligned} \tag{d}$$

E) MECANISME CU LANȚ CINEMATIC MULTIPLU CONEX

Să considerăm un mecanism al cărui lanț cinematic are conexiunea $c \geqslant 3$. Un asemenea lanț are un număr de $c-1$ de contururi independente.

Să notăm cu E_0 elementul fix al mecanismului (în cazul cînd sînt mai multe elemente fixe se pot considera din punct de vedere topologic reunite într-unul singur) și cu $E_1, E_2 \ldots, E_n$ elemente mobile. Să considerăm ca și în cazurile precedente o serie de puncte A_0, A_1, $A_2, \ldots, A_n$ solidare cu aceste elemente. Să unim între ele punctele ale căror elemente sînt legate prin cuple cinematice. Obținem astfel o rețea de vîrfuri și de lanțuri, rețea, care în topologie, poartă numele de *graf* în cazul cînd există vîrfuri care sînt unite cel mult cu o singură latură și *multigraf* dacă există și vîrfuri care sînt unite cu două sau mai mult de două laturi. Numărul de contururi independente ale unui multigraf conex G, denumit și *numărul ciclomatic* este dat de relația cunoscută [5] :

$$\nu(G) = n_1 - n_0 + 1 \tag{21}$$

unde prin n_1 s-a notat numărul de laturi și prin n_0 numărul de vîrfuri al multigrafului.

O dată determinat numărul ciclomatic se identifică contururile. Există mai multe posibilități de a alege aceste contururi. Le vom alege astfel încît o latură oarecare a grafului să nu aparțină decît cel mult la două contururi și, bineînțeles, cel puțin unui contur.

Vom considera acum un sens pe fiecare contur. Acest sens trebuie astfel ales încît orice latură comună la două conture să fie străbătută într-un sens cînd se parcurge unul din cele două conture și în sens opus cînd se parcurge celălalt contur. Aceasta este întotdeauna posibil dacă graful este orientabil.

Sistemul conjugat mecanismului dat se obține ușor făcînd să corespundă fiecărui contur independent cîte un rigid. Sistemul conjugat este, în consecință un sistem de rigide.

Dacă ne referim la „încărcările" cu viteze relative vom observa că, analog ca în cazurile precedente (lanțul cinematic simplu și dublu conex), vitezele unghiulare și liniare cunoscute acționează respectiv ca forțe și cupluri exterioare pe rigidele ce alcătuiesc sistemul. Vitezele unghiulare și liniare necunoscute, proprii numai unui singur contur, pot fi asimilate cu reacțiuni, forțe sau cupluri, în reazemele simple sau în încastrările pe o direcție ale rigidelor (analog cu cazul lanțului dublu conex). Ceea ce apare nou în cazul mecanismelor de conexiune $c \geqslant 3$ sînt vitezele unghiulare și liniare comune la două conture. Acestea pot fi însă ușor interpretate ca forțe interioare între două rigide ale sistemului.

Faptul că două conture ce au o latură a grafului în comun sînt parcurse astfel încît latura este parcursă o dată într-un sens şi a două oară în sens contrar, asigură pentru vitezele relative din cuplele celor două conturuuri sensuri opuse, respectiv în sistemul conjugat, pentru forţele şi cuplurile interioare, respectarea principiului acţiunii şi al reacţiunii.

Consideraţiile de mai sus sînt analoge pentru cazul „încărcării'' grinzii conjugate cu acceleraţii.

Observaţii. Analogia dintre un lanţ cinematic complex şi un sistem de corpuri conjugat poate fi extinsă. Astfel dacă lanţul cinematic are mobilitatea *w şi dacă nu sînt cunoscute* un număr *w* de viteze (acceleraţii) relative, atunci pe sistemul conjugat, forţele sau cuplurile respective vor fi necunoscute (reacţiuni), deci sistemul conjugat va fi static nedeterminat.

De asemenea la configuraţii critice ale unui lanţ cinematic vor corespunde sisteme conjugate de asemenea critice.

În tabelele 1—4 se recapitulează analogia dintre elementele cinematice ale unui mecanism şi elementele statice ale sistemului conjugat.

Tabela 1

Analogia cinetostatică pentru un sistem de rigide simplu şi multiplu conex

(*Metoda sistemelor conjugate unui lanţ cinematic dat*)

Analogia dintre stări	
Cinematica	Statica
Starea cinematică a unui sistem de rigide avînd un singur contur închis	Starea de echilibru a unui singur rigid
Starea cinematică a unui sistem de rigide avînd mai multe conture închise	Starea de echilibru a unui sistem avînd un număr de rigide egal cu numărul conturelor închise ale sistemului iniţial
Starea cinematică necritică (critică) a unui sistem de rigide avînd unul sau mai multe conture închise	Starea de echilibru necritică (critică) a unui rigid sau a unui sistem de rigide
Starea cinematică a unui sistem de rigide avînd unul sau mai multe conture închise de mobilitate w	Starea de echilibru a unui rigid sau a unui sistem de rigide avînd gradul de hiperstaticitate $s = w - 1$

Tabela 2

Analogia dintre mărimile situate pe un contur

Cinematica	Statica
Viteze (accelerații) unghiulare relative cunoscute	Forțe exterioare cunoscute (sarcini)
Viteze (accelerații) liniare relative cunoscute (inclusiv accelerații Coriolis)	Cupluri exterioare de momente cunoscute (sarcini)
Viteze (accelerații) unghiulare relative necunoscute	Reacțiuni-forțe în reazemele simple ale rigidului conjugat conturului considerat pe direcțiile vitezelor (accelerațiilor) unghiulare necunoscute
Viteze (accelerații) liniare relative necunoscute	Reacțiuni-momente ale cuplurilor din încastrările rigidului conjugat conturului considerat, pe direcțiile vitezelor (accelerațiilor liniare relative necunoscute)
Viteza (accelerația) unghiulară relativă într-un punct al conturului	Forța interioară secțională în punctul corespunzător al solidului conjugat
Viteza (accelerația) liniară relativă într-un punct al conturului	Momentul interior secțional în punctul corespunzător situat pe rigidul conjugat
Diagramele de variație ale vitezelor (accelerațiilor) unghiulare sau liniare relative în punctele conturului	Diagramele de variație ale eforturilor interioare secționale (forță și moment) în punctele corespunzătoare situate pe rigidul conjugat

Tabela 3

Analogia dintre mărimile comune la două conture

Cinematica	Statica
Viteze (accelerații) unghiulare relative necunoscute	Reacțiuni-forțe în reazemele simple comune rigidelor conjugate celor două conture considerate, pe direcțiile vitezelor (accelerațiilor) unghiulare relative necunoscute
Viteze (accelerații) liniare relative necunoscute	Reacțiuni-momente ale cuplurilor din încastrările comune rigidelor conjugate celor două conture considerate, pe direcțiile vitezelor (accelerațiilor) liniare relative necunoscute

Tabela 4

Cazuri particulare de analogii după configurația axelor de rotație relative pe conturele sistemului inițial

Lanțul cinematic inițial	Sistemul conjugat
Axe concurente și coplanare — Mecanisme cu roți dințate — Mecanisme diferențiale	Sistem de puncte materiale acționate de sisteme de forțe concurente și coplanare
Axe concurente în spațiu — Mecanisme sferice	Sistem de puncte materiale acționate de sisteme de forțe concurente în spațiu
Axe paralele și coplanare — Mecanisme planetare	Grindă continuă dreaptă sau cotită în același plan supusă la acțiunea unui sistem de forțe paralele și coplanare cu grinda
Axe paralele în spațiu — Mecanisme plane	Grindă continuă cotită în același plan supusă la acțiunea unui sistem de forțe paralele normale pe planul grinzii și a unui sistem de cupluri avînd vectorii moment în planul grinzii

APLICAȚIE

Mecanismul seping. Să considerăm mecanismul șeping reprezentat schematic, în fig. 10 *a*, alcătuit din manivela E_1, culisa E_2, balansierul E_3,culisa E_4 și elementul portcuțit E_5. Cunoscînd elementele geometrice, viteza unghiulară ω și accelerația unghiulară ε a manivelei E_1, ne propunem să determinăm viteza și accelerația elementului portcuțit E_5.

Considerînd punctele A_0, A_1, A_2, A_3, A_4 și A_5 solidare cu elementele mecanismului putem construi graficul corespunzător (fig. 10 *b*). Numărul laturilor fiind $n_1 = 7$ iar numărul vîrfurilor fiind $n_0 = 6$ rezultă numărul contururilor independente (v. formula 21) :

$$\nu = n_1 - n_0 + 1 = 7 - 6 + 1 = 2.$$

S-au considerat contururile $A_0A_1A_2A_3A_0$ și $A_0A_3A_4A_5\,A_0$ cu sensurile arătate în fig. 10 *b*. Se observă că latura comună A_0A_3 a fost parcursă la primul contur în sensul A_3A_0 și la al doilea contur în sensul A_0A_3.

Sistemul conjugat este un sistem de două corpuri format din grinda plană cotită $A_1A_2A_3A_0$ liberă în A_1, simplu rezemată și încastrată pe direcția A_0A_2, în punctul $A_2(A_3)$ și care se reazemă în B_3 pe grinda $B_3A_4A_5A_0$. Această ultimă grindă este simplu rezemată în $A_4(A_5)$ și încastrată pe cîte o direcție în $A_4(A_5)$ și în A_0.

Calculul vitezelor. În fig. 10*c* s-a reprezentat sistemul conjugat izolîndu-se cele două corpuri. Sistemul a fost „încărcat" cu viteze. Pentru a determina direct vitezele relative necunoscute se scriu, pentru primul corp ecuațiile de momente în raport cu axele I—I, II—II și III—III (fig. 10*e*), iar pentru cel de-al doilea corp ecuațiile de momente în raport cu axele IV—IV și V—V și o ecuație de proiecție pe o direcție normală la planul mecanismului. Obținem :

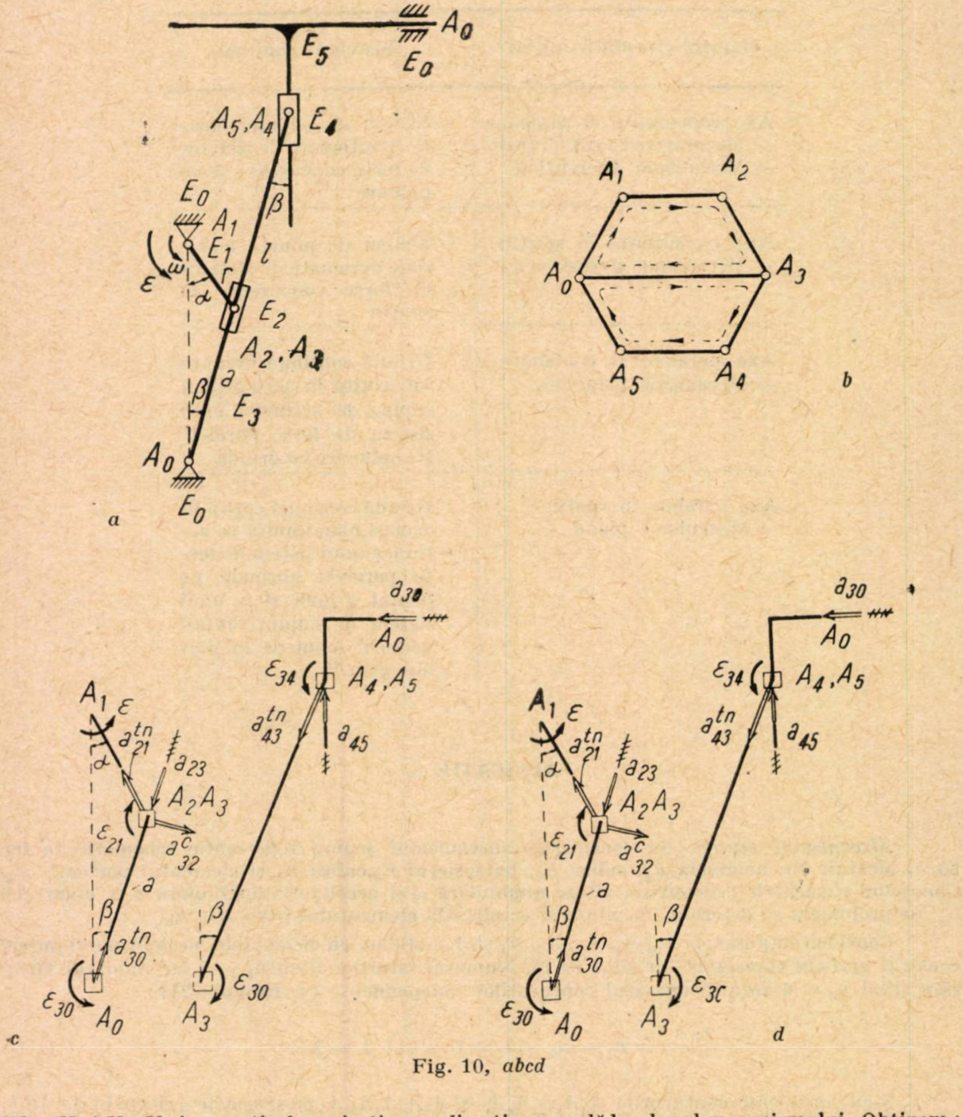

A0
E5
E0
A5,A4
E4
β
E0
A1
E1
l
ε
ω
r
α
E2
A2,A3
a
β
E3
A0
E0
a
A1
A2
A0
A3
A5
A4
b
a30
A0
ε34
A4,A5
A1 ε
a^tn 21
a23
a^tn 43
a45
α
A2A3
ε21
a^c 32
a
β
β
a^tn 30
ε30
ε30
A0
A3
c
d

Fig. 10, *abcd*

$$(M_{\mathrm{I}} = 0)\ v_{23} - \omega . r \sin(\alpha + \beta) = 0 \qquad (M_{\mathrm{IV}} = 0)\ v_{45} - \omega_{30} . l \sin\beta = 0$$

$$(M_{\mathrm{II}} = 0)\omega_{21} . a - \omega\,[a + r\cos(\alpha + \beta)] = 0 \qquad (M_{\mathrm{V}} = 0)\ v_{30} - \omega_{30} . l\cos . \beta = 0 \qquad \text{(a)}$$

$$(M_{\mathrm{III}} = 0)\ \omega_{30} . a - \omega . r\cos(\alpha + \beta) = 0 \qquad (\Sigma\, Z_i = 0)\ \omega_{34} - \omega_{30} = 0.$$

Rezolvînd acest sistem, obţinem

$$v_{23} = r\omega\sin(\alpha+\beta)\,;\quad \omega_{21} = \left[1+\frac{r}{a}\cos(\alpha+\beta)\right]\omega\,;\quad \omega_3 = \frac{r\omega}{a}\cos(\alpha+\beta)\,.$$

$$V_{45} = \frac{r\,l\,\omega}{a}\cos(\alpha+\beta)\sin\beta\,;\quad V_{30} = \frac{r\,l\,\omega}{a}\cos(\alpha+\beta)\cos\beta\,;\quad \omega_{34} = \frac{r\omega}{a}\cos(\alpha+\beta)\,. \tag{b}$$

Observaţie. Dacă dorim să determinăm direct viteza v_{30} a portcuţitului, în funcţie de viteza unghiulară ω a manivelei putem folosi direct principiul lucrului mecanic virtual pentru întregul sistem, fără a-l mai izola în corpuri. Eliminînd încastrarea din capătul A_0 (fig. 10*g*) sistemul conjugat devine el însuşi un mecanism. Viteza v_{30} acţionează ca un cuplu exterior. Corpul al doilea se va roti în jurul axei V—V iar primul corp în jurul axei III—III (deoarece capătul B_3 devine mobil). Axele III—III şi V—V se întîlnesc în 0. Aceste fiind axe absolute, rezultă că axa mişcării relative a celor două corpuri trebuie să treacă tot prin 0. Cum în mişcarea *relativă* a celor două corpuri punctul B_3 rămîne fix, rezultă că axa de rotaţie în mişcarea relativă este B_3O, notată în fig. 10*g* cu VI—VI.

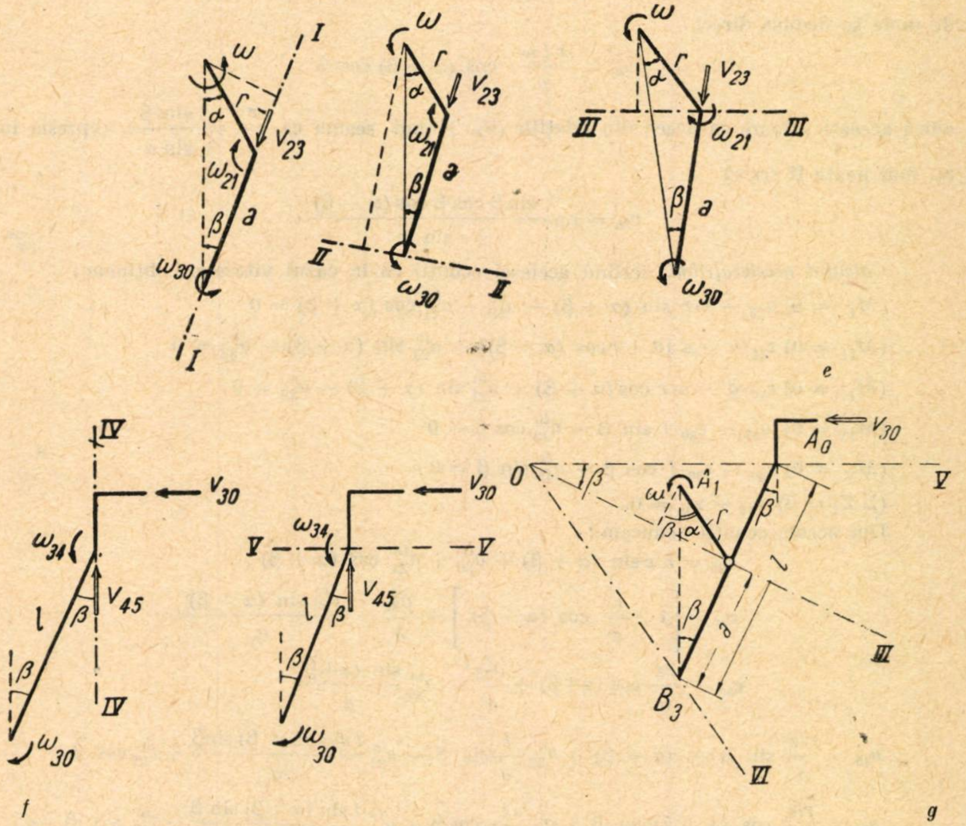


Fig. 10, *efg*

Dacă corpul al doilea al sistemului conjugat se roteşte în jurul axei V—V cu un unghi egal cu unitatea, „cuplul" v_{30} produce un lucru mecanic virtual $v_{30}\cdot 1 = v_{30}$. Punctul B_3 se ridică deasupra planului grinzii conjugate cu $\cos\beta . 1 = l\cos\beta$. Corpul al doilea se va roti cu un unghi egal cu $\frac{l \cos \beta}{a}$. Punctul A_1 coboară sub planul grinzii conjugate cu $\frac{l \cos \beta}{a} \cdot r \cos(\alpha + \beta)$. Vectorul $\overline{\omega}$ va produce un lucru mecanic virtual negativ $-\omega \cdot \frac{l \cos \beta}{a} \cdot r \cos(\alpha + \beta)$.

Ecuația de lucru mecanic virtual se scrie

$$v_{30} - \omega \frac{l \cos \beta}{a} r \cos(\alpha + \beta) = 0$$

de unde se deduce direct

$$v_{30} = \frac{r l \omega}{a} \cos(\alpha + \beta) \cos \beta$$

adică aceeași valoare ca aceea din relațiile (b). Ținînd seama că $\frac{r}{a} = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha}$, expresia lui v_{30} mai poate fi scrisă

$$v_{30} = r\omega \frac{\sin \beta \cos \beta \cos(\alpha + \beta)}{\sin \alpha}.$$

Calculul accelerațiilor. Scriind aceleași ecuații ca în cazul vitezelor, obținem:

$(M_{I} = 0)$ $a_{23} - \varepsilon \cdot r \sin(\alpha + \beta) - a_{30}^{tn} - a_{21}^{tn} \cos(\alpha + \beta) = 0$

$(M_{II} = 0)$ $\varepsilon_{21} \cdot a - \varepsilon [a + r \cos(\alpha + \beta)] + a_{21}^{tn} \sin(\alpha + \beta) - a_{32}^{c} = 0$

$(M_{III} = 0)$ $\varepsilon_{30} \cdot a - \varepsilon \cdot r \cos(\alpha + \beta) + a_{21}^{tn} \sin(\alpha + \beta) - a_{32}^{c} = 0$

$(M_{IV} = 0)$ $a_{45} - \varepsilon_{30} \cdot l \sin \beta - a_{43}^{tn} \cos \beta = 0$

$(M_{V} = 0)$ $a_{30} - \varepsilon_{30} \cdot l \cos \beta + a_{43}^{tn} \sin \beta = 0$

$(\Sigma Z_i = 0)$ $\varepsilon_{34} - \varepsilon_{30} = 0.$

Din aceste ecuații deducem:

$$a_{23} = r \varepsilon \sin(\alpha + \beta) + a_{30}^{tn} + a_{21}^{tn} \cos(\alpha + \beta)$$

$$\varepsilon_{21} = \left[1 + \frac{r}{a} \cos(\alpha + \beta)\right] + \frac{a_{32}^{c}}{a} - \frac{a_{21}^{tn} \sin(\alpha + \beta)}{a}$$

$$\varepsilon_{30} = \frac{r\varepsilon}{a} \cos(\alpha + \beta) + \frac{a_{32}^{c}}{a} - a_{21}^{tn} \frac{\sin(\alpha + \beta)}{a}$$

$$a_{45} = \frac{rl\varepsilon}{a} \sin \beta \cos(\alpha + \beta) + a_{32}^{c} \frac{l}{a} \sin \beta - a_{21}^{tn} \frac{l \sin(\alpha + \beta) \sin \beta}{a} + a_{43}^{tn} \cos \beta$$

$$a_{30} = \frac{rl\varepsilon}{a} \cos(\alpha + \beta) \cos \beta + a_{32}^{c} \frac{l}{a} \cos \beta - a_{21}^{tn} \frac{l \sin(\alpha + \beta) \sin \beta}{a} - a_{43}^{tn} \sin \beta$$

$$\varepsilon_{34} = \frac{r\varepsilon}{a} \cos(\alpha + \beta) + \frac{a_{32}^{c}}{a} - a_{21}^{tn} \frac{\sin(\alpha + \beta)}{a}.$$

În aceste expresii

$$a_{21}^{tn} = r \omega^2, \; a_{30}^{tn} = a \omega_{30}^2 = \frac{r^2 \omega^2}{a} \cos^2(\alpha + \beta), \; a_{42}^{tn} = l \omega_{03}^2 = \frac{r^2 l \omega^2}{a^2} \cos^2(\alpha + \beta)$$

$$a_{32}^{c} = 2\omega_{30} \cdot v_{23} = 2 \frac{r\omega}{a} \cos(\alpha + \beta) \cdot r \omega \sin(\alpha + \beta) = \frac{r^2 \omega^2}{a} \sin 2(\alpha + \beta).$$

Observație. Accelerația a_{30} a elementului portcuțit poate fi calculată și direct în funcție de ε, cu ajutorul principiului lucrului virtual.

F. CONCLUZII

Metoda propusă în lucrarea de față reduce problema determinării vitezelor şi accelerațiilor unui mecanism la o problemă de statică şi anume aceea a echilibrului unui sistem de corpuri, denumit sistemul *conjugat* mecanismului dat.

Sistemul conjugat este acelaşi atît pentru calculul vitezelor cît şi pentru calculul accelerațiilor. Încărcările acestui sistem pentru calculul accelerațiilor diferă de cele de la calculul vitezelor.

Sistemul de ecuații care dă vitezele relative este, din această cauză analog cu cel care dă accelerațiile relative ; el diferă doar prin termenii liberi care sînt accelerațiile de transport normale şi accelerațiile Coriolis, ce pot fi întotdeauna calculate dacă s-a determinat în prealabil starea de viteze.

Metoda propusă permite o rezolvare analitică destul de comodă a problemelor de cinematica mecanismelor. Determinarea accelerațiilor se face cu aceiaşi uşurință ca şi determinarea vitezelor. Se evită astfel dificultățile ce intervin curent în calculul grafic, unde la o serie de mecanisme dintre cele mai simple, în planul accelerațiilor există regiuni în care imaginile punctelor mecanismului sînt foarte dense astfel încît apare necesitatea alegerii unei scări exagerat de mari pentru a mări pe această cale precizia rezultatelor.

Alegerea sistemului conjugat depinde în mod nemijlocit de proprietățile topologice ale grafului asociat mecanismului dat. Acest fapt arată importanța proprietăților topologice în determinarea stării de viteze şi de accelerații.

Rolul important pe care-l joacă grupele assurice şi în special diada şi triada în analiza mecanismelor este justificat în măsura în care ele constituie imagini ale proprietăților topologice ale unui mecanism. Astfel o diadă, aşa cum s-a arătat, este dublu conexă. O triadă, cum se poate uşor constata este triplu conexă. Această idee a conexiunii poate fi urmărită şi la alte grupe assurice.

Un studiu analitic sistematizat al determinării vitezelor şi accelerațiilor mecanismelor vor forma obiectul unor lucrări viitoare.

Scopul prezentei lucrări este acela de a pune în evidență unele avantaje ale folosirii sistemelor conjugate la studiul cinematic al mecanismelor.

Primită la redacție la 18 octombrie 1962

CONTRIBUTIONS TO THE DETERMINATION OF THE KINEMATIC STATE OF A MECHANISM BY USING THE METHOD OF CONJUGATE SYSTEMS

ABSTRACT

The present study is a continuation of previous papers which showed that the mobility of a kinematic chain is determined by its topological and projective properties. The same properties are also determinant for

the solving methods of problems concerning the determination of the kinematic state of a mechanism.

This paper suggests the employing of the conjugate systems used in the statics of structures [1], [4], [6], [9]. The new aspects of this method applied to the kinematics of mechanisms are shown. The mechanisms with simply-connected, doubly-connected and multi-connected chain are treated. For making the conjugate system, corresponding magnitudes are given for simply and multi-connected systems. A series of examples illustrate the application of this method.

BIBLIOGRAFIE

1. А. А. Уманский, *Пространственные системы*. Гостехиздат, Москва, 1948.
2. R. A. Kraus, *Technische Mechanik*, **1**, VEB, Verlag Technik, Berlin, 1953.
3. I. I. Artobolevski, *Teoria mecanismelor şi a maşinilor*. Ed. tehnică, Bucureşti, 1955.
4. Al. Gheorghiu, *Semnificaţia sistemelor conjugate şi utilizarea acestora în calculul structurilor*. Comunicările Academiei R.P.R., **VI**, *6* (1956).
5. C. Berge, *Théorie des graphes et ses applications*. Ed. Dunod, Paris, 1958.
6. Al. Gheorghiu, *Sisteme conjugate în calculul structurilor*. Ed. tehnică, Bucureşti, 1959.
7. R. Voinea, M. Atanasiu, *Contributions à la théorie géométrique des vis*. Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, **III**, *3* (1959).
8. * * * *Teoria mecanismelor şi a maşinilor, structura şi cinematica mecanismelor*. Ed. tehnică, Bucureşti, 1959.
9. Al. Gheorghiu, *Statica construcţiilor*. **I**, Ed. tehnică, Bucureşti, 1960.
10. T. P. Goodman, *Four cornestones of kinematic design*. General Electric, New York, 1960.
11. I. Srejtr, *Vybrany stati z teorie slozeni soustav*. Praha, 1960.
12. А. И. Таинов, *Кинетостатика шарнирностержневых механизмов плоской системы по методу приведения*. Минск, 1960.
13. Д. С. Тавхелидзе, *К вопросу синтеза и кинематики пространственных четырехзвенных механизмов*. Издательство ,,Тодна'', Тбилиси, 1960.
14. R. Voinea, M. Atanasiu, *Contributions à l'étude de la structure des chaînes cinématiques*. Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, **XXII**, *1* (1960).
15. M. Bercovici, *Calculul matricial al reţelelor electrice*. Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, **XXIII**, *2* (1961).
16. П.А. Лебедев, *Определение положений пространственных механизмов, образованных из двухповодковых групп*, Труды Семинара по ТММ, **XXI**, *84*, Москва, 1961.
17. А. И. Соловьев, Е. В. Коваленок, И. А. Берзин, Н. А. Ковалев, *Расчеты механизмов автоматики, измерительной и счетно-решающей техники*, ТРТИ, 1961.
18. N. I. Manolescu, I. Erceanu, P. Antonescu, *Domeniul de aplicabilitate al metodelor de cercetare cinematică a mecanismelor plane articulate*. St. cerc. mec. apl., Acad. R.P.R., *6* (1962).

STUDII

PROIECTAREA MECANISMELOR HIDRAULICE CU ELEMENTE BIPOZIȚIONALE

DE

LEON LIVOVSCHI

621.2

Pentru comanda automată a mașinilor unelte și a mașinilor de ridicat sau transportat etc. se folosesc adesea mecanisme hidraulice. Elementele constitutive ale acestor mecanisme sînt sertărașele și pistoanele. Pentru descrierea funcționării acestor elemente se pot folosi variabile cu un număr finit de valori. Acest lucru face posibilă aplicarea metodelor cunoscute de sinteză a automatelor finite [1], [2], la proiectarea mecanismelor hidraulice. Expunem mai jos un procedeu de proiectare a mecanismelor hidraulice.

I. FUNCȚIONAREA ELEMENTELOR ȘI MECANISMELOR HIDRAULICE

Dăm descrierea cîtorva elemente hidraulice de tipul celor folosite în mecanismele hidraulice.

SERTĂRAȘE

Sertărașele se compun din două sau trei pistoane solidale care se pot deplasa în interiorul unui cilindru prevăzut cu orificii laterale (fig. 1).

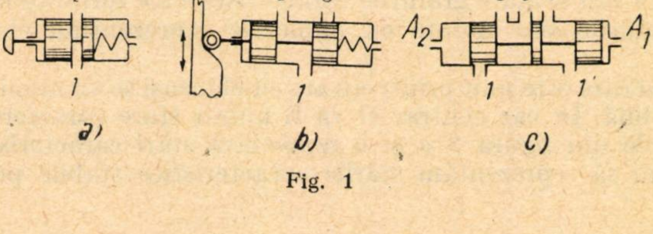


Fig. 1

Vom numi aceste orificii căi de acces. Pentru diferite poziţii ale pistoanelor se realizează diferite comunicaţii între căile de acces. Orice pereche de căi de acces poate fi interpretată ca un canal, care în funcţie de poziţia pistoanelor poate fi deschis sau închis.

Sertăraşele pot fi tratate ca elemente de automatizare bipoziţionale. În fiecare dintre cele două poziţii ale lor anumite canale sînt deschise.

Din punctul de vedere al acţionării, sertăraşele pot fi cu acţionare manuală (fig. 1 *a*), mecanică (fig. 1 *b*) sau hidraulică (fig. 1 *c*). Sertăraşele care au un arc pentru readucerea în poziţie de repaus se numesc sertăraşe cu arc (fig. 1 *a* şi *b*). Sertăraşele fără arc se numesc basculante (fig. 1 *c*).

Să notăm cu A, B,... variabile cu două valori, 0 şi 1, asociate mărimilor care descriu starea organelor de comandă ale sertăraşului. Pentru sertăraşele din figura 1 *a* şi *b*, este suficientă o singură variabilă, pe care o notăm cu A. Valorilor ei 0 şi 1 le corespund stările organelor de comandă ale sertăraşelor din figura 1 *a* şi *b*, din tabela care urmează :

A	Fig. 1 *a*	Fig. 1 *b*
0	Butonul neacţionat	Rola neacţionată
1	Butonul acţionat	Rola acţionată

Notăm mai departe cu a o variabilă cu două valori 0 şi 1 care descrie poziţia pistoanelor sertăraşelor.

În timpul funcţionării sertăraşelor considerate mai sus au loc schimbări de valori ale variabilei A urmate de schimbări de valori ale variabilei a. Momentele în care A şi a schimbă de valoare determină o împărţire a timpului în intervale. Vom nota două intervale succesive cu N şi $N+1$. Valorile lui A şi a într-un acelaşi interval N le notăm A_N şi a_N. Valorile lui a le vom numi stări ale sertăraşului.

Construim produsul cartezian $A_N \times a_{N+1}$ al domeniilor de variaţie ale variabilelor A şi a luate la momentele N şi $N+1$. Numim stări caracteristice ale sertăraşului elementele produsului cartezian $A_N \times a_{N+1}$.

Vom reprezenta funcţionarea unui sertăraş printr-un graf avînd drept noduri elementele lui $A_N \times a_{N+1}$. Două noduri $A_1\ a_1$ şi $A_2\ a_2$ sînt legate printr-un arc dacă există o valoare $A_N = A_2$ a lui A pentru care sertăraşul trece din starea $a_N = a_1$ în starea $a_{N+1} = a_2$. Elementele lui $A_N \times a_{N+1}$ care reprezintă noduri care nu pot fi legate prin arce cu alte noduri, se consideră inexistente iar nodurile respective se elimină. Pe figura 2 *a* şi *b* sînt arătate grafurile caracteristice ale sertăraşelor din figura 1 *a* şi *b*. Nodurile sînt notate cu numerele reprezentînd elementele lui $A_N \times a_{N+1}$.

Un nod care este unit printr-un arc cu el însuşi se va numi stare caracteristică stabilă. În caz contrar el va fi numit stare caracteristică nestabilă. Nodurile din figura 2 *a* şi *b* reprezintă stări caracteristice stabile. Vom conveni să reprezentăm stările caracteristice stabile printr-un mic cerc iar cele nestabile printr-un punct. Se obțin atunci reprezentările din figura 3 *a* și *b*.

Sertărașul basculant din figura 1 *c* are două organe de comandă : cele două camere laterale. Notăm cu A_1 și A_2 două variabile cu două valori care descriu valoarea presiunii din camerele de alimentare ale sertărașului.

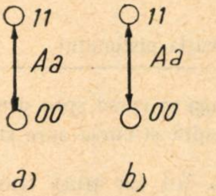


Fig. 2

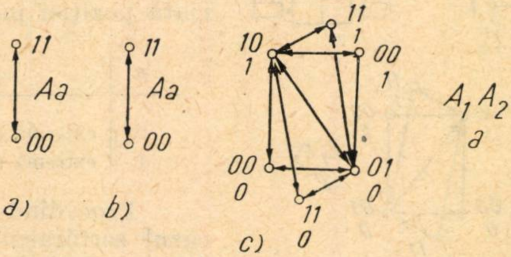


Fig. 3

Stările caracteristice vor fi date de elementele produsului cartezian $A_{1N} \times A_{2N} \times a_{N+1}$. Graful caracteristic este arătat pe figura 3 *c*.

Pe graful din figura 3 *c* nu apar arcele 111—001 și 110—010. Evoluțiile pe care ele le descriu trebuie evitate, deoarece schimbarea concomitentă a valorilor lui A_1 și A_2 fiind greu de realizat, s-ar putea întîmpla de exemplu ca în primul caz de mai sus, după $A_1 \ A_2 = 11$ să urmeze $A_1 A_2 = 01$ iar apoi $A_1 \ A_2 = 00$. Este posibil deci ca sertărașul să treacă în starea $a = 0$, ceea ce nu este de dorit.

În afară de graful caracteristic mai este util să cunoaștem configurația legăturilor dintre căile de acces într-un sertăraș, în cele două poziții ale lui. Pe figura 4 *a*, *b*, *c*, sînt arătate aceste configurații pentru sertărașele din figura 1 *a*, *b*, *c*.

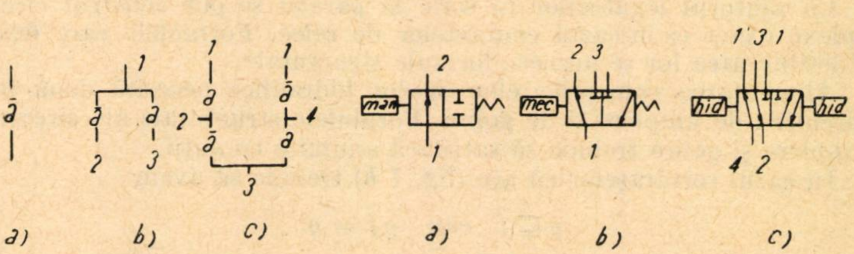


Fig. 4 și 5

În scheme se folosesc reprezentări convenționale ale sertărașelor. Pe figura 5 sînt arătate reprezentările sertărașelor din figura 1. Legăturile dintre canalele de acces, care se realizează în cele două poziții ale sertărașului, sînt figurate separat.

PISTOANE

Considerăm pistoane echipate cu sertăraşe acţionate de tija pistonului. Asemenea pistoane pot transmite informaţii asupra stării lor.

Fie pentru precizare pistonul din figura 6 *a*. Notăm cu C_1 şi C_2 variabilele asociate mărimii presiunii în camerele de alimentare iar cu p variabila asociată poziţiei pistonului şi anume

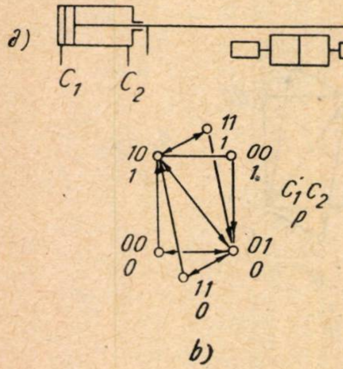


Fig. 6

p	Poziţia pistonului
0	extremă stînga şi cursa spre dreapta
1	extremă dreapta şi cursa spre stînga

Procedînd la fel ca mai înainte în cazul sertăraşului basculant obţinem graful caracteristic din figura 6 *b*.

MECANISME HIDRAULICE

Fiind date mai multe elemente hidraulice $E_1, E_2, \ldots, E_n$ şi E şi o intrare E^j a elementului E, se numesc circuite de alimentare ale acestei intrări asemenea organizări ale ieşirilor elementelor $E_1, E_2, \ldots, E_n$ şi E care pot realiza schimbarea de stare a elementului E. Ieşirile elementelor hidraulice sînt canalele sertăraşelor iar intrările sînt camerele de alimentare.

Ca şi contactele de relee, canalele pot fi legate în serie sau în paralel (fig. 7 *a*). Celor două moduri de conectare le corespund formulele

$$f_1 = a + b + \ldots + c, \tag{1}$$
$$f_2 = a\, b\, c.$$

Cu ajutorul legăturilor în serie şi paralel se pot construi circuite complexe exact ca în cazul contactelor de relee. Formulele care descriu conductibilitatea lor se numesc formule structurale.

Alimentarea camerelor elementelor hidraulice necesită două feluri de circuite : de umplere şi de golire. Formulele structurale ale circuitelor de umplere şi golire trebuie să satisfacă anumite condiţii.

În cazul sertăraşelor cu arc (fig. 7 *b*) trebuie să avem

$$g \subseteq \bar{f} \quad \text{sau} \quad g \bar{f} = g. \tag{2}$$

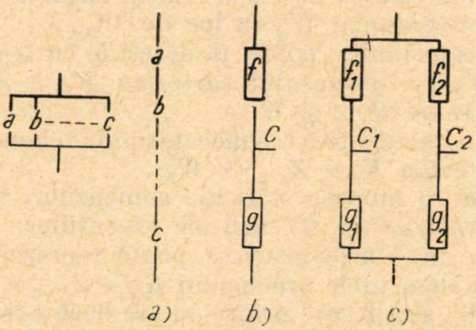
În cazul sertăraşelor basculante sau al pistoanelor (fig. 7 *c*) trebuie să avem

$$f_2 \subseteq g \subseteq \bar{f}_1, \; f_1 \subseteq q_2 \subseteq \bar{f}_2, \tag{3}$$

sau

$$f_2 g_1 = f_2, \; g_1 \bar{f}_1 = y_1 g_1,$$
$$f_1 g_2 = f_1, \; g_2 \bar{f}_2 = y_2 g_2. \tag{3'}$$

Aceste condiţii exprimă faptul că o cameră nu este umplută şi golită concomitent iar în cazul elementelor cu două camere, umplerea unei camere coincide cu golirea celeilalte.



a) b) c)

Fig. 7

În plus, funcţiile g, g_1 şi g_2 trebuie să mai satisfacă condiţia de a conţine primii termeni din $\bar{f}$, $\bar{f}_1$, $\bar{f}_2$ în ordinea în care ei apar în timpul funcţionării mecanismului şi avînd o durată suficient de mare pentru ca să fie posibilă golirea camerei respective.

Un mecanism hidraulic este format din elemente hidraulice legate între ele prin circuite. Vom considera mecanisme în care elementele se pot împărţi în următoarele categorii : de comandă, intermediare şi executive normale sau mixte (fig. 8). Aceste elemente se caracterizează prin următoarele : elementele de comandă — intrările lor nu fac parte din circuite ale mecanismului ; elementele intermediare — intrările şi ieşirile lor nu fac parte din circuite ale mecanismului ; elementele executive mixte — unele ieşiri ale lor nu fac parte din circuite ale mecanismului ; elementele executive normale — nici o ieşire a lor nu face parte din circuite ale mecanismului.

Notăm cu K, Z, W respectiv produsele carteziene ale domeniilor de variaţie ale variabilelor asociate : 1) ieşirilor din elementele de comandă ; 2) ieşirilor din elementele intermediare şi ieşirilor din elementele executive mixte ; 3) ieşirilor din elementele executive normale.

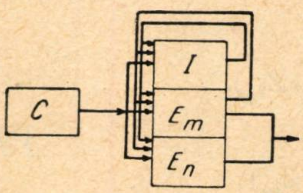


Fig. 8

Momentele în care variabilele K, Z, W schimbă de valoare determină împărţirea timpului în intervale. Două intervale vecine le notăm N, $N+1$. După cum se ştie [1] avem

$$Z_{N+1} = f(K_N, Z_N),$$
$$W_{N+1} = g(K_N, Z_N). \qquad (4)$$

Indicii $N+1$ din cele două ecuaţii de mai sus nu reprezintă în general acelaşi interval de timp. Ei exprimă faptul că transmiterea de informației prin circuitele și elementele mecanismului are loc cu întîrziere. În cazul mecanismelor hidraulice această întîrziere o realizează chiar elementele hidraulice. Deoarece întîrzierea la schimbarea de stare a elementelor executive normale nu este esențială (se caută chiar ca ea să fie redusă la zero), vom scrie convențional W_N în loc de W_{N+1}.

Evoluția mecanismului poate fi descrisă cu ajutorul șirurilor de elemente $K_N\, Z_N\, W_N$ ale produsului cartezian $K_N \times Z_N \times W_N$ al domeniilor de variație ale lui K, Z și W.

Numim stări caracteristice ale mecanismului elementele $K_N\, Z_{N+1}\, W_N$ ale produsului cartezian $K_N \times Z_{N+1} \times W_N$.

Valorile lui K se numesc stări ale comenzilor, valorile Z stări ale mecanismului iar valorile lui W stări ale execuțiilor.

Funcționarea unui mecanism se poate reprezenta printr-un graf avînd drept noduri elementele produsului $K_N \times Z_{N+1} \times W_N$. Două noduri $K_1\, Z_1\, W_1$ și $K_2\, Z_2\, W_2$ sînt legate printr-un arc dacă există o valoare $K_N = K_2$ a lui K pentru care mecanismul trece din starea $Z_1 = Z_N$ în starea $Z_2 = Z_{N+1}$. Elementele lui $K_N \times Z_{N+1} \times W_N$ care reprezintă noduri care nu pot fi legate prin arce cu alte noduri se consideră inexistente iar nodurile respective se elimină.

Un nod care este unit printr-un arc cu el însuși se numește starea caracteristică stabilă. În caz contrar el se numește stare caracteristică nestabilă. Stările caracteristice stabile se reprezintă printr-un cerc iar cele nestabile printr-un punct.

Programul unui mecanism se dă prin propoziții care conțin elemente ale produsului $K_N \times W_N$. Cu ajutorul lor se poate construi ca și mai sus un graf ale cărui noduri reprezintă stările lui $K_N \times W_N$. Două noduri $K_1\, W_1$ și $K_2\, W_2$ se unesc printr-un arc dacă din program rezultă că cele două stări $K_1\, W_1$ și $K_2\, W_2$ se succed.

Un nod care este unit printr-un arc cu el însuși se zice că reprezintă o stare KW stabilă; în caz contrar el reprezintă o stare KW nestabilă. Stările KW stabile și nestabile se reprezintă ca și mai înainte.

Graful stărilor KW, pe care îl vom numi inițial, nu conține valorile lui Z. Urmează să determinăm aceste valori astfel încît prima ecuație (4) să fie satisfăcută și toate nodurile grafului caracteristic să fie distincte, adică să avem

$$K_i\, Z_{i_{N+1}} \neq K_j\, Z_{j_{N+1}}, \tag{5}$$

pentru orice i și j.

Construim expresiile

$$\begin{aligned} i &= K_{i_N}\,(Z_{i_{1N}}, Z_{i_{2N}}, \ldots, Z_{i_{n_{iN}}}, \varepsilon Z_{i_N}), \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ j &= K_{j_N}\,(Z_{j_{1N}}, Z_{j_{2N}}, \ldots, Z_{i_{n_{jN}}}, \varepsilon Z_{j_N}), \end{aligned} \tag{6}$$

unde $Z_{i_{1N}}, \ldots$ respectiv $Z_{j_{1N}} \ldots$ reprezintă valorile lui Z din nodurile anterioare nodului i respectiv j, iar $\varepsilon = 0$ sau 1 după cum i respectiv j reprezintă stări nestabile sau stabile.

Din inegalitatea expresiilor (6) și ținînd seamă de prima ecuație (4), rezultă (5).

Scriind că toate expresiile (6) sînt distincte, din expresiile pentru care $K_{i_N} = K_{j_N}$ va rezulta un șir de condiții de forma

$$Z_{i_{1N}} - Z_{i_{2N}} - \dots - Z_{i_N} \neq Z_{j_{1N}} - Z_{j_{2N}} - \dots - Z_{j_N}, \tag{7}$$

unde semnul — înseamnă poate fi egal.

Din relațiile (7) vom determina o mulțime de mulțimi de valori ale lui Z care pot fi egale. Nodurile respective vor fi notate cu aceleași valori ale lui Z.

Apoi se alege un număr suficient de mare de elemente hidraulice astfel încît produsul cartezian al domeniilor de variație al variabilelor asociate ieșirilor acestor elemente să conțină un număr de elemente cel puțin egal cu numărul de valori distincte ale lui Z. Această operație se numește asignare. Nodurile notate cu valori diferite ale lui Z le punem în corespondență cîte un element al produsului cartezian de mai sus. Graful astfel obținut se numește final.

Urmează acum construirea circuitelor.

Pentru deducerea formulelor structurale ale circuitelor construim mai întîi un tablou avînd drept intrări elementele $K_N Z_N$ ale produsului $K_N \times Z_N$ iar drept ieșiri elementele $Z_{N+1}\ W_N$ ale produsului $Z_{N+1} \times W_N$. Acest tablou va fi numit tabloul caracteristic al mecanismului.

Cu ajutorul tabloului caracteristic se poate construi tabloul intrărilor în elementele mecanismului.

În acest scop considerăm două variabile ajutătoare A și a. Variabila A reprezintă valorile unei funcții definită pe mulțimea elementelor produsului cartezian $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_p$ al domeniilor de variație al variabilelor asociate intrărilor în elementele intermediare și executive. Valorile lui A sînt numerele naturale $0,1,\dots,n_A$. Variabila a reprezintă valorile unei funcții definită pe mulțimea elementelor produsului cartezian $a_1 \times a_2 \times \dots \times a_r$ al domeniilor de variație al variabilelor asociate ieșirilor din elementele intermediare și executive. Valorile lui a sînt numerele naturale $0,1,\dots,n_a$.

Este comod adesea de notat valorile variabilelor A și a chiar prin elementele produselor carteziene al mulțimilor lor de definiție.

Fie A^s o valoare a lui A. Urmărim în grafurile caracteristice ale elementelor mecanismului care sînt valorile $a^1,\dots,a^{n_s}$ ale variabilei a la momentul $N+1$ determinate de A^s la momentul N. În tabloul caracteristic punem A peste tot unde avem $a^1,\dots,a^{n_s}$. În felul acesta se obține tabloul intrărilor în elementele mecanismului. Acest tablou definește funcțiile

$$A_N = h(K_N, Z_N). \tag{8}$$

Avînd în vedere că grafurile caracteristice ale elementelor intermediare și executive mixte reprezintă de fapt funcțiile

$$Z_{N+1} = k(A_N, Z_N), \tag{9}$$

prin eliminarea lui A_N între (8) și (9) se poate obține prima funcție din (4) care descrie evoluția mecanismului. Această din urmă funcție este dată de tabloul caracteristic.

Procedeul descris dă în fond funcția A_N din (8) astfel încît ea satisface condiția ca împreună cu (9) să dea pe (4).

Pentru a obține formulele structurale ale intrărilor elementelor mecanismului să considerăm o valoare A_j^m a variabilei A_j asociată intrărilor în unul din elementele mecanismului. Identificăm în tabloul intrărilor toate locurile unde apare A_j^m. Luînd reuniunea stărilor $K_N\,Z_N$ din dreptul acestor locuri vom obține formula structurală

$$A_{j_N}^m = f_j^m\,(K_N\,Z_N). \tag{10}$$

Cu ajutorul formulelor $A_{j_N}^m$ se pot construi, folosind metodele cunoscute din teoria schemelor cu contacte de relee, circuitele de alimentare ale intrărilor în elementele mecanismului.

II. EXEMPLU DE PROIECTARE A UNUI MECANISM HIDRAULIC

Se dau două sertărașe de comandă : A și B și un piston P echipat ca pe figura 6 *a*. Se cere să se proiecteze un mecanism care să funcționeze după următorul program.

Există o stare a mecanismului în care A și B sînt neacționate și pistonul este în repaus.

Dacă se acționează A pistonul începe să se miște și continuă această mișcare chiar dacă după aceea A este dezacționat.

Dacă A fiind acționat se acționează B pistonul continuă să se miște.

Dacă A fiind neacționat se acționează B pistonul rămîne nemișcat chiar dacă se acționează din nou A.

Dacă A și B fiind acționate și pistonul nemișcat se dezacționează B, pistonul începe să se miște.

Vom descompune sinteza mecanismului în două etape.

Construim mai întîi un mecanism auxiliar M' care să comande mișcarea lui P.

Apoi construim mecanismul propriu-zis pe care îl vom nota M.

Mecanismul auxiliar M'

Fie C un sertăraș de comandă a mecanismului M'.

Dacă C este dezacționat, pistonul P este în repaus.

Dacă C este acționat pistonul P se mișcă.

Graful inițial este arătat pe figura 9 *a*.

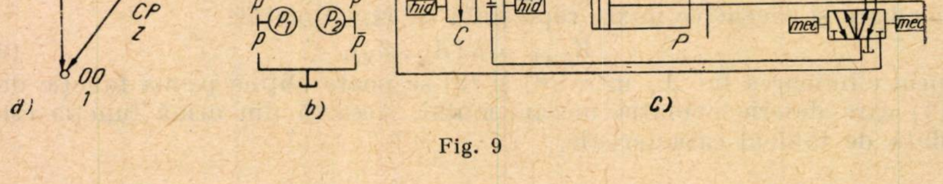


Fig. 9

Expresiile (6) sînt

$$1 = \bar{c}\ (1,2,3),\ 2 = c(1,\ 3),\ 3 = c\ (2).$$

Rezultă

$$1-3 \neq 2.$$

Pentru asignare poare fi folosit chiar elementul P însuși.

Tabloul caracteristic este

		0	C_N	1	
	0	0,1		1,2	
p_N	1	0,1		0,3	p_{N+1}, n

Tabloul formulelor structurale ale circuitelor de umplere este

		0	C_N	1	
	0	00		1 0	
p_N	1	01		01	$P_{1_N} P_{2_N}$

Obținem

$$P_1 = c\,\bar{p},$$

$$P_2 = p. \qquad (11)$$

Pentru deducerea formulelor structurale ale circuitelor de golire avem tabloul

		0	C_N	1	
	0	0 1		0 1	
p_N	1	1 0		1 0	$P_{1_{G_N}}$ $P_{2_{G_N}}$

Obținem

$$P_{1_G} = p, \qquad (11')$$

$$P_{2_G} = \bar{p}.$$

Se vede direct că sînt satisfăcute condițiile (3).

Schemele formulelor structurale sînt arătate pe figura 9 *b*, iar circuitele pe figura 9 *c*. Am presupus că sertărașul C este basculant.

Mecanismul M

Graful inițial este arătat pe figura 10 *a*.

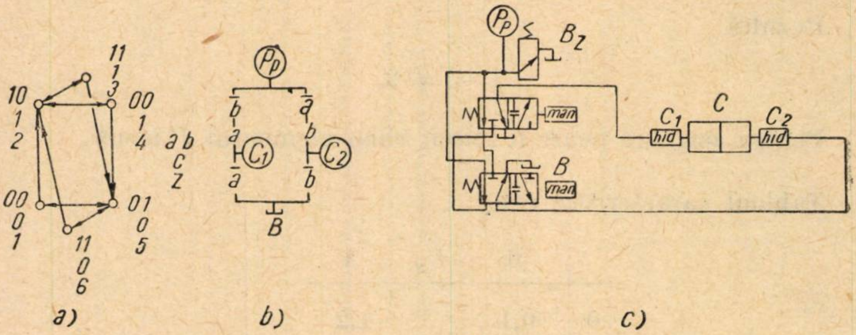

11
1
3
10
1
2
00
1
4
00
0
1
01
0
5
11
0
6
a b
c
Z
P_p
$\bar{b}$
$\bar{a}$
a
b
C_1
C_2
$\bar{a}$
$\bar{b}$
B
P_p
B_z
man
man
B
C_1
C
C_2
hid
hid
a)
b)
c)

Fig. 10

Relațiile (6) sînt

$$1 = \bar{a}\,\bar{b}\ (1,6),\qquad 2 = a\,\bar{b}\ (1,\ 2,\ 3,\ 4),\qquad 3 = a\,b\ (2,\ 3)$$

$$4 = a\,\bar{b}\ (2,4),\qquad 5 = \bar{a}\,b\ (1,\ 4,\ 5,\ 6),\qquad 6 = a\,b\ (5,\ 6).$$

Avem inegalitățile

$$1 - 6 \neq 2 - 4, \qquad 2 - 3 \neq 5 - 6.$$

Mulțimile de valori egale ale lui Z sînt

$$2 - 3 - 4 \neq 1 - 5 - 6.$$

Pentru asignare poate fi folosit chiar sertărașul C.
Tabloul caracteristic este

		$a_N\ b_N$				
		00	10	11	01	
	0	0,1	1,2	0,6	0,5	
c_N	1	1,3	1,2	1,4	0,5	c_{N+1}, n

Tabloul formulelor structurale ale circuitelor de umplere este

		$a\ b_N$				
		00	10	11	01	
	0	00	10	00	01	
c_N	1	00	10	00	01	$C_{1_N}\ C_{2_N}$

Deducem formulele

$$C_1 = a\bar{b},$$
$$C_2 = \bar{a}b. \qquad (12)$$

Pentru formulele structurale ale circuitelor de golire putem lua

$$C_{1_G} = \bar{a},$$

$$C_{2_G} = \bar{b}. \qquad (12')$$

Se vede direct că sînt satisfăcute condițiile (3).

Schemele formulelor structurale sînt arătate pe figura 10 *b*, iar circuitele pe figura 10 *c*.

CONCLUZII ȘI OBSERVAȚII

1. Exemplul tratat dovedește că metodele cunoscute de sinteză a mecanismelor sînt aplicabile și la mecanismele hidraulice.

2. Pe figuri s-a notat cu P_p pompe de alimentare iar cu B_z bazinul. Pe conducta ce pleacă de la pompă există o derivație legată la o supapă de descărcare prin care se scurge uleiul la bazin dacă presiunea în conducte depășește o anumită valoare.

Primită la redacție la 7 iulie 1962, o nouă versiune la 29 octombrie 1962

DESIGN OF HYDRAULIC SYSTEMS WITH BIPOSITIONAL ELEMENTS

ABSTRACT

The automatic hydraulic control is now more and more frequently used in the automation of production processes. The control systems often consist of hydraulic operated valves. The present paper presents a design procedure for such hydraulic systems.

The first part of the paper describes the hydraulic operated valves and motors and presents the manner of representing graphically the operation of hydraulic valves, motors and systems.

The second part describes the design procedure which is illustrated by a practical example.

BIBLIOGRAFIE

1. GR. C. MOISIL, *Teoria algebrică a mecanismelor automate*. Ed. tehnică, București, 1959.
2. D. A. HUFFMANN, *The synthesis of sequential switching circuits*. Journal of the Franklin Institute, **267**, *3*, *4* (1954).
3. RONAN HAROLD JR., *Hydraulic switching circuits*. Machine Design, **31**, *4* (1956).

STUDII ASUPRA UNUI ANGRENAJ CILINDRO-CONIC

DE

I. SZÉKELY[1]

621.01

Angrenajul cilindro-conic din figura 1 este format dintr-o roată dințată cilindrică obișnuită și o roată dințată conico-evolventică [1] fixate pe axe concurente sub un unghiu δ. Menționăm că roata dințată conico-evolventică ca aspect exterior seamănă cu roata dințată conică obișnuită, dar în esență diferă de aceasta prin faptul că în fiecare secțiune perpendiculară pe axă are aceeași înălțime a dinților și același modul.

Un astfel de angrenaj cilindro-conic se poate folosi în acele cazuri cînd unghiul dintre axe este mic, dar nu depășește aproximativ 30°. La unghiuri mai mari apare fenomenul de subtăiere, care de fapt determină limita superioară a unghiului δ.

Ca urmare a faptului că axa roții cilindrice formează un unghiu δ cu axa roții conico-evolventice, angrenajul format din acestea lucrează în condiții cinematice asemănătoare cu un angrenaj format din două roți conice, adică în timpul funcționării apar conurile de rulare cu unghiurile la vîrf $2\delta_1$ și $2\delta_2$. În cazul de față unghiurile δ_1 și δ_2 nu sînt egale cu $\frac{\delta}{2}$. Relațiile dintre acestea se obțin dacă se ia în considerare că raportul de transmitere i_{12} în cazul angrenajelor cu axe concurente se determină de relația

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{z_2}{z_1} = \frac{\sin\ \delta_2}{\sin\ \delta_1}, \qquad (1)$$

unde

ω_1, ω_2 — vitezele unghiulare ale axelor concurente,
z_1, z_2 — numerele de dinți ale roților dințate fixate pe cele două axe.

---

[1] Institutul politehnic, Cluj.

Avînd în vedere că

$$\delta_1 + \delta_2 = \delta,$$

relaţia (1) devine

$$i_{12} = \frac{\sin \delta_2}{\sin \delta \cos \delta_2 - \cos \delta \sin \delta_2},$$

de unde

$$\operatorname{tg} \delta_2 = \frac{\sin \delta}{i_{21} + \cos \delta}. \tag{2}$$

În mod analog avem

$$\operatorname{tg} \delta_1 = \frac{\sin \delta}{i_{12} + \cos \delta}. \tag{3}$$

Deoarece axele celor două roţi dinţate în angrenare formează între ele un unghiu δ, curba de intersecţie a celor doi cilindrii de divizare (cu razele R_{d_1} al roţii dinţate cilindrice şi R_{d_2} al roţii dinţate conico-evolventice) intersectează axa instantanee de rotaţie OP în punctul P. În cazul de faţă se presupune că roata dinţată cilindrică este necorijată şi că roata dinţată conico-evolventică este astfel fixată pe axa ei de rotaţie încît secţiunea în care deplasarea de profil este egală cu zero trece prin punctul P.

Pentru determinarea poziţiei punctului P se aleg sistemele de referinţă $O\xi_1\eta_1\zeta_1$ şi $O\xi_2\eta_2\zeta_2$ cu aceeaşi origine în O. Axa $O\zeta_1$ coincide cu axa de rotaţie a roţii dinţate cilindrice, iar axa $O\zeta_2$ coincide cu axa de rotaţie a roţii dinţate conico-evolventice. Axele $O\xi_1$ şi $O\xi_2$ sînt în planul deter-

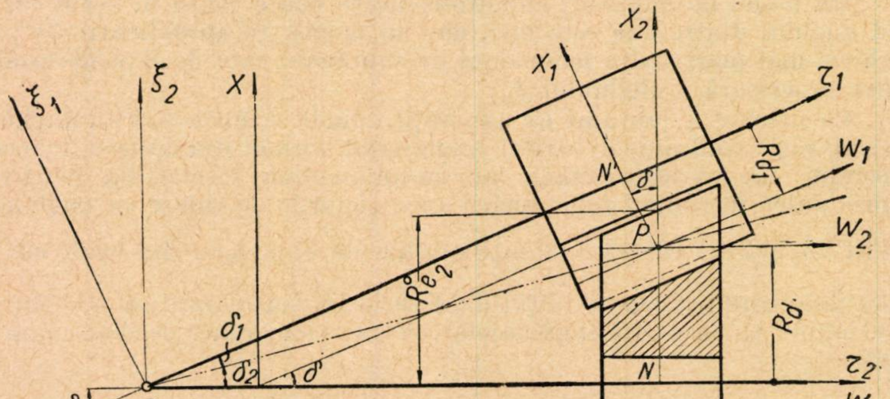


Fig. 1

minat de axele roţilor dinţate, iar $O\eta_1$ şi $O\eta_2$ sînt perpendiculare pe acest plan şi triedrele $O\xi_1\eta_1\zeta_1$ şi $O\xi_2\eta_2\zeta_2$ sînt direct orientate.

Coordonatele punctului P, notate cu ξ_{1P} η_{1P}, ζ_{1P} şi ξ_{2P}, η_{2P}, ζ_{2P} în cele două sisteme de referinţă mai sus amintite se determină din figura 1 precum urmează:

$$\xi_{1P} = -R_{d_1}, \tag{4}$$

$$\eta_{1P} = 0, \tag{5}$$

$$\zeta_{1P} = \frac{R_{d_1}}{\operatorname{tg}\delta_1}, \tag{6}$$

$$\xi_{2P} = R_{d_2}, \tag{7}$$

$$\eta_{2P} = 0, \tag{8}$$

$$\zeta_{2P} = \frac{R_{d_2}}{\operatorname{tg}\delta_2}. \tag{9}$$

Ținînd seamă de formulele (3) și (2) relațiile (6) și (9) devin

$$\xi_{1P} = \frac{R_{d_2} + R_{d_1}\cos\delta}{\sin\delta}, \tag{10}$$

$$\zeta_{2P} = \frac{R_{d_1} + R_{d_2}\cos\delta}{\sin\delta}. \tag{11}$$

Pentru studierea angrenajului ne vom baza pe faptul că atît roata dințată cilindrică cît și cea conico-evolventică se prelucrează cu aceeași suprafață generatoare a cremalierei *abcdefg* (fig. 2).

Mișcările absolute ale roții dințate cilindrice, a roții dințate conico-

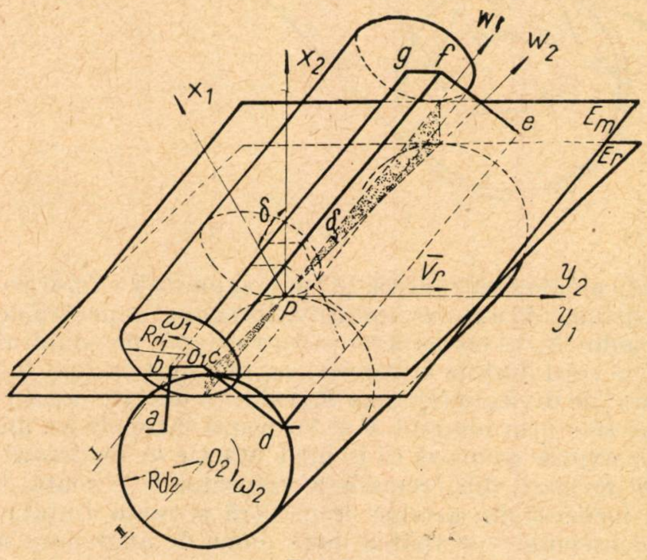


Fig. 2

evolventice și a suprafeței generatoare a cremalierei se aleg astfel ca ultima să înfășoare o suprafață într-un sistem de axe legat de roata dințată cilindrică şi o altă suprafaţă într-un sistem de axe legat de roata dinţată conico-evolventică. Cu alte cuvinte, dacă cremaliera generatoare va executa o mişcare de translaţie pe direcţia axei y_1 (fig. 2) cu viteza V_r, iar roţile dinţate se vor roti în jurul axelor lor cu vitezele unghiulare $\omega_1 = \frac{V_r}{R_{d_1}}$ şi $\omega_2 = \frac{V_r}{R_{d_2}}$ atunci planurile cremalierei generatoare *abg* şi *cdef* vor înfăşura

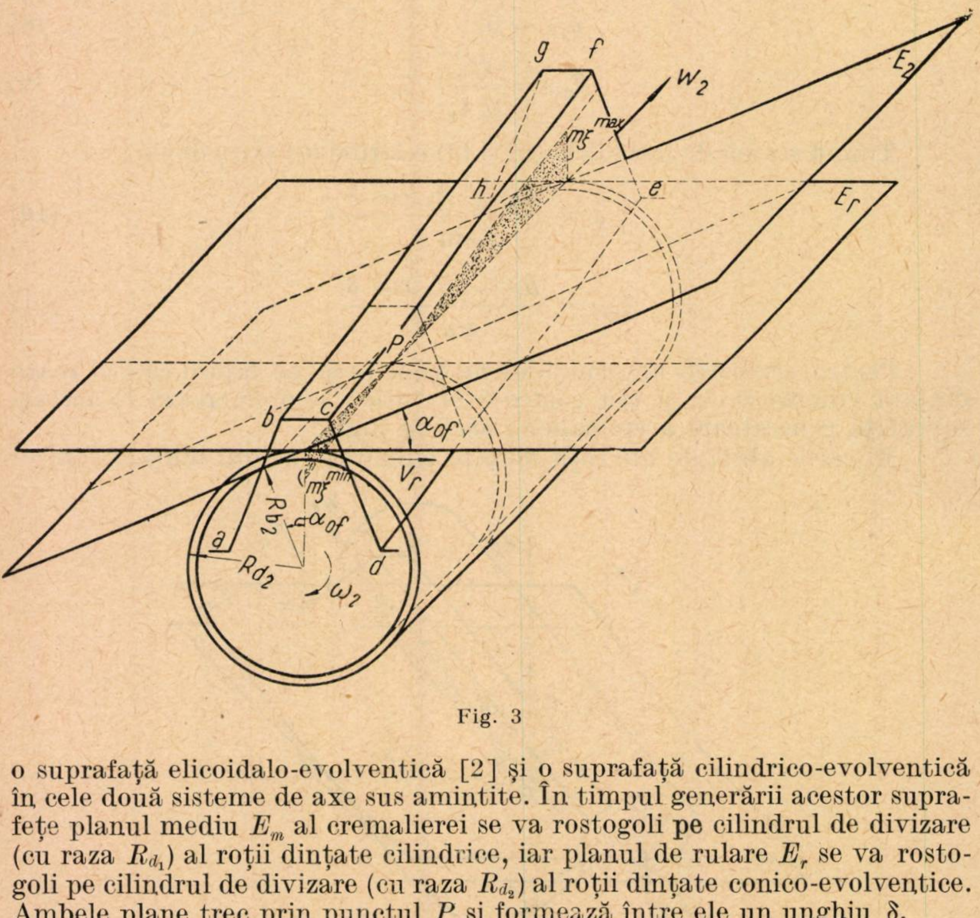


Fig. 3

o suprafaţă elicoidalo-evolventică [2] şi o suprafaţă cilindrico-evolventică în cele două sisteme de axe sus amintite. În timpul generării acestor suprafeţe planul mediu E_m al cremalierei se va rostogoli pe cilindrul de divizare (cu raza R_{d_1}) al roţii dinţate cilindrice, iar planul de rulare E_r se va rostogoli pe cilindrul de divizare (cu raza R_{d_2}) al roţii dinţate conico-evolventice. Ambele plane trec prin punctul P şi formează între ele un unghiu δ.

Din cele expuse urmează că în mod practic se realizează o angrenare de prelucrare formată din cremaliera generatoare şi roata dinţată cilindrică şi una formată din aceeaşi cremalieră şi roata dinţată conico-evolventică. În consecinţă vor apărea două plane de angrenare notate cu E_1 şi E_2.

Planul de angrenare E_2 apare în angrenarea de prelucrare formată din cremaliera generatoare şi roata dinţată conico-evolventică. Acest plan (fig. 3) face un unghiu α_{of} [1] cu planul de rulare E_r. Planul E_2

este perpendicular pe muchia *cd* a cremalierei de referință situată într-o secțiune a cremalierei generatoare perpendiculară pe planul de rulare E_r. Planul E_2 trece prin linia de contact dintre cilindrul de divizare (cu

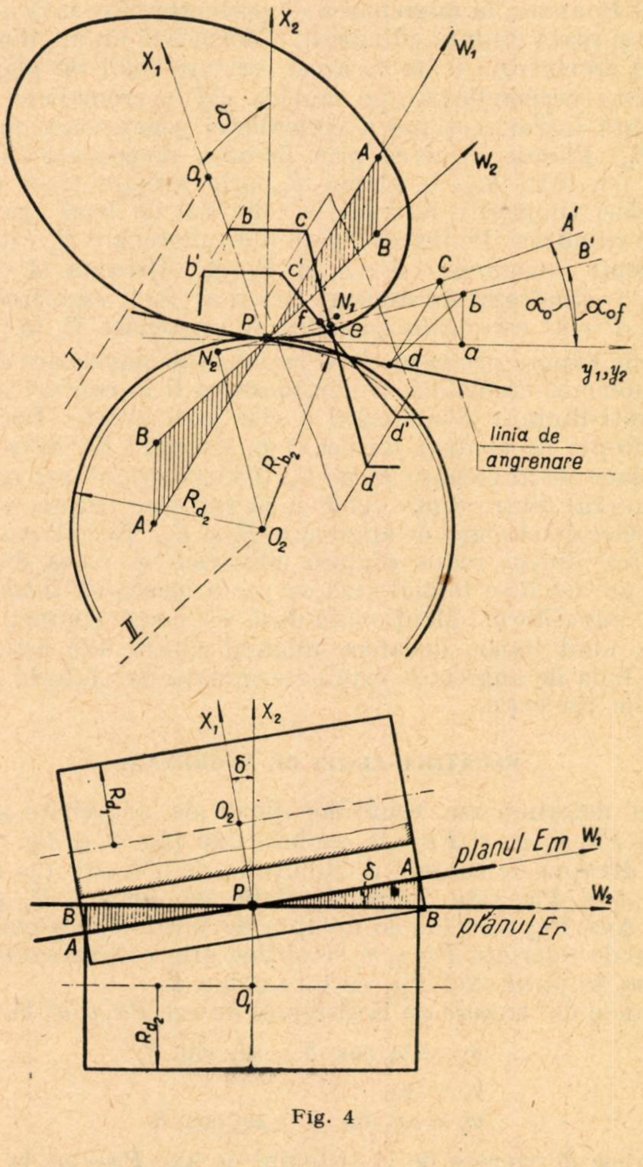

X₂
X₁
W₁
δ
O₁
A
W₂
b
c
B
A'
B'
b'
c'
C
N₁
b
α₀
α₀f
P
f
e
a
d
y₁,y₂
N₂
I
B
d'
linia de angrenare
R_b₂
d
R_d₂
A
O₂
II
X₁
X₂
δ
R_d
O₂
planul Em
W₁
δ
A
P
W₂
B
B
planul E_r
A
O₁
R_d₂

Fig. 4

raza R_{d_2}) și planul de rulare E_r prin urmare trece și prin punctul P și în același timp este tangent în punctul K_2 la cilindrul de bază (cu raza R_{b_2}) al roții dințate conico-evolventice. Pe figura 4 planul de angrenare E_2 este determinat de două drepte concurente $B-B$ și $P-B'$.

Dreapta $B-B$ este acea generatoare a cilindrului de divizare (cu raza R_{d_2}), care trece prin polul P, iar dreapta $P-B'$ este urma planului de angrenare E_2 în planul $x_2\,Py_2$.

Planul E_1 apare, în angrenarea de prelucrare formată din cremaliera generatoare şi roata dinţată cilindrică, el formează un unghiu α_0 cu planul mediu E_m al cremalierei (care în acest caz are rolul de plan de rulare). Planul E_1 este perpendicular pe muchia $c'd'$ a cremalierei de referinţă (fig. 4) situată într-o secţiune a cremalierei generatoare perpendiculară pe planul E_m. Planul E_1 trece prin dreapta de contact dintre cilindrul de divizare (cu raza R_{d1}) şi planul E_m prin urmare trece prin punctul P şi în acelaşi timp este tangent la cilindrul de bază (cu raza R_{b1}) al roţii dinţate cilindrice. Pe figura 4 planul de angrenare E_1 este determinat de două drepte concurente $A-A$ şi $P-A'$. Dreapta $A-A$ este acea generatoare a cilindrului de divizare (cu raza R_{d_1}), care trece prin polul P. Dreapta $P-A'$ este urma planului de angrenare E_1 în planul $x_1\,Py_1$.

Din cele expuse urmează că în perioada de angrenare de prelucrare, în fiecare moment, cremaliera generatoare va fi în contact cu fiecare din cele două roţi dinţate de-a lungul a cîte unei drepte. Locul geometric al acestor drepte de contact formează în sistemul fix de referinţă chiar cele două plane de angrenare E_1 şi E_2. Pentru asigurarea unei angrenări corecte contactul dintre dinţii celor două roţi este necesar să aibă loc la intersecţia celor două plane de angrenare E_1 şi E_2. Ţinînd seamă de faptul că angrenarea dintre roata dinţată cilindrică şi roata dinţată conicoevolventică are loc de-a lungul unei drepte urmează că între acestea este un contact punctiform. Menţionăm însă că acest contact va fi foarte apropiat de unul liniar, deoarece unghiul dintre axe este relativ mic. Pe figura 4 linia de angrenare este determinată cu ajutorul a două plane ajutătoare de proiecţie.

ECUAŢIILE LINIEI DE ANGRENARE

Pentru determinarea ecuaţiilor liniei de angrenare se aleg sistemele de axe $Px_1\,y_1\,w_1$ şi $Px_2y_2w_2$ ambele fixe (fig. 2 şi fig. 4). Axa Pw_2 coincide cu dreapta de contact a cilindrului de divizare (cu raza R_{d2}) cu planul E_r. Axa Px_2 este perpendiculară pe planul E_r şi trece prin punctul P. Axa Py_2 coincide cu dreapta de intersecţie a planurilor E_r şi E_m. Sistemul de referinţă $Px_1y_1w_1$ se obţine prin rotirea axelor de coordonate $Px_2y_2w_2$ în jurul axei Py_2 cu un unghiu δ.

Formulele de trecere de la sistemul de axe $Px_1y_1w_1$ la $P\,x_2\,y_2\,w_2$ sînt

$$x_1 = x_2 \cos\,\delta - w_2 \sin\,\delta, \tag{12}$$

$$y_1 = y_2, \tag{13}$$

$$w_1 = x_2 \sin\,\delta + w_2 \cos\,\delta. \tag{14}$$

Formulele de trecere de la sistemul de axe $Px_2y_2w_2$ la $Px_1y_1w_1$ sînt

$$x_2 = x_1 \cos\,\delta + w_1 \sin\,\delta, \tag{15}$$

$$y_2 = y_1, \tag{16}$$

$$w_2 = -\,x_1 \sin\,\delta + w_1 \cos\,\delta. \tag{17}$$

Ecuația planului E_1 în sistemul de axe $Px,y,w,$ este

$$\frac{x_1}{y_1} = \mathrm{tg}\alpha_0 . \tag{18}$$

Ecuația planului E_2 în sistemul de axe $Px_2y_2w_2$ este

$$\frac{x_2}{y_2} = \mathrm{tg}\ \alpha_{0f} . \tag{19}$$

Ținînd seamă de relația care există între unghiul de angrenare α_{0f} și unghiul standardizat α_0 [1] și care are forma

$$\mathrm{tg}\alpha_{0f} = \mathrm{tg}\ \alpha_0 \cos\delta,$$

relația (19) devine

$$\frac{x_2}{y_2} = \mathrm{tg}\ \alpha_0 \cos\delta. \tag{20}$$

Înlocuind valorile x_2 și y_2 din (15) și (16) în 20 avem:

$$\frac{x_1 \cos\ \delta + w_1\ \sin\delta}{y_1} = \mathrm{tg}\ \alpha_0\ \cos\delta. \tag{21}$$

Linia de angrenare este determinată ca intersecție a planelor (18) și (21) ale căror ecuații se pot scrie

$$x_1 \cos\ \delta - y_1\ \mathrm{tg}\alpha_0 \cos\delta + w_1 \sin\delta = 0, \tag{22}$$

$$x_1 - y_1\,\mathrm{tg}\ \alpha_0 = 0, \tag{23}$$

care pot fi înlocuite cu una din ele și o combinație a lor. Înmulțind ecuația (23) cu $\cos\delta$ și scăzînd-o din (22) se vede imediat că $w_1 = 0$. Prin urmare linia de angrenare este dată de intersecția planelor

$$w_1 = 0, \tag{24}$$

$$x_1 - y_1\mathrm{tg}\alpha_0 = 0, \tag{25}$$

sau sub formă simetrică

$$\frac{x_1}{\mathrm{tg}\,\alpha_0} = \frac{y_1}{1} = \frac{w_1}{0} . \tag{26}$$

Din (24) și (25) urmează că linia de angrenare se găsește în planul $x_1\ Py_1$. Ea este totodată tangentă la cei doi cilindrii de bază cu razele R_{b_1} și R_{b_2} deoarece planul E_1 este tangent la cilindrul de bază cu raza R_{b_1}, iar E_2 la cilindrul de bază cu raza R_{b_2}.

Pentru a obține ecuațiile aceleiași drepte față de sistemul $Px_2y_2w_2$ folosim formulele de transformare (12), (13), (14) și găsim

$$x_2 \sin\delta + w_2 \cos\delta = 0, \tag{27}$$

$$x_2 \cos\delta - y_2\mathrm{tg}\alpha_0 - w_2 \sin\delta = 0, \tag{28}$$

sau sub formă simetrică

$$\frac{x_2}{\cos\delta\ \mathrm{tg}\,\alpha_0} = \frac{y_2}{1} = -\frac{w_2}{\sin\delta\ \mathrm{tg}\,\alpha_0}. \qquad (29)$$

DETERMINAREA GRADULUI DE ACOPERIRE

Gradul de acoperire ε se determină în funcţie de lungimea porţiunii active a liniei de angrenare. Această porţiune se limitează de acele puncte în care suprafeţele exterioare ale roţilor dinţate intersectează linia de angrenare cu condiţia ca dinţii respectivi să nu fie subtăieţi sau ascuţiţi.

Notînd lungimea porţiunii active a liniei de angrenare l_a gradul de acoperire este dat prin

$$\varepsilon = \frac{l_a}{\pi m \cos \alpha_{0f}}. \qquad (30)$$

Pentru determinarea valorii lui l_a este necesar să se găsească coordonatele punctelor de intersecţie ale liniei de angrenare cu cilindrul exterior al roţii dinţate cilindrice şi cu conul exterior al roţii dinţate conico-evolventice.

În scopul determinării punctului de intersecţie al liniei de angrenare cu cilindrul exterior cu raza R_{e_1} al roţii dinţate cilindrice scriem ecuaţia acestui cilindru în sistemul cartezian $Px_1y_1w_1$ (fig. 5)

$$R_{e_1}^2 = (x_1 - R_{d_1})^2 + y_1^2,$$

sau

$$y_1^2 + x_1^2 - 2\,R_{d_1}\,x_1 - (R_{e_1}^2 - R_{d_1}^2) = 0. \qquad (31)$$

Coordonatele punctului de intersecţie căutat sînt date de una din

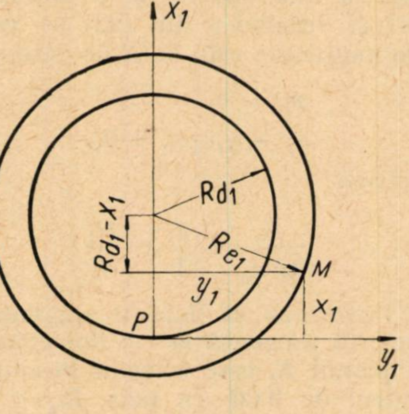


Fig. 5

soluţiile sistemului format cu ecuaţiile (24), (25) şi (31). Scoţînd pe x_1 din (25) şi înlocuindu-l în (31) găsim

$$y_1^2(1 + \mathrm{tg}^2\,\alpha_0) - 2R_{d_1}\,\mathrm{tg}\,\alpha_0\,y_1 - (R_{e_1}^2 - R_{d1}^2) = 0. \qquad (32)$$

Rezolvînd ecuația (32) și păstrînd numai rădăcina cu semnul negativ în fața radicalului avem

$$y_1 = \frac{R_{d_1} \operatorname{tg}\alpha_0 - \sqrt{R^2_{e_1} (1 + \operatorname{tg}^2\alpha_0) - R^2_{d_1}}}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha_0}. \tag{33}$$

Înlocuind valoarea lui y_1, din (33) în (25) avem

$$x_1 = \frac{R_{d_1} \operatorname{tg}^2\alpha_0 - \operatorname{tg}\alpha_0 \sqrt{R^2_{e_1} (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha_0) - R^2_{d_1}}}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha_0}. \tag{34}$$

Relațiile (33) și (34) și $w_1 = 0$ determină coordonatele punctului de intersecție căutat al cilindrului exterior cu raza R_{e_1} al roții dințate cilindrice cu linia de angrenare.

În scopul determinării punctului de intersecție al conului exterior al roții dințate conico-evolventice cu linia de angrenare scriem ecuația acestui con la început în sistemul cartezian $Oxyw$ (fig. 1) astfel

$$x^2 + y^2 = w^2 \operatorname{tg}^2 \delta. \tag{35}$$

Formulele de trecere din sistemul de axe $Oxyw$ în sistemul $Px_2y_2w_2$ sînt

$$x = R_{d_2} + x_2, \tag{36}$$

$$y = y_2 \tag{37}$$

$$w = \frac{R^0_{e_2}}{\operatorname{tg} \delta} + w_2, \tag{38}$$

unde

$R^0_{e_2}$ — este raza exterioară a roții dințate conico-evolventice în secțiunea în care deplasarea de profil este egală cu zero.

Înlocuind valorile x_2, y_2 și w_2 din relațiile (15), (16) și (17) în (36), (37) și (38) obținem formulele de trecere din sistemul de axe $Oxyw$ în sistemul $Px_1y_1w_1$

$$x = x_1 \cos\delta + w_1 \sin\delta + R_{d_2}, \tag{39}$$

$$y = y_1 \tag{40}$$

$$w = - x_1 \sin \delta + w_1 \cos \delta + \frac{R^0_{e_2}}{\operatorname{tg} \delta}. \tag{41}$$

Înlocuind valorile x, y, w din (39) (40) și (41) în (35) avem

$$(x_1 \cos \delta + w_1 \sin \delta + R_{d_2})^2 = \left(w_1 \cos \delta - x_1 \sin \delta \frac{R^0_{e_2}}{\operatorname{tg} \delta}\right)^2 \operatorname{tg}^2 \delta,$$

sau după simplificări

$$\frac{\cos 2 \delta}{\cos^2 \delta} x_1^2 + y_1^2 + \frac{2}{\cos \delta} (R_{d_2} \cos^2 \delta + R^0_{e_2} \sin^2 \delta)\, x_1 + \\ + 2 \sin \delta\, (R_{d_2} - R^0_{e_2})\, w_1 + 2 \operatorname{tg} \delta\, x_1 w_1 + \mathrm{R}^2_{d_2} - (R^0_{e_2})^2 = 0. \tag{42}$$

Coordonatele punctului de intersecție căutat sînt date de una din soluțiile sistemului format cu ecuațiile (24), (25) și (42). Scoțînd din (25) pe y_1 și ținînd seama de (24) ecuația (42) devine

$$\left(\frac{\cos 2\,\delta}{\cos^2\delta} + \frac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha_0}\right) x_1^2 + \frac{2}{\cos\,\delta}\,(R_{d_2}\cos^2\delta + R^0_{e_2}\sin^2\delta)\,x_1 + R^2_{d_2} - (R^0_{e_2})^2 = 0, \tag{43}$$

ecuație de gradul doi, care ne dă abscisele punctelor de intersecție.

Notînd cu

$$A_\delta = \frac{\cos 2\,\delta}{\cos^2\delta} + \frac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha_0}, \tag{44}$$

$$B_\delta = \frac{2}{\cos\delta}\,(R_{d_2}\cos^2\delta + R^0_{e_2}\sin^2\delta), \tag{45}$$

$$D = R^2_{d_2} - (R^0_{e_2})^2, \tag{46}$$

ecuația (43) devine

$$A_\delta x_1^2 + B_\delta x_1 + D = 0. \tag{47}$$

Rezolvînd ecuația (47) și păstrînd numai rădăcina cu semnul pozitiv în fața radicalului avem

$$x_1^* = \frac{-B_\delta + \sqrt{B_\delta^2 - 4A_\delta D}}{2A_\delta}. \tag{48}$$

Înlocuind (48) în (25) avem

$$y_1^* = \frac{-B_\delta + \sqrt{B_\delta^2 - 4A_\delta D}}{2A_\delta\operatorname{tg}\alpha_0}. \tag{49}$$

Lungimea porțiunii active a liniei de angrenare se determină ca distanța dintre cele două puncte de intersecție a liniei de angrenare cu cilindrul exterior al roții dințate conico-evolventice.

$$l_a = \sqrt{(x_1^* - x_1)^2 + (y_1^* - y_1)^2}. \tag{50}$$

Înlocuind relația (50) în (30) avem :

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{(x_1^* - x_1)^2 + (y_1^* - y_1)^2}}{\pi\, m \cos\alpha_{0f}}. \tag{51}$$

Primită la redacție la 2 iulie 1962

ИССЛЕДОВАНИЕ ЦИЛИНДРО-КОНИЧЕСКОГО ЗАЦЕПЛЕНИЯ

РЕЗЮМЕ

Цилиндро-коническое зацепление, исследуемое в настоящей работе, образовано из цилиндрического зубчатого колеса с прямыми зубьями и эвольвентно-конического зубчатого колеса.

Эвольвентно-коническое зубчатое колесо внешне похоже на обычное коническое зубчатое колесо, но в сущности отличается от него тем, что в каждом сечении, перпендикулярном к оси, имеет одну и ту же высоту зубьев и тот же модуль, а боковая поверхность зуба имеет вид винтовой-эвольвентной поверхности, одна правого, другая левого хода.

Исследованы элементы цилиндро-конического зацепления и показано, что контакт между боковыми поверхностями зубьев является точечным, очень близким к линейному, что обеспечивает передачу больших мощностей.

Цилиндро-коническое зацепление позволяет правильно передать движение и тогда, когда невозможно обеспечить необходимый параллелизм осей, на которых установлены зубчатые колеса.

Необходимо отметить, что эвольвентно-конические зубчатые колеса можно обработать как зубчатой рейкой, так и червячной фрезой при таких же издержках производства, что и в случае цилиндрических зубчатых колес.

BIBLIOGRAFIE

1. I. SZÉKELY, *Dependența elementelor roții dințate, prelucrate cu cuțit pieptene de caracterul mișcării relative dintre sculă și semifabricat*. Lucrări științifice, Institutul politehnic, Cluj, 1960.
2. — *Studiu asupra blocului conic dințat compus din roți dințate conico-evolventice*. St. cerc. mec. apl., Acad. R.P.R., *5* (1961).

STUDII

ASUPRA UNOR INVARIANŢI CINEMATICI DE ORDIN SUPERIOR ÎN MIŞCAREA SPAŢIALĂ A SOLIDELOR RIGIDE

DE

ELENA CROITORU [1]

621.01

INTRODUCERE

Şirul de lucrări recente iniţiate la Iaşi, consacrate teoriei generale a acceleraţiilor reduse de diferite specii şi ordine şi elaborate atît din punctul de vedere al geometriei cinematice punctuale cît şi din acel al geometriei cinematice tangenţiale [1]...[8], răspunde —aşa cum s-a subliniat la unele congrese cu caracter internaţional de teoria mecanismelor şi maşinilor [9]...[11] sau de dinamica maşinilor [12] —la unele nevoi de seamă ale tehnicii actuale care reclamă între altele adîncirea neîncetată a soluţionării problemei de distribuţie a variaţiilor acceleraţiilor cel puţin de primul şi de-al doilea ordin în diferite sisteme mecanice în mişcare.

În cele ce urmează se studiază problema de distribuţie a acceleraţiilor ,,centripete'', ,,tangenţiale'' şi ,,binormale'' de diferite ordine în mişcare spaţială generală a rigidelor, determinîndu-se unii invarianţi cinematici ai unor atare mişcări.

O NOUĂ FORMĂ DE DISTRIBUŢIE A ACCELERAŢIILOR DE ORDIN OARECARE ÎN MIŞCAREA SPAŢIALĂ GENERALĂ A SOLIDELOR RIGIDE

Se consideră triedrul mobil invariabil legat la fiece moment t de corpul solid rigid în mişcare spaţială generală, avînd originea în centrul momentan al acceleraţiilor de ordin n, O_n (în ipoteză că un atare centru există) şi versorii $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ ai axelor definiţi prin relaţiile

$$\begin{aligned} \bar{i} &= \bar{w}_0^{(2)} \times \bar{k}, \\ \bar{j} &= \bar{k} \times \bar{i}, \end{aligned} \tag{1}$$

---

[1] Institutul politehnic Iaşi.

în care $\overline{k}$ este versorul axei momentane de rotație $w\overline{k}$ și $\overline{w}_0^{(2)}$ — versorul accelerației unghiulare $\overline{w}^{(2)} = \mathrm{d}\overline{w}/\mathrm{d}t$.

Accelerația $\bar{a}_M^{(n)}$ de ordin n a unui punct oarecare M din corpul considerat este dată în acest sistem prin relația

$$\begin{aligned}\bar{a}_M^{(n)} = &(- A_n x + B_{ny} z - B_{nz} y + \sum_{r=0}^{n-1} w_x^{(r)} (C_{nrx} x + C_{nry} y + C_{nrz} z))\, \bar{i} + \\ &+ (- A_n y + B_{nz} x - B_{nx} z + \sum_{r=0}^{n-1} w_y^{(r)} (C_{nrx} x + C_{nry} y + C_{nrz} z))\, \bar{j} + \\ &+ (- A_n z + B_{nx} y - B_{ny} x + \sum_{r=0}^{n-1} w_z^{(r)} (C_{nrx} x + C_{nry} y + C_{nrz} z))\, \bar{k},\end{aligned} \tag{2}$$

în care

$$\begin{aligned}&A_{n+1} = \frac{\mathrm{d}A_n}{\mathrm{d}t} + (\overline{w} \cdot \overline{B}_n), \qquad \overline{B}_{n+1} = \frac{\mathrm{d}\overline{B}_n}{\mathrm{d}t} - A_n \overline{w}, \\ &A_1 = (\overline{w} \cdot \overline{w}) = w^2, \qquad \overline{B}_1 = \overline{w}^{(2)}, \\ &A_0 = 0, \qquad \overline{B}_0 = \overline{w}, \\ &\overline{C}_{nr} = \overline{C}_{n-1,\, r-1} + D\overline{C}_{n-1,\, r}, \\ &D = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} - \overline{w} \times, \\ &\overline{C}_{10} = \overline{w}, \qquad \overline{C}_{n-1,\, -1} = \overline{B}_{n-1}, \\ &\overline{C}_{11 = 0}, \qquad \overline{C}_{21} = \overline{w}, \\ &(r = 0, 1, \ldots, n - 1; \quad n = 1, 2, \ldots),\end{aligned} \tag{3}$$

prezentînd unele avantaje — în afară de acel de generalizare — față de clasica formulă a lui Rivals, ce figurează în cursurile și tratatele de mecanică teoretică.

INVARIANŢI CINEMATICI DE PRIMA SPECIE DE ORDIN OARECARE

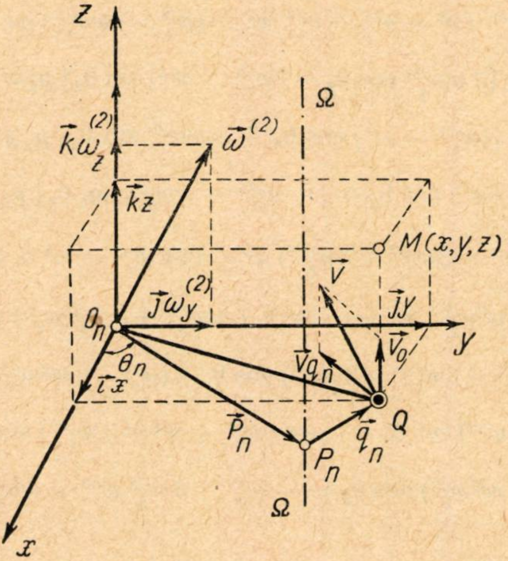
Fie (fig. 1) $\Omega\Omega$ axa instantanee de mișcare de înșurubare a solidului rigid considerat, P_n — urma acestei axe în planul $O_n xy$, $\overline{O_n P_n} = \overline{p}_n$, Q — proiecția punctului generic M din corpul solid rigid considerat, presupus de dimensiuni oricît de mari, $\overline{P_n Q} = \overline{q}_n$ — vectorul avînd suportul său paralel cu acel al perpendicularei coborîtă din M pe $\Omega\ \Omega$. Avem

$$\overline{p}_n = p_n \cos \theta_n \bar{i} + p_n \sin \theta_n \bar{j}, \tag{4}$$

$$\overline{q}_n = (x - p_n \cos \theta_n)\, \bar{i} + (y - p_n \sin \theta_n)\, \bar{j}. \tag{5}$$

A. Locul geometric al punctelor din corpul solid rigid mobil considerat pentru care acceleraţiile centripete de ordin oarecare n sînt nule este o cuadrică de ecuaţie

$$|\, \bar{a}^{(n)}_{M(t)} \,| = \left| \bar{a}^{(n)}_{M} \cdot \frac{\bar{q}_n}{|\, \bar{q}_n \,|} \right| = 0,$$



z
Ω
$\vec{k}\omega_z^{(2)}$
$\vec{\omega}^{(2)}$
$\vec{k}z$
$M(x,y,z)$
$\vec{V}$
$\vec{j}\omega_y^{(2)}$
$\vec{j}y$
O_n
θ_n
$\vec{i}x$
y
$\vec{V}_q$
$\vec{V}_{qn}$
Q
$\vec{P}_n$
P_n
$\vec{q}_n$
Ω
x

Fig. 1

sau

$$\begin{aligned}
&(-A_n + \sum_{r=0}^{n-1} w_x^{(r)} C_{nrx})\, x^2 + (-A_n + \sum_{r=0}^{n-1} w_y^{(r)} C_{nry})\, y^2 + \\
&\quad + \sum_{r=0}^{n-1} (w_x^{(r)} C_{nry} + w_y^{(r)} C_{nrx})\, xy + \\
&\quad + (B_{ny} + \sum_{r=0}^{n-1} w_x^{(r)} C_{nrz})\, xz + (-B_{nx} + \sum_{r=0}^{n-1} w_y^{(r)} C_{nrz})\, yz - \\
&\quad - [(-A_n + \sum_{r=0}^{n-1} w_x^{(r)} C_{nry}) \cos\theta_n + (B_{nz} + \sum_{r=0}^{n-1} w_y^{(r)} C_{nrx}) \sin\theta_n]\, p_n\, x - \\
&\quad - [(-B_{nz} + \sum_{r=0}^{n-1} w_x^{(r)} C_{nry}) \cos\theta_n + (-A_n + \sum_{r=0}^{n-1} w_y^{(r)} C_{nrx}) \sin\theta_n]\, p_n\, y - \\
&\quad - [(B_{ny} + \sum_{r=0}^{n-1} w_x^{(r)} C_{nrz}) \cos\theta_n + (-B_{nx} + \sum_{r=0}^{n-1} w_y^{(r)} C_{nrz}) \sin\theta_n]\, p_n\, z = 0.
\end{aligned} \tag{6}$$

În particular, în corespondență cu valorile $n = 1, 2, 3$, cvadrica (6) devine respectiv

$$\begin{aligned}&w^2 (x^2 + y^2) - w_y^{(2)} xz - (\cos \theta_1 w^2 - w_z^{(2)} \sin \theta_1) p_1 x - \\ &- (w_z^{(2)} \cos \theta_1 + w^2 \sin \theta_1) p_1 y + w_y^{(2)} \cos \theta_1 p_1 z = 0,\end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned}&3 ww_z^{(2)} (x^2 + y^2) - w_y^{(3)} xz + (w_x^{(3)} - ww_y^{(2)}) yz - \\ &- [3 ww_z^{(2)} \cos \theta_2 - (w_z^{(3)} - w^3) \sin \theta_2] p_2 x - \\ &- [(w_z^{(3)} - w^3) \cos \theta_2 + 3 ww_z^{(2)} \sin \theta_2] p_2 y + \\ &+ [w_y^{(3)} \cos \theta_2 + (- w_x^{(3)} + ww_y^{(2)}) \sin \theta_2] p_2 z = 0,\end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned}&(4 ww_z^{(3)} - w^4 + 3w_y^{(2)^2} + 3w_z^{(2)^2}) x^2 + (4 ww_z^{(3)} - w^4 + 3 w_z^{(2)^2}) y^2 - \\ &- (w_y^{(4)} + ww_x^{(3)} - w^2 w_y^{(2)}) xz - (- w_x^{(4)} + ww_y^{(3)} + 3 w_y^{(2)} w_z^{(2)}) yz + \\ &+ [(- 4 ww_z^{(3)} + w^4 - 3 w_y^{(2)^2} - 3 w_z^{(2)^2}) \cos \theta_3 + (w_z^{(4)} - 6 w^2 w_z^{(2)}) \sin \theta_3] p_3 x + \\ &+ [(- w_z^{(4)} + 6 w^2 w_z^{(2)}) \cos \theta_3 + (- 4 ww_z^{(3)} + w^4 - 3 w_z^{(2)^2}) \sin \theta_3] p_3 y + \\ &+ [(w_y^{(4)} + ww_x^{(3)} - w^2 w_y^{(2)}) \cos \theta_3 + (- w_x^{(4)} + 3 w_y^{(2)} w_z^{(2)} + ww_y^{(3)}) \sin \theta_3] p_3 z = 0,\end{aligned} \tag{9}$$

sau

$$\begin{aligned}&A_3 x^2 + [A_3 - 3 (\bar{B}_1 \cdot \bar{j})^2] y^2 - (\bar{B}_3 + \bar{w} \times \bar{B}_2) \bar{j} xz + (\bar{B}_3 + \bar{w} \times \bar{B}_2) \bar{i} yz - \\ &- [A_3 \cos \theta_3 - (\bar{B}_3 + \bar{w} \times \bar{B}_2) \bar{k} \sin \theta_3] p_3 x - [(\bar{B}_3 + \bar{w} \times \bar{B}_2) \bar{k} \cos \theta_3 + \\ &+ (A_3 - 3 (\bar{B}_1 \cdot \bar{j})^2) \sin \theta_3] p_{3v} + [(\bar{B}_3 + \bar{w} \times \bar{B}_2) \bar{j} \cos \theta_3 - \\ &- (\bar{B}_3 + \bar{w} \times \bar{B}_2) \bar{i} \sin \theta_3] p_3 z = 0,\end{aligned} \tag{9'}$$

ecuația (7) coincizînd cu clasicul hiperboloid cu o pînză determinat de Hachette, Mannheim, Garnier [13] pornind de la alte puncte de vedere și regăsit într-o lucrare cu totul recentă de M. S. Konstantinov, V. V. Topenčarov și P. Z. Genova [14].

B. Locul geometric al punctelor din corpul solid rigid considerat în mişcare spațială generală pentru care accelerațiile tangențiale de ordin oarecare n sînt nule este o cuadrică de ecuație

$$| \bar{a}_{M\tau}^{(n)} | = \left| \bar{a}_M^{(n)} \cdot \frac{\bar{v}}{v} \right| = 0, \tag{10}$$

$$\bar{v} = (p_n \sin \theta_n - y) w \bar{i} + (x - p_n \cos \theta_n) w \bar{j} + v_0 \bar{k}, \tag{11}$$

sau

$$\begin{aligned}
&(B_{nz} + \sum_{r=0}^{n-1} w_y^{(r)} C_{nrx})\, x^2 + (B_{nz} - \sum_{r=0}^{n-1} w_x^{(r)} C_{nry})\, y^2 - \\
&- \sum_{r=0}^{n-1} (w_x^{(r)} C_{nrx} - w_y^{(r)} C_{nry})\, xy - (B_{ny} + \sum_{r=0}^{n-1} w_x^{(r)} C_{nrz})\, yz - \\
&- (B_{nx} - \sum_{r=0}^{n-1} w_y^{(r)} C_{nrz})\, xz + \Big[(- A_n + \sum_{r=0}^{n=1} w_x^{(r)} C_{nrx})\, p_n \sin \theta_n - \\
&- (B_{nz} + \sum_{r=0}^{n-1} w_y^{(r)} C_{nrx})\, p_n \cos \theta_n + (- B_{ny} + \sum_{r=0}^{n-1} w_z^{(r)} C_{nrx})\, \frac{v_0}{w}\Big]\, x + \qquad (10') \\
&+ \Big[(B_{ny} + \sum_{r=0}^{n-1} w_x^{(r)} C_{nry})\, p_n \sin \theta_n + (A_n - \sum_{r=0}^{n-1} w_y^{(r)} C_{nry})\, p_n \cos \theta_n + \\
&+ (B_{nx} + \sum_{r=0}^{n-1} w_z^{(r)} C_{nry})\, \frac{v_0}{w}\Big]\, y + \Big[(B_{ny} + \sum_{r=0}^{n-1} w_x^{(r)} C_{nrz})\, p_n \sin \theta_n + \\
&+ (B_{nx} - \sum_{r=0}^{n-1} w_y^{(r)} C_{nrz})\, p_n \cos \theta_n - (A_n - \sum_{r=0}^{n-1} w_z^{(r)} C_{nrz})\, \frac{v_0}{w}\Big]\, z = 0.
\end{aligned}$$

În particular, în corespondență cu valorile $n = 1, 2, 3$ cuadrica (10′) devine respectiv

$$\begin{aligned}
&w_z^{(2)} (x^2 + y^2) + w_y^{(2)} zy - \left(w^2 p_1 \sin \theta_1 + w_z^{(2)} p_1 \cos \theta_1 + w_y^{(2)} \frac{v_0}{w}\right) x + \\
&\qquad + (- w_z^{(2)} p_1 \sin \theta_1 + w^2 p_1 \cos \theta_1)\, y + p_1 w_y^{(2)} \sin \theta_1\, z = 0,
\end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned}
&(w_z^{(3)} - w^3)(x^2 + y^2) - w_y^{(3)} yz - (w_x^{(3)} - w w_y^{(2)})\, xz - \\
&- \left[3 w_z^{(2)} p_2 \sin \theta_2 + (w_z^{(3)} - w^3)\, p_2 \cos \theta_2 + w_y^{(3)} \frac{v_0}{w}\right] x + \\
&+ \left[(- w_z^{(3)} + w^3)\, p_2 \sin \theta_2 + 3 w w_z^{(2)} p_2 \cos \theta_2 + (w_x^{(3)} + 2 w_y^{(2)} w) \frac{v_0}{w}\right] y + \\
&+ [(w_x^{(3)} - w w_y^{(2)})\, p_2 \cos \theta_2 + w_y^{(3)} p_2 \sin \theta_2]\, z = 0,
\end{aligned} \tag{13}$$

sau

$$\begin{aligned}
&(w_z^{(4)} - 5 w^2 w_z^{(2)})(x^2 + y^2) + (- w_x^{(3)} w + 3 w_y^{(2)^2})\, xy - \\
&- w_y^{(4)} yz + (- w_x^{(4)} + 3 w_y^{(2)} w_z^{(2)} + w w_y^{(3)})\, zx + \\
&+ \Big[(- 4 w_z^{(3)} w + w_x^{(3)} w - 3 w_y^{(2)^2} - 3 w_z^{(2)^2})\, p_3 \sin \theta_3 - (w_z^{(4)} - 5 w^2 w_z^{(2)})\, p_3 \cos \theta_3 + \\
&+ (- w_y^{(4)} + 3 w w_x^{(3)} + 3 w^2 w_y^{(2)}) \frac{v_0}{w}\Big]\, x + \Big[(- w_z^{(4)} + 5 w^2 w_z^{(2)})\, p_3 \sin \theta_3 + \qquad (14) \\
&+ (4 w w_z^{(3)} + 3 w_z^{(2)^2})\, p_3 \cos \theta_3 + (w_x^{(4)} + 3 w w_y^{(3)} + 3 w_y^{(2)} w_z^{(2)}) \frac{v_0}{w}\Big]\, y + \\
&+ \left[w_y^{(4)} p_3 \sin \theta_3 - (- w_x^{(4)} + 3 w_y^{(2)} w_z^{(2)} + w w_y^{(3)})\, p_3 \cos \theta_3 - 3 w_y^{(2)^2} \frac{v_0}{w}\right] z = 0,
\end{aligned}$$

în care v_0 este viteza unui punct oarecare de pe axa instantanee de înşurubare. Ecuaţia (12) coincide cu clasicul hiperboloid cu o pînză obţinut de Bresse cu ocazia studiului mişcării solidelor rigide din alt punct de vedere şi regăsit în [14].

C. Locul geometric al punctelor din corpul solid rigid în mişcare spaţială generală pentru care acceleraţiile binormale, de ordin oarecare n, definite prin

$$|\bar{a}_{Mb}^{(n)}| = \left|\bar{a}_M^{(n)} \cdot \frac{\bar{v} \times \bar{q}_n}{|\bar{v} \times \bar{q}_n|}\right| = 0, \qquad \bar{b} = \frac{\bar{v} \times \bar{q}_n}{|\bar{v} \times \bar{q}_n|}, \tag{15}$$

sînt nule este o suprafaţă de ordinul al treilea de ecuaţie

$$\begin{aligned}
&[(B_{ny} - \sum_{r=0}^{n-1} w_z^{(r)} C_{nrx})\, x - (B_{nx} + \sum_{r=0}^{n-1} w_z^{(r)} C_{nry})\, y + \\
&+ (A_n - \sum_{r=0}^{n-1} w_z^{(r)} C_{nrz})\, z] \frac{v_0}{w} (x^2 + y^2) + \Big[(B_{nz} + \sum_{r=0}^{n-1} w_y^{(r)} C_{nry}) \frac{v_0}{w} + \\
&+ 2(-B_{ny} + \sum_{r=0}^{n-1} w_z^{(r)} C_{nrx})\, p_n \cos\theta_n\Big] x^2 + \Big[(B_{nz} - \sum_{r=0}^{n-1} w_x^{(r)} C_{nrx}) \frac{v_0}{w} + \\
&+ 2(B_{nx} + \sum_{r=0}^{n-1} w_z^{(r)} C_{nry})\, p_n \sin\theta_n\Big] y^2 + \Big[\frac{v_0}{w} \sum_{r=0}^{n-1} (w_x^{(r)} C_{nrx} - w_y^{(r)} C_{nry}) + \\
&+ 2(B_{nx} + \sum_{r=0}^{n-1} w_z^{(r)} C_{nry})\, p_n \cos\theta_n + 2(-B_{ny} + \sum_{r=0}^{n-1} w_z^{(r)} C_{nrx})\, p_n \sin\theta_n\Big] xy + \\
&+ \Big[-(B_{ny} + \sum_{r=0}^{n-1} w_x^{(r)} C_{nrz}) \frac{v_0}{w} + 2(-A_n + \sum_{r=0}^{n-1} w_z^{(r)} C_{nrz})\, p_n \sin\theta_n\Big] yz + \\
&+ \Big[(-B_{nx} + \sum_{r=0}^{n-1} w_y^{(r)} C_{nrz}) \frac{v_0}{w} + 2(-A_n + \sum_{r=0}^{n-1} w_z^{(r)} C_{nrz})\, p_n \cos\theta_n\Big] zx + \\
&+ \Big\{[(-A_n + \sum_{r=0}^{n-1} w_x^{(r)} C_{nrx}) \sin\theta_n - (B_{nz} + \sum_{r=0}^{n-1} w_y^{(r)} C_{nrx}) \cos\theta_n] \frac{v_0}{w} + \\
&+ (B_{ny} - \sum_{r=0}^{n-1} w_z^{(r)} C_{nrx})\, p_n\Big\} p_n\, x + \Big\{[(-B_{nz} + \sum_{r=0}^{n-1} w_x^{(r)} C_{nry}) \sin\theta_n + \\
&+ (A_n - \sum_{r=0}^{n-1} w_y^{(r)} C_{nry}) \cos\theta_n] \frac{v_0}{w} - (B_{nx} + \sum_{r=0}^{n-1} w_z^{(r)} C_{nry})\, p_n\Big\} p_{ny} + \\
&+ \Big\{[(B_{ny} + \sum_{r=0}^{n-1} w_x^{(r)} C_{nrz}) \sin\theta_n + (B_{nx} - \sum_{r=0}^{n-1} w_y^{(r)} C_{nrz}) \cos\theta_n] \frac{v_0}{w} + \\
&+ (A_n - \sum_{r=0}^{n-1} w_z^{(r)} C_{nrz})\, p_n\Big\} p_n\, z = 0.
\end{aligned} \tag{16}$$

În particular, în corespondenţă cu valorile $n = 1, 2, 3$, suprafaţa cubică (16) devine respectiv

$$\begin{aligned} & ww_y^{(2)} (x^2 + y^2)\, x - (2ww_y^{(2)} p_1 \cos \theta_1 + v_0 w_z^{(2)})\, x^2 - v_0 w_y^{(2)} yz + v_0 w_z^{(2)} y^2 + \\ & + 2ww_y^{(2)} p_1 \sin \theta_1\, xy - [(w^2 \sin \theta_1 + w_z^{(2)} \cos \theta_1)\, v_0 - p_1 ww_y^{(2)}]\, p_1 x + \\ & + (w^2 \cos \theta_1 - w_z^{(2)} \sin \theta_1)\, v_0 p_1 y + v_0 w_y^{(2)} p_1 \sin \theta_1\, z = 0 ; \end{aligned} \tag{17}$$

$$\begin{aligned} & [(w_x^{(3)} + 2ww_y^{(2)})\, y - w_y^{(3)} x]\, (x^2 + y^2) + \left[2p_2 w_y^{(3)} \cos \theta_2 - (w_z^{(3)} - w^3) \frac{v_0}{w}\right] x^2 - \\ & \quad - \left[2p_2 (w_x^{(3)} + 2ww_y^{(2)}) \sin \theta_2 + (w_z^{(3)} - w^3) \frac{v_0}{w}\right] y^2 - \\ & \quad - 2p_2 [(w_x^{(3)} + 2ww_y^{(2)}) \cos \theta_2 - w_y^{(3)} \sin \theta_2]\, xy + \\ & \quad + (w_x^{(3)} - ww_y^{(2)}) \frac{v_0}{w}\, xz + \frac{v_0}{w}\, w_y^{(3)}\, yz + \\ & \quad + \left[(3ww_z^{(2)} \sin \theta_2 + (w_z^{(3)} - w^3) \cos \theta_2) \frac{v_0}{w} - p_2 w_y^{(3)}\right] p_2 x + \\ & \quad + \left[(w_z^{(3)} - w^3) \frac{v_0}{w} \sin \theta_2 - 3ww_z^{(2)} \cos \theta_2 \frac{v_0}{w} + p_2 (w_x^{(3)} + 2ww_y^{(2)})\right] p_2 y - \\ & \quad - [w_y^{(3)} \sin \theta_2 + (w_x^{(3)} - ww_y^{(2)}) \cos \theta_2]\, \frac{v_0}{w}\, p_2 z = 0 \end{aligned} \tag{18}$$

şi

$$\begin{aligned} & [(- w_y^{(4)} + 3w_x^{(3)} w + 3w^2 w_y^{(2)})\, x + (w_x^{(4)} + 3ww_y^{(3)} + 3w_y^{(2)} w_z^{(2)})\, y - \\ & \quad - 3w_y^{(2)^2} z]\, (x^2 + y^2) + \ldots = 0. \end{aligned} \tag{19}$$

Relaţiile (17) — (19) reprezintă suprafeţe sensibil mai complicate decît primele două serii.

INVARIANŢI CINEMATICI DE SPECIA A DOUA DE ORDIN OARECARE

În cadrul acestei probleme se studiază locuri geometrice pentru care două din componentele acceleraţiei de ordin oarecare $\bar{a}_M^{(n)}$; $\bar{a}_\Omega^{(n)}$; $\bar{a}_\tau^{(n)}$; $\bar{a}_b^{(n)}$ sînt simultan egale cu zero.

a) În corespondenţă cu cazul $\bar{a}_\Omega^{(n)} = 0$, $\bar{a}_b^{(n)} = 0$, locul geometric căutat se găseşte la intersecţia suprafeţelor (6) şi (16). În particular, pentru $n = 1$, curba loc este cunoscută în literatura de specialitate [13]. Ea răspunde la proprietatea

$$\bar{a}_n = 0, \tag{20}$$

întrucît

$$\bar{a}_n = \bar{a} - \bar{a}_\tau = \bar{a}_\Omega + \bar{a}_\tau + \bar{a}_b - \bar{a}_\tau = \bar{a}_\Omega + \bar{a}_b \, . \tag{21}$$

b) În corespondență cu cazul $\bar{a}_b = 0$, $\bar{a}_\tau = 0$, locul geometric căutat se găsește la intersecția suprafețelor (16) și (10′). În particular, pentru $n = 1$, se obține curba pentru care toate accelerațiile punctelor sale sînt centripete [14].

c) În corespondență cu cazul $\bar{a}_\Omega^{(n)} = 0$, $\bar{a}_\tau^{(n)} = 0$, locul geometric căutat este dat de sistemul de ecuații (6) și (10′). În particular, pentru $n = 1$, acest invariant cinematic al mișcării se găsește la intersecția hiperboloizilor cu o pînză determinați de Mannheim și Bresse.

LOCURI GEOMETRICE DE SPECIA A TREIA

Înțelegem prin locuri geometrice de specia a treia locurile punctelor rigidelor în mișcare spațială generală pentru care sînt satisfăcute simultan ecuațiile

$$\bar{a}_\Omega = 0, \qquad \bar{a}_\tau = 0, \qquad \bar{a}_b = 0. \tag{22}$$

Soluția problemei puse răspunde la punctul 0_n (0, 0, 0), ale cărui coordonate satisfac tripleta de ecuații (6), (10′), (16). Rezultatul obținut coincide în cazul particular $n = 1$ cu faptul cunoscut din literatura de specialitate relativ la unicitatea centrului momentan al accelerațiilor.

CONCLUZII

Renunțînd în expunerea de mai sus la discuții mai detaliate relative la pozițiile centrelor, mărimile axelor și cazurile de degenerare, interesante prin ele înșile și prin mișcările particulare care le corespund, ale cuadricelor (6), (10′) precum și la studiul mai adîncit al suprafețelor cubice (16) și menționînd aici unul din rezultatele stabilite în [15] de D. Mangeron, Gh. Ciobanu și A. Braier, din care rezultă că locul punctelor unui sistem material invariabil în mișcare spațială generală dintr-un E_3 euclidian pentru care accelerațiile de ordin n trec printr-un punct dat M este o curbă strîmbă determinată prin intersecția a două cuadrice și trecînd prin centrul instantaneu al accelerațiilor de ordin n, P_n^*, iar în cazul mișcării într-un spațiu de curbură constantă pozitivă E_3^*, analogul clasicului *cerc al inflexiunilor* este o curbă de ordinul al șaselea, se pot trage următoarele concluzii :

1. Locurile geometrice obținute pentru prima oară referitoare la problema distribuției accelerațiilor de ordin oarecare au proprietăți cinematice remarcabile.

2. Rezultatele obținute pot găsi aplicații efective îndeosebi în probleme de analiză cinematică a mecanismelor spațiale de importanță din ce în ce mai mare în tehnica actuală [17]...[22].

Primită la redacție la 18 octombrie 1962

О НЕКОТОРЫХ КИНЕМАТИЧЕСКИХ ИНВАРИАНТАХ ВЫСШЕГО ПОРЯДКА В ПРОСТРАНСТВЕННОМ ДВИЖЕНИИ ЖЕСТКИХ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

РЕЗЮМЕ

Всемерно повышающиеся требования наилучшего использования быстроходных машин в сложном пространственном движении их звеньев, использующихся в современных автоматизированных производственных процессах, привели к систематическому изучению различных задач, относящихся, в частности, к кинематике материальных систем, где рассматриваются задачи распределения ускорений различных порядков. Так, например, метод приведенных ускорений любого порядка и рода, разработанный Д. Манжероном и его сотрудниками [1]—[8], положенный в основу некоторых диссертаций и внедрившийся в практику [19], [20], был положительно оценен и с точки зрения приложений к задачам синтеза и анализа механизмов и к машиностроению как в реферативных журналах по специальности (Я. Л. Геронимус, С. Г. Кислицын, М. Ф. Диментоерг и др.), так и на секционных или же пленарных заседаниях конференций международного характера последних лет (акад. И. И. Артоболевский [10], акад. А. П. Филиппов [12], Н. И. Левитский [9], Я. Одерфельд [11] и др.), посвященных теории механизмов и машин или же динамике машин. Автор, исходя из формул (2), (3), определяющих ускорение любого порядка n, точек M некоторого твердого жесткого тела в сложном пространственном движении, и выбирая подвижной трехгранник, определяемый единичными векторами и началами $\vec{k} = \vec{\omega}/\omega, -\vec{i} = \vec{k} \times \vec{\omega}_0^{(2)}, \vec{j} = \vec{k} \times \vec{i}$, O_n $(a_{O_n}^{(n)} = 0)$, приходит к выражениям (2), дающим разложение ускорения $\vec{a}_M^{(n)}$ порядка n, имеющим преимущества перед известными в случае $n = 1$ формулами Ривальса.

Рассматриваются затем кинематические инварианты, соответствующие сложному пространственному движению жесткого твердого тела, определяемые геометрическими местами — в выше рассматриваемых системах координат — точек рассматриваемого тела (предполагаемого каких угодно больших размеров), для которых ,,центростремительные'', ,,тангенциальные'' (касательные), и ,,бинормальные'' ускорения любого порядка n сводятся к нулю. Эти места в первых двух случаях — поверхности второго порядка, превращающиеся при $n = 1$, $n = 2$ в поверхности, выражаемые уравнениями (7), (12), причем при (7) полученный (в общем случае) однополый гиперболоид совпадает с уже известным и полученным другими путями гиперболоидом Гашета, Маннгейма и Гарнье [13] и с гиперболоидом, исследованным в параллель-

ной задаче, рассмотренной совершенно недавно коллективом В. В. Топенчарова, М. С. Константинова и П.Ж. Геновой [14].

Статья заканчивается рассмотрением более сложных инвариантов вида (16), (20) и связывается с некоторыми результатами, полученными в [16], указывая и на разработку применений в теории машин и механизмов.

BIBLIOGRAFIE

1. Д. МАНЖЕРОН, *К графо-аналитическим методам кинематики материальных систем.* Доклады Академии Наук СССР, **102**, *5*, 897—898 (1955)
2. D. MANGERON, C. DRĂGAN, *Eine neue Methode zum Studium der Theorie der Mechanismen und Maschinen.* Revue de Mécanique appliquée, **II**, *1*, 145—156 (1957).
3. D. MANGERON, R. BOGDAN, *Studii, cercetări și perspective de dezvoltare în domeniul teoriei mașinilor și mecanismelor în Republica Populară Romînă,* St. cerc. mec. apl., **IX**, *4*, 1093—1098 (1958).
4. Д. МАНЖЕРОН, Д. ТАВХЕЛИДЗЕ, *Новый класс пространственных приведенных ускорений любого порядка, применяемых в теории машин и механизмов.* Buletinul Institutului politehnic din Iași, serie nouă, **V(IX)**, *1—2*, 303—306 (1959).
5. D. MANGERON, *Mechanisms design by method of reduced accelerations of any order.* Proceedings of the 7th Indian Congress of pure and applied Mechanics, Bombay, Dec. 23rd—26th, 1961 (sub tipar).
6. D. MANGERON, E. CROITORU, *Contribuții la teoria generală a accelerațiilor reduse în coordonate punctuale și tangențiale.* St. cerc. mec. apl., **XIII**, *5*, 1177—1192, 1962.
7. D. MANGERON, E. CROITORU, *Sulla teoria generale delle accelerazioni ridotte d'ordine qualunque.* Atti dell'Accademia Nazionale dei Lincei, Rend. Cl. sci. fis., mat. e nat., **VIII**, *32*, 4, 505—508 (1962).
8. Д. МАНЖЕРОН, Я. С. ЗИЛЬБЕРМАН, *О некоторых свойствах обобщенных крестов ускорений А. П. Котельникова,* Труды Ростовского на-Дону Института инженеров железнодорожного транспорта, **XXIX**, 5—10 (1961).
9. Н. И. ЛЕВИТСКИЙ, *Итоги работы секции анализа и синтеза механизмов.* În volumul ,,Итоги второго всесоюзного совещания по основным проблемам теории машин и механизмов'', Академия Наук СССР, Институт машиноведения, Москва, 1958, стр. 24—25.
10. И. И. АРТОБОЛЕВСКИЙ, *Современное состояние теории машин и механизмов.* În volumul ,,Труды второго всесоюзного совещания по основным проблемам теории машин и механизмов. Анализ и Синтез механизмов'', МАШГИЗ, Москва, 1960, г., стр. 8.
11. J. ODERFELD, *Schlussvortrag,* III. gesamtpolnische Konferenz über Theorie der Maschinen und Getriebe. Rogów, 8—10/VI (1961).
12. А. П. ФИЛИППОВ, *Заключительное слово на последнем пленарном заседании.* II. Tschekoslowakische Konferenz über Dynamik der Maschinen, Smolenice, Okt. 1961.
13. R. GARNIER, *Cours de cinématique,* vol. I, Gauthier-Villars, Paris, 1954 ; vol. II, 1956.
14. М. С. КОНСТАНТИНОВ, В. В. ТОПЕНЧАРОВ, П. Ж. ГЕНОВА, *Кинематични инварианти на пространственното движение на твърдо тяло.* Годишник на машино-електротехническия институт, т. **IX**, кн. *1*, (1961); Държавно Изд. ,,Техника'', 1962, 23—35.
15. D. MANGERON, GH. CIOBANU, A. BRAIER, *Problema distribuției accelerațiilor de ordin oarecare în mișcarea sistemelor materiale.* Buletinul Institutului politehnic din Iași, serie nouă, **II(VI)**, *1—2*, 29—37 (1956).
16. D. MANGERON, C. DRĂGAN, *Study on spacial mechanisms through the method of reduced accelerations,* I. *Four-link spacial mechanisms.* Revue de mécanique appliquée, **VII**, *1*, 41—62, (1962).

17. R. P. VOINEA, M. C. ATANASIU, *Contribution à l'étude de la structure des chaînes cinématiques*. Buletinul Institutului politehnic din București, **22**, *1*, 3—51 (1960).
18. GH. MUNTEANU, *Unele aplicații ale metodei accelerațiilor reduse în dinamică*. St. cerc. mec. apl. **XI**, *3* (1960).
19. N. MANOLESCU, *Teoria mecanismelor și mașinilor*, Editura tehnică, București (sub tipar). Cap. *Metoda accelerațiilor reduse*.
20. * * * *Teoria mecanismelor și mașinilor*, *Structura și cinematica mecanismelor*. Cap. II, *Studiul cinematic al grupelor lui Assur*. § 22. *Metoda accelerațiilor reduse*. Editura tehnică, București, 352—354 (1959).
21. D. MANGERON, C. DRĂGAN, N. IRIMICIUC, *Noi metode de studiu a mecanismelor: Metoda accelerațiilor reduse și metoda coordonatelor vectoriale cilindrice*. Studii și cercetări de matematică. Academia R.P.R. filiala Cluj *2*, 213—249 (1961).
22. C. DRĂGAN, *Noi metode de studiu a mecanismelor și mașinilor*. (Disertație). Universitatea „Al. I. Cuza", Iași, 1961, 38.

STUDII

METODA FUNCȚIILOR ANALITICE ÎN HIDRODINAMICA LICHIDELOR VÎSCOASE

DE

DAN GH. IONESCU

532

În ultimii treizeci de ani, teoria funcțiilor de variabilă complexă a fost folosită cu un deosebit succes în elasticitatea plană. În schimb, în hidrodinamica lichidelor vîscoase în mișcare lentă, care din punct de vedere matematic prezintă analogii cu elasticitatea, cercetările s-au limitat fie la indicarea posibilității de utilizare a acestei teorii: [17], [25], [26], [37], fie la rezolvarea unor cazuri particulare: [3] — [12], [14], [16], [23], [29] — [32], [36], [39].

Scopul acestui articol este tocmai aplicarea sistematică a teoriei funcțiilor de variabilă complexă la studiul mișcărilor plane, lente și permanente ale lichidelor vîscoase. Spre deosebire de lucrările precedente apărute în același domeniu, considerăm în special problemele generale privind forma soluției, existența și unicitatea sa, precum și posibilitatea de a utiliza unele metode aproximative; rezultatele sînt apoi aplicate la cîteva cazuri concrete, a căror rezolvare este efectuată pînă la calculele numerice.

În capitolul I stabilim sub o nouă formă expresiile vitezei, presiunii și tensiunilor, cu ajutorul a două funcții analitice $\varphi_1(z)$ și $\varphi_2(z)$, numite *funcțiile lui Goursat*. În continuare, studiem forma și proprietățile acestor funcții, acordînd o atenție deosebită domeniilor conținînd punctul de la infinit.

Capitolul II conține enunțul problemei la limită. La fel ca în întreaga lucrare, considerăm separat: 1°) cazul domeniilor multiplu conexe mărginite, limitate de curbe închise; 2°) cazul domeniilor exterioare unui număr finit de curbe închise situate în întregime la distanță finită; 3°) cazul domeniilor a căror frontieră este formată dintr-un număr finit de curbe închise situate în întregime la distanță finită, precum și dintr-o singură curbă conținînd punctul de la infinit. Demonstrăm apoi teorema de unicitate pentru fiecare dintre cele trei tipuri de domenii, iar drept consecință enunțăm paradoxul lui Stokes sub o formă foarte generală.

În capitolul III dăm soluția problemei la limită pentru domeniile simplu conexe, mărginite sau conținînd punctul de la infinit, precum și teoremele de existență corespunzătoare. Metoda utilizată, bazată pe proprietățile integralei lui Cauchy, este analogă celei dezvoltate în teoria elasticității de N. I. Mushelișvili : ea permite obținerea unei soluții prin cvadraturi, dacă domeniul ocupat de lichidul vîscos poate fi reprezentat conform pe cercul unitate printr-o funcție rațională. Pentru domenii mai generale, indicăm posibilitatea aplicării unei metode de aproximare.

În capitolul IV considerăm cazul domeniilor multiplu conexe și, pentru fiecare dintre cele trei tipuri de domenii definite mai sus, reducem problema la o ecuație integrală analogă celor obținute în teoria elasticității de G. Lauricella și D. I. Șerman. Aceste ecuații ne permit să demonstrăm teorema de existență, precum și să indicăm convergența unui algoritm de aproximații succesive care generalizează pe cel al lui Schwarz pentru problema lui Dirichlet.

Demonstrațiile urmează în general tratatul clasic al lui Mushelișvili, [28], precum și pe cel al lui Babuška, Rektorys și Vyčichlo, [1], care conțin o expunere completă a aplicării teoriei funcțiilor analitice la elasticitate. Totuși, analogia dintre problema la limită a hidrodinamicii lichidelor vîscoase în mișcare lentă și problemele la limită ale teoriei elasticității subsistă în special pentru domeniile simplu conexe (*cf.* [28], § 41a). De aceea, mai ales pentru domeniile multiplu conexe, este necesară dezvoltarea unei teorii independente. Mai remarcăm că în același scop pot fi folosite și alte căi, diferite de cea urmată în acest articol, deși bazate tot pe teoria funcțiilor analitice : ne mărginim la a indica metoda seriilor de puteri, [19], și pe cea a ecuațiilor integrale de tip Mihlin ([25], 201—249).

I. FUNCȚIILE LUI GOURSAT

1.1. Formulele fundamentale. În cele ce urmează ne propunem să studiem mișcările plane, lente și permanente ale fluidelor vîscoase incompresibile, descrise de sistemul de ecuații

$$\mu\,\Delta u - \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \tag{1.1}$$

$$\mu\,\Delta v - \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \tag{1.3}$$

unde am folosit notațiile clasice; presupunem că, în domeniul D ocupat de fluid, componentele $u(x, y)$, $v(x, y)$ ale vitezei sînt funcții uniforme, continue și cu derivate parțiale continue pînă la ordinul al treilea inclusiv, și că presiunea $p(x, y)$ este o funcție uniformă, continuă și cu derivate parțiale continue pînă la ordinul al doilea inclusiv. Dacă se introduce funcția de curent ψ prin formulele

$$u = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \qquad v = -\frac{\partial\psi}{\partial x}, \tag{1.4}$$

din (1.1) și (1.2) rezultă

$$\Delta\Delta\psi = \left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4}{\partial x^2\,\partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}\right)\psi = 0, \tag{1.5}$$

funcția $\psi(x, y)$ fiind presupusă în D uniformă, continuă și cu derivate parțiale continue pînă la ordinul al patrulea inclusiv.

Să presupunem pentru început că domeniul D ocupat de lichidul vîscos este simplu conex, frontiera sa fiind o curbă închisă C cu tangentă continuă sau formată dintr-un număr finit de arce cu tangentă continuă. Goursat, [15], a observat că ecuația (1.5), scrisă sub forma

$$\frac{\partial^4\psi}{\partial z^2\,\partial\bar{z}^2} = 0, \qquad (z = x + iy, \quad \bar{z} = x - iy), \tag{1.6}$$

are soluția generală

$$\psi = \bar{z}\,\varphi_1(z) + z\varphi_1^{\star}(\bar{z}) + \chi(z) + \chi^{\star}(\bar{z}), \tag{1.7}$$

unde $\varphi_1(z)$, $\varphi_1^{\star}(\bar{z})$, $\chi(z)$, $\chi^{\star}(\bar{z})$ sînt funcții monogene de argumentele respective. În vederea simplificării formulelor ulterioare, vom utiliza însă forma echivalentă

$$2i\,\psi = -\bar{z}\varphi_1(z) + z\varphi_1^{\star}(\bar{z}) - \chi(z) + \chi^{\star}(\bar{z}) \tag{1.8}$$

și vom pune $\varphi_1^{\star}(\bar{z}) = \overline{\varphi_1(z)}$, $\chi^{\star}(\bar{z}) = \overline{\chi(z)}$, deoarece ψ trebuie să fie o funcție reală. Rezultă

$$\psi = -\mathcal{J}\{\bar{z}\,\varphi_1(z) + \chi(z)\}, \tag{1.9}$$

$\varphi_1(z)$ și $\chi(z)$ fiind funcții olomorfe în D. Funcțiile $\varphi_1(z)$ și $\varphi_2(z) = \chi'(z)$, care au un rol esențial în cele ce urmează, sînt numite *funcțiile lui Goursat*, iar studiul proprietăților lor constituie scopul acestui capitol. Vom deduce însă mai întîi, cu ajutorul acestor funcții, cîteva formule fundamentale ale teoriei de față. Astfel, relațiile (1.4) și (1.9) dau

$$u + iv = \varphi_1(z) - z\overline{\varphi_1'(z)} - \overline{\varphi_2(z)}, \tag{1.10}$$

în timp ce formulele (1.1), (1.2) arată că $p - 2i\mu\Omega$, $(2\Omega = \partial v/\partial x - \partial u/\partial y)$, este o funcție monogenă de z, deci

$$p - 2i\mu\Omega = -4\mu\varphi_1'(z) + p_0, \quad (p_0 = \text{const.}). \tag{1.11}$$

Componentele tensorului tensiunilor,

$$p_{xx} = -p + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}, \qquad p_{yy} = -p + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y}, \tag{1.12}$$

$$p_{xy} = \quad p_{yx} = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right), \tag{1.13}$$

satisfac relațiile

$$p_{xx} + p_{yy} = -2p = 8\mu \,\mathfrak{R}\, \{\varphi_1' (z)\} - 2p_0, \tag{1.14}$$

$$p_{yy} - p_{xx} + 2ip_{xy} = 4\mu \,[\bar{z}\, \varphi_1'' (z) + \varphi_2'(z)]. \tag{1.15}$$

Componentele R_x, R_y ale rezultantei generale a eforturilor exercitate de lichidul vîscos asupra unui arc AB al unui perete fix sînt

$$R_x = \int_{AB} p_{nx}\, \mathrm{d}s, \qquad R_y = \int_{AB} p_{ny}\, \mathrm{d}s, \tag{1.16}$$

p_{nx} și p_{ny} fiind proiecțiile pe axe ale efortului $\vec{p}_n$ exercitat pe elementul ds al arcului AB. Ținînd seama de (1.12), (1.13), avem

$$p_{nx} = p_{xx}\, l + p_{yx}\, m = -pl - 2\mu m \Omega - 2\mu \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}, \tag{1.17}$$

$$p_{ny} = p_{xy}\, l + p_{yy}\, m = -pm + 2\mu l \Omega + 2\mu \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s}, \tag{1.18}$$

unde $l = \mathrm{d}y/\mathrm{d}s$ și $m = -\,\mathrm{d}x/\mathrm{d}s$ sînt cosinusurile directoare ale normalei dirijate spre domeniul D ocupat de fluid, acest domeniu fiind lăsat la dreapta la parcurgerea arcului AB în sens pozitiv. Se obține, în definitiv,

$$\begin{aligned} R_x + iR_y &= i \int_{AB} (p - 2i\mu\Omega)\, \mathrm{d}z + 2i\mu \int_{AB} \mathrm{d}(u + iv) = \\ &= -2i\mu\, [\varphi_1(z) + z\, \overline{\varphi_1'(z)} + \overline{\varphi_2(z)}]_{AB} - ip_0\, [z]_{AB}, \end{aligned} \tag{1.19}$$

unde $[\quad]_{AB}$ reprezintă diferența valorilor luate de paranteză la extremitățile conturului de integrare AB. Dacă aceste extremități coincid, deci dacă se consideră o curbă închisă C, formula (1.19) devine

$$R_x + iR_y = -4i\mu\, [\varphi_1(z)]_C\,. \tag{1.20}$$

Momentul rezultant al eforturilor exercitate pe un arc AB al unui perete fix, considerat în raport cu originea axelor de coordonate, este

$$M = \int_{AB} (xp_{ny} - yp_{nx})\, \mathrm{d}s, \tag{1.21}$$

sau încă, ținînd seamă de (1.17) și (1.18)

$$M = \mathfrak{R}\left\{\int_{AB} \bar{z}\,(p - 2i\mu\,\Omega)\,\mathrm{d}z + 2\mu\int_{AB} \bar{z}\,\mathrm{d}\,(u + iv)\right\} =$$

$$= 2\mu\,\mathfrak{R}\,\{\,[\,\chi\,(z) - z\overline{\varphi_1(z)} + z\,(u - iv)]_{AB}\,\} + \frac{1}{2}\,p_0\,[z\bar{z}]_{AB} = \qquad (1.22)$$

$$= 2\mu\,\mathfrak{R}\,\{[\,\chi\,(z) - z\,\varphi_2\,(z) - z\bar{z}\,\varphi_1'(z)]_{AB}\} + \frac{1}{2}\,p_0\,[z\bar{z}]_{AB}\,.$$

În cazul unui contur închis C,

$$M = 2\mu\mathfrak{R}\,\{[\,\chi(z) - z\,\overline{\varphi_1\,(z)}\,]_C\}. \qquad (1.23)$$

Formulele fundamentale de mai sus permit stabilirea unei proprietăți foarte utile a funcțiilor lui Goursat : vom arăta că, fiind date componentele vectorului viteză, funcția $\varphi_1\,(z)$ este determinată cu aproximația unei expresii de forma $az + \alpha$, în timp ce funcția $\varphi_2(z)$ este determinată cu aproximația unei constante $\overline{\alpha}$, a fiind constantă reală, iar α o constantă complexă, arbitrare. Într-adevăr, fie $\varphi_1^{(1)}$, $\varphi_2^{(1)}$ și $\varphi_1^{(2)}$, $\varphi_2^{(2)}$ două sisteme de funcții ale lui Goursat, satisfăcînd formula (1.10). În conformitate cu (1.11), avem $\mathcal{J}\,\{\varphi_1^{(1)\prime}\} = \mathcal{J}\,\{\varphi_1^{(2)\prime}\}$, deci $\varphi_1^{(2)} = \varphi_1^{(1)} + az + \alpha$, a fiind o constantă reală, iar α o constantă complexă, arbitrare. Ținînd seamă de această relație, (1.10) dă $\varphi_2^{(2)} = \varphi_2^{(1)} + \overline{\alpha}$.

1.2. **Forma funcțiilor lui Goursat pentru domeniile multiplu conexe mărginite.** Să presupunem acum că lichidul vîscos ocupă un domeniu multiplu conex D, limitat de o curbă închisă exterioară C_0 situată în întregime la distanță finită, precum și de curbele închise interioare C_k,

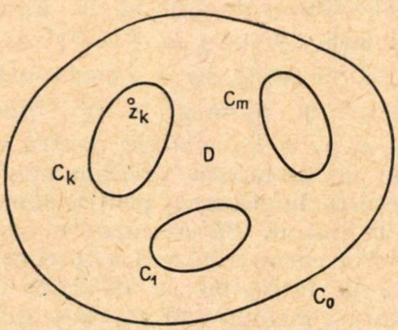


Fig. 1.1

($k = 1,\ldots,m$), toate aceste curbe fiind simple, disjuncte și cu tangentă continuă sau formate dintr-un număr finit de arce cu tangentă continuă, (fig. 1.1). Funcțiile lui Goursat fiind atunci în general multiforme, ne propunem să le studiem din acest punct de vedere. În conformitate cu (1.11), $\varphi_1'(z)$ este o funcție olomorfă în D; $\varphi_1(z)$ va fi deci de forma

$$\varphi_1(z) = \sum_{k=1}^{m} \gamma_k \ln (z - z_k) + \overset{\circ}{\varphi}_1(z), \tag{1.24}$$

$\overset{\circ}{\varphi}_1(z)$ fiind o funcție olomorfă în D, z_k puncte fixe alese arbitrar în interiorul curbelor C_k, iar γ_k constante complexe. Pe de altă parte, (1.10) arată că $\varphi_2'(z)$ este o funcție olomorfă în D, deci

$$\varphi_2(z) = \sum_{k=1}^{m} \gamma_k^* \ln(z-z_k) + \overset{\circ}{\varphi}_2(z), \tag{1.25}$$

$\overset{\circ}{\varphi}_2(z)$ fiind o funcție olomorfă în D, iar γ_k^* constante complexe. Introducînd aceste valori ale lui $\varphi_1(z)$ și $\varphi_2(z)$ în relația (1.10), apoi ținînd seamă de uniformitatea vitezelor, rezultă $\gamma_k + \overline{\gamma_k^*} = 0$, astfel încît

$$\varphi_2(z) = - \sum_{k=1}^{m} \overline{\gamma}_k \ln (z - z_k) + \overset{\circ}{\varphi}_2(z). \tag{1.26}$$

Formulele fundamentale stabilite în paragraful 1.1 rămîn deci valabile pentru domeniile multiplu conexe mărginite, dacă funcțiile Goursat sînt de forma (1.24), (1.26). Pentru a găsi semnificația mecanică a constantei γ_k, să aplicăm formula (1.20) în cazul conturului C_k; se obține

$$R_x^{(k)} + i\, R_y^{(k)} = 8\pi\mu\gamma_k. \tag{1.27}$$

Proprietatea stabilită la sfîrșitul paragrafului 1.1 rămîne de asemenea valabilă pentru domeniile multiplu conexe. Într-adevăr, fie $\varphi_1^{(1)}$, $\varphi_2^{(1)}$ și $\varphi_1^{(2)}$, $\varphi_2^{(2)}$ două sisteme de funcții ale lui Goursat de forma (1.24), (1.26), iar componentele vitezei fie date în D. Funcțiile $\varphi_1^{(1)\prime}$ și $\varphi_1^{(2)\prime}$ fiind olomorfe în D, din relația $\mathcal{J}\{\varphi_1^{(1)\prime}\} = \mathcal{J}\{\varphi_1^{(2)\prime}\}$ se deduce $\varphi_1^{(2)} = \varphi_1^{(1)} + az + \alpha$, a fiind o constantă reală, iar α o constantă complexă, arbitrare. Funcțiile $\varphi_1 = \varphi_1^{(1)} - \varphi_1^{(2)}$ și $\varphi_2 = \varphi_2^{(1)} - \varphi_2^{(2)}$ fiind atunci olomorfe în D, relațiile $\varphi_1 = az + \alpha$, $\varphi_2 = \overline{\alpha}$, valabile pentru orice domeniu simplu conex $D^* \subset D$, rămîn de asemenea valabile pentru întreg domeniul D.

1.3. **Forma funcțiilor lui Goursat pentru domeniile multiplu conexe conținînd punctul de la infinit.** Să considerăm un domeniu D conținînd punctul de la infinit și a cărui frontieră este constituită de curbele C_k, $(k = 1,\ldots,m)$, situate în întregime la distanță finită, simple, închise, disjuncte și cu tangentă continuă sau formate dintr-un număr finit de arce cu tangentă continuă. Este evident că formulele deduse în paragraful precedent rămîn valabile pentru orice domeniu aparținînd lui D și situat în întregime la distanță finită; de aceea, vom studia numai comportarea funcțiilor lui Goursat în jurul punctului de la infinit. În acest scop, să trasăm un cerc C_r cu centrul în originea axelor de coordonate și avînd o rază suficient de mare pentru ca toate curbele C_k să fie situate în interiorul său. În exteriorul lui C_r, expresiile (1.24), (1.26) devin

$$\varphi_1(z) = \gamma \ln z + \sum_{k=1}^{m} \gamma_k \ln\left(1 - \frac{z_k}{z}\right) + \overset{\circ}{\varphi}_1 (z) = \gamma \ln z + \varphi_1^*(z), \tag{1.28}$$

$$\varphi_2(z) = -\bar{\gamma} \ln z - \sum_{k=1}^{m} \bar{\gamma}_k \ln\left(1 - \frac{\bar{z}_k}{z}\right) + \overset{\circ}{\varphi}_2 (z) = - \bar{\gamma} \ln z + \varphi_2^*(z), \tag{1.29}$$

în care $\gamma = \sum\limits_{k=1}^{m} \gamma_k$, iar $\varphi_1^*(z)$ și $\varphi_2^*(z)$ sînt funcții olomorfe în vecinătatea punctului de la infinit, unde pot fi deci dezvoltate în serie Laurent:

$$\varphi_1 (z) = \gamma \ln z + \sum_{-\infty}^{+\infty} \alpha_n z^n, \quad \varphi_2(z) = - \bar{\gamma} \ln z + \sum_{-\infty}^{+\infty} \beta_n z^n. \tag{1.30}$$

În cele ce urmează, vom presupune întotdeauna că presiunea și vîrtejul rămîn mărginite la mari distanțe; pentru aceasta, este necesar și suficient ca $\alpha_n = 0$, $(n \geqslant 2)$. În ceea ce privește distribuția de viteze la infinit, vom considera cazurile următoare:

$$\lim_{|z| \to \infty} \left\{ (u + iv) + b\left[\bar{z}\, e^{i\theta} \sin \theta + \frac{i}{2}(z - \bar{z})\right]\right\} = 0, \tag{1.31}$$

ceea ce reprezintă la mari distanțe o mișcare paralelă, viteza fiind o funcție liniară de distanța la dreapta $y = x \operatorname{tg} \theta$, (*scurgere de forfecare*);

$$\lim_{|z| \to \infty} \{(u + iv) - icz\} = 0, \tag{1.32}$$

ceea ce reprezintă la mari distanțe o rotație în jurul originei, b și c fiind constante reale; în sfîrșit,

$$\lim_{|z| \to \infty} \{(u + iv) - \Gamma_0\} = 0, \tag{1.33}$$

Γ_0 fiind o constantă complexă, ceea ce reprezintă la mari distanțe o mișcare paralelă cu viteza constantă Γ_0. Aceste relații implică $\gamma = 0$, $\beta_n = 0$, $(n \geqslant 2)$ și determină pe $\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1$. Rezultă că pentru a satisface condiția (1.31), funcțiile lui Goursat trebuie să fie, în exteriorul cercului C_r, de forma

$$\varphi_1 (z) = - i \frac{b}{4} z + \overset{\circ}{\varphi}_1(z), \quad \varphi_2(z) = b \left(\frac{i}{2} + e^{-i\theta} \sin \theta\right) z + \overset{\circ}{\varphi}_2(z); \tag{1.34}$$

pentru a satisface condiția (1.32), ele trebuie să fie de forma

$$\varphi_1 (z) = i \frac{c}{2} z + \overset{\circ}{\varphi}_1(z), \quad \varphi_2 (z) = \overset{\circ}{\varphi}_2 (z), \tag{1.35}$$

iar pentru a satisface condiția (1.33), de forma

$$\varphi_1(z) = \Gamma_0 + \overset{\circ}{\varphi}_1 (z), \quad \varphi_2(z) = \overset{\circ}{\varphi}_2(z), \tag{1.36}$$

$\overset{\circ}{\varphi}_1(z)$ şi $\overset{\circ}{\varphi}_2(z)$ fiind, în formulele (1.34), (1.35), (1.36), funcţii olomorfe în exteriorul lui C_r şi care se anulează la infinit. În cazul unui domeniu de tipul considerat, funcţiile lui Goursat vor fi deci de forma

$$\varphi_1(z) = \sum_{k=1}^{m} \gamma_k \ln(z - z_k) + \Gamma_1 z + \Gamma_0 + \overset{\circ}{\varphi}_1(z), \tag{1.37}$$

$$\varphi_2(z) = -\sum_{k=1}^{m} \overline{\gamma}_k \ln(z - z_k) + \Gamma_2 z + \overset{\circ}{\varphi}_2(z), \tag{1.38}$$

$$\gamma = \sum_{k=1}^{m} \gamma_k = 0, \tag{1.39}$$

$\overset{\circ}{\varphi}_1(z)$ şi $\overset{\circ}{\varphi}_2(z)$ fiind funcţii olomorfe în D şi care se anulează la infinit, z_k fiind puncte fixe alese arbitrar în interiorul conturelor C_k, Γ_0 şi γ_k constante complexe urmînd a fi determinate, iar Γ_1, Γ_2 constante complexe date în conformitate cu condiţiile (1.31) sau (1.32).

Să considerăm în sfîrşit un domeniu D a cărui frontieră este constituită de curbele închise şi situate în întregime la distanţă finită C_k, $(k = 1, \ldots, m)$, precum şi de curba C_0 conţinînd punctul de la infinit; toate aceste curbe fie simple, disjuncte şi cu tangentă continuă sau formate dintr-un număr finit de arce cu tangentă continuă. În plus, să considerăm

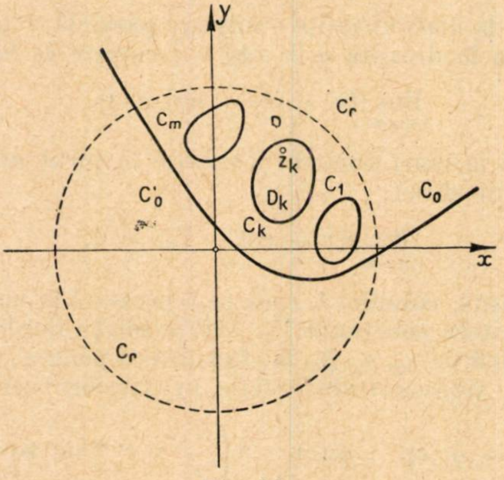


Fig. 1.2

originea axelor de coordonate situată în exteriorul domeniului $D + C$, $(C = C_0 \cup C_1 \cup \ldots \cup C_m)$, precum şi în exteriorul domeniilor D_k limitate de curbele C_k, $(k = 1, \ldots, m)$, (fig. 1.2). Să observăm mai întîi că raţionamentul precedent nu se mai aplică. Într-adevăr, scriind formulele (1.24), (1.26) sub forma (1.28), (1.29), rezultă că funcţiile $\varphi_1^*(z)$ şi $\varphi_2^*(z)$, ne fiind definite decît în D, nu mai pot fi dezvoltate în serie Laurent în exteriorul unui cerc C_r conținînd toate curbele C_k, $(k = 1, \ldots, m)$. Pe de altă parte, curba C_0 nu permite, în general, considerarea unor mișcări de tipul (1.31), (1.32) sau (1.33), astfel încît lichidul trebuie presupus în repaus la mari distanțe. Dacă însă C_0 admite o singură asimptotă, se pot considera și mișcări de tipul (1.31); iar dacă, în particular, C_0 este o dreaptă — și mișcări de tipul (1.33). În orice caz, rezultă $\gamma = 0$ în (1.28), (1.29). Cum nu par posibile precizări suplimentare, sîntem conduși, prin analogie cu cazul precedent, la a căuta soluții de forma

$$\varphi_1(z) = \sum_{k=1}^{m} \gamma_k \ln\left(1 - \frac{z_k}{z}\right) + \Gamma_1 z + \varphi_1^\circ(z), \tag{1.40}$$

$$\varphi_2(z) = -\sum_{k=1}^{m} \bar{\gamma}_k \ln\left(1 - \frac{z_k}{z}\right) + \Gamma_2 z + \varphi_2^\circ(z), \tag{1.41}$$

$\varphi_1^\circ(z)$ și $\varphi_2^\circ(z)$ fiind funcții olomorfe în D, γ_k constante complexe urmînd a fi determinate, z_k puncte fixe arbitrare situate în interiorul curbelor C_k, iar Γ_1, Γ_2 constante complexe corespunzînd condiției (1.31). Pentru a asigura unicitatea soluției, (*cf.* § 2.2), vom presupune în plus că, pentru z mare, funcția $F^\circ(z) = \varphi_1^\circ(z) - z\,\overline{\varphi_1^{\circ\prime}(z)} - \overline{\varphi_2^\circ(z)}$ este mărginită, iar $\varphi_1^{\circ\prime}(z) = o(1/z)$.

În unele cazuri particulare, formulele (1.40), (1.41) pot fi justificate riguros : este deajuns să se demonstreze posibilitatea dezvoltărilor în serie Laurent de mai sus. Să considerăm cazul cel mai simplu : presupunem că C_0 coincide cu axa reală, domeniul ocupat de lichidul vîscos fiind de exemplu semiplanul superior D^+. Dacă $u + iv = 0$ pe C_0, avem, în exteriorul unui cerc C_r conținînd toate curbele C_k, $(k = 1, \ldots, m)$, și avînd centrul în originea axelor,

$$\varphi_1(t) - t\,\overline{\varphi_1'(t)} - \overline{\varphi_2(t)} = 0, \qquad \text{pe } C_0, \tag{1.42}$$

(t fiind un punct curent al lui C_0, iar funcțiile $\varphi_1(z)$, $\varphi'_1(z)$, $\varphi_2(z)$ fiind presupuse continue în $D^+ + C_0$). Funcțiile lui Goursat fiind de forma (1.28), (1.29), sînt olomorfe în semiplanul superior, în exteriorul lui C_r. Să considerăm acum în semiplanul inferior D^- și în exteriorul lui C_r funcția

$$\varphi_1^*(z) = z\,\overline{\varphi_1'(\bar{z})} + \overline{\varphi_2(\bar{z})}, \tag{1.43}$$

olomorfă în D^- și continuă în $D^- + C_0$. Dar $\varphi_1(t) = \varphi_1^*(t)$ pe C_0 și în exteriorul lui C_r, deci $\varphi_1^*(z)$ reprezintă prelungirea analitică a funcției $\varphi_1(z)$ în semiplanul inferior. Putem efectua în același fel prelungirea analitică a funcției $\varphi_2(z)$. Rezultă că dezvoltările în serie Laurent de mai sus sînt posibile. Să mai observăm că acest rezultat poate fi extins, deoarece problema efectuării prelungirii analitice a funcțiilor lui Goursat se pune de îndată ce C_0 este o curbă analitică în exteriorul cercului C_r.

II. PROBLEMA LA LIMITĂ ŞI UNICITATEA SOLUŢIEI

2.1. **Problema la limită.** Putem acum enunţa cu mai multă precizie problema propusă : determinarea, într-un domeniu D, a unei soluţii a sistemului (1.1) — (1.3), cunoscînd valoarea funcţiilor u, v pe frontiera C a lui D, aceste funcţii fiind uniforme şi continue în $D + C$. Relaţia (1.10) reduce această problemă la determinarea funcţiilor lui Goursat $\varphi_1(z)$ şi $\varphi_2(z)$, astfel încît funcţia $F(z) = \varphi_1(z) - \overline{z\varphi_1'(z)} - \overline{\varphi_2(z)}$ să fie uniformă şi continuă în $D + C$ şi să satisfacă relaţia

$$\varphi_1(t) - t\overline{\varphi_1'(t)} - \overline{\varphi_2(t)} = g(t), \quad \text{pe } C, \tag{2.1}$$

$t = x + iy$ fiind un punct curent al lui C, iar funcţia $g(t) = u + iv$, dată pe C, fiind uniformă şi continuă. În vederea unei simplificări importante a teoriei de faţă, vom presupune însă în continuare că funcţiile $\varphi_1(z)$, $\varphi_1'(z)$ şi $\varphi_2(z)$ însăşi sînt continue în $D + C$; în acest caz, soluţia va fi numită *regulată*. Funcţia $g(t)$ va fi presupusă uniformă şi continuă împreună cu derivatele sale de primele două ordine.

Ţinînd seamă de rezultatele capitolului precedent, putem transforma relaţia (2.1) făcînd să intervină funcţii olomorfe în D. Fie astfel cazul unui domeniu D multiplu conex şi mărginit, limitat de o curbă închisă exterioară C_0 situată în întregime la distanţă finită, precum şi de curbele închise interioare C_k, $(k = 1, \ldots, m)$, toate aceste curbe fiind simple, disjuncte şi cu tangentă continuă sau formate dintr-un număr finit de arce cu tangentă continuă, (fig. 1.1); în acest caz, funcţiile lui Goursat sînt de forma (1.24), (1.26). Introducînd aceste expresii în (2.1), rezultă că problema la limită revine la determinarea funcţiilor $\mathring{\varphi}_1(z)$, $\mathring{\varphi}_2(z)$, olomorfe în D, precum şi a constantelor complexe γ_k, $(k = 1, \ldots, m)$, astfel încît funcţiile $\mathring{\varphi}_1(z)$, $\mathring{\varphi}_1'(z)$, $\mathring{\varphi}_2(z)$ să fie continue în $D + C$, $(C = C_0 \cup C_1 \cup \ldots \cup C_m)$, iar funcţia $F^\circ(z) = \mathring{\varphi}_1(z) - \overline{z\mathring{\varphi}_1'(z)} - \overline{\mathring{\varphi}_2(z)}$ să satisfacă pe C relaţia

$$\begin{aligned}\mathring{\varphi}_1(t) - \overline{t\mathring{\varphi}_1'(t)} - \overline{\mathring{\varphi}_2(t)} &= \\ = g(t) - \sum_{k=1}^{m} \gamma_k \ln(t-z_k)\overline{(t-z_k)} &+ t\sum_{k=1}^{m}\frac{\overline{\gamma_k}}{\overline{t-z_k}},\end{aligned} \tag{2.2}$$

unde z_k sînt puncte fixe arbitrare situate în interiorul curbelor C_k, $(k = 1, \ldots, m)$, iar $g(t) = u + iv$.

Dacă domeniul D este exterior curbelor închise C_k, $(k = 1, \ldots, m)$, situate în întregime la distanţă finită, simple, disjuncte şi cu tangentă continuă sau formate dintr-un număr finit de arce cu tangentă continuă, funcţiile lui Goursat sînt de forma (1.37) — (1.39). Problema la limită revine în acest caz la determinarea funcţiilor $\mathring{\varphi}_1(z)$, $\mathring{\varphi}_2(z)$, olomorfe în D şi nule la infinit, precum şi a constantelor complexe Γ_0 şi γ_k, $(k = 1, \ldots, m)$, astfel încît funcțiile $\mathring{\varphi}_1(z)$, $\mathring{\varphi}_1'(z)$, $\mathring{\varphi}_2(z)$ să fie continue în $D + C$, $(C = C_1 \cup \ldots \cup C_m)$, iar funcția $\mathring{F}(z) = \overline{\mathring{\varphi}_1(z)} - z\overline{\mathring{\varphi}_1'(z)} - \overline{\mathring{\varphi}_2(z)}$ să satisfacă pe C relația

$$\mathring{\varphi}_1(t) - t\overline{\mathring{\varphi}_1'(t)} - \overline{\mathring{\varphi}_2(t)} =$$
$$= \mathring{g}(t) - \sum_{k=1}^{m} \gamma_k \ln (t - z_k)(\overline{t - z_k}) + t \sum_{k=1}^{m} \frac{\bar{\gamma}_k}{\overline{t - z_k}} - \Gamma_0, \tag{2.3}$$

unde $\mathring{g}(t) = u + iv + (\bar{\Gamma}_1 - \Gamma_1)t + \bar{\Gamma}_2\bar{t}$. Observăm că, spre deosebire de Γ_0, constantele Γ_1 și Γ_2 trebuie date prin ipoteză, pentru a asigura unicitatea soluției.

Fie acum un domeniu D a cărui frontieră este constituită de curbele închise și situate în întregime la distanță finită C_k, $(k = 1, \ldots, m)$, precum și de curba C_0 conținînd punctul de la infinit, toate aceste curbe fiind simple, disjuncte și cu tangentă continuă sau formate dintr-un număr finit de arce cu tangentă continuă. Originea axelor fie situată în exteriorul domeniului $D + C$, $(C = C_0 \cup C_1 \cup \ldots \cup C_m)$, precum și în exteriorul domeniilor mărginite D_k, limitate respectiv de curbele C_k, $(k = 1, \ldots, m)$, (fig. 1.2). Ținînd seamă de formulele (1.40), (1.41), problema la limită revine la determinarea funcțiilor $\overset{\circ}{\varphi}_1(z)$, $\overset{\circ}{\varphi}_2(z)$, olomorfe în D, precum și a constantelor complexe γ_k, $(k = 1, \ldots, m)$, astfel încît funcțiile $\overset{\circ}{\varphi}_1(z)$, $\overset{\circ}{\varphi}_1{}'(z)$, $\overset{\circ}{\varphi}_2(z)$ să fie continue în $D + C$, iar funcția $F^\circ(z) = \overset{\circ}{\varphi}_1(z) - z\overline{\overset{\circ}{\varphi}_1{}'(z)} - \overline{\overset{\circ}{\varphi}_2(z)}$ să satisfacă pe C condiția

$$\overset{\circ}{\varphi}_1(t) - t\,\overline{\overset{\circ}{\varphi}_1{}'(t)} - \overline{\overset{\circ}{\varphi}_2(t)} =$$
$$= g^\circ(t) - \sum_{k=1}^{m} \gamma_k \ln\left(1 - \frac{z_k}{t}\right)\overline{\left(1 - \frac{z_k}{t}\right)} + \frac{t}{\bar{t}} \sum_{k=1}^{m} \frac{\bar{\gamma}_k \bar{z}_k}{\overline{t - z_k}}, \tag{2.4}$$

unde $g^\circ(t) = u + iv + (\bar{\Gamma}_1 - \Gamma_1)t + \bar{\Gamma}_2\bar{t}$. Pentru z mare, vom presupune, după cum am mai observat, că funcția $F^\circ(z)$ este mărginită și că $\overset{\circ}{\varphi}_1{}'(z) = o(1/z)$.

2.2. **Teorema de unicitate.** Dacă problema la limită enunțată în paragraful precedent admite o soluție, aceasta este unică. Într-adevăr, fie două sisteme de soluții regulate $\varphi_1^{(1)}$, $\varphi_2^{(1)}$ și $\varphi_1^{(2)}$, $\varphi_2^{(2)}$, corespunzînd acelorași condiții la limită. Este deajuns să arătăm că funcțiile $\varphi_1 = \varphi_1^{(1)} - \varphi_1^{(2)}$, $\varphi_2 = \varphi_2^{(1)} - \varphi_2^{(2)}$ sînt de forma $\varphi_1 = az + \alpha$, $\varphi_2 = \bar{\alpha}$, a fiind o constantă reală iar α o constantă complexă, arbitrare ; căci, în conformitate cu (1.10), atunci rezultă $u + iv \equiv 0$ în D. În acest scop, vom utiliza un raționament analog celui dezvoltat de R. Tiffen pentru demonstrarea teoremei similare din teoria elasticității, [40].

Să considerăm mai întîi un domeniu D mărginit, definit ca la începutul paragrafului 2.1 ; în acest caz, funcțiile $\varphi_1 = \varphi_1^{(1)} - \varphi_1^{(2)}$ și $\varphi_2 = \varphi_2^{(1)} - \varphi_2^{(2)}$ sînt de forma (1.24) și (1.26). Observăm că integrala

$$I = \int_C (\varphi'_1 \bar{F}\, \mathrm{d}z - \overline{\varphi'_1} F\, \mathrm{d}\bar{z}) \tag{2.5}$$

este nulă, deoarece $F = \varphi_1 - z\,\overline{\varphi_1'} - \overline{\varphi}_2 = 0$ pe $C = C_0 \cup C_1 \cup \ldots \cup C_m$. Dar, condițiile pentru aplicarea formulei lui Green fiind îndeplinite, avem

$$I = 2\,i \iint_D \left[\frac{\partial(\varphi_1' \overline{F})}{\partial \overline{z}} + \frac{\partial(\overline{\varphi_1'} F)}{\partial z}\right] \mathrm{d}S = -2i \iint_D (\varphi_1' - \overline{\varphi_1'})^2\, \mathrm{d}S = 0, \qquad (2.6)$$

($\mathrm{d}S = \mathrm{d}x\mathrm{d}y$), deci $\mathcal{J}\,\{\varphi_1'(z)\} = 0$. Deoarece $\varphi_1'(z)$ este o funcție olomorfă, rezultă $\varphi_1(z) = az + \alpha$ în D, a fiind o constantă reală, iar α o constantă complexă, arbitrare. Urmează că $\gamma_k = 0$, $(k = 1, \ldots, m)$, deci funcția $\varphi_2(z)$ este olomorfă, astfel încît $\varphi_2 = \overline{\alpha}$ în D, deoarece $\varphi_2 = \overline{\alpha}$ pe C.

Să considerăm acum un domeniu D exterior curbelor închise C_k, $(k = 1, \ldots, m)$, definite ca în paragraful 2.1; funcțiile lui Goursat corespunzînd diferenței a două soluții sînt atunci de forma (1.37) – (1.39), cu $\Gamma_1 = \Gamma_2 = 0$. În conformitate cu (1.39) avem, pentru z mare, $F(z) = \varphi_1(z) - z\overline{\varphi_1'(z)} - \overline{\varphi_2(z)} = \mathrm{O}(1)$ și $\varphi_1'(z) = \mathrm{O}(1/z^2)$. Fie din nou integrala

$$I = \int_{C^*} (\varphi_1' \overline{F}\,\mathrm{d}z - \overline{\varphi_1'} F\,\mathrm{d}\overline{z}), \qquad (2.7)$$

unde $C^* = C_1 \cup \ldots \cup C_m \cup C_r$, C_r fiind un cerc cu centrul în originea axelor și de rază r suficient de mare pentru ca toate curbele C_k, $(k = 1, \ldots, m)$, să fie situate în interiorul său. Deoarece $F = 0$ pe C_k, $(k = 1, \ldots, m)$, avem

$$|I| = \left| \int_{C_r} (\varphi_1' \overline{F}\mathrm{d}z - \overline{\varphi_1'} F\,\mathrm{d}\overline{z}) \right| \leqslant 2.2\,\pi r.\max|\varphi_1'|.\max|F|, \qquad (2.8)$$

maximele fiind considerate pe C_r. Dar, pentru r suficient de mare, $|\varphi_1'| \leqslant \text{const.}/r^2$ și $|F| < \text{const.}$, deci $\lim\limits_{r\to\infty} I = 0$ și $\varphi_1'(z) = a$ în D, a fiind o constantă reală. Ținînd seamă de relația $\varphi_1'(z) = \mathrm{O}(1/z^2)$, avem $\varphi_1' = 0$, deci $\varphi_1 = \text{const.}$, $\mathring{\varphi}_1 = 0$ și $\gamma_k = 0$, $(k = 1, \ldots, m)$, în D. Pe C rezultă $\mathring{\varphi}_2 = \Gamma_0$; dar $\Gamma_0 = 0$ deoarece $\mathring{\varphi}_2(\infty) = 0$, astfel încît în definitiv se obține $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ în D.

Să considerăm acum un domeniu D a cărui frontieră este formată de curbele închise C_k, $(k = 1, \ldots, m)$, situate în întregime la distanță finită, precum și de curba C_0 conținînd punctul de la infinit și să trasăm un cerc C_r cu centrul în originea axelor și de rază r suficient de mare pentru ca toate curbele închise C_k, $(k = 1, \ldots, m)$, să fie situate în interiorul său; să notăm cu C_0' arcul lui C_0 situat în interiorul lui C_r și prin C_r' arcul lui C_r situat în D, (fig. 1.2). În acest caz, funcțiile lui Goursat corespunzînd diferenței a două soluții sînt date de expresiile (1.40), (1.41) în care $\Gamma_1 = \Gamma_2 = 0$. Fie o integrală de forma (2.7) pe $C^* = C_0' \cup C_r' \cup C_1 \cup \ldots \cup C_m$; deoarece $F = 0$ pe C_k, $(k = 0, 1, \ldots, m)$, rezultă o relație analogă cu (2.8), maximele fiind considerate pe C_r'. Dar, în conformitate cu ipotezele paragrafului 2.1, funcția $F(z)$ este mărginită, iar $\varphi_1'(z) = \mathrm{o}\,(1/z)$ pentru r suficient de mare, de unde rezultă $\varphi_1 = \alpha$ în D, α fiind o constantă complexă.

Se obține deci $\gamma_k = 0$, $(k = 1, \ldots, m)$, funcția $\varphi_2(z)$ este olomorfă și avem $\varphi_2 = \bar{\alpha}$ în D, deoarece $\varphi_2 = \bar{\alpha}$ pe $C = C_0 \cup C_1 \cup \ldots \cup C_m$.

2.3. **Paradoxul lui Stokes.** Rezultatele precedente permit enunțarea paradoxului lui Stokes sub o formă foarte generală. Să considerăm un domeniu D exterior curbelor închise C_k, $(k = 1, \ldots, m)$, situate în întregime la distanță finită, disjuncte și cu tangentă continuă sau formate dintr-un număr finit de arce cu tangentă continuă. Să presupunem că viteza, presiunea și vîrtejul sînt mărginite în D; urmează că $\gamma_k = 0$, $\alpha_n = 0$, $\beta_n = 0$, $(n \geqslant 1)$, în expresiile (1.30), astfel încît $\varphi_1'(z) = o(1/z)$. Dacă, în plus, conturele C_k, $(k = 1, \ldots, m)$, sînt fixe, sînt îndeplinite toate ipotezele paragrafului 2.2 și rezultă $u + iv \equiv 0$ în D. Deci, dacă lichidul vîscos ocupă un domeniu exterior curbelor închise C_k, $(k = 1, \ldots, m)$, dacă viteza, presiunea și vîrtejul sînt mărginite în D și dacă viteza este nulă pe C_k, $(k = 1, \ldots, m)$, ea este identic nulă în întreg domeniul D. Acest rezultat a mai fost obținut, folosind raționamente diferite, de către N. A. Slezkin, ([37], 164–170), R. Finn și W. Noll, [13], și I-Dee Chang și R. Finn, [2].

III. SOLUȚIA PENTRU DOMENIILE SIMPLU CONEXE

3.1. **Ecuația funcțională a problemei.** Prezentul capitol și cel următor au ca scop demonstrarea existenței soluției, precum și construirea sa efectivă.

Începem prin a face cîteva precizări relative la curbele frontieră. În cele ce preced, frontiera C a domeniului D ocupat de lichidul vîscos era constituită de curbe cu tangentă continuă sau formate dintr-un număr finit de arce cu tangentă continuă. În continuare, conturul C va fi presupus format dintr-un număr finit de curbe închise situate în întregime la distanță finită, eventual și dintr-o singură curbă conținînd punctul de la infinit, toate aceste curbe fiind simple, disjuncte și de clasă C^3. În general, un arc de curbă finit, reprezentat sub forma parametrică: $x = x(s)$, $y = y(s)$, $(a \leqslant s \leqslant b)$, unde s este lungimea de arc, va fi numit *de clasă* C^3, dacă funcțiile $x(s)$ și $y(s)$ sînt continue împreună cu derivatele lor pînă la ordinul al treilea inclusiv, și dacă derivatele lor de ordinul întîi nu se anulează simultan. O curbă închisă va fi numită de clasă C^3, dacă, în plus, odată cu relațiile $x(a) = x(b)$, $y(a) = y(b)$, sînt îndeplinite și relații analoge pentru derivatele de primele trei ordine: $x'(a) = x'(b), \ldots, y'''(a) = y'''(b)$, aceste derivate fiind considerate la dreapta, respectiv la stînga. Orice curbă C simplă, finită și de clasă C^3 este transformată prin relația

$$\zeta = \frac{1}{z - z_0} = \frac{1}{x(s) + iy(s) - z_0}, \quad (z \in C,\ z_0 \notin C), \tag{3.1}$$

într-o curbă C^* simplă, finită și de clasă C^3. Prin analogie, vom spune că o curbă C conținînd punctul de la infinit este de clasă C^3, dacă curba C^*, obținută din C prin transformarea (3.1) este simplă, finită și de clasă C^3, ([1], 304–305). Originea axelor ne fiind situată pe curba C conținînd punctul de la infinit, curba C^*, obținută din C prin inversiunea $\zeta = 1/z$, trece prin origine. Fără a restrînge generalitatea, mai putem considera că C^* este tangentă în origine la axa reală, deci că o curbă de clasă C^3 şi care conţine punctul de la infinit admite drept asimptotă axa reală.

Trecem acum la examinarea domeniilor simplu conexe. Să considerăm, în planul $z = x + iy$, un domeniu simplu conex mărginit D, conţinînd originea axelor în interiorul său şi a cărui frontieră este o curbă C simplă, închisă şi de clasă C^3. Fie transformarea

$$z = f(\zeta), \tag{3.2}$$

care realizează reprezentarea conformă a domeniului D pe cercul unitate din planul $\zeta = \xi + i\eta$, cu corespondenţa punctelor $z = 0$ şi $\zeta = 0$; vom însemna prin D^* cercul $|\zeta| < 1$ şi prin C^* circumferinţa sa $|\zeta| = 1$. Notînd

$$\varphi_1(z) = \varphi_1[f(\zeta)] = \Phi_1(\zeta), \quad \varphi_2(z) = \varphi_2[f(\zeta)] = \Phi_2(\zeta), \tag{3.3}$$

formula (1.10) devine

$$u + iv = \Phi_1(\zeta) - \frac{f(\zeta)}{\overline{f'(\zeta)}}\overline{\Phi_1'(\zeta)} - \overline{\Phi_2(\zeta)}, \tag{3.4}$$

iar condiţia la limită (2.1) se scrie

$$\Phi_1(\tau) - \frac{f(\tau)}{\overline{f'(\tau)}}\overline{\Phi_1'(\tau)} - \overline{\Phi_2(\tau)} = G(\tau), \tag{3.5}$$

unde $\tau = e^{i\vartheta} \in C^*$, iar $G(\tau) = g[f(\tau)]$. Ţinînd seamă de gradul de determinare al funcţiilor $\varphi_1(z)$ şi $\varphi_2(z)$, (*cf.* § 1.1), putem considera că

$$\Phi_2(0) = 0, \qquad \Re\left\{\frac{\Phi_1'(0)}{f'(0)}\right\} = 0. \tag{3.6}$$

Vom mai presupune, (*cf.* § 2.1), că funcţiile $\Phi_1(\zeta)$, $\Phi_1'(\zeta)$, $\Phi_2(\zeta)$ sînt continue în $D^* + C^*$ şi că funcţia $G(\tau)$ este continuă şi uniformă, derivata sa în raport cu ϑ satisfăcînd o condiţie Hőlder.

Condiţia la limită (3.5) permite deducerea unei ecuaţii funcţionale care determină pe $\Phi_1(\zeta)$. Într-adevăr, să scriem relaţia (3.5) sub forma

$$\overline{\Phi_2(\tau)} = \Phi_1(\tau) - \frac{f(\tau)}{\overline{f'(\tau)}}\overline{\Phi_1'(\tau)} - G(\tau) \tag{3.7}$$

şi să exprimăm că conjugata membrului drept reprezintă, pe C^*, valoarea unei funcţii $\Phi_2(\zeta)$, olomorfă în interiorul cercului unitate şi care se anulează pentru $\zeta = 0$; ecuaţia căutată este atunci

$$\Phi_1(\zeta) - \frac{1}{2\pi i}\int_{C^*}\frac{f(\tau)}{\overline{f'(\tau)}}\cdot\frac{\overline{\Phi_1'(\tau)}\,d\tau}{\tau - \zeta} = \frac{1}{2\pi i}\int_{C^*}\frac{G(\tau)\,d\tau}{\tau - \zeta}, \quad (\zeta \in D^*). \tag{3.8}$$

Pe de altă parte, conjugata lui (3.5) conduce la formula următoare, care determină funcţia $\Phi_2(\zeta)$, dacă se cunoaşte $\Phi_1(\zeta)$:

$$\Phi_2(\zeta) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{C^*}\frac{\overline{f(\tau)}}{f'(\tau)}\cdot\frac{\Phi_1'(\tau)\,d\tau}{\tau-\zeta} - \frac{1}{2\pi i}\int_{C^*}\frac{\overline{G(\tau)}\,d\tau}{\tau-\zeta} + \overline{\Phi_1(0)}\,. \tag{3.9}$$

Dacă domeniul D este exterior curbei închise C, situată în întregime la distanţă finită, reprezentarea sa conformă pe cercul unitate al planului ζ, cu corespondenţa punctelor $z = \infty$, $\zeta = 0$, este dată de

$$z = f(\zeta) = \frac{\lambda}{\zeta} + f^{\circ}(\zeta), \tag{3.10}$$

unde λ este o constantă, iar $f^{\circ}(\zeta)$ o funcţie olomorfă în $D^{\star}$. Funcţiile lui Goursat sînt atunci de forma

$$\Phi_1(\zeta) = \frac{\lambda\Gamma_1}{\zeta} + \Phi_1^{\circ}(\zeta), \qquad \Phi_2(\zeta) = \frac{\lambda\Gamma_2}{\zeta} + \Phi_2^{\circ}(\zeta), \tag{3.11}$$

$\Phi_1^{\circ}(\zeta)$ şi $\Phi_2^{\circ}(\zeta)$ fiind funcţii olomorfe în $D^{\star}$. În acest caz, în relaţiile (3.8), (3.9), funcţiile $\Phi_1(\zeta)$, $\Phi_2(\zeta)$ trebuie înlocuite respectiv prin $\Phi_1^{\circ}(\zeta)$, $\Phi_2^{\circ}(\zeta)$, iar $G(\tau)$ prin expresia

$$G^{\circ}(\tau) = G(\tau) - \frac{\lambda\Gamma_1}{\tau} - \overline{\frac{f(\tau)}{f'(\tau)}}\,\bar{\lambda}\,\overline{\Gamma}_1\,\tau^2 + \bar{\lambda}\,\overline{\Gamma}_2\,\tau. \tag{3.12}$$

Dacă frontiera C a domeniului D este o curbă simplă, de clasă C^3 şi care conţine punctul de la infinit, este uneori indicată efectuarea reprezentării conforme a lui D pe semiplanul de exemplu superior D^+ al planului ζ. În acest caz, procedînd ca mai sus, vom căuta să reducem problema la determinarea a două funcţii $\Phi_1^{\circ}(\zeta)$ şi $\Phi_2^{\circ}(\zeta)$, olomorfe în semiplanul D^+, continue în $D^+ + C^{\star}$, ($C^{\star}$ fiind axa reală a planului ζ), şi astfel încît să avem $\Phi_1^{\circ}(\zeta) = o\,(1)$, $\Phi_2^{\circ}(\zeta) = o\,(1) + \nu$, ($\nu = \text{const.}$), $\Phi_1^{\circ\prime}(\zeta) = o\,(1/\zeta)$ pentru $|\zeta|$ mare. În acest scop, vom presupune că funcţia $G(\tau)$, dată pe $C^{\star}$, este pentru $|\tau|$ mare de forma $G(\tau) = \gamma + o\,(1)$, ($\gamma = \text{const.}$), că $G(\tau)$ şi derivata sa satisfac o condiţie Hőlder, şi că expresiile $t(G-\gamma)$, t^2G' satisfac o condiţie Hőlder în vecinătatea punctului de la infinit. Funcţiile $\Phi_1^{\circ}(\zeta)$, $\Phi_2^{\circ}(\zeta)$ sînt atunci definite prin relaţii analoge cu (3.8), (3.9), integralele fiind considerate pe axa reală $C^{\star}$ a planului ζ.

3.2. **Reducerea la o ecuaţie integrală. Teorema de existenţă.** Ecuaţia funcţională (3.8) şi analogele sale pot fi aplicate direct la rezolvarea problemelor concrete, (*cf.* §§ 3.4—3.7), dar nu sînt indicate pentru cercetări privind proprietăţile generale ale soluţiei. De aceea, vom arăta că ele se reduc la ecuaţii integrale de tip Fredholm de speţa a doua, care pot fi folosite mai uşor la studiul unor astfel de proprietăţi : teorema de existenţă, pe care o demonstrăm în continuare, constituie un exemplu în acest sens. Într-adevăr, scriind ecuaţia (3.8) sub forma

$$\Phi_1(\zeta) - \frac{1}{2\pi i}\int_{C^*}\frac{f(\tau)-f(\zeta)}{f'(\tau)\,(\tau-\zeta)}\,\overline{\Phi_1'(\tau)}\,d\tau - kf(\zeta) = A\,(\zeta), \tag{3.13}$$

unde

$$k = \frac{\overline{\Phi_1'(0)}}{\overline{f'(0)}}, \qquad A(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C^*} \frac{G(\tau)\,\mathrm{d}\tau}{\tau - \zeta}, \tag{3.14}$$

derivînd în raport cu ζ, apoi făcînd ca punctul $\zeta \in D^*$ să tindă către un punct τ_0 aparținînd circumferinței C^*, rezultă ecuația integrală următoare, analogă celor obținute de N.I. Mushelişvili în teoria elasticității, ([28], cap. V):

$$\Phi_1'(\tau_0) - \frac{1}{2\pi i}\int_{C^*} K(\tau_0, \tau)\,\overline{\Phi_1'(\tau)}\,\mathrm{d}\tau - k f'(\tau_0) = A'(\tau_0), \tag{3.15}$$

unde s-a notat

$$K(\zeta, \tau) = \frac{1}{\overline{f'(\tau)}} \cdot \frac{\partial}{\partial \zeta}\left[\frac{f(\tau) - f(\zeta)}{\tau - \zeta}\right]. \tag{3.16}$$

Această operație este posibilă în virtutea ipotezelor admise : $\Phi'_1(\zeta)$ este continuă în $D^* + C^*$, iar derivata funcției $G(\tau)$ este hőlderiană, deci $A'(\zeta)$ este continuă în $D^* + C^*$. Pe de altă parte, în conformitate cu o teoremă a lui V. Smirnov, [38], dacă în transformarea conformă (3.2) frontierele C şi C^* sînt curbe de clasă C^3, funcțiile $f(\zeta)$, $f'(\zeta)$, $f''(\zeta)$ sînt continue în $D^* + C^*$, iar $f'(\zeta) \neq 0$ pe C^*, deci funcția $K(\zeta, \tau)$ este continuă în $D^* + C^*$.

Ecuația (3.15) mai poate fi transformată. În acest scop, să presupunem mai întîi domeniul D mărginit, iar constanta k dată arbitrar. Notînd

$$\Phi_1(\zeta) = kf(\zeta) + \Phi_1^{\circ}(\zeta), \tag{3.17}$$

unde $\Phi_1^{\circ}(\zeta)$ este o funcție olomorfă în D^*, ecuațiile (3.13), (3.15) devin

$$\Phi_1^{\circ}(\zeta) - \frac{1}{2\pi i}\int_{C^*} \frac{f(\tau) - f(\zeta)}{\overline{f'(\tau)}\,(\tau - \zeta)}\,\overline{\Phi_1^{\circ\prime}(\tau)}\,\mathrm{d}\tau = A(\zeta), \tag{3.18}$$

$$\Phi_1^{\circ\prime}(\tau_0) - \frac{1}{2\pi i}\int_{C^*} K(\tau_0, \tau)\,\overline{\Phi_1^{\circ\prime}(\tau_0)}\,\mathrm{d}\tau = A'(\tau_0)\cdot \tag{3.19}$$

(3.19), (3.18), (3.17) determină respectiv funcțiile $\Phi_1^{\circ\prime}(\tau)$, $\Phi_1^{\circ}(\zeta)$, $\Phi_1(\zeta)$. Să observăm însă că funcția $\Phi_1(\zeta)$, astfel obținută, este o soluție a problemei numai dacă este îndeplinită şi prima dintre relațiile (3.14), care în conformitate cu (3.17) mai poate fi scrisă sub forma

$$\mathfrak{R}\left\{\frac{\Phi_1^{\circ\prime}(0)}{f'(0)}\right\} = 0. \tag{3.20}$$

Pentru a găsi semnificația fizică a acestei condiții, să înmulțim cu $\overline{f'(\tau)}\,\mathrm{d}\bar{\tau} = \mathrm{d}\bar{t}$ condiția la limită

$$\Phi_1^{\circ}(\tau) - \frac{f(\tau)}{\overline{f'(\tau)}}\,\overline{\Phi_1^{\circ\prime}(\tau)} - \overline{\Phi_2(\tau)} = G(\tau) - \frac{\overline{\Phi_1^{\circ\prime}(0)}}{\overline{f'(0)}}\,f(\tau) \tag{3.21}$$

şi cu $f'(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \mathrm{d}t$ conjugata sa, apoi să integrăm pe $C^\star$. Făcînd diferența expresiilor astfel obținute, rezultă

$$\mathfrak{R}\left\{\frac{\Phi_1^{\circ\prime}(0)}{f'(0)}\right\} = \frac{1}{2S}\,\mathfrak{I}\left\{\int_C \overline{g(t)}\,\mathrm{d}t\right\} = \frac{1}{S}\,[\psi]_c, \tag{3.22}$$

unde S este aria domeniului D, C este frontiera sa, iar $[\psi]_c$ reprezintă creşterea funcției ψ la parcurgerea conturului C. Relația (3.20) este deci echivalentă cu condiția de uniformitate a funcției de curent.

Separînd părțile reală şi imaginară în ecuația (3.19), aceasta se reduce la un sistem de două ecuații reale de tip Fredholm, deci existența soluției sale poate fi demonstrată aplicînd alternativa Fredholm. Să presupunem aşadar că ecuația integrală omogenă corespunzătoare lui (3.19) are o soluție nenulă $\Phi_1^{\circ\prime}(\tau) \not\equiv 0$, astfel încît $\Phi_1(\zeta) = kf(\zeta) + \Phi_1^{\circ}(\zeta)$. Însă, în conformitate cu teorema de unicitate, dacă viteza este nulă pe contur avem $\Phi_1(\zeta) = af(\zeta) + \alpha$, a fiind o constantă reală, iar α o constantă complexă, deci $\Phi_1^{\circ}(\zeta) = (a - k)\,f(\zeta) + \alpha$. Introducînd această valoare în ecuația (3.18) în care $A(\zeta) = 0$, se obține $\Phi_1^{\circ}(\zeta) = \text{const.}$, deci ecuația omogenă corespunzătoare lui (3.19) admite numai soluția nulă. Ecuația integrală (3.19) are deci o soluție, iar aceasta este unică în virtutea teoremei de unicitate.

Dacă domeniul D este exterior curbei închise C situată în întregime la distanță finită, putem înlocui pe $\Phi_1(\zeta)$ prin funcția olomorfă $\Phi_1^{\circ}(\zeta)$, iar pe $A(\zeta)$ prin $A^{\circ}(\zeta) = (1/2\pi i)\int_{C^\star} G^{\circ}(\tau)\,\mathrm{d}\tau/(\tau-\zeta)$, în conformitate cu (3.11) şi (3.12). Rezultă $k = \overline{\Phi_1^{\circ\prime}(0)}\,/\,\overline{f'(0)} = 0$, iar (3.13) devine

$$\Phi_1^{\circ}(\zeta) - \frac{1}{2\pi i}\int_{C^\star}\frac{f^{\circ}(\tau) - f^{\circ}(\zeta)}{\overline{f'(\tau)}\,(\tau-\zeta)}\,\overline{\Phi_1^{\circ\prime}(\tau)}\,\mathrm{d}\tau = A^{\circ}(\zeta), \tag{3.23}$$

în timp ce ecuația (3.15) poate fi scrisă sub forma

$$\Phi_1^{\circ\prime}(\tau_0) - \frac{1}{2\pi i}\int_{C^\star} K^{\circ}(\tau_0,\tau)\,\overline{\Phi_1^{\circ\prime}(\tau)}\,\mathrm{d}\tau = A^{\circ\prime}(\tau_0), \tag{3.24}$$

unde

$$K^{\circ}(\zeta,\tau) = \frac{1}{\overline{f'(\tau)}}\cdot\frac{\partial}{\partial\zeta}\left[\frac{f^{\circ}(\tau) - f^{\circ}(\zeta)}{\tau-\zeta}\right]. \tag{3.25}$$

(3.24), (3.23), (3.12) determină respectiv funcțiile $\Phi_1^{\circ\prime}(\tau)$, $\Phi_1^{\circ}(\zeta)$, $\Phi_1(\zeta)$.

Să presupunem acum că ecuația integrală omogenă corespunzătoare lui (3.24) admite o soluție nenulă $\Phi_1^{\circ\prime}(\tau) \not\equiv 0$, deci că există o funcție $\Phi_1'(\zeta) \not\equiv 0$ în $D^\star$, sau $\varphi_1'(z) \not\equiv 0$ în D. Dar aceasta este în contradicție cu teorema de unicitate, conform căreia $\varphi_1(z) \equiv 0$ în D dacă viteza este nulă pe contur şi la infinit; ecuația integrală (3.24) are deci o soluție şi numai una.

Dacă frontiera C conține punctul de la infinit, sîntem conduşi la rezultate analoge celor de mai sus, procedînd la fel.

3.3. **Asupra unei metode de aproximare.** Dacă funcția $f(\zeta)$ este rațională, nucleele ecuațiilor integrale de tipul (3.19) degenerează, iar soluția problemei se reduce la cvadraturi. Acest rezultat, datorit lui N. I. Mushelişvili, ([28], § 85), conduce la o metodă de aproximare considerată de N. I. Mushelişvili, [27], şi D. I. Şerman, [33]. Iată principiul acestei metode, pentru cazul de față : domeniul D fiind simplu conex, mărginit şi limitat de curba închisă C de clasă C^3, funcțiile $f(\zeta), f'(\zeta), f''(\zeta)$ pot fi dezvoltate în serii de polinoame, uniform convergente în cercul $|\zeta| \leqslant 1$, în conformitate cu o teoremă a lui J. L. Walsh, [41] ; deci, dacă $f_n(\zeta)$ este suma primilor n termeni ai seriei lui $f(\zeta)$, relația $z = f_n(\zeta)$ face să corespundă cercului unitate din planul ζ, un domeniu D_n al cărui contur C_n diferă oricît de puțin de C. Să notăm $G_n(\tau) = g\,[f_n(\tau)]$, $G(\tau) = g\,[f(\tau)]$ şi să presupunem că $G_n(\tau)$, $G_n'(\tau)$, $G_n''(\tau)$ tind uniform respectiv către $G(\tau)$, $G'(\tau)$, $G''(\tau)$, pentru $n \to \infty$. Atunci, dacă $\Phi_{1,n}(\zeta)$, $\Phi_{2,n}(\zeta)$ sînt funcțiile lui Goursat corespunzătoare lui $G_n(\tau)$, iar $\Phi_1(\zeta)$, $\Phi_2(\zeta)$ cele corespunzătoare lui $G(\tau)$, $\Phi_{1.n}(\zeta)$ şi $\Phi_{2.n}(\zeta)$ tind uniform către $\Phi_1(\zeta)$ şi, respectiv, $\Phi_2(\zeta)$, pentru $n \to \infty$. Într-adevăr, pentru domeniul D_n obținem ecuația integrală (3.19), în care $K(\tau_0, \tau)$ şi $A'(\tau_0)$ se înlocuiesc prin expresiile analoge $K_n(\tau_0, \tau)$ şi $A_n'(\tau_0)$, relative la D_n. Dar, în virtutea ipotezelor admise, $K_n(\tau_0, \tau)$ şi $A_n'(\tau_0)$ tind uniform către $K(\tau_0, \tau)$ şi, respectiv, $A'(\tau_0)$, pentru $n \to \infty$. Obținem astfel prin cvadraturi o soluție apropiată a problemei sau, altfel, termenii unei serii care reprezintă soluția exactă. Cazul domeniilor conținînd punctul de la infinit este analog.

3.4. **Soluția pentru cerc.** Cu aplicație a teoriei precedente, ne propunem să dăm soluția efectivă pentru cîteva cazuri particulare ; considerăm mai întîi domeniile a căror frontieră este o circumferință. Fie deci un domeniu mărginit, limitat de circumferința de rază R şi cu centrul în punctul $z = \alpha$; avem atunci $z = f(\zeta) = R\zeta + \alpha$, $\Phi_1(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \zeta^k$ şi introducînd aceste expresii în ecuația funcțională (3.8), rezultă

$$\Phi_1(\zeta) - \bar{\alpha}_1 \zeta - 2\bar{\alpha}_2 - \frac{\alpha}{R}\,\bar{\alpha}_1 = \frac{1}{2\pi i}\int_{C^*} \frac{G(\tau)\,d\tau}{\tau - \zeta}. \tag{3.26}$$

Constantele α_1, α_2 se determină derivînd relația (3.26) de două ori în raport cu ζ, făcînd în expresiile obținute $\zeta = 0$, apoi ținînd seamă de relațiile $\Phi'_1(0) = \alpha_1$, $\Phi''_1(0) = 2\alpha_2$ şi (3.20). Considerînd şi formula (3.9), se obține în definitiv

$$\Phi_1(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C^*} \frac{G(\tau)\,d\tau}{\tau - \zeta} + \bar{\alpha}_1 \zeta + 2\bar{\alpha}_2 + \frac{\alpha}{R}\,\bar{\alpha}_1, \tag{3.27}$$

$$\Phi_2(\zeta) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{C^*} \frac{\overline{G(\tau)}\,d\tau}{\tau - \zeta} - \left(\frac{1}{\zeta} + \frac{\bar{\alpha}}{R}\right) \Phi_1'(\zeta) + \frac{\alpha_1}{\zeta} + \overline{\Phi_1(0)}, \tag{3.28}$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{4\pi i}\int_{C^*} \frac{G(\tau)\,d\tau}{\tau^2}, \qquad \alpha_2 = \frac{1}{2\pi i}\int_{C^*} \frac{G(\tau)\,d\tau}{\tau^3}. \tag{3.29}$$

Fie acum cazul domeniului exterior circumferinței de rază R și cu centrul în punctul $z = \alpha$; avem $z = f(\zeta) = R/\zeta + \alpha$, iar soluția este următoarea :

$$\Phi_1(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C^*} \frac{G(\tau)\,\mathrm{d}\tau}{\tau - \zeta}, \tag{3.30}$$

$$\Phi_2(\zeta) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{C^*} \frac{\overline{G(\tau)}\,\mathrm{d}\tau}{\tau - \zeta} + \zeta^2\left(\zeta + \frac{\overline{\alpha}}{R}\right)\Phi_1'(\zeta) + \overline{\Phi_1(0)}. \tag{3.31}$$

3.5. **Soluția pentru semiplan.** Dacă domeniul ocupat de lichidul vîscos este semiplanul superior D^+, soluția este de forma $\varphi_1(z) = \overset{\circ}{\varphi}_1(z) + \Gamma_1 z$, $\varphi_2(z) = \overset{\circ}{\varphi}_2(z) + \Gamma_2 z$, unde $\overset{\circ}{\varphi}_1(z)$, $\overset{\circ}{\varphi}_2(z)$ sînt funcții olomorfe în D^+, iar Γ_1, Γ_2 constante date prin ipoteză. Condiția la limită (2.1) poate fi scrisă sub forma

$$\overset{\circ}{\varphi}_1(t) - \overline{t\overset{\circ}{\varphi}_1{}'(t)} - \overline{\overset{\circ}{\varphi}_2(t)} = g(t) + (\overline{\Gamma}_1 - \Gamma_1 + \overline{\Gamma}_2)t = g^\circ(t), \tag{3.32}$$

unde se presupune că funcția $g(t) = u + iv$ satisface condițiile enunțate la sfîrșitul paragrafului 3.1. Se deduce, la fel ca mai sus,

$$\overset{\circ}{\varphi}_1(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g^\circ(t)\,\mathrm{d}t}{t - z}, \tag{3.33}$$

$$\overset{\circ}{\varphi}_2(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\overline{g^\circ(t)}\,\mathrm{d}t}{t - z} - z\,\overset{\circ}{\varphi}_1{}'(z). \tag{3.34}$$

Să considerăm și expresia următoare pentru $\overset{\circ}{\varphi}_2(z)$, echivalentă cu (3.34) și care ne va folosi în capitolul IV:

$$\overset{\circ}{\varphi}_2(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\overline{g^\circ(t)}\,\mathrm{d}t}{t - z} + \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g^\circ(t)\,\mathrm{d}\overline{t}}{t - z} - \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\overline{t}\,g^\circ(t)\,\mathrm{d}t}{(t - z)^2}. \tag{3.35}$$

3.6. **Mișcarea în jurul unui cilindru eliptic.** Transformarea

$$z = f(\zeta) = m_1\zeta + \frac{m_2}{\zeta}, \qquad m_2 > m_1, \tag{3.36}$$

realizează reprezentarea conformă, pe cercul unitate din planul ζ, a exteriorului elipsei de semiaxe $d_1 = m_1 + m_2$, $d_2 = m_2 - m_1$, situată în planul z și admițînd axele de coordonate drept axe de simetrie. Fie

$$\overset{\circ}{\Phi}_1(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k\,\zeta^k; \tag{3.37}$$

urmează că funcția $f(\zeta)\,\overline{\Phi^\circ{}_1'(1/\overline{\zeta})}/\overline{f'(1/\overline{\zeta})}$ este olomorfă în exteriorul cercului unitate și nulă la infinit, deci, pentru $|\zeta| < 1$,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C^*} \frac{f(\tau)}{\overline{f'(\tau)}}\cdot\frac{\overline{\overset{\circ}{\Phi}_1{}'(\tau)}\,\mathrm{d}\tau}{\tau - \zeta} = 0, \tag{3.38}$$

$C^\star$ fiind circumferința $|\zeta| = 1$. Ținînd seama de (3.12), mai avem

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C^\star}\frac{G^\circ(\tau)\,\mathrm{d}\tau}{\tau-\zeta} = (\overline{\Gamma}_1 m_1 + \overline{\Gamma}_2 m_2)\,\zeta, \tag{3.39}$$

astfel încît (3.8) dă

$$\Phi_1^\circ(\zeta) = (\overline{\Gamma}_1 m_1 + \overline{\Gamma}_2 m_2)\zeta. \tag{3.40}$$

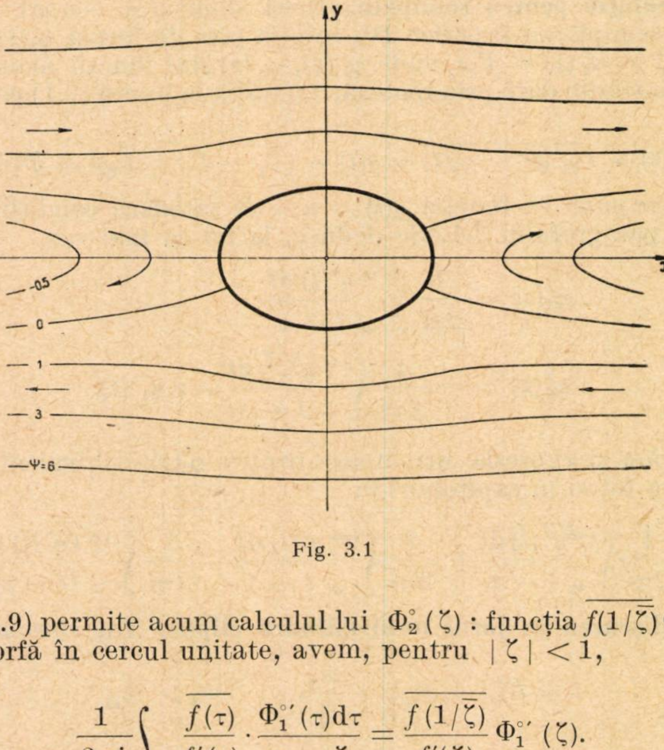


Fig. 3.1

Formula (3.9) permite acum calculul lui $\Phi_2^\circ(\zeta)$: funcția $\overline{f(1/\overline{\zeta})}\,\Phi_1^{\circ\prime}(\zeta)/f'(\zeta)$ fiind olomorfă în cercul unitate, avem, pentru $|\zeta| < 1$,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C^\star}\frac{\overline{f(\tau)}}{f'(\tau)}\cdot\frac{\Phi_1^{\circ\prime}(\tau)\mathrm{d}\tau}{\tau-\zeta} = \frac{\overline{f(1/\overline{\zeta})}}{f'(\zeta)}\,\Phi_1^{\circ\prime}(\zeta). \tag{3.41}$$

Pe de altă parte,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C^\star}\frac{\overline{G^\circ(\tau)}\,\mathrm{d}\tau}{\tau-\zeta} = -\,m_2\,\overline{\Gamma}_1\zeta - \frac{m_1\Gamma_1}{\zeta} - \frac{m_2\Gamma_1}{\zeta^2}\cdot\frac{\overline{f(1/\overline{\zeta})}}{f'(\zeta)}, \tag{3.42}$$

astfel încît

$$\Phi_2^\circ(\zeta) = m_2\,\overline{\Gamma}_1\,\zeta + \frac{m_1\Gamma_1}{\zeta} + \frac{\overline{f(1/\overline{\zeta})}}{f'(\zeta)}\left[\frac{m_2\,\Gamma_1}{\zeta^2} - \Phi_1^{\circ\prime}(\zeta).\right]\cdot \tag{3.43}$$

Notînd $\chi(z) = \chi[f(\zeta)] = X(\zeta)$ şi $\psi(z) = \psi[f(\zeta)] = \Psi(\zeta)$, apoi ţinînd seamă de relaţiile $\chi'(z) = \varphi_2(z)$ şi (1.9), avem

$$X(\zeta) = \int \Phi_2(\zeta) f'(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta, \tag{3.44}$$

$$\Psi(\zeta) = -\mathcal{J}\{\overline{f(\zeta)}\,\Phi_1(\zeta) + X(\zeta)\}. \tag{3.45}$$

În conformitate cu (3.11) şi (3.43), (3.44) dă

$$\begin{aligned} X(\zeta) = -\frac{m_2^2\,\overline{\Gamma}_2}{2}\zeta^2 + \frac{m_2^2\,\Gamma_2}{2}\cdot\frac{1}{\zeta^2} + \\ +[(m_1^2 + m_2^2)(\Gamma_1 - \overline{\Gamma}_1) + m_1\, m_2\,(\Gamma_2 - \overline{\Gamma}_2)]\ln\zeta. \end{aligned} \tag{3.46}$$

Figura 3.1 reprezintă liniile de curent corespunzînd la infinit unei repartiţii de viteze de tipul (1.31) cu $\theta = 0$ şi $b = 4$, (deci $\Gamma_1 = -i$ şi $\Gamma_2 = 2i$), semiaxele elipsei fiind $d_1 = 1$ şi $d_2 = 2/3$. Dacă $\rho e^{i}\,\delta = \zeta$, funcţia de curent este

$$\Psi = \frac{8}{9}\ln\rho + \frac{1}{36}\left(9\,\rho^2 + \frac{25}{\rho^2} - 34\right) - \frac{25}{36}\left(\rho^2 + \frac{1}{\rho^2} - 2\right)\cos 2\vartheta \tag{3.47}$$

Luînd $\Gamma_1 = ic/2$ şi $\Gamma_2 = 0$, se obţine o mişcare de tipul (1.32), caz studiat de S. R. Khamrui, [23], apoi de Cr. Stănescu, [39].

3.7. **Mişcarea în lungul unui perete infinit.** Fie o mişcare de tipul (1.31) în lungul unei curbe conţinînd punctul de la infinit şi limitînd un domeniu D a cărui reprezentare conformă pe semiplanul superior D^+ al planului ζ este realizată de transformarea

$$z = f(\zeta) = \zeta + \frac{2im}{\zeta + i}, \qquad 0 < m < 1. \tag{3.48}$$

În conformitate cu formulele (1.40), (1.41), vom căuta o soluţie de forma $\Phi_1(\zeta) = \Gamma_1\zeta + \Phi_1^0(\zeta)$, $\Phi_2(\zeta) = \Gamma_2\zeta + \Phi_2^\circ(\zeta)$, $\Phi_1^\circ(\zeta)$ şi $\Phi_2^\circ(\zeta)$ fiind funcţii care satisfac condiţiile enunţate la sfîrşitul paragrafului 3.1 ; ele sînt determinate de relaţiile

$$\Phi_1^\circ(\zeta) - \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(\tau)}{\overline{f'(\tau)}}\cdot\frac{\overline{\Phi_1^{\circ\prime}(\tau)}\mathrm{d}\tau}{\tau - \zeta} = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{G^\circ(\tau)\,\mathrm{d}\tau}{\tau - \zeta} + \frac{\bar{\nu}}{2}, \tag{3.49}$$

$$\Phi_2^\circ(\zeta) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\overline{f(\tau)}}{f'(\tau)}\cdot\frac{\Phi_1^{\circ\prime}(\tau)\,\mathrm{d}\tau}{\tau - \zeta} - \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\overline{G^\circ(\tau)}\,\mathrm{d}\tau}{\tau - \zeta} + \frac{\nu}{2}, \tag{3.50}$$

unde

$$G^\circ(\tau) = G(\tau) + (\overline{\Gamma}_2 - \Gamma_1)\tau + \overline{\Gamma}_1\,\frac{f(\tau)}{\overline{f'(\tau)}}\cdot \tag{3.51}$$

Vom lua, în conformitate cu (1.34), $\Gamma_1 = -ib/4$ şi $\Gamma_2 = ib/2$. Să observăm mai întîi că funcţia $f(\zeta)\,\overline{\Phi_1^{\circ\prime}(\bar{\zeta})/f'(\bar{\zeta})}$ este nulă la infinit şi olomorfă în semiplanul inferior D^-, cu excepția punctului $\zeta = -i$ unde are un pol de ordinul întîi, deci este de forma

$$\frac{f(\zeta)}{\overline{f'(\bar{\zeta})}}\,\overline{\Phi_1^{\circ\prime}(\bar{\zeta})} = \frac{\varepsilon}{\zeta + i} + F(\zeta), \tag{3.52}$$

$F(\zeta)$ fiind o funcție olomorfă în D^- și nulă la infinit, iar ε o constantă. Vom avea deci, pentru $\zeta \in D^+$,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(\tau)}{\overline{f'(\tau)}}\cdot\frac{\overline{\Phi_1^{\circ\prime}(\tau)}\,\mathrm{d}\tau}{\tau - \zeta} = \frac{\varepsilon}{\zeta + i}\cdot \tag{3.53}$$

Pe de altă parte,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{G^\circ(\tau)\,\mathrm{d}\tau}{\tau - \zeta} = -\frac{mb}{2 - im}\cdot\frac{1}{\zeta + i}, \tag{3.54}$$

și introducînd aceste valori în (3.49), apoi făcînd $\zeta \to \infty$, rezultă $\nu = 0$. Ținînd seamă de (3.52), obținem

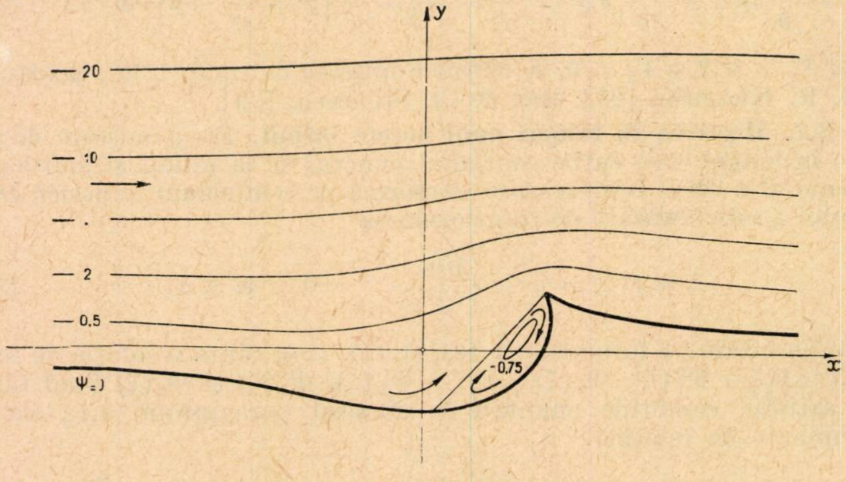


Fig. 3.2

$$\Phi_1^\circ(\zeta) = \left(\varepsilon - \frac{mb}{2 - im}\right)\frac{1}{\zeta + 1} = -\frac{mb\,(1 + im)}{2}\cdot\frac{1}{\zeta + i}\cdot \tag{3.55}$$

Mai avem, pentru $\zeta \in D^+$,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\overline{f(\tau)}}{f'(\tau)}\cdot\frac{\Phi_1^{\circ\prime}(\tau)\,\mathrm{d}\tau}{\tau - \zeta} = \frac{\overline{f(\bar{\zeta})}}{f'(\zeta)}\,\Phi_1^{\circ\prime}(\zeta) - \frac{\bar{\varepsilon}}{\zeta - i}, \tag{3.56}$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\overline{G^\circ(\tau)}\,\mathrm{d}\tau}{\tau - \zeta} = \frac{ib}{4}\zeta + \frac{mb}{2 + im}\cdot\frac{1}{\zeta - i} - \frac{ib}{4}\cdot\frac{\overline{f(\bar{\zeta})}}{f'(\zeta)}, \tag{3.57}$$

deci

$$\Phi_2^{\circ}(\zeta) = -\frac{ib}{4}\zeta - \frac{mb(1-im)}{2}\cdot\frac{1}{\zeta - i} + \frac{\overline{f(\overline{\zeta})}}{f'(\zeta)}\left[\frac{ib}{4} - \Phi_1^{\circ\prime}(\zeta)\right]. \tag{3.58}$$

Aplicînd acum formulele (3.44) şi (3.45), obţinem

$$X(\zeta) = \frac{ib}{4}\zeta^2 + \frac{3\,bm^2}{2}\cdot\frac{1}{\zeta + i}, \tag{3.59}$$

$$\Psi(\zeta) = -\frac{b}{8}(\zeta - \overline{\zeta})^2\left[1 - \frac{2m^2}{(\zeta + i)(\overline{\zeta} - i)}\right]. \tag{3.60}$$

Figura 3.2 reprezintă liniile de curent corespunzînd valorilor numerice $b = 2$; $m = 0{,}95$. Acest exemplu a fost tratat de W. R. Dean printr-un procedeu particular, [10]. Procedee particulare analoge au fost folosite pentru studiul altor tipuri de pereţi infiniţi de către W. R. Dean, [4], [6], [8], [9], S. K. Roy, [32], precum şi de G. Power şi D. L. Scott-Hutton, [31].

IV. SOLUŢIA PENTRU DOMENIILE MULTIPLU CONEXE

4.1. Cazul domeniilor mărginite. Trecem acum la problema generală: determinarea mişcării lente a unui lichid vîscos ce ocupă un domeniu multiplu conex D, pe care îl vom presupune mai întîi limitat de o curbă închisă exterioară C_0 situată în întregime la distanţa finită, precum şi de curbele închise C_k, $(k = 1, \ldots, m)$, interioare lui C_0, toate aceste curbe fiind simple, disjuncte şi de clasă C^3, (fig. 1.1). Fie D_k domeniul simplu conex mărginit, limitat de curba C_k, $(k = 1, \ldots, m)$, D_0 domeniul exterior curbei C_0, iar $C = C_0 \cup C_1 \cup \ldots \cup C_m$ frontiera domeniului D. Vom folosi o metodă aplicată în teoria elasticităţii de către D. I. Şerman, [34], [35], şi al cărei principiu, pus în evidenţă de către N. I. Mushelişvili, ([28], § 101), constă în căutarea soluţiei pentru cazul general, pornind de la soluţia pentru semiplan. Deci, funcţiile lui Goursat fiind de tipul (1.24), (1.26), vom lua — prin analogie cu (3.33), (3.35) — funcţiile olomorfe $\varphi_1^{\circ}(z)$, $\varphi_2^{\circ}(z)$ de forma

$$\varphi_1^{\circ}(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\omega(t)\,dt}{t - z} + \sum_{k=1}^{m}\frac{\beta_k}{z - z_k}, \tag{4.1}$$

$$\begin{aligned}\varphi_2^{\circ}(z) = &-\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\overline{\omega(t)}\,dt}{t - z} + \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\omega(t)\,d\overline{t}}{t - z} - \\ &-\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\overline{t}\,\omega(t)\,dt}{(t - z)^2} + \sum_{k=1}^{m}\frac{\beta_k}{z - z_k},\end{aligned} \tag{4.2}$$

$$\beta_k = i\int_{C_k}[\omega(t)\,d\overline{t} + \overline{\omega(t)}\,dt], \qquad (k = 1, \ldots, m), \tag{4.3}$$

iar constantele γ_k de forma

$$\gamma_k = \int_{C_k} \omega(t)\, \mathrm{d}s, \qquad (k = 1, \ldots, m), \tag{4.4}$$

$\omega(t)$ fiind o funcție necunoscută și care urmează a fi determinată pe C, $\mathrm{d}s$ fiind elementul de arc al curbei C_k, iar z_k un punct fix arbitrar al domeniului D_k. Pentru a obține o soluție regulată, vom presupune că $\omega(t)$ are pe C o derivată hőlderiană. Introducînd expresiile funcțiilor lui Goursat date de (1.24), (1.26) și (4.1), (4.2) în funcția $F(z) = \varphi_1(z) - z\overline{\varphi_1'(z)} - \overline{\varphi_2(z)}$, apoi făcînd $z \to t_0$, $(z \in D, t_0 \in C)$, și aplicînd formula lui Plemelj, se obține pentru $\omega(t)$ ecuația integrală

$$\begin{aligned} \omega(t_0) &+ \frac{1}{2\pi i}\int_C \omega(t)\, \mathrm{d} \ln \frac{t - t_0}{\bar{t} - \bar{t}_0} + \frac{1}{2\pi i}\int_C \overline{\omega(t)}\, \mathrm{d} \frac{t - t_0}{\bar{t} - \bar{t}_0} + \\ &+ \sum_{k=1}^{m} \left[\frac{\beta_k}{t_0 - z_k} - \frac{\overline{\beta_k}}{\bar{t}_0 - \bar{z}_k} \left(1 - \frac{t_0}{\bar{t}_0 - \bar{z}_k}\right)\right] + \\ &+ \sum_{k=1}^{m} \gamma_k \left[\ln(t_0 - z_k) + \ln(\bar{t}_0 - \bar{z}_k)\right] - t_0 \sum_{k=1}^{m} \frac{\bar{\gamma}_k}{\bar{t}_0 - \bar{z}_k} = g(t_0), \end{aligned} \tag{4.5}$$

unde $\ln(t_0 - z_k) + \ln(\bar{t}_0 - \bar{z}_k)$ reprezintă funcția uniformă $2 \ln |t_0 - z_k|$, iar $g(t_0) = u + iv$ este valoarea lui $F(z)$ pe C, dată prin ipoteză. Această ecuație mai poate fi transformată punînd $t - t_0 = r\, e^{i\vartheta(t_0, t)}$, unde $r = |t - t_0|$, iar $\vartheta(t_0, t)$ este unghiul format de vectorul $\overrightarrow{t_0 t}$ cu direcția pozitivă a axei Ox. Într-adevăr, deoarece curbele C_k sînt de clasă C^3, derivatele de primele două ordine, în raport cu ambele variabile, ale funcției $\vartheta(t_0, t)$ sînt continue pe C_k, iar derivatele de ordinul al treilea sînt continue pe C_k cu excepția punctelor $t = t_0$, ([1], 434). Notînd atunci $\partial\vartheta(t_0, t)/\partial t = \vartheta'(t_0, t)$, (4.5) devine

$$\begin{aligned} \omega(t_0) &+ \frac{1}{\pi}\int_C \omega(t)\, \vartheta'(t_0, t)\, \mathrm{d}t + \frac{1}{\pi}\int_C \overline{\omega(t)} e^{2i\,\vartheta(t_0, t)}\, \vartheta'(t_0, t)\, \mathrm{d}t + \\ &+ \sum_{k=1}^{m} \left[\frac{\beta_k}{t_0 - z_k} - \frac{\overline{\beta_k}}{\bar{t}_0 - \bar{z}_k} \left(1 - \frac{t_0}{\bar{t}_0 - \bar{z}_k}\right)\right] + \\ &+ \sum_{k=1}^{m} \gamma_k \left[\ln(t_0 - z_k) + \ln(\bar{t}_0 - \bar{z}_k)\right] - t_0 \sum_{k=1}^{m} \frac{\bar{\gamma}_k}{\bar{t}_0 - \bar{z}_k} = g(t_0), \end{aligned} \tag{4.6}$$

ecuația analogă celor obținute în teoria elasticității de G. Lauricella, [24], și D. I. Șerman, [34], [35].

Soluția problemei, astfel obținută, este regulată. Într-adevăr, derivînd relația (4.6) în raport cu t_0, apoi ținînd seamă de proprietățile funcției $\vartheta(t_0, t)$, rezultă că derivatele de primele două ordine ale lui $\omega(t_0)$ sînt continue pe C, astfel încît funcțiile $\varphi_1^0(z)$, $\varphi_1^{0\prime}(z)$, $\varphi_2^0(z)$ sînt continue în $D + C$.

Iată o proprietate a ecuației (4.6), care ne va folosi în cele ce urmează: să presupunem că originea axelor de coordonate este situată în D și să adăugăm la membrul stîng al lui (4.6) expresia

$$\frac{\beta_0}{t_0}-\frac{\beta_0}{\bar{t}_0}\left(1-\frac{t_0}{\bar{t}_0}\right), \quad \text{unde} \quad \beta_0=\frac{1}{\pi i}\,\mathcal{J}\left\{\int_{C_0}\frac{\omega(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t\right\}; \tag{4.7}$$

rezultă

$$\begin{aligned}\omega(t_0)&+\frac{1}{\pi}\int_C \omega(t)\,\vartheta'(t_0,t)\,\mathrm{d}t+\frac{1}{\pi}\int_C \overline{\omega(t)}\,e^{2i\vartheta(t_0,t)}\,\vartheta'(t_0,t)\,\mathrm{d}t+\\&+\sum_{k=0}^{m}\left[\frac{\beta_k}{t_0-z_k}-\frac{\overline{\beta}_k}{\bar{t}_0-\bar{z}_k}\left(1-\frac{t_0}{\bar{t}_0-\bar{z}_k}\right)\right]+\\&+\sum_{k=1}^{m}\gamma_k\left[\mathrm{lr}\,(t_0-z_k)+\ln(\bar{t}_0-\bar{z}_k)\right]-t_0\sum_{k=1}^{m}\frac{\bar{\gamma}_k}{\bar{t}_0-\bar{z}_k}=g(t_0),\end{aligned} \tag{4.8}$$

unde $z_0=0$. Dar ecuația (4.8) este echivalentă cu

$$\varphi_1(t)-t\,\overline{\varphi_1'(t)}-\overline{\varphi_2(t)}+\beta_0\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{\bar{t}}+\frac{t}{\bar{t}^2}\right)=g(t), \tag{4.9}$$

astfel încît, înmulțind această relație cu $\mathrm{d}\bar{t}$, integrînd de-a lungul lui C, apoi ținînd seamă că β_0 este o constantă reală, obținem $\beta_0=0$ dacă $\mathcal{J}\left\{\int_C g(t)\,\mathrm{d}t\right\}=[\psi]_C=0$. Funcția de curent fiind presupusă uniformă, rezultă că soluția ecuației (4.8) coincide cu cea a ecuației (4.6).

Ne propunem acum să arătăm că ecuația (4.8) admite întotdeauna o soluție; în conformitate cu cele de mai sus, aceasta demonstrează și existența soluției ecuației (4.6), dacă funcția de curent este uniformă. În acest scop, să observăm mai întîi că deoarece nucleele $\vartheta'(t_0,t)$ și $e^{2i\vartheta(t_0,t)}\,\vartheta'(t_0,t)$ sînt continue pe C_k pentru orice t_0 și t, iar $g(t)$ este continuă pe C_k, ecuației (4.8) i se poate aplica alternativa lui Fredholm. Fie atunci: $\omega_0(t)$ soluția ecuației omogene corespunzătoare lui (4.8); $\beta_{k,0}$, $(k=1,\ldots,m)$, constante imaginare și $\beta_{0,0}$ o constantă reală, definite cu ajutorul lui $\omega_0(t)$ prin relații de tipul (4.3), respectiv (4.7); $\overset{\circ}{\varphi}_{1,0}(z)$, $\overset{\circ}{\varphi}_{2,0}(z)$ funcțiile lui Goursat definite de $\omega_0(t)$ și $\beta_{k,0}$ prin relații de tipul (4.1), (4.2). În conformitate cu teorema de unicitate, dacă $g(t)\equiv 0$ avem $\gamma_k=0$, $(k=1,\ldots,m)$, și $\overset{\circ}{\varphi}_{1,0}(z)=az+\alpha$, $\overset{\circ}{\varphi}_{2,0}(z)=\overline{\alpha}$, a fiind o constantă reală, iar α o constantă complexă. Introducînd aceste expresii în formulele de tipul (4.1), (4.2) care definesc pe $\overset{\circ}{\varphi}_{1,0}(z)$, $\overset{\circ}{\varphi}_{2,0}(z)$, apoi notînd

$$i\,\varphi_1^*(t)=\omega_0(t)+\sum_{k=1}^{m}\frac{\beta_{k,0}}{t-z_k}-at-\alpha, \tag{4.10}$$

$$i\,\varphi_2^*(t)=-\overline{\omega_0(t)}-\bar{t}\,\omega_0'(t)+\sum_{k=1}^{m}\frac{\beta_{k,0}}{t-z_k}-\overline{\alpha}, \tag{4.11}$$

obținem

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\varphi_1^*(t)\,\mathrm{d}t}{t-z}=0, \qquad \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\varphi_2^*(t)\,\mathrm{d}t}{t-z}=0, \qquad z\in D. \tag{4.12}$$

Rezultă că funcțiile $\varphi_1^*(z)$ și $\varphi_2^*(z)$ sînt olomorfe în D_k, $(k=0, 1, \ldots, m)$, și nule la infinit. Să înlocuim acum, în relația de definiție a lui $\beta_{0,0}$, funcția $\omega_0(t)$ prin expresia sa dată de (4.10) și să observăm că $\beta_{0,0}=0$ deoarece $g(t)\equiv 0$; se deduce $a=0$. Pe de altă parte, eliminînd pe $\omega_0(t)$ între (4.10) și (4.11), apoi înmulțind relația obținută cu $\mathrm{d}t$ și integrînd de-a lungul lui C_k, $(k=1, \ldots, m)$, rezultă $\beta_{k,0}=0$, $(k=1, \ldots, m)$, astfel încît (4.10) și (4.11) dau

$$\overline{\varphi_1^*(t)}-\bar{t}\varphi_1^{*\prime}(t)-\varphi_2^*(t)=-2i\,\bar{\alpha}, \quad \text{pe } C_k, (k=0,1,\ldots,m). \tag{4.13}$$

În conformitate cu teorema de unicitate, funcțiile $\varphi_1^*(z)=a_k z+\alpha_k$ și $\varphi_2^*(z)=2\,i\,\bar{\alpha}+\bar{\alpha}_k$, unde a_k sînt constante reale, α_k constante complexe, iar $a_0=\alpha_0=0$, rezolvă problema la limită pentru domeniile D_k, $(k=0, 1, \ldots, m)$, și pentru condițiile la limită (4.13). Însă, deoarece $\varphi_1^*(\infty)=\varphi_2^*(\infty)=0$, rezultă $\alpha=0$, deci $\omega_0(t)\equiv 0$ pe C_0 și $\omega_0(t)=ia_k t+i\alpha_k$ pe C_k, $(k=1, \ldots, m)$. Introducînd aceste expresii în relațiile de forma (4.3), (4.4) care definesc constantele $\beta_{k,0}$, și $\gamma_{k,0}$, apoi ținînd seamă că $\beta_{k,0}=0$, $\gamma_k=0$, $(k=1, \ldots, m)$, rezultă, în definitiv, $\omega_0(t)\equiv 0$ pe C_k, $(k=1, \ldots, m)$, ceea ce demonstrează teorema.

4.2. **Cazul domeniilor conținînd punctul de la infinit.** Dacă domeniul D este exterior curbelor C_k, $(k=1, \ldots, m)$, simple, închise, disjuncte, de clasă C^3 și situate în întregime la distanță finită, funcțiile lui Goursat sînt de forma (1.37)—(1.39), constantele Γ_1 și Γ_2 fiind date prin ipoteză. Prin analogie cu cazul precedent, vom lua funcțiile $\mathring{\varphi}_1(z)$ și $\mathring{\varphi}_2(z)$ de forma (4.1)—(4.3), iar constantele γ_k și Γ_0 de forma

$$\gamma_k=\int_{C_k}\omega(t)\,\mathrm{d}s, \qquad (k=1,\ldots, m-1), \tag{4.14}$$

$$\gamma_m=-\sum_{k=1}^{m-1}\gamma_k=-\int_{C_1\cup\ldots\cup C_{m-1}}\omega(t)\,\mathrm{d}s, \qquad \Gamma_0=\int_{C_m}\omega(t)\,\mathrm{d}s. \tag{4.15}$$

Funcția $\omega(t)$, care trebuie să aibă pe conturul $C=C_1\cup\ldots\cup C_m$ o derivată hőlderiană, este în acest caz dată de ecuația integrală

$$\omega(t_0)+\frac{1}{\pi}\int_C \omega(t)\,\vartheta'(t_0,t)\,\mathrm{d}t+\frac{1}{\pi}\int_C \overline{\omega(t)}\,e^{2i\vartheta(t_0,t)}\,\vartheta'(t_0,t)\,\mathrm{d}t+$$
$$+\sum_{k=1}^{m}\left[\frac{\beta_k}{t_0-z_k}-\frac{\bar{\beta}_k}{\bar{t}_0-\bar{z}_k}\left(1-\frac{t_0}{\bar{t}_0-\bar{z}_k}\right)\right]+\Gamma_0+ \tag{4.16}$$
$$+\sum_{k=1}^{m-1}\left[\gamma_k\left(\ln\frac{t_0-z_k}{t_0-z_m}+\ln\frac{\bar{t}_0-\bar{z}_k}{\bar{t}_0-\bar{z}_m}\right)-\gamma_k\frac{t_0(\bar{z}_k-\bar{z}_m)}{(\bar{t}_0-\bar{z}_k)(\bar{t}_0-\bar{z}_m)}\right]=\mathring{g}(t_0),$$

unde $\overset{\circ}{g}(t_0) = u + iv + (\overline{\Gamma}_1 - \Gamma_1)\, t_0 + \overline{\Gamma}_2 \bar{t}_0$, iar $\vartheta(t_0, t) = \arg\,(t - t_0)$, z_k fiind puncte fixe arbitrare situate în interiorul conturelor C_k.

Pentru a demonstra existența soluției ecuației integrale (4.16), vom aplica alternativa lui Fredholm. Fie : $\omega_0(t)$ soluția ecuației integrale omogene corespunzătoare lui (4.16); $\beta_{k.0}$, $(k = 1, \ldots, m)$, constante complexe definite de $\omega_0(t)$ prin relații de forma (4.3); $\overset{\circ}{\varphi}_{1.0}(z)$, $\overset{\circ}{\varphi}_{2.0}(z)$ funcțiile lui Goursat definite de $\omega_0(t)$ și $\beta_{k.0}$ prin relații de forma (4.1), (4.2). În virtutea lui (2.3), funcțiile

$$\varphi_{1.0}(z) = \overset{\circ}{\varphi}_{1.0}(z) + \sum_{k=1}^{m} \gamma_k \ln\,(z - z_k) + \Gamma_0, \tag{4.17}$$

$$\varphi_{2.0}(z) = \overset{\circ}{\varphi}_{2.0}(z) - \sum_{k=1}^{m} \overline{\gamma}_k \ln\,(z - z_k) \tag{4.18}$$

satisfac relația $\varphi_{1.0}(t) - t\overline{\varphi'_{1.0}(t)} - \overline{\varphi_{2.0}(t)} = 0$ pe C, deci, în conformitate cu paragraful 2.2, avem $\gamma_k = 0$, $(k = 1, \ldots, m)$, și $\varphi_{1.0}(z) = \overset{\circ}{\varphi}_{1.0}(z) + \Gamma_0 = 0$, $\varphi_{2.0}(z) = \overset{\circ}{\varphi}_{2.0}(z) = 0$. Dar $\overset{\circ}{\varphi}_{1.0}(\infty) = 0$, deci $\Gamma_0 = 0$. Procedînd în continuare ca în paragraful 4.1, obținem $\omega_0(t) = a_k t + \alpha_k$ pe C_k. Din relațiile (4.3), (4.14) și (4.15) rezultă atunci succesiv : $a_k = 0$, $(k = 1, \ldots, m)$, deoarece $\beta_{k.0} = 0$; $\alpha_k = 0$, $(k = 1, \ldots, m - 1)$, deoarece $\gamma_k = 0$; $\alpha_m = 0$, deoarece $\Gamma_0 = 0$. Avem deci $\omega_0(t) \equiv 0$ pe C.

Să considerăm acum un domeniu D a cărui frontieră este constituită de curbele închise și situate în întregime la distanță finită C_k, $(k=1,\ldots,m)$, precum și de curba C_0 conținînd punctul de la infinit, toate aceste curbe fiind simple, disjuncte și de clasă C^3; originea axelor de coordonate va fi presupusă situată în exteriorul atît al domeniului $D + C$, $(C = C_0 \cup C_1 \cup \ldots \cup C_m)$, cît și al domeniilor mărginite D_k limitate respectiv de curbele C_k, $(k = 1, \ldots, m)$. Funcțiile lui Goursat fiind în acest caz de tipul (1.40), (1.41), vom lua funcțiile $\varphi_1^{\circ}(z)$ și $\varphi_2^{\circ}(z)$ de forma (4.1) — (4.3), iar constantele γ_k de forma (4.4). Funcția necunoscută $\omega(t)$, care trebuie să fie astfel încît toate integralele să existe pentru orice $z \in D$, este definită de ecuația integrală

$$\begin{aligned} \omega(t_0) &+ \frac{1}{\pi}\int_C \omega(t)\, \mathrm{d}\vartheta(t_0, t) + \frac{1}{\pi}\int_C \overline{\omega(t)}\, e^{2i\vartheta(t_0,t)}\, \mathrm{d}\vartheta(t_0, t) + \\ &+ \sum_{k=1}^{m}\left[\frac{\beta_k}{t_0 - z_k} - \frac{\overline{\beta}_k}{\bar{t}_0 - \bar{z}_k}\left(1 - \frac{t_0}{\bar{t}_0 - \bar{z}_k}\right)\right] + \\ &+ \sum_{k=1}^{m} \gamma_k\left[\ln\left(1 - \frac{z_k}{t_0}\right) + \ln\left(1 - \frac{\bar{z}_k}{\bar{t}_0}\right)\right] - \frac{t_0}{\bar{t}_0}\sum_{k=1}^{m}\frac{\overline{\gamma}_k \bar{z}_k}{\bar{t}_0 - \bar{z}_k} = g^{\circ}(t_0), \end{aligned} \tag{4.19}$$

unde $g^{\circ}(t_0) = u + iv + (\overline{\Gamma}_1 - \Gamma_1)\, t_0 + \overline{\Gamma}_2\, \bar{t}_0$, $\vartheta(t_0, t) = \arg\,(t - t_0)$, iar $\mathrm{d}\vartheta(t_0, t) = \vartheta'(t_0, t)\,\mathrm{d}t$, z_k fiind puncte fixe arbitrare situate în interiorul curbelor C_k, $(k = 1, \ldots, m)$.

În vederea demonstrării teoremei de existență pentru ecuația (4.19), să observăm că, în general, prezența unei curbe frontieră conținînd punctul de la infinit nu permite aplicarea alternativei lui Fredholm. Această dificultate poate fi însă evitată, dacă ținem seama că C_0 este o curbă de clasă C^3. Într-adevăr, (*cf.* § 3.1), inversiunea $\zeta = 1/z$ transformă curbele C_k, $(k = 0, 1, \ldots, m)$, în curbe C_k^* simple, închise, de clasă C^3 și situate în întregime la distanță finită, curba C_0^* trecînd prin originea axelor de coordonate. Se poate arăta că derivatele de primele două ordine ale funcției $\vartheta^*(\tau_0, \tau) = \vartheta(1/\tau_0, 1/\tau)$, în raport cu ambele variabile, sînt continue pe C_k^*, iar derivatele de ordinul al treilea sînt continue pe C_k^*, cu excepția punctelor $\tau = \tau_0$, ([1], 308–309). Ecuația integrală obținută din (4.19) prin inversiunea $\zeta = 1/z$, și pe care o vom însemna prin (4.19*), este deci de tip Fredholm. Fie atunci : $\omega_0^*(\tau) = \omega_0(1/\tau)$ soluția ecuației omogene corespunzătoare lui (4.19*), iar $\overset{\circ}{\varphi}_{1,0}(z)$, $\overset{\circ}{\varphi}_{2,0}(z)$ funcțiile lui Goursat definite de $\omega_0(t)$ prin relații de forma (4.1) — (4.3). În virtutea proprietăților funcției $\vartheta^*(\tau_0, \tau)$, derivatele de primele două ordine ale lui $\omega_0^*(\tau)$ sînt continue pe C^*, $(C^* = C_0^* \cup C_1^* \cup \ldots \cup C_m^*)$ iar $\omega_0^*(0) = 0$; urmează că funcția $\omega_0^*(\tau)/\tau$ satisface pe C^* o condiție Hőlder. Funcția $-(1/2\pi i)\,\zeta \int_{C^*} \omega_0^*(\tau) \times \times d\tau/\tau(\zeta - \tau)$, obținută din integrala din membrul drept al lui (4.1) prin inversiunea $\zeta = 1/z$, este atunci continuă în $D^* + C^*$, inclusiv în punctul $\tau = 0$. Rezultă că funcția $\overset{\circ}{\varphi}_{1.0}(z)$ este continuă în $D + C$, inclusiv în punctul de la infinit, iar pentru z mare $\overset{\circ}{\varphi}_{1.0}(z) = O(1)$. Tot astfel, funcțiile $\overset{\circ}{\varphi}{}'_{1.0}(z)$ și $\overset{\circ}{\varphi}_{2,0}(z)$ sînt continue în $D + C$, inclusiv în punctul de la infinit, iar $\overset{\circ}{\varphi}{}'_{1,0}(z) = O(1/z^2)$ și $\overset{\circ}{\varphi}_{2.0}(z) = O(1)$ pentru z mare. Funcția $\overset{\circ}{\varphi}_{1,0}(z) - z\,\overline{\overset{\circ}{\varphi}{}'_{1,0}(z)} - \overline{\overset{\circ}{\varphi}_{2,0}(z)}$ este așadar continuă în $D + C$ și mărginită în vecinătatea punctului de la infinit. Ipotezele din paragraful 2.2 fiind astfel îndeplinite, avem $\overset{\circ}{\varphi}_{1,0} = \alpha$ și $\overset{\circ}{\varphi}_{2,0} = \overline{\alpha}$ în D. În continuare, demonstrația existenței soluției este analogă celei din paragraful 4.1 : funcțiile $\varphi_1^*(t)$ și $\varphi_2^*(t)$, definite prin relații de forma (4.10), (4.11) în care $a = 0$, satisfac pe C_k relația (4.13). Deoarece expresia din membrul stîng al acestei relații este mărginită, iar $\varphi_1^{*\prime}(z) = o(1/z)$ pentru z mare, rezultă $\varphi_1^* = \beta$ și $\varphi_2^* = \overline{\beta} + 2i\overline{\alpha}$ în D, β fiind o constantă complexă. Dar $\omega_0(\infty) = 0$, deci $\omega_0 \equiv 0$ pe C_0. Pe de altă parte, pe conturele C_k, $(k = 1, \ldots, m)$, avem $\omega_0(t) = i a_k t + i \alpha_k$; însă deoarece $\beta_{k.0} = 0$ și $\gamma_k = 0$, urmează că $a_k = 0$ și $\alpha_k = 0$, astfel încît $\omega_0 \equiv 0$ pe C, sau încă $\omega_0^* \equiv 0$ pe C^*.

4.3. **Asupra rezolvării prin aproximații succesive.** Problema mișcării plane, lente și permanente a unui lichid vîscos limitat de frontiere de tipul celor considerate în această lucrare este deci complet rezolvată din punct de vedere teoretic. Totuși, construcția efectivă a soluției în cazurile concrete este destul de dificilă, dacă ne raportăm la ecuația integrală corespunzătoare. Aceasta arată interesul pe care îl prezintă metodele de aproximare, ale căror principii pot fi foarte diferite : cea considerată în continuare, și care constituie o generalizare a algoritmului lui Schwarz, poate fi pusă într-o strînsă legătură cu teoria precedentă. Să considerăm așadar un domeniu mărginit D, limitat de curba închisă exterioară C_0 situată în întregime la distanță finită, precum și de curbele închise C_k, $(k = 1, \ldots, m)$, situate în interiorul lui C_0, toate aceste curbe fiind simple, disjuncte și de clasă C^3, (fig. 1.1). Notînd cu D_0 domeniul mărginit limitat de C_0, și cu D_k domeniul exterior curbei C_k, $(k=1, \ldots, m)$, avem $D=D_0 \cap D_1 \cap \ldots \cap D_m$. Aceasta sugerează construirea soluției pentru domeniul multiplu conex D pornind de la soluțiile pentru domeniile simplu conexe D_k, $(k=0,1,\ldots, m)$. Funcțiile lui Goursat corespunzătoare domeniului D fiind de forma (1.24), (1.26), și (4.1)—(4.3), să punem

$$\overset{\circ}{\varphi}_1(z)=\sum_{k=0}^{m} \overset{\circ}{\varphi}_{1,k}(z), \qquad \overset{\circ}{\varphi}_2(z)=\sum_{k=0}^{m} \overset{\circ}{\varphi}_{2,k}(z), \tag{4.20}$$

unde

$$\overset{\circ}{\varphi}_{1,0}(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_0} \frac{\omega(t)\,\mathrm{d}t}{t-z}, \tag{4.21}$$

$$\overset{\circ}{\varphi}_{1,k}(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_k} \frac{\omega(t)\,\mathrm{d}t}{t-z}+\frac{\beta_k}{z-z_k}, \qquad (k=1, \ldots, m), \tag{4.22}$$

și analog pentru funcțiile $\overset{\circ}{\varphi}_{2,k}(z)$. Notînd $F^\circ(z)=\overset{\circ}{\varphi}_1(z)-z\overline{\overset{\circ}{\varphi}{}_1'(z)}-\overline{\overset{\circ}{\varphi}_2(z)}$ și $\overset{\circ}{F}_k(z)=\overset{\circ}{\varphi}_{1,k}(z)-z\overline{\overset{\circ}{\varphi}{}_{1,k}'(z)}-\overline{\overset{\circ}{\varphi}_{2,k}(z)}$, avem

$$F^\circ(z)=\sum_{k=0}^{m} \overset{\circ}{F}_k(z), \tag{4.23}$$

$\overset{\circ}{F}_k(z)$ fiind o funcție olomorfă în domeniul D_k. Dacă s-ar cunoaște valoarea $f_k(t)$ a funcției $\overset{\circ}{F}_k(z)$ pe conturul C_k, $(k=0,1,\ldots, m)$, problema ar reveni la rezolvarea a $m+1$ probleme la limită pentru cele $m+1$ domenii simplu conexe D_k. În vederea determinării funcțiilor $f_k(t)$, să observăm că soluția ecuațiilor integrale de tipul (4.6) sau (4.16), corespunzînd domeniului D_k, poate fi pusă sub forma

$$\omega_k(t_0)=f_k(t_0)+\int_{C_k}\left[M_k^{(1)}(t_0, t)\,f_k(t)+M_k^{(2)}(t_0, t)\,\overline{f_k(t)}\right]\mathrm{d}t, \tag{4.24}$$

funcțiile $M_k^{(1)}$ și $M_k^{(2)}$ avînd pe C_k derivate continue în raport cu variabilele t și t_0. Ținînd seamă de expresiile (4.21), (4.22), precum și de analogele lor pentru funcțiile $\overset{\circ}{\varphi}_{2,k}(z)$, rezultă

$$\overset{\circ}{F}_k(z)=\int_{C_k}\left[N_k^{(1)}(z, t)\,f_k(t)+N_k^{(2)}(z, t)\,\overline{f_k(t)}\right]\mathrm{d}t, \tag{4.25}$$

unde, pentru $z\in D_k$, funcțiile $N_k^{(1)}$ și $N_k^{(2)}$ sînt continue în raport cu ambele variabile. Relațiile (4.23), (4.25) conduc deci la următorul sistem care determină funcțiile $f_k(t)$:

$$\begin{gathered} g_n(t_0)=f_n(t_0)+\sum_{k\neq n}\int_{C_k}\left[N_k^{(1)}(t_0, t)\,f_k(t)+N_k^{(2)}(t_0, t)\,\overline{f_k(t)}\right]\mathrm{d}t, \\ \text{pe } C_n, \quad (n=0,1, \ldots, m), \end{gathered} \tag{4.26}$$

unde $\sum\limits_{k\neq n} = \sum\limits_{k=0,1,\dots,n-1,\,n+1,\dots,m}$, iar $g_n(t_0) = u + iv$ reprezintă viteza dată pe conturul C_n. Existența soluției sistemelor de forma (4.26) a fost demonstrată de D. I. Șerman, [33], în cadrul unor ipoteze corespunzînd cazului de față. În aceeași lucrare, D. I. Șerman a considerat și posibilitatea rezolvării acestor sisteme prin aproximații succesive, demonstrînd convergența acestora în cazul în care curbele C_k sînt suficient de depărtate una de alta. Acest procedeu constituie o generalizare a algoritmului lui Schwarz pentru problema lui Dirichlet. Să mai observăm că rezultatele paragrafului precedent permit extinderea acestor concluzii la domeniile conținînd punctul de la infinit.

4.4. **Rotația unui cilindru circular situat în apropierea unui perete plan infinit.** Ca aplicație a algoritmului lui Schwarz generalizat, să studiem rotația unei circumferințe C_1, de rază R și de centru fix $z = id$, într-un lichid vîscos limitat de un perete plan infinit C_0 coincizînd cu axa reală, (fig. 4.1). Fie D_0 semiplanul superior și D_1 domeniul exterior cercului C_1. Să considerăm mai întîi rotația lui C_1 în lichidul nelimitat; în acest caz

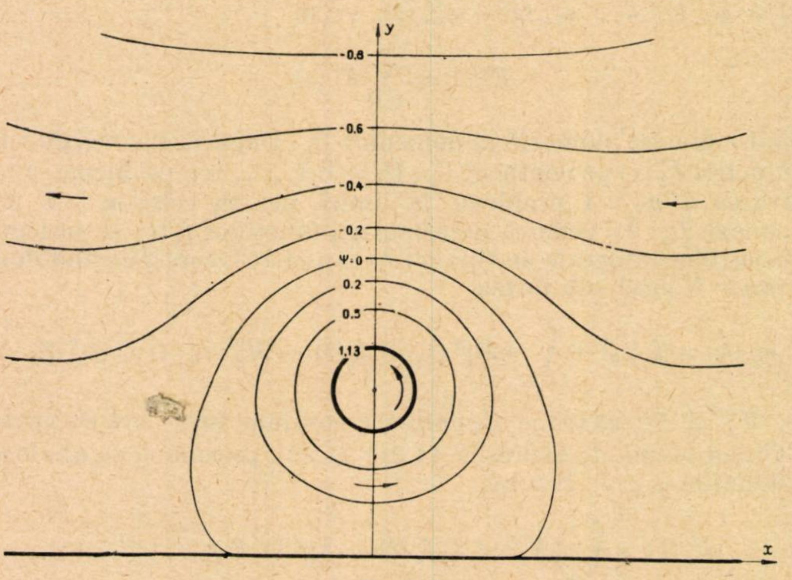


Fig. 4.1

trebuie rezolvată problema la limită pentru domeniul D_1, astfel încît să avem $g_{1,1}(t) = u + iv = i\omega\,(t - id)$ pe C_1, ω fiind viteza unghiulară constantă a lui C_1. Aplicînd formulele (3.30), (3.31), se obține

$$\Phi_{1,1}(\zeta) = 0, \qquad \Phi_{2,1}(\zeta) = i\omega R\zeta, \tag{4.27}$$

sau încă, revenind la planul fizic,

$$\varphi_{1,1}(z) = 0, \qquad \varphi_{2,1}(z) = \frac{i\omega R^2}{z - id}, \tag{4.28}$$

deci, în virtutea lui (1.9),

$$\psi_1 = -\frac{\omega R^2}{2} \ln [x^2 + (y - d)^2]. \tag{4.29}$$

Din expresiile (4.28) se deduce $g_{0,1}(t) = u + iv = i\omega R^2/(t + id)$ pe axa reală C_0; deci, pentru a satisface pe aceasta condiția de aderență, a doua aproximație va consta din soluția problemei la limită pentru domeniul D_0, astfel încît să avem $g_{0.2}(t) = -g_{0,1}(t)$ pe C_0. Formulele (3.33), (3.34) dau

$$\varphi_{1.2}(z) = -\frac{i\omega R^2}{z + id}, \qquad \varphi_{2.2}(z) = -i\omega R^2 \left[\frac{1}{z + id} - \frac{id}{(z + id)^2}\right], \tag{4.30}$$

deci

$$\psi_2 = \omega R^2 \left\{\frac{1}{2} \ln [x^2 + (y + d)^2] + \frac{x^2 - y^2 + d^2}{x^2 + (y + d)^2}\right\}. \tag{4.31}$$

Tot astfel, a treia aproximație va fi constituită de soluția problemei la limită pentru domeniul D_1, cu condiția la limită

$$g_{1,3}(t) = i\omega R^2 \left[\frac{1}{t + id} + \frac{1}{\bar{t} - id} - \frac{t - id}{(\bar{t} - id)^2}\right], \tag{4.32}$$

pe C_1. Funcțiile lui Goursat și funcția de curent corespunzătoare sînt

$$\varphi_{1,3}(z) = \frac{\omega R^4}{8 d^3}\left\{2 + \frac{3R^2 - 4d^2}{2id(z - id) - R^2} + \frac{R^4}{[2id(z - id) - R^2]^2}\right\}, \tag{4.33}$$

$$\varphi_{2,3}(z) = -\frac{\omega R^4}{2d}\left[\frac{1}{2id(z - id)} + \frac{1}{2id(z - id) - R^2}\right] - \left(\frac{R^2}{z - id} - id\right)\varphi'_{1,3}(z), \tag{4.34}$$

$$\psi_3 = \frac{\omega R^4}{8d^3}\left\{2y - 2d\left(1 - \frac{2d^2}{R^2}\right)\ln [x^2 + (y - d)^2] - \frac{4d^3}{R^2}\ln (m^2 + s^2) + \right. \tag{4.35}$$

$$\left. + \frac{(3R^2 - 4d^2)(sx - my) + (4d^3 + R^2 d)m}{m^2 + s^2} + R^4 \frac{(y + d)(m^2 - s^2) - 2msx}{(m^2 + s^2)^2}\right\},$$

unde s-a notat $m = 2d(y - d) + R^2$ și $s = 2dx$. În sfîrșit, a patra aproximație va fi constituită de soluția problemei la limită pentru semiplanul superior D_0, cu condiția la limită

$$\begin{aligned} g_{0,4}(t) = -\frac{\omega R^4}{8d^3}\left\{2 + 4id\left(1 - \frac{2d^2}{R^2}\right)\frac{1}{t + id} + \frac{3R^2 - 4d^2}{2id(t - id) - R^2} + \right. \\ + \frac{R^4}{[2id(t - id) - R^2]^2} - \frac{1}{R^2}\cdot\frac{3R^4 - 4R^2 d^2 + 16d^4}{2id(t + id) + R^2} + \\ \left. + \frac{5R^4 - 12R^2 d^2}{[2id(t + id) + R^2]^2} - \frac{2R^6}{[2id(t + id) + R^2]^3}\right\} \end{aligned} \tag{4.36}$$

pe axa reală C_0. Funcţiile lui Goursat şi funcţia de curent corespunzătoare sînt

$$\varphi_{1,4}(z) = -\frac{\omega R^4}{8d^3}\left\{1 + 4id\left(1 - \frac{2d^2}{R^2}\right)\frac{1}{z+id} - \frac{1}{R^2}\cdot\frac{3R^4 - 4R^2d^2 + 16d^4}{2id(z+id) + R^2} + \right. \tag{4.37}$$

$$\left. + \frac{5R^4 - 12R^2d^2}{[2id(z+id) + R^2]^2} - \frac{2R^6}{[2id(z+id) + R^2]^3}\right\},$$

$$\varphi_{2,4}(z) = \frac{\omega R^4}{8d^3}\left\{1 - \frac{3R^2 - 4d^2}{2id(z+id) + R^2} + \frac{R^4}{[2id(z+id) + R^2]^2}\right\} - z\varphi'_{1,4}(z), \tag{4.38}$$

$$\psi_4 = \frac{\omega R^4}{8d^3}\left\{-2y + 2d\left(1 - \frac{2d^2}{R^2}\right)\ln[x^2 + (y+d)^2] + \right.$$

$$+ \frac{4d^3}{R^2}\ln(n^2 + s^2) + 4d\left(1 - \frac{2d^2}{R^2}\right)\frac{x^2 - y^2 + d^2}{x^2 + (y+d)^2} + \tag{4.39}$$

$$+ \frac{1}{dR^2}\cdot\frac{(6R^6 - 17R^4d^2 + 12R^2d^4 - 16d^6)n + d(3R^4 - 4R^2d^2 + 16d^4)(sx + ny)}{n^2 + s^2} -$$

$$- \frac{1}{d}\cdot\frac{(4R^6 - 11R^4d^2 + 12R^2d^4)(n^2 - s^2) + d(5R^4 - 12R^2d^2)[(n^2 - s^2)y + 2nsx]}{(n^2 + s^2)^2} +$$

$$\left. + \frac{1}{d}\cdot\frac{R^6(R^2 - 2d^2)(n^3 - 3ns^2) + 2dR^6[(n^3 - 3ns^2)y + (3n^2s - s^3)x]}{(n^2 + s^2)^3}\right\},$$

unde s-a notat $n = -2d(y + d) + R^2$ şi $s = 2dx$. Figura 4.1 reprezintă liniile de curent corespunzătoare primelor patru aproximaţii şi valorilor $R = 1$, $d = 4$. Soluţia exactă a acestei probleme, obţinută de R. A. Frazer printr-un procedeu particular, [14], este, cu aproximaţia unei constante şi presupunînd $R = 1$, următoarea :

$$\psi = \frac{\omega}{2}(\bar{z} - z)\left(\frac{z - id}{z^2 + a^2} - \frac{\bar{z} + id}{\bar{z}^2 + a^2}\right) - \frac{i\omega d}{a}\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{z}{a} - \operatorname{arc\,tg}\frac{\bar{z}}{a}\right), \tag{4.40}$$

unde $a^2 = d^2 - 1$. Aceasta ne permite să constatăm că, dacă ne limităm la primele patru aproximaţii, eroarea corespunzătoare cazului de faţă nu depăşeşte 6 %.

Primită la redacţie la 19 septembrie 1962

LA MÉTHODE DES FONCTIONS ANALYTIQUES DANS L'HYDRODYNAMIQUE DES LIQUIDES VISQUEUX

RÉSUMÉ

Dans ce Mémoire, on applique la théorie des fonctions d'une variable complexe à l'étude des mouvements plans, lents et permanents des liquides visqueux. Différemment des travaux précédents publiés dans ce domaine, on envisage surtout les problèmes généraux concernant la forme de la solution, son existence et son unicité, ainsi que la possibilité d'utiliser certaines méthodes d'approximation.

Dans le premier chapitre on établit, sous une nouvelle forme, les expressions de la vitesse, de la pression et des tensions, à l'aide de deux fonctions analytiques $\varphi_1(z)$ et $\varphi_2(z)$, appelées *fonctions de Goursat*. Par la suite, on étudie la forme et les propriétés de ces fonctions, une attention spéciale étant accordée aux domaines contenant le point à l'infini.

Le second chapitre contient l'énoncé du problème aux limites. Comme partout dans ce travail, on considère séparément : 1°) le cas des domaines multiplement connexes limités par des courbes fermées ; 2°) le cas des domaines extérieurs à un nombre fini de courbes fermées entièrement situées à distance finie ; 3°) le cas des domaines dont la frontière est formée par un nombre fini de courbes fermées entièrement situées à distance finie, ainsi que par une seule courbe contenant le point à l'infini. On démontre ensuite le théorème d'unicité pour chacun des trois types de domaines considérés, et, comme conséquence, on énonce le paradoxe de Stokes sous une forme très générale.

Dans le troisième chapitre on donne la solution du problème aux limites dans le cas des domaines simplement connexes, bornés ou contenant le point à l'infini, ainsi que les théorèmes d'existence correspondants. La méthode utilisée, basée sur les propriétés de l'intégrale de Cauchy, est analogue à celle développée par N. I. Muskhelishvili dans la théorie de l'élasticité : elle permet d'obtenir une solution par des quadratures, si le domaine occupé par le liquide visqueux peut être représenté conformément sur le cercle unité par une fonction rationnelle. Dans le cas des domaines plus généraux, on indique la possibilité d'appliquer une méthode d'approximation.

Dans le quatrième chapitre on considère le cas des domaines multiplement connexes et, pour chacun des trois types de domaines définis ci-dessus, on réduit le problème à une équation intégrale analogue à celles obtenues dans la théorie de l'élasticité par G. Lauricella et D. I. Sherman. Ces équations permettent de démontrer le théorème d'existence, ainsi que d'indiquer la convergence d'un algorithme d'approximations successives généralisant celui de Schwarz pour le problème de Dirichlet.

Les résultats sont appliqués à quelques cas concrets, dont la résolution est poussée jusqu'aux calculs numériques.

BIBLIOGRAFIE

1. IVO BABUŠKA, KAREL REKTORYS, FRANTIŠEK VYČICHLO, *Mathematische Elastizitätstheorie der ebenen Probleme*. Akademie-Verlag, Berlin 1960.
2. I-DEE CHANG, ROBERT FINN, *On the solutions of a class of equations occurring in continuum mechanics, with application to the Stokes paradox*. Arch. Rational Mech. Anal., **7**, 388–401 (1961).
3. W. R. DEAN, *Note on the slow motion of fluid*. Philos. Magazine, (7) **13**, 585–600 (1932).
4. — *Note on the slow motion of fluid*. Philos. Magazine, (7) **15**, 929–936 (1933).
5. — *Note on the slow motion of fluid*. Philos. Magazine, (7) **21**, 727–744 (1936).
6. — *Note on the slow motion of fluid*. Proc. Cambridge Philos. Soc., **32**, 598–613 (1936).
7. — *Note on the slow motion of fluid*. Proc. Cambridge Philos. Soc., **35**, 27–43 (1939).
8. — *Note on the slow motion of fluid*. Proc. Cambridge Philos. Soc., **36**, 300–313 (1940).
9. — *On the shearing motion of fluid past a projection*. Proc. Cambridge Philos. Soc., **40**, 19–36 (1944).
10. — *Note on the shearing motion of fluid past a projection*. Proc. Cambridge Philos. Soc., **40**, 214–222 (1944).
11. — *Slow motion of viscous liquid in a semi-infinite channel*. Proc. Cambridge Philos. Soc., **47**, 127–141 (1951).
12. — *Slow motion of viscous liquid near a half-pitot tube*. Proc. Cambridge Philos. Soc., **48**, 149–167 (1952).
13. ROBERT FINN, WALTER NOLL, *On the uniqueness and non-existence of Stokes flows*. Arch. Rational Mech. Anal., **1**, 97–106 (1957).
14. R. A. FRAZER, *On the motion of circular cylinders in a viscous fluid*. Philos. Trans. Roy. Soc. London, (A) **225**, 93–130 (1925).
15. GOURSAT, *Sur l'équation* $\Delta\Delta u = 0$. Bull. Soc. Math. France, **26**, 236–237 (1898).
16. GEORGE GREEN, *Solutions of some problems in viscous flow*. Philos. Magazine, (7) **35**, 250–262 (1944).
17. DAN GH. IONESCU, *Asupra aplicării funcţiilor de variabilă complexă în hidrodinamica fluidelor vîscoase*. Stud. Cerc. Domeniul Construcţiilor, **1**, 147–155 (1955).
18. — *Asupra aplicării teoriei funcţiilor de variabilă complexă în hidrodinamica fluidelor vîscoase. I. Formulele fundamentale*. Com. Acad. R. P. Romîne, **6**, 981–984 (1956).
19. — *Asupra aplicării teoriei funcţiilor de variabilă complexă în hidrodinamica fluidelor vîscoase. II. Rezolvarea primei probleme la limită pentru cerc şi coroana circulară, cu ajutorul seriilor de puteri*. Com. Acad. R. P. Romîne, **6**, 1059–1063, (1956).
20. — *Asupra aplicării teoriei funcţiilor de variabilă complexă în hidrodinamica fluidelor vîscoase. III. Soluţia pentru domenii simplu conexe*. Acad. R. P. Romîne Stud. Cerc. Mecanică Aplicată, **13**, 47–50 (1962).
21. — *Asupra aplicării teoriei funcţiilor de variabilă complexă în hidrodinamica fluidelor vîscoase. IV. Soluţia pentru domenii multiplu conexe*. Acad. R. P. Romîne Stud. Cerc. Mecanică Aplicată, **13**, 377–381 (1962).
22. CAIUS JACOB, *Introduction mathématique à la mécanique des fluides*. Edit. de l'Acad. R. P. Roumaine, Bucarest et Gauthier-Villars, Paris 1960.
23. S. R. KHAMRUI, *On the slow steady motion of an infinite viscous liquid due to the rotation of a cylinder*. Bull. Calcutta Math. Soc., **49**, 61–66 (1957).
24. GIUSEPPE LAURICELLA, *Sur l'intégration de l'équation relative à l'équilibre des plaques élastiques encastrées*. Acta Math., **32**, 201–256 (1909).
25. С. Г. МИХЛИН, *Интегральные уравнения и их приложения к некоторым проблемам механики, математической физики и техники*. Изд. второе, Гос. Изд. Техн. Теорет. Литературы, Москва-Ленинград 1949.
26. GR. C. MOISIL, *Metoda funcţiilor analitice în hidrodinamica lichidelor vîscoase*. Com. Acad. R. P. Romîne, **5**, 1411–1419 (1955).
27. N. I. MUSKHELISHVILI, *Sur l'intégration approchée de l'équation biharmonique*, C. R. Acad. Sci. Paris, **185**, 1184–1186 (1927).
28. Н. И. МУСХЕЛИШВИЛИ, *Некоторые основные задачи математической теории упругости*. Изд. четвертое, Изд. Акад. Наук СССР, Москва 1954.

29. G. Power, D. L. Scott-Hutton, *The slow steady motion of liquid past a semi-elliptical boss*. Pacific J. Math., **5**, 953–962 (1955).

30. — *The slow shearing motion of a liquid past a semi-infinite plane*. Pacific J. Math., **6**, 327–349 (1956).

31. — *Slow shearing motion over a hollow*. J. Franklin Inst., **263**, 431–439 (1957).

32. S. K. Roy, *On a case of slow viscous flow*. Bull. Calcutta Math. Soc., **34**, 109–127 (1942).

33. Д. И. Шерман, *Об одном методе решения статической плоской задачи теории упругости для многосвязных областей*. Акад. Наук СССР Труды Сейсм. Инст., № **54** (1935).

34. — *К решению плоской статической задачи теории упругости при заданных на границе смещениях*. Докл. Акад. Наук СССР, **17**, 911—913 (1940).

35. — *К решению плоской статической задачи теории упругости при заданных внешних силах*. Докл. Акад. Наук СССР, **18**, 25—28 (1940).

36. Б. Л. Шнеерсон, *Некоторые задачи о движении вязких жидкостей в применении к геологии*. Изв. Акад. Наук СССР Сер. Геофиз., 500—513 (1953).

37. Н. А. Слезкин, *Динамика вязкой несжимаемой жидкости*. Гос. Изд. Техн. Теорет. Литературы, Москва 1955.

38. V. Smirnoff, *Über die Ränderzuordnung bei konformer Abbildung*. Math. Ann., **107**, 313–323 (1933).

39. Cristian Stănescu, *Metoda Mushelișvili în mișcările plane ale fluidelor vîscoase incompresibile*. Acad. R. P. Romîne Bul. Științific Secț. Sti. Mat. Fiz., **9**, 395–414 (1957).

40. R. Tiffen, *Uniqueness theorems of two-dimensional elasticity theory*. Quart. J. Mech. Appl. Math., **5**, 237–252 (1952).

41. J. L. Walsh, *Über die Entwicklung einer analytischen Funktion nach Polynomen*. Math. Ann., **96**, 430–436 (1926).

DETERMINAREA LUNGIMII SALTULUI HIDRAULIC

DE

CONSTANTIN IAMANDI

INTRODUCERE

532

Rezolvarea hidraulică a problemei racordării în regim de fund a biefurilor construcţiilor hidrotehnice, este direct legată de posibilitatea determinării exacte a lungimii saltului hidraulic. Este binecunoscut faptul că amenajările din zona racordării (disipatori de energie, întăriri ale albiei etc.) necesită de multe ori un volum relativ important de învestiţii, deci lungimea acestora este necesar a fi stabilită corespunzător.

Importanţa din punct de vedere tehnic al acestei probleme este dovedită şi de numărul mare de lucrări care au încercat să dea soluţii, neexistînd însă pînă în prezent o metodă precisă de calcul. Din această cauză de multe ori se merge pe linia determinării lungimii saltului hidraulic după mai multe metode şi alegerea valorii maxime, sau într-un caz mai fericit a mediei acestor valori.

Toată această situaţie a fost desigur creată de complexitatea fenomenului respectiv, care nu a permis pînă în prezent o tratare teoretică corespunzătoare, cercetătorii abordînd calea experimentului sau a schematizării scurgerii studiate [1].

NOTAŢII FOLOSITE

h_1 = prima adîncime conjugată a saltului hidraulic egală cu adîncimea contractată în cazul amenajărilor hidrotehnice,
h_2 = a doua adîncime conjugată a saltului hidraulic,
$h_s = h_2 - h_1$ = înălţimea saltului hidraulic,
l_s = lungimea saltului hidraulic,

$\mathcal{F}r_1 = q^2/gh_1^3$ = valoarea numărului Froude în prima secţiune conjugată,
q = debitul pe unitatea de lăţime a curgerii, considerată plană,
v_1 = viteza medie pe verticală în prima secţiune conjugată,
H = energia totală în secţiune egală cu suma energiei potenţiale şi a energiei cinetice,
g = acceleraţia gravitaţională,
ρ = densitatea apei,
h_k = adîncimea critică în mişcare uniformă,
v_c = viteza medie corespunzătoare unei secţiuni avînd adîncimea egală cu adîncimea critică în mişcare uniformă,
v_2 = viteza medie pe verticală în a doua secţiune conjugată a saltului,
d = înălţimea golirii de fund în cazul curgerii pe sub o vană.

NATURA PROBLEMEI STUDIATE

Definirea lungimii saltului hidraulic nu este astăzi comună tuturor cercetătorilor, aşa cum am arătat într-o lucrare anterioară [2]. Lungimea căutată este definită astfel funcţie de diferite elemente ca proiecţia pe orizontală a vîrtejului cu ax orizontal, natura repartiţiei pe verticală a vitezei în secţiunea a doua conjugată sau natura energiilor în aval de salt.

În lucrarea de faţă se defineşte saltul hidraulic ca trecerea de la mişcarea rapidă la mişcarea lentă, considerîndu-se lungimea sa ca proiecţia pe orizontală a vîrtejului superior cu ax orizontal şi care corespunde cu lungimea de trecere de la prima la a doua înălţime conjugată (fig. 1).

Încă din anul 1838 Bélanger [3] a putut prin aplicarea teoremei cantităţilor de mişcare să stabilească relaţia dintre cele două adîncimi conjugate, considerînd fenomenul în ansamblu; relaţia obţinută a fost pe deplin verificată de practică şi ea stă la baza teoriei actuale în această problemă. Nu aceeaşi situaţie este în rezolvarea problemei lungimii saltului hidraulic, unde nu s-a putut obţine o soluţie teoretică corespunzătoare.

Cea mai recentă tratare teoretică a acestei probleme [4] consideră conturul superior al curgerii reprezentat de o undă aplatisată, ceea ce conduce la împărţirea lungimii saltului în două zone: lungimea activă şi lungimea pasivă. Lucrarea nu dă o verificare experimentală a conturului real cu unda considerată, dar compară lungimea activă a saltului cu relaţii recomandate pe baza măsurătorilor. Soluţia propusă vine după o altă rezolvare obţinută de acelaşi autor în anul 1957 [5] prin schematizarea fenomenului sub forma unui difuzor.

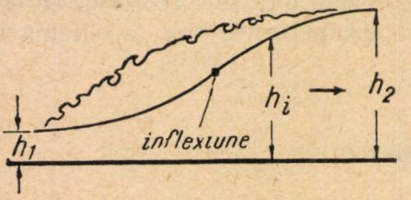


Fig. 1. — Schema saltului hidraulic.

În această direcţie considerăm că o tratare teoretică corespunzătoare se va putea obţine numai prin determinarea exactă a suprafeţei libere a curgerii în salt şi de care depinde desigur elementul căutat. În acest sens noua lucrare a lui G. G. Bogdanov [4] care consideră o nouă schematizare a suprafeţei superioare a fenomenului, apropiată după părerea noastră de realitate, face un pas înainte. Schematizarea propusă este în sensul soluţiei teoretice obţinută în determinarea conturului superior al curgerii divergente a saltului, prezentată de noi în anul 1961 [6].

Trebuie să mai amintesc că, în general, schematizările sub formă de difuzor făcute de o serie de autori dintre care şi Kozeny [7] nu corespund realităţii, după cum se va vedea în cele ce urmează.

În această situaţie am considerat necesar a prelucra materialul experimental şi teoretic existent şi a stabili o soluţie bazată pe similitudinea fenomenului respectiv.

PRELUCRAREA MATEMATICĂ A REALAŢIILOR ACTUALE DE DETERMINARE A LUNGIMII SALTULUI HIDRAULIC

Considerînd saltul hidraulic [2] începînd din prima adîncime conjugată, s-a stabilit o relaţie funcţională pentru cazul fenomenului plan produs pe un pat orizontal. Astfel stabilind ca parametrii determinanţi ai fenomenului

— densitatea,
— viteza medie în prima secţiune conjugată,
— acceleraţia gravitaţiei,
— prima adîncime conjugată,
— lungimea saltului,
— înălţimea saltului,

s-a obţinut prin aplicarea teoremei produselor următoarea egalitate

$$\frac{l_s}{h_s} = F\,(\mathcal{F}r_1). \tag{1}$$

Aceasta dovedeşte legătura care există între elementele principale ale saltului hidraulic (lungimea şi înălţimea) şi caracteristicile curgerii în prima secţiune conjugată.

Bazat pe următoarele relaţii existente între elementele saltului hidraulic [8]:

$$h_2 = 0.5 h_1 \left(\sqrt{1 + 8\mathcal{F}r_1} - 1\right) \tag{2}$$

şi

$$h_c = h_1 \sqrt[3]{\mathcal{F}r_1} \tag{3}$$

am trecut la prelucrarea adimensională a unui număr de 39 relaţii recomandate astăzi de literatura de specialitate. Marea majoritate a acestor relaţii sînt obţinute experimental, referindu-se la lungimea considerată în modul mai sus expus. În formă rezumativă, rezultatele acestei prelucrări sînt trecute în tabela 1.

Tabela 1

Relaţii pentru determinarea lungimii saltului hidraulic

Nr.	Autor	Relaţia recomandată	Relaţia prelucrată	Observaţii
1	2	3	4	5
1	Aravin V. I.	$l_s = 0{,}33 \dfrac{A}{h_k} \dfrac{(h_2 - h_1)^3 h_1^2}{h_2}$	$\dfrac{l_s}{h_s} = \dfrac{0{,}165}{\mathcal{F}r_1} \cdot \dfrac{\left(\sqrt{1 + 8\,\mathcal{F}r_1} - 3\right)^2}{\sqrt{1 + 8\,\mathcal{F}r_1} - 1} \cdot$ $\cdot \left[0{,}54 \left(\dfrac{\sqrt{1 + 8\,\mathcal{F}r_1} - 1}{2\sqrt[3]{\mathcal{F}r_1}}\right)^{4{,}35} + 75\right]$	$A = 0{,}54 \left(\dfrac{h_2}{h_k}\right)^{4{,}35} + 75$
2	Aravin V. I.	$l_s = 5{,}4\,(h_2 - h_1)$	$\dfrac{l_s}{h_s} = 5{,}4$	
3	Bakhmeteff B. A. Matzke A. E.	$l_s = 5\,(h_2 - h_1)$	$\dfrac{l_s}{h_s} = 5{,}0$	
4	Bobin N.	$l_s = h_k \left[4{,}4 \dfrac{h_2}{h_k} + 0{,}6 - \dfrac{5}{\left(\dfrac{h_2}{h_k}\right)^3}\right]$	$\dfrac{l_s}{h_s} = \dfrac{2\sqrt[3]{\mathcal{F}r_1}}{\sqrt{1+8\,\mathcal{F}r_1} - 3} \cdot$ $\cdot \left[2{,}2 \dfrac{\sqrt{1+8\,\mathcal{F}r_1} - 1}{\sqrt[3]{\mathcal{F}r_1}} + 0{,}6 - \dfrac{40}{\left(\sqrt{1+8\,\mathcal{F}r_1} - 1\right)^3}\right]$	
5	Bogdanov G. G.	$l_s = u_1 \left[\dfrac{2\left(h_s + \dfrac{u_1}{2g} - \dfrac{u_2}{2g}\right)}{g}\right]^{1/2}$	$\dfrac{l_s}{h_s} = \dfrac{2{,}22717\sqrt{2\,\mathcal{F}r_1}}{\sqrt{1+8\,\mathcal{F}r_1} - 3} \sqrt{1{,}04123\,\mathcal{F}r_1 \cdot \left[0{,}59547 - \dfrac{4}{\left(\sqrt{1+8\,\mathcal{F}r_1} - 1\right)^2}\right] + \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{1+8\,\mathcal{F}r_1} - 3\right)}$	$u_1 = k_1 \dfrac{q}{h_1}$; $u_2 = k_2 \dfrac{q}{h_2}$ $a = \dfrac{k_1^2}{4}$; $b = \dfrac{k_2}{4}$ $k_1 = 1{,}113585$ $k_2 = 1{,}44300$

6	Bogdanov G. G.	$l_s = 4,71\, h_2 - 1,57\, h_1$	$\frac{l_s}{h_s} = \frac{4,71\left(\sqrt{1+8\,\mathcal{F}r_1}-1\right) - 3,14}{\sqrt{1+8\,\mathcal{F}r_1} - 3}$	
7	Certousov M. D.	$l_s = 10,3\, h_1\left(\sqrt{\mathcal{F}r_1} - 1\right)^{0,81}$	$\frac{l_s}{h_s} = 20,6\,\frac{\left(\sqrt{\mathcal{F}r_1} - 1\right)^{0,81}}{\sqrt{1+8\,\mathcal{F}r_1} - 3}$	
8	Chiselev P. G.	$l_s = (4,0 \div 5,0)\,(h_2 - h_1)$	$\frac{l_s}{h_s} = 4,0 - 5,0$	
9	Douma J. H.	$l_s = 3,0\, h_2$	$\frac{l_s}{h_s} = 3,00\,\frac{\sqrt{1+8\,\mathcal{F}r_1} - 1}{\sqrt{1+8\,\mathcal{F}r_1} - 3}$	
10	Einwachter J.	$l_s = \left(15,20 - 0,241\,\frac{h_2}{h_1}\right)\left[\left(\frac{h_2}{h_1} - 1\right) - \frac{v_1^2\left(\frac{h_2}{h_1} - 1\right)}{\left(\frac{h_2}{h_1}\right)^2 \cdot g}\right]$	$\frac{l_s}{h_s} = \left(\sqrt{1+8\,\mathcal{F}r_1} - 3\right)\left[15,20 - 0,1206\left(\sqrt{1+8\,\mathcal{F}r_1} - 1\right)\right]\left[\frac{0,5}{h_s} - \frac{4\,\mathcal{F}r_1}{\left(\sqrt{1+8\,\mathcal{F}r_1} - 1\right)^2\left(\sqrt{1+8\,\mathcal{F}r_1} - 3\right)}\right]$	Relaţia nu poate fi prelucrată adimensional deoarece nu este omogenă.
11	Escande L.	$l_s = d\left(6\,\frac{h_2}{d} - 6\right)$	$\frac{l_s}{h_s} = 6 - \frac{6,46}{\sqrt{1+8\,\mathcal{F}r_1} - 3}$	
12	Gaziev E. G.	$l_s = \sqrt{2\,\frac{k_2^2}{k_1} \cdot \frac{v_1^2}{g}\,(h_2 - h_1)}$	$\frac{l_s}{h_s} = 3,86765\sqrt{\frac{\mathcal{F}r_1}{2\left(\sqrt{1+8\,\mathcal{F}r_1} - 3\right)}}$	k_1 şi k_2 au valorile recomandate de G. G. Bogdanov.

Tabela 1 (continuare)

Nr.	Autor	Relaţia recomandată	Relaţia prelucrată	Observaţii
1	2	3	4	5
13	Gaziev E. G.	$l_s = h_1\left[6{,}5 + 4{,}22\left(\frac{h_2}{h_1} - 1\right)\right]$	$\frac{l_s}{h_s} = 4{,}22 + \frac{13}{\sqrt{1+8\,\mathcal{F}r_1} - 3}$	
14	Ivancenko A.	$l_s = 10{,}6\,\mathcal{F}r_1^{-0\,185}\,(h_2 - h_1)$	$\frac{l_s}{h_s} = \frac{10{,}6}{\mathcal{F}r_1^{0\,185}}$	
15	Kinney C. W.	$l_s = 6{,}02\,(h_2 - h_1)$	$\frac{l_s}{h_s} = 6{,}02$	
16	Knapp F.	$l_s = \left(62{,}5\,\frac{h_1}{H_1} + 11{,}3\right)\left[\frac{v_1 - v_2}{2g} - (H_1 - H_2)\right]$	$\frac{l_s}{h_s} = \left(\frac{125}{2 + \mathcal{F}r_1} + 11{,}3\right)\left[1 - \frac{4\,\mathcal{F}r_1}{\left(\sqrt{1+8\,\mathcal{F}r_1} - 1\right)\left(\sqrt{1+8\,\mathcal{F}r_1} - 3\right)}\right]$	
17	Knapp F.	$l_s = \left(62{,}6\,\frac{h_1}{H_1} + 11{,}3\right)\frac{(h_1 - h_2)^2}{2h_2}$	$\frac{l_s}{h_s} = \frac{\sqrt{1+8\,\mathcal{F}r_1} - 3}{\sqrt{1+8\,\mathcal{F}r_1} - 1}\left(\frac{62{,}6}{2 + \mathcal{F}r_1} + 5{,}65\right)$	
18	Kozeny J.	$l_s = 9\,h_1\left(\sqrt{\mathcal{F}r_1} - 1{,}57\right)$	$\frac{l_s}{h_s} = 18\,\frac{\sqrt{\mathcal{F}r_1} - 1{,}57}{\sqrt{1+8\,\mathcal{F}r_1} - 3}$	
19	Lencastre A.	$l_s = (5 \div 7)\,(h_2 - h_1)$	$\frac{l_s}{h_s} = 5 \div 7$	
20	Lencastre A.	$l_s = 5\,h_2$	$\frac{l_s}{h_s} = 5\,\frac{\sqrt{1+8\,\mathcal{F}r_1} - 1}{\sqrt{1+8\,\mathcal{F}r_1} - 3}$	

21	Lipatov K. I.	$l_s = m\,(h_2 - h_1)$	$\frac{l_s}{h_s} = m$	$m = 3 \div 6$
22	Ludin A.	$l_s = \frac{h_2 - h_1}{\frac{1}{4{,}5} - \frac{1}{6\,\mathcal{F}r_1}}$	$\frac{l_s}{h_s} = 27\,\frac{\mathcal{F}r_1}{6\,\mathcal{F}r_1 - 4{,}5}$	
23	Ludin A. Barnes D. P.	$l_s = h_2\left(4{,}5 - \frac{v_1}{v_c}\right)$	$\frac{l_s}{h_s} = \left(4{,}5 - \sqrt[3]{\mathcal{F}r_1}\right)\,\frac{\sqrt{1+8\,\mathcal{F}r_1} - 1}{\sqrt{1+8\,\mathcal{F}r_1} - 3}$	
24	Makkaveev V. M.	$l_s = \frac{1}{2\varepsilon}\,\frac{h_2^2 + h_1 h_2 - 2h_1^2}{h_2\,(h_2 + h_1)}\,(h_2 - h_1)$	$\frac{l_s}{h_s} = 5{,}81395\,\frac{\sqrt{1+8\,\mathcal{F}r_1} - 3}{\sqrt{1+8\,\mathcal{F}r_1} - 1}\left(1 + \frac{2}{\sqrt{1+8\,\mathcal{F}r_1} - 1}\right)$	$\varepsilon = 0{,}086$
25	Makkaveev V. M. Konovalov I. M	$l_s = \frac{1}{2\varepsilon}\,\frac{h_2^2 + h_1 h_2 - 2h_1^2}{h_2\,(h_2 + h_1)}\,(h_2 - h_1)$	$\frac{l_s}{h_s} = 6{,}4103\,\frac{\sqrt{1+8\,\mathcal{F}r_1} - 3}{\sqrt{1+8\,\mathcal{F}r_1} - 1}\left(1 + \frac{2}{\sqrt{1+8\,\mathcal{F}r_1} - 1}\right)$	$\varepsilon = 0{,}078$
26	Maţman B. A.	$l_s = \varepsilon \cdot h_1\left[\left(\frac{h_2}{h_1}\right)^2 - 1\right]$	$\frac{l_s}{h_s} = \left(\sqrt{1+8\,\mathcal{F}r_1} + 1\right)\left(\frac{5{,}4}{\sqrt{1+8\,\mathcal{F}r_1} - 1} - 0{,}03\right)$	$\varepsilon = 5{,}4\,\frac{h_1}{h_2} - 0{,}6$
27	Mello Flores J. O.	$l_s = k\ \mathrm{Ln.}\left(\frac{h_2}{h_1}\right)$	—	Nu se dau valori pentru k — se face remarca că este o funcţie de $\mathcal{F}r_1$
28	Montagne E. Bernadac M.	$l_s = \frac{q}{2.\beta.\theta} \cdot \frac{(h_1 + h_2)^2}{h_1 \cdot h_2^3}$	$\frac{l_s}{h_s} = \frac{2\,\mathcal{F}r_1}{\sqrt{1+8\,\mathcal{F}r_1} - 3}\left(\frac{\sqrt{1+8\,\mathcal{F}r_1} + 1}{\sqrt{1+8\,\mathcal{F}r_1} - 1}\right)^2\,\frac{\frac{\sqrt{g}}{2\cdot\beta\theta}}{h_2\sqrt{h_1}}$	$\beta = 0{,}75$ θ se determină prin măsurători ale vitezei în dreptul lui h_2
29	Page N.	$l_s = 5{,}6\,h_2$	$\frac{l_s}{h_s} = 5{,}6\,\frac{\sqrt{1+8\,\mathcal{F}r_1} - 1}{\sqrt{1+8\,\mathcal{F}r_1} - 3}$	
30	Pavlovski I. I.	$l_s = \frac{1}{2}\,[4{,}5\,h_2 + 5\,(h_2 - h_1)]$	$\frac{l_s}{h_s} = 2{,}25\,\frac{\sqrt{1+8\,\mathcal{F}r_1} - 1}{\sqrt{1+8\,\mathcal{F}r_1} - 3} + 2{,}5$	

Tabela 1 (continuare)

Nr.	Autor	Relaţia recomandată	Relaţia principală	Observaţii
1	2	3	4	5
31	Posey C. J. Woodward S. M.	$l_s = (4{,}5 \div 7{,}00)\ (h_2 - h_1)$	$\frac{l_s}{h_s} = 4{,}5 \div 7{,}00$	
32	Riegel R. M. Berbe J. C.	$l_s = 5\ (h_2 - h_1)$	$\frac{l_s}{h_s} = 5{,}00$	
33	Safranez K.	$l_s = 5{,}9\ h_1 \sqrt{\left(\frac{h_k}{h_1}\right)^3}$	$\frac{l_s}{h_s} = 11{,}8 \frac{\sqrt{\mathcal{F}r_1}}{\sqrt{1+8\,\mathcal{F}r_1}-3}$	
34	Safranez K.	$l_s = 5{,}2\ h_2$	$\frac{l_s}{h_s} = 5{,}20 \frac{\sqrt{1+8\,\mathcal{F}r_1}-1}{\sqrt{1+8\,\mathcal{F}r_1}-3}$	
35	Smetana J.	$l_s = 6\ (h_2 - h_1)$	$\frac{l_s}{h_s} = 6{,}00$	
36	Şaumian V. A	$l_s = 3{,}6\ h_2\left(1 - \frac{h_1}{h_2}\right)\left(1 + \frac{h_1}{h_2}\right)^2$	$\frac{l_s}{h_s} = 3{,}6\left(\frac{\sqrt{1+8\,\mathcal{F}r_1}+1}{\sqrt{1+8\,\mathcal{F}r_1}-1}\right)^2$	
37	Taraimovici I. I.	$l_s = 2{,}8\ (1{,}9\ h_2 - h_1)$	$\frac{l_s}{h_s} = \frac{5{,}32\left(\sqrt{1+8\,\mathcal{F}r_1}-1\right) - 5{,}6}{\sqrt{1+8\,\mathcal{F}r_1}-3}$	
38	Woyciki K.	$l_s = \left(8{,}00 - 0{,}05 \frac{h_2}{h_1}\right)(h_2 - h_1)$	$\frac{l_s}{h_s} = 8{,}00 - 0{,}025\ \left(\sqrt{1+8\,\mathcal{F}r_1}-1\right)$	
39	Wu C. K.	$l_s = 10\ \mathcal{F}r_1^{-0.16}\ (h_2 - h_1)$	$\frac{l_s}{h_s} = \frac{10{,}00}{\mathcal{F}r_1^{0{,}16}}$	

NOTĂ: Relaţiile au fost trecute în ordinea alfabetică a autorilor.
Se aminteşte că cea mai veche relaţie este dată în anul 1917 de către autorii Montagne şi Bernadac, iar cea mai recentă este dată de către Bogdanov în anul 1962.

STABILIREA RELAȚIEI DE DETERMINARE A LUNGIMII SALTULUI HIDRAULIC

Majoritatea relațiilor prezentate de diverși autori și prelucrate pe baza relației funcționale (1) au desigur recomandări asupra domeniilor de folosire. Pentru a pune însă în evidență valabilitatea acestora am dat valori numărului $\mathcal{F}r_1$ în intervalul 1—300 (cu aceasta acoperind necesitățile tehnice) prezentînd pe grafice rezultatele numerice.

Urmărind graficele obținute se pot scoate în evidență următoarele :

1. Relația funcțională stabilită anterior este verificată de materialul experimental existent astăzi în literatura de specialitate, deci ea prezintă într-adevăr similitudinea fenomenului studiat.

2. Relațiile de determinare a lungimii saltului hidraulic recomandate tehnicii astăzi, se pot grupa în 3 categorii funcție de modul de prezentare a dependenței funcționale (1) (vezi figurile 2, 3, 4).

3. Prima grupă de relații prezentată în graficul din figura 2 grupează majoritatea relațiilor și în special ultimele realizări ca aceea a lui G. G. Bogdanov [4] și măsurătorile lui A. Elevatorski [9].

4. Grupa a 2-a prezentată în graficul din figura 3 oferă un tablou curios prin aspectul total opus al variației față de prima grupă. În această categorie este cuprins un număr redus de relații.

5. Ultima grupă considerată (figura 4) cuprinde relații care nu expun o dependență a fenomenului studiat de caracteristicile curgerii în prima secțiune conjugată.

6. Dintre cele trei grupe amintite considerăm valabile relațiile cuprinse în prima grupă (fig. 2), aceasta deoarece variația generală a funcției are în primul rînd o justificare fizică. Astfel prin efectul de presiune și frecare pe care curgerea superioară îl are asupra curgerii divergente de bază a saltului (care crește o dată cu creșterea relativă a valorii numărului $\mathcal{F}r_1$ și respectiv a înălțimii saltului), se va produce o accentuare a curburilor suprafeței de separare a celor două mișcări, accentuare ce va conduce la micșorarea relativă a saltului considerat.

În același timp în această grupă se cuprind marea majoritate a relațiilor bazate pe măsurători și recomandate astăzi.

7. În ceea ce privește valabilitatea curbelor din figura 2, conform recomandărilor actuale, se poate considera practic de la $\mathcal{F}r_1 \geqslant 3$. Totuși se face remarca asupra legăturii care există între saltul ondulat și saltul hidraulic propriu-zis, trecerea făcîndu-se în mod continuu. Aceasta are susținere și prin structura fenomenului studiat, desprinderea particulelor [2] și respectiv formarea curgerii de suprafață făcîndu-se continuu prin creșterea numărului $\mathcal{F}r_1$.

8. Relațiile a căror prezentare grafică este făcută în graficul din figura 3, se consideră eronate fiind în opoziție cu însăși interpretarea fenomenului studiat. Aceste relații au fost obținute în marea majoritate prin tratarea teoretică pe baza unei schematizări a fenomenului.

9. Grupa a treia cuprinde relații ce nu corespund unei tratări dialectice a fenomenului și care deci nu pot prezenta o soluție reală a problemei. Relațiile au apărut datorită unor concluzii obținute pe baza experimentărilor efectuate pentru un interval restrîns al numărului $\mathcal{F}r_1$,

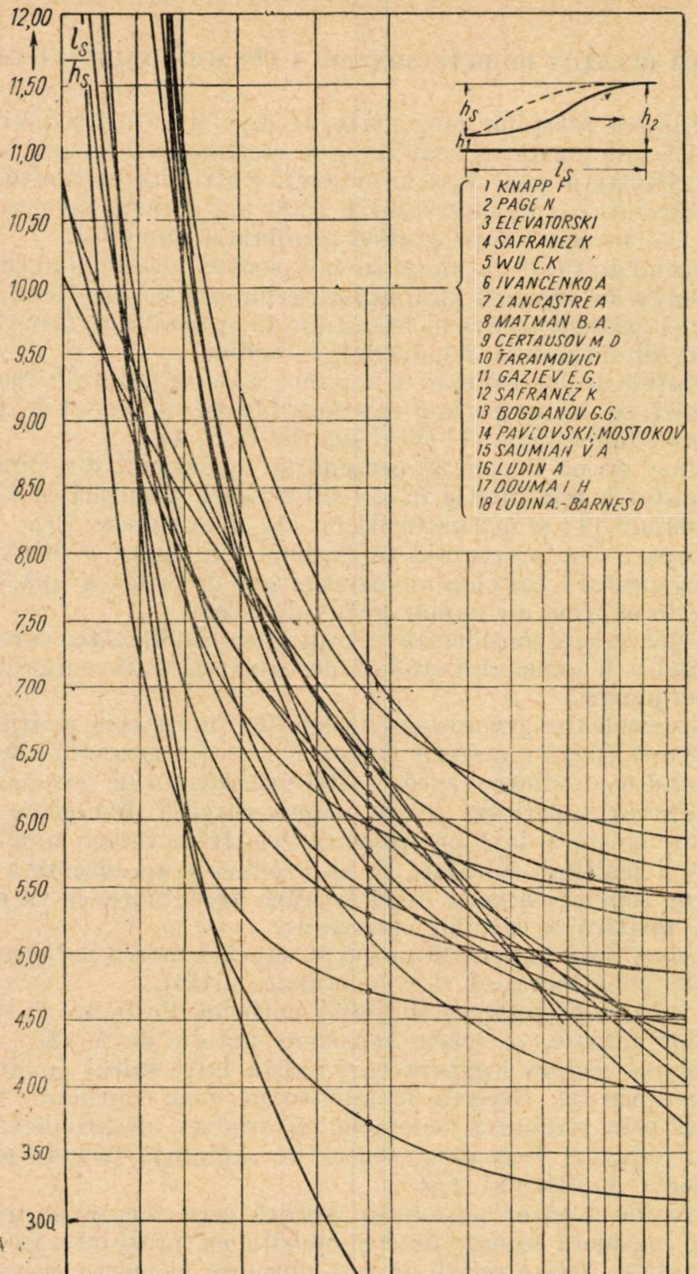


Fig. 2. — Variaţia funcţiei $l_s/h_s = F(Fr_1)$ pentru prima categorie de relaţii.

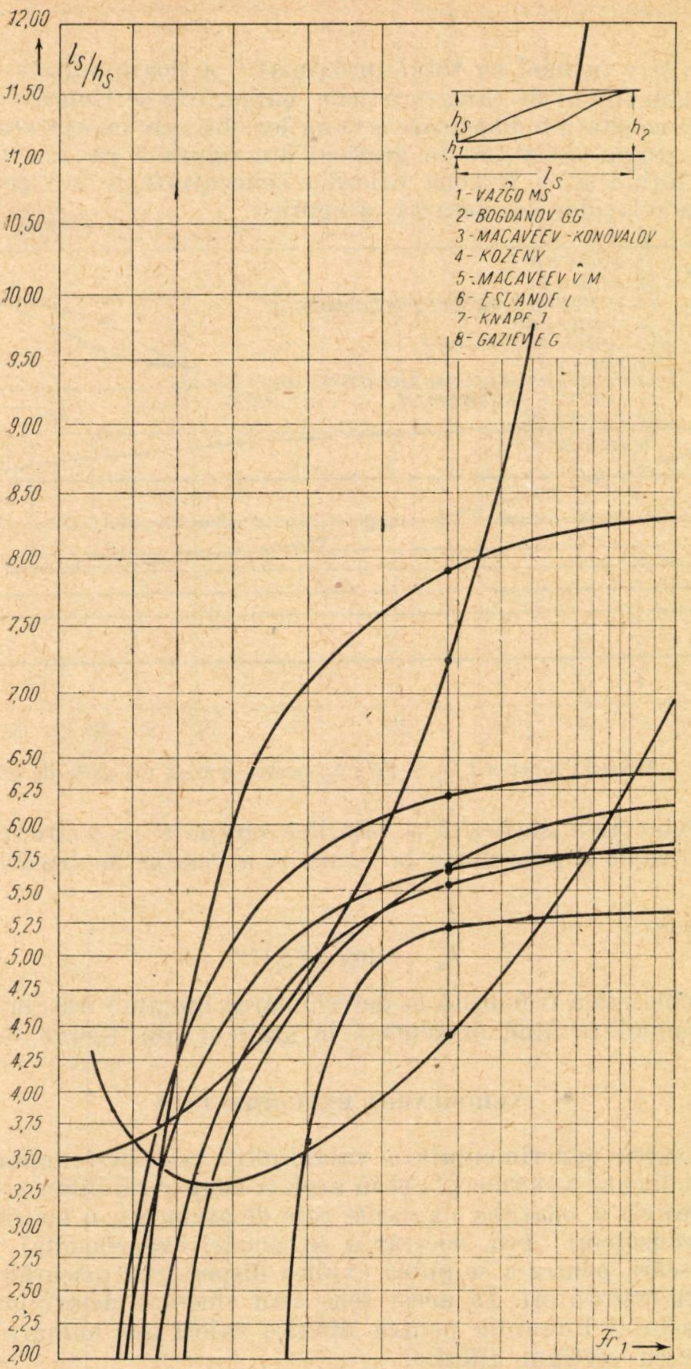


Fig. 3. — Variaţia funcţiei $l_s/h_s = F(\mathcal{F}r_1)$ pentru a doua categorie de relaţii.

interval pe care în mod cu totul aproximativ se poate admite o independență a fenomenului de caracteristicile curgerii în secțiunea contractată.

10. Se constată o dispersare a valorilor obținute cu ajutorul relațiilor din prima grupă, înfățișînd în graficul din figura 5 cu *A* zona pe care acestea se întind și cu *B* zona valorilor concentrate și în care se înscriu majoritatea relațiilor din această categorie.

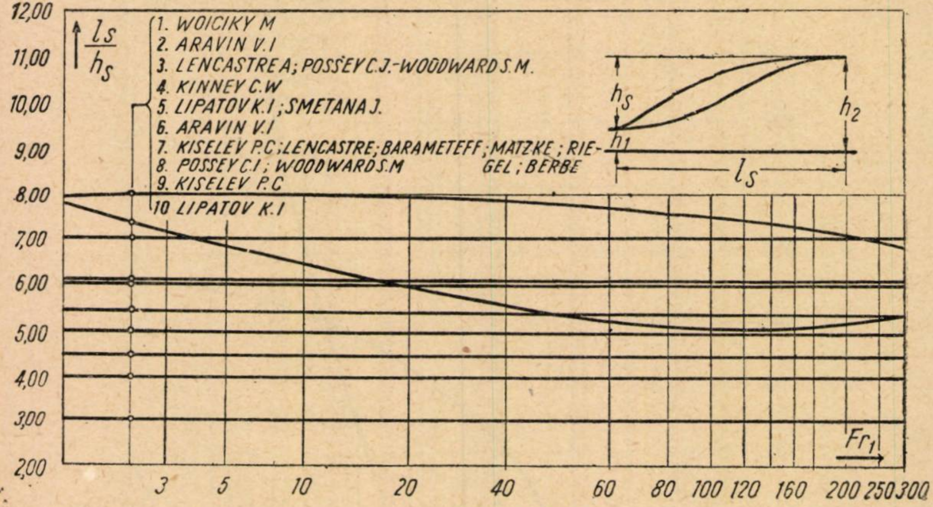


Fig. 4. — Variația funcției $l_s/h_s = F(\mathcal{F}r_1)$ pentru a treia categorie de relații.

11. Prelucrarea statistică a valorilor obținute cu ajutorul relațiilor din prima grupă și prezentate în figura 2, a condus la următoarea egalitate.

$$\frac{l_s}{h_s} = \frac{6{,}52}{(\log \mathcal{F}r_1)^{0{,}43}} \tag{4}$$

care se recomandă a fi folosită la determinarea lungimii saltului hidraulic, curba recomandată fiind prezentată în graficul din figura 5.

VERIFICAREA EXPERIMENTALĂ

Verificarea experimentală a valabilității relației funcționale a saltului a fost făcută anterior [2] și în același timp posibilitatea prelucrării pe baza acesteia a relațiilor existente este de asemenea o verificare.

Am considerat însă necesar a se urmări experimental fenomenul la diferite scări, pentru a se putea explica dispersarea măsurătorilor efectuate de diverși autori. În acest sens s-au efectuat determinări asupra lungimii saltului hidraulic pentru diferite valori ale numărului $\mathcal{F}r_1$ în trei canale cu secțiuni diferite.

Ca și în cazul precedent mișcarea fiind relativ stabilizată, se lansau plutitori pe suprafață în prima secțiune conjugată, determinîndu-se momentul în care ei apărînd în aval la suprafață erau reîntorși către amonte pe fața superioară a vîrtejului. Lungimea căpătată era comparată cu distanța de la secțiunea inițială la secțiunea în care reapărea valoarea presiunii γh_2 pe fundul canalului și care caracteriza mișcarea uniformă aval. De asemenea, aceste rezultate se comparau cu distanța la care tangenta la suprafața liberă devenea orizontală, distanță la care se poate considera că saltul a luat sfîrșit. Valorile reale au fost considerate mediile măsurătorilor efective, din cauza pulsațiilor [1] din cele două secțiuni conjugate.

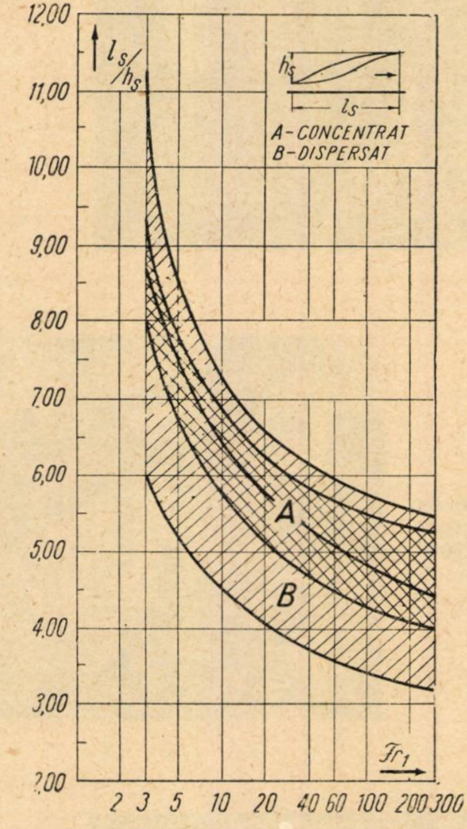


Fig. 5. — Zonele de grupare a valorilor $l_s/h_s = F(\mathcal{F}r_1)$ date de relațiile din grupa întîia. În zona *A* este prezentată curba recomandată, exprimată de relația (4).

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM KÖZPONTI KÖNYVTÁRA 1848

Dimensiunile secțiunilor transversale ale canalelor vitrate utilizate au fost 0,30 × 0,30; 0,60 × 0,60 și 1,00 × 1,00, lungimile lor fiind de 10,00 m; canalele au fost prevăzute cu prize de determinare a presiunilor pe patul rigid orizontal și cu instalație de profilometrie. În figurile 6, 7 și 8 sînt prezentate în ordinea mărimii secțiunilor vederile de ansamblu al instalațiilor experimentale folosite.

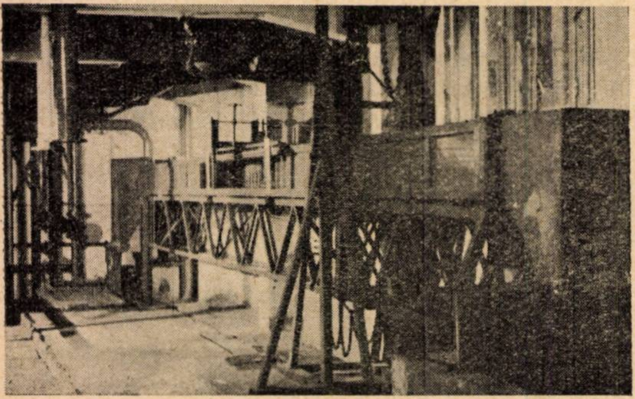
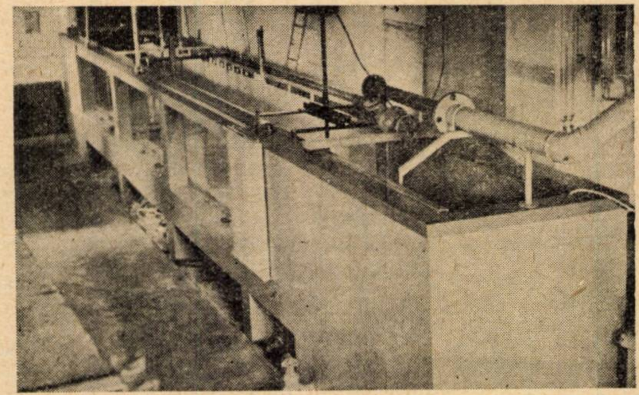


Fig. 6. — Vedere de ansamblu a canalului vitrat cu secţiune transversală 0,30 × 0,30.

Fig. 7. — Vedere de ansamblu a canalului vitrat cu secţiune transversală 0,60 × 0,60.



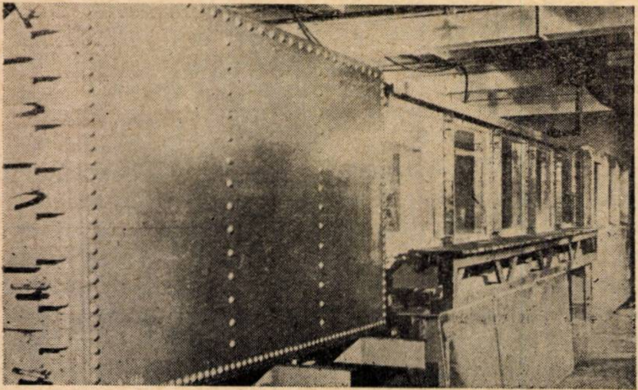


Fig. 8. — Vedere de ansamblu a canalului vitrat cu secţiune transversală 1,00 × 1,00.

Rezultatele măsurătorilor sînt prezentate în figura 9 şi în care se constată că pentru o aceeaşi caracteristică a curgerii în secţiunea iniţială (aceeaşi valoare a numărului $\mathcal{F}r_1$) lungimile căpătate depind de secţiunea canalului de experimentare. Astfel la dimensiuni mici ale canalelor, respectiv la scări mari de modelare apar fenomene suplimentare care nu mai asigură condiţiile ipotezei curgerii plane şi care duc la o modificare a suprafeţei libere şi respectiv la modificarea lungimii saltului.

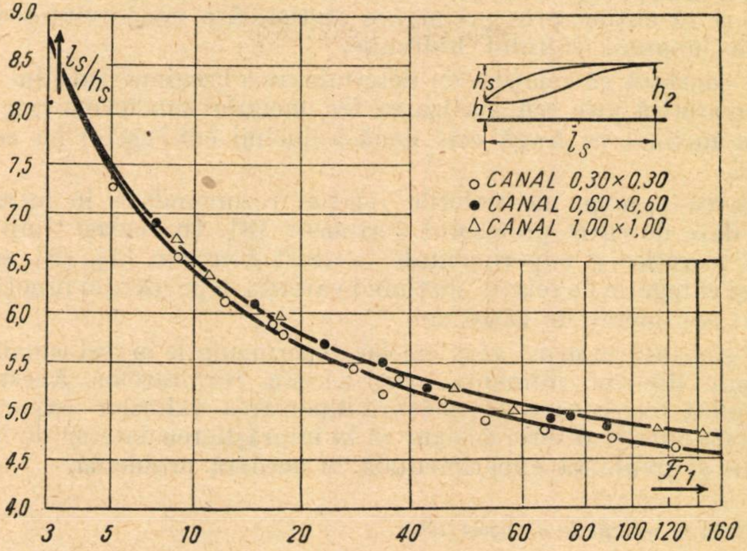


Fig. 9. — Influenţa dimensiunilor secţiunii transversale a canalului asupra rezultatelor experimentale.

Dimensiunile mici ale canalului care duc în special la apariţia influenţei pereţilor laterali (chiar dacă rugozitatea lor este redusă la maximum) vor amplifica o serie de fenomene secundare ca aerarea curgerii superficiale, mărirea pulverizării, accentuarea tensiunilor superficiale etc.

Rezultatele noastre experimentale considerăm că dau în primul rînd o explicaţie asupra dispersării măsurătorilor date de literatura de specialitate şi în al doilea rînd atrag atenţia asupra alegerii scărilor geometrice de modelare ale unor astfel de fenomene.

Dispersarea rezultatelor de laborator este în acelaşi timp explicată de greutăţile de experimentare ce apar în cercetarea saltului hidraulic ca şi de alte cauze ca diferenţa de evacuare a apei către secţiunea contractată (deversare, golire de fund etc.).

CONCLUZII

Determinarea exactă a lungimii saltului hidraulic are importanţă pentru tehnică, de ea depinzînd dimensiunile amenajărilor în zona de racordare în regim de fund a construcţiilor hidrotehnice.

Cu toate că încă din anul 1838 a fost stabilită relaţia între înălţimile conjugate ale saltului hidraulic, în ceea ce priveşte lungimea nu a fost stabilită o soluţie teoretică corespunzătoare. De asemenea, materialul vast experimental existent nu oferă o metodă unică de calcul.

Pe baza relaţiei funcţionale (1) au fost prelucrate relaţiile şi măsurătorile existente, stabilindu-se trei grupe de astfel de date.

Prin interpretarea naturii fenomenului se stabileşte grupa de relaţii valabile şi se obţine prin prelucrare statistică o nouă relaţie de determinare a lungimii saltului hidraulic.

Se constată că relaţiile de determinare a lungimii saltului obţinute pe cale teoretică prin schematizarea fenomenului sub forma unui difuzor (un plan înclinat ce leagă cele două adîncimi conjugate) nu corespund realităţii.

Foarte aproape de valorile relaţiei recomandate în lucrare, sînt valorile date de către profesorul Certousov [8]. În acelaşi timp ultimele realizări teoretice şi experimentale în acest domeniu [5], [9], se înscriu în aceeaşi categorie de relaţii, susţinînd variaţia dependenţei funcţionale (1) în sensul considerat de către noi.

Se constată în urma verificărilor experimentale în trei canale vitrate cu secţiuni diferite, influenţa scării asupra rezultatelor. Aceste observaţii explică într-o oarecare măsură dipersarea valorilor experimentale obţinute de diferiţi autori; desigur că la împrăştierea datelor de laborator contribuie şi greutatea experimentală în această problemă.

Primită la redacţie la 4 august 1962

DÉTERMINATION DE LA LONGUEUR DU SAUT HYDRAULIQUE

RÉSUMÉ

En considérant l'importance pour la technique d'apporter des précisions dans le problème de la longueur du saut hydraulique, l'auteur présente ici son stade actuel et étudie, sans dimensions, le matériel actuellement existant dans la littérature de spécialité.

En vertu de la relation fonctionnelle du ressaut, établie antérieurement en tenant compte de la similitude du phénomène étudié, on établit trois catégories de relations et on prouve la validité d'une de ces catégories. C'est en ce sens que l'on établit une nouvelle relation pour la détermination de la longueur du saut hydraulique, valable dans l'intervalle $3 \leqslant \mathcal{F}r_1 \leqslant 300$.

Au moyen des mesures faites en laboratoires, l'auteur vérifie les résultats théoriques et établit l'influence qu'exerce l'échelle sur la recherche de ce phénomène complexe.

BIBLIOGRAFIE

1. C. IAMANDI, *Contribuţii teoretice şi experimentale la problema conjugării prin salt hidraulic a biefurilor construcţiilor hidrotehnice*. Dizertaţie. Institutul de construcţii, Bucureşti, 1962.
2. — *Asupra similitudinii saltului hidraulic*. St. cerc. mec. apl., Acad. R.P.R., *5* (1962).
3. I. B. BÉLANGER, *Résumé de leçon, 1838, Paris*. Mémoires de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, Paris, 1849—1850.
4. Г. Г. БОГДАНОВ, *Расчет длины гидравлического прыжка*, Гидротехническое строительство, *7*, 51—53 (1956).
5. — *Определение длины гидравлических прыжков*. Гидротехничекое строительство, *4*, 42—44 (1962).
6. C. IAMANDI, *Asupra saltului hidraulic*. Colocviul internaţional de mecanica fluidelor. Braşov, octombrie 1961, 23—28.
7. I. KOZENY, *Hydraulik*. Wien, 1953.
8. М. Д. ЧЕРТОУСОВ, *Специальный курс гидравлики*. Москва-Ленинград, 1949.
9. A. ELEVATORSKI, *Energy Dissipator*. New York 1960.

CURGEREA TRANZITORIE A GAZELOR ÎN CONDUCTE MAGISTRALE

II. DETERMINAREA COEFICIENTULUI DE FRECARE HIDRODINAMIC

DE

H. PASCAL

532 : 55

Într-o lucrare precedentă [1] am examinat problema restabilirii presiunii într-o conductă magistrală de gaze după oprirea curgerii în punctul terminus al acesteia. În ceea ce priveşte condiţia iniţială, s-a admis că curgerea pînă în momentul întreruperii se efectua în regim staţionar, iar închiderea ventilului se produce instantaneu.

După cum s-a arătat [1], studierea regimurilor tranzitorii a curgerii gazelor în conducte magistrale conduce, în anumite cazuri, la elaborarea unor metode practice şi comode, care printr-o simplă prelucrare matematică a datelor obţinute din măsurători permit să determinăm valorile caracteristicilor hidrodinamice reale ale conductei şi unele proprietăţi fizice ale fluidelor transportate.

Astfel, pentru cazul cînd înregistrăm grafic variaţia presiunii în timp, după închiderea ventilului în punctul terminus al conductei, ceea ce în mod practic se poate realiza cu ajutorul manometrului diferenţial, de tipul celor utilizate pentru măsurarea presiunii de fund la sondele de ţiţei şi gaze [2], putem determina valoarea reală a coeficientului de frecare hidrodinamic şi anumite proprietăţi fizice ale gazelor transportate.

Spre deosebire de metodele bazate pe curgerea staţionară, unde valoarea coeficientului de frecare hidrodinamic se referă la toată lungimea conductei, în cazul existenţei pe ultima porţiune a acesteia a unei zone cu frecare mai mare sau mai mică, comparativ cu restul lungimii, datorită unei rugozităţi diferite sau micşorării secţiunii conductei rezultată în urma depunerii impurităţilor solide şi lichide, aplicarea metodei de restabilire a presiunii permite punerea în evidenţă a acestei zone, care în exploatarea conductelor magistrale prezintă o mare importanţă practică.

În ceea ce privește existența zonei cu o frecare diferită, menționată mai sus, aceasta se poate determina din curba de restabilire a presiunii, reprezentată într-o diagramă semilogaritmică, unde influența existenței acesteia, pe ultima porțiune a conductei, se manifestă prin abaterea de la variația liniară a presiunii în porțiunea inițială a curbei*). Valoarea intervalului de timp după care variația presiunii devine liniară depinde, bineînțeles, de mărimea coeficientului de frecare și de întinderea acestei zone de-a lungul conductei.

Trebuie să remarcăm, în afară de existența unei limite inferioare, care delimitează influența zonei cu frecare diferită pe curba restabilirii presiunii, mai avem datorită scăderii debitului în timp și o limită superioară, condiționată în urma trecerii de la regimul de curgere turbulent la cel laminar. Această trecere se poate remarca, de asemenea, în diagrama semilogaritmică, datorită schimbării pantei drepte a cărei valoare depinde în acest caz numai de viscozitatea gazelor. Dacă debitul, înaintea întreruperii curgerii, este relativ mare, atunci durata intervalului de timp unde curgerea va fi efectiv laminară este redusă, iar creșterea presiunii va fi de asemenea mică, comparativ cu cazul turbulent. Utilizarea acestei porțiuni a dreptei poate permite să stabilim valoarea reală medie a coeficientului de viscozitate, care se referă la întregul volum al conductei.

În felul acesta, apare posibilitatea prelucrării matematice a datelor obținute din măsurători, utilizînd porțiunea rectilinie de creștere a presiunii, ceea ce permite stabilirea valorii reale a coeficientului de frecare hidrodinamic care se referă la lungimea conductei neafectată de prezența unei zone de frecare diferită pe ultima porțiune a acesteia. Prin urmare, comparînd valoarea stabilită prin metoda curgerii staționare, care se referă la toată lungimea conductei, incluzînd și această zonă, cu cea rezultată prin metoda curgerii tranzitorii, putem obține informații extrem de utile, pentru practica exploatării conductelor magistrale în condiții normale, asupra stării acestora din punct de vedere al frecării.

Pe de altă parte, studierea curgerii tranzitorii contribuie de asemenea și la rezolvarea problemelor de automatizare a transportului gazelor la distanțe mari, unde în general pentru asigurarea funcționării în condiții optime a instalațiilor de telecomandă, telemăsură și telecontrol apare necesar să cunoaștem variația în timp a presiunii și debitului în diferite puncte de pe traseul conductei, cînd în punctele de consum apar perturbații datorită modificării regimului de exploatare, precum și durata timpului de stabilizare a curgerii. De ex. se poate menționa cazul cînd în punctul de consum se extrage din conductă o cantitate de gaze cu un debit mai mare sau mai mic decît se introduce în punctul de alimentare. Din acest motiv, presiunea în punctul de alimentare va scădea după un anumit timp, care depinde de caracteristicile hidrodinamice ale conductei, dimensiunile geometrice ale acesteia, precum și de alți factori. Pentru preîntîmpinarea scăderii presiunii, dar mai ales pentru asigurarea exploatării conductei la regimul impus, este necesar ca instalația de telecomandă să acționeze asupra reglării debitului deschizînd ventilul după un anumit timp, astfel încît prin mărirea sau micșorarea secțiunii în timp conducta să permită pătrunderea cantității de gaze necesară. Dacă timpul nu este estimat corect, oportunitatea intervenției instalației de telecomandă nu poate fi realizată și în consecință va rezulta creșterea sau micșorarea presiunii față de cea impusă.

---

*) Pentru demonstrarea validității celor menționate a se vedea apendicele, redat la sfîrșitul lucrării.

În afară de aceasta, trebuie să mai amintim că alegerea parametrilor hidrodinamici necesari transportului gazelor în condiții optime, pentru un anumit regim de exploatare, se efectuează în prezent pe baza relațiilor de calcul deduse în supoziția curgerii staționare. Dacă ținem seamă de caracterul nestaționar, mai ales în timpul sezonului de iarnă, în urma variațiilor foarte mari ale debitului din punctele de consum, atunci este evident că influența capacității de acumulare a conductei implică necesitatea examinării acestei probleme.

În lucrarea de față vom studia unele probleme referitoare la curgerea tranzitorie, întîlnite mai frecvent la transportul gazelor prin conducte magistrale, a căror rezolvare va contribui la utilizarea rațională a rețelei de conducte existente, cît și pentru cele ce urmează să fie proiectate în viitor, precum și la stabilirea programului de lucru al instalațiilor de automatizare, care necesită, în general, cunoașterea proceselor fizice care au loc în timpul transportului.

*

Vom examina situația unei conducte magistrale care trebuie să fie exploatată într-un regim de transport capabil să asigure în punctul terminus alimentarea consumatorilor la un debit impus de necesități, iar în punctul inițial presiunea să fie menținută constantă, la anumită valoare, care de obicei se alege în funcție de pierderile hidraulice și de rezistența mecanică a conductei.

În cazul cînd vehicularea gazelor pînă în punctul de consum se efectuează cu ajutorul compresoarelor, atunci evident că valoarea presiunii de regim a compresoarelor, pe linia de refulare, va fi egală cu cea maximă admisibilă în conductă, rezultată, bineînțeles, din calcule de rezistență. În general, compresoarele sînt utilizate pentru transportul gazelor numai după ce în prealabil presiunea zăcămîntului a scăzut pînă la valoarea pentru care nu mai poate fi asigurat transportul în punctul de consum, la debitul impus de necesități. Prin urmare, în faza inițială a exploatării zăcămîntului transportul gazelor pînă la punctele de consum se realizează fără stație de compresoare, dacă presiunea în punctul de alimentare este suficient de mare pentru acoperirea pierderilor hidraulice, iar oportunitatea introducerii acestora se determină din variația presiunii zăcămîntului în funcție de cantitatea cumulativă de gaze extrase.

Pentru a facilita alegerea regimului optim de transport apare necesar, n majoritatea cazurilor, să prevedem comportarea în timp a debitului și presiunii în punctul de alimentare, în funcție de variația acestor parametri în punctul de consum, precum și de a stabili cantitatea de gaze existentă în conductă după un oarecare interval de timp. În acest mod vom putea asigura judicios regimul tehnologic optim de exploatare a zăcămîntului, considerînd sistemul conductă, sondă și zăcămînt ca un tot unitar, din punct de vedere hidrodinamic. Astfel, vom menționa, de exemplu, problema prevederii în timp a ritmului de exploatare a zăcămîntului de gaze, debitul de gaze pe sondă și numărul de sonde, în scopul menținerii în conductă a debitului și presiunii impuse de necesitățile din punctele de consum. În prezent, prevederea în timp și realizarea regimului de exploatare a conductei în punctul de alimentare prezintă dificultăți mari, deoarece admițînd în calculele hidrodinamice curgerea staționară sîntem lipsiți de posibilitatea aprecierii capacității reale de acumulare a conductei, a cărei comportare poate fi utilizată ca un rezervor suplimentar. După cum se știe, acoperirea vîrfului de consum, utilizînd capacitatea de acumulare a conductei, chiar în ipoteza existenței în conductă a unei cantități de gaze suficiente pentru acest scop, se poate realiza numai în cazul cînd sînt satisfăcute anumite condiții, care se deduc din analiza curgerii nestaționare a gazelor în conducte magistrale.

Vom considera, la fel ca și în lucrarea [1], ca punct de plecare pentru descrierea matematică a curgerii nestaționare prin conducte foarte lungi, următoarele ecuații:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} = \frac{1}{k} \frac{\partial H}{\partial t} \tag{1}$$

pentru presiune și

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} = \frac{1}{k} \frac{\partial Q}{\partial t} \tag{2}$$

pentru debitul gravimetric, unde funcția $H(p)$, definită în intervalul de variație a presiunii $p_0 < p < p_k$, se determină, admițînd evoluția izotermică, din relația

$$H(p) = \frac{\beta}{\alpha} \left(e^{\alpha p} - e^{\alpha p_0}\right), \tag{3}$$

β și α avînd valorile

$$\alpha = \frac{\log \frac{p_k}{p_0}}{(p_k - p_0)}; \quad \beta = \frac{(p_k + p_0) \log \frac{p_k}{p_0}}{2g R \bar{z} \bar{T} \left(e^{\alpha p_k} - e^{\alpha p_0}\right)} \tag{4}$$

p_k și p_0 fiind limitele de variație ale presiunii, respectiv valorile acestora din punctul inițial și terminus al conductei, $\bar{T}$ — temperatura medie, exprimată în grade Kelvin, $\bar{z}$ — factorul de abatere, exprimat la temperatura și presiunea medie, și R — constanta universală a gazelor.

Pentru regimul de curgere laminar coeficientul k are valoarea $k = \dfrac{d^2}{32\,\mu\alpha}$, iar pentru cel turbulent $k = \dfrac{\pi^2 d^3 g}{2\lambda\alpha Q_m}$ unde semnificațiile fizice ale notațiilor utilizate au fost arătate în lucrarea [1].

Ecuațiile (1) și (2) au fost stabilite utilizînd procedeul de liniarizare propus în lucrarea [3], admițînd evoluția termodinamică izotermică. Cu toate că în literatură sînt indicate și alte procedee pentru liniarizarea ecuațiilor de curgere nestaționară a gazelor în conducte magistrale, în aplicațiile practice pe care le urmărim, în cadrul prezentei lucrări, trebuie să menționăm că supozițiile admise în lucrarea [3] reprezintă o schemă fizică mai apropiată de condițiile reale, comparativ cu celelalte procedee.

Dacă ținem seama de considerentele expuse mai sus și presupunem că în momentul inițial presiunea este aceeași pe toată lungimea conductei, respectiv curgerea gazelor se produce din starea de repaus, atunci considerînd originea axei în punctul de consum problema se reduce la soluționarea ecuației (1) cu următoarele condiții la limită și inițiale

$$t = 0,\ H(x, 0) = H_k;\ t_k > 0 \begin{cases} \left(\dfrac{\partial H}{\partial x}\right)_{x=0} = -\dfrac{8\lambda Q^2}{g^2 d^5 \pi^2} \\ x = l,\quad H(l, t) = H_k \end{cases} \tag{5}$$

sau dacă introducem mărimile adimensionale

$$\bar{x} = \frac{x}{l};\quad \bar{H} = \frac{H - H_0}{H_k - H_0} = 1 - \frac{g^2 d^5 \pi^2}{8\lambda l Q^2}(H_k - H) \tag{6}$$

și parametrul Fourier, $F_0 = \dfrac{kt}{l^2}$, condițiile (5) devin

$$F_0 > 0 \begin{cases} \left(\dfrac{\partial \bar{H}}{\partial \bar{x}}\right)_{\bar{x}=0} = 1, \\ \bar{x} = 1,\quad \bar{H} = 1 \end{cases};\quad F_0 = 0,\quad \bar{H} = 1. \tag{7}$$

Deoarece variația debitului în timp, în punctul de consum, este redată prin graficul de perspectivă al consumului, iar pe de altă parte, datorită liniarității ecuațiilor (1) și (2) putem aplica principiul superpoziției, considerînd variația debitului în trepte crescătoare sau descrescătoare, vom admite într-un interval de timp convenabil ales o valoare constantă. În felul acesta, soluția ec. (1) poate fi scrisă sub forma

$$\bar{H}(\bar{x}, F_0) = a_0 + a_1 \bar{x} + \sum_{m=0}^{m=\infty} (a_m \cos m\alpha\bar{x} + b_m \sin m\alpha\bar{x})\, e^{-(2m+1)^2 \frac{\pi^2}{4} F_0}. \tag{8}$$

Ținînd seamă de condițiile la limită și inițiale (7) rezultă pentru coeficienți următoarele valori: $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $b_n = 0$, și a_n, care se obține din dezvoltarea în serie Fourier a funcției $f(\bar{x}) = \bar{x} - 1$, are valoarea $a_{2m+1} = -\dfrac{8}{(2m+1)^2}$.

Prin urmare, soluția ecuației (8) devine, introducînd relația (3) și efectuînd unele transformări relativ simple, pentru presiune:

$$e^{\alpha p_k} - e^{\alpha p} = \frac{8\lambda l Q^2 \alpha}{g^2 d^5 \pi^2 \beta}\left[1 - \frac{x}{l} - \frac{8}{\pi^2}\sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{\cos (2m+1)\frac{\pi}{2}\frac{x}{l}}{(2m+1)^2}\, e^{-(2m+1)^2 \frac{\pi^2}{4} F_0}\right] \tag{9}$$

iar pentru debitul gravimetric, presupunînd $Q = Q_m$

$$Q^2(x, F_0) = -\frac{g^2 d^5 \pi^2}{8\lambda l}\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right) =$$

$$= Q_0^2\left[1 - \frac{4}{\pi}\sum_{m=0}^{m=\infty}\frac{\sin(2m+1)\frac{\pi}{2}\frac{x}{l}}{(2m+1)}\exp - (2m+1)^2\frac{\pi^2}{4}F_0\right] \qquad (10)$$

unde Q_0 reprezintă valoarea debitului gravimetric în punctul de consum, presupusă constantă.

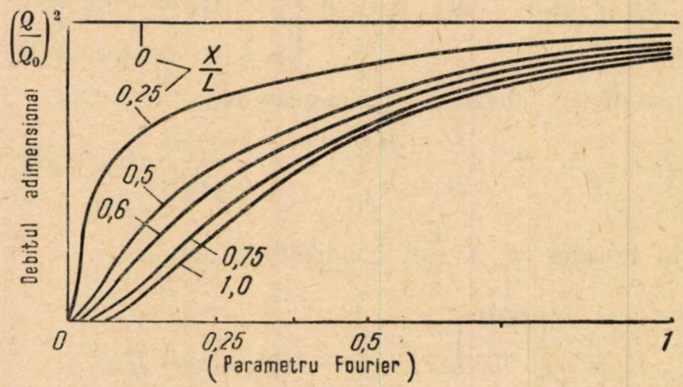


Fig. 1

În figura 1 s-a redat graficul de variație a debitului adimensional în funcție de valoarea parametrului Fourier, pentru diferite lungimi adimensionale ale conductei.

Este interesant de remarcat tendința de scădere a debitului pentru același timp, respectiv pentru aceeași valoare a parametrului Fourier, către punctul de alimentare a conductei. Această scădere devine practic neînsemnată, după un anumit interval de timp, și tinde către valoarea din punctul de consum pentru valorile $F_0 > 1$. În consecință, curgerea poate fi considerată în acest caz staționară. În afară de aceasta, se remarcă, de asemenea, caracterul nestaționar mai pronunțat al curgerii pe ultima porțiune a conductei. În general, putem admite pentru estimarea timpului de stabilizare a curgerii, cu o bună aproximație, valoarea parametrului adimensional $F_0 = 2$, și prin urmare timpul de stabilizare va fi în cazul regimului turbulent $t = \frac{4\lambda l^2 Q_m \alpha}{\pi^2 d^3 g}$, iar pentru regimul laminar avem $t = \frac{6\mu l^2 \alpha}{d^2}$.

Dacă ne referim la o conductă magistrală avînd următoarele caracteristici : $d = 0{,}5$ m, $\lambda = 0{,}012$, $Q_m = 30$ kg/s, $p_k = 50$ ata, $p_0 = 25$ ata, $l = 300$ km și presupunem curgerea turbulentă în domeniul valabilității legii pătratice, atunci rezultă 29 700 secunde, aproximativ 8 ore.

Cu ajutorul ecuației (10) putem să efectuăm prevederea în timp a cantității de gaze care trebuie introdusă în conductă, pentru asigurarea regimului de transport examinat mai sus.

Astfel, vom avea

$$G(x, F_0) = \frac{Q_0 l^2}{k} \int_0^t \left[1 - \frac{4}{\pi} \sum_0^\infty \frac{\sin (2m+1) \frac{\pi}{2} \frac{x}{l}}{(2m+1)} \exp - (2m+1)^2 \frac{\pi^2}{4} \mathrm{F}_0 \right]^{1/2} dF_0 \tag{11}$$

de unde, după cîteva calcule simple, rezultă

$$G(x, F_0) = \frac{8 Q_0 l^2}{(2m+1)^2} \left[\frac{1}{2} \log \frac{1 + \left[1 - f(x) \exp - (2m+1)^2 \frac{\pi^2}{4} F_0 \right]^{1/2}}{1 - \left[1 - f(x) \exp - (2m+1)^2 \frac{\pi^2}{4} F_0 \right]^{1/2}} \frac{1 - [1 - f(x)]^{1/2}}{1 + [1 - f(x)]^{1/2}} + \right.$$

$$\left. + (1 - f(x))^{1/2} - (1 - f(x)) \exp - (2m+1)^2 \frac{\pi^2}{4} F_0 \right] \tag{12}$$

$f(x)$ fiind o funcție de distanță, avînd următoarea expresie:

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{\sin (2m+1) \frac{\pi}{2} \frac{x}{l}}{(2m+1)} \tag{13}$$

care în punctul de alimentare devine o constantă egală cu $\frac{4}{\pi} \sum_0^\infty \frac{1}{(2m+1)}$.

După cum s-a menționat mai sus, variația debitului în punctul de consum se prezintă sub forma unui grafic de perspectivă, pentru anumit interval de timp. Din acest motiv, calculele de prevedere referitoare la variația debitului de alimentare a conductei va trebui să fie efectuate în același interval de timp, care în mod obișnuit se consideră de 24 ore. În acest interval de timp conducta se comportă ca un rezervor suplimentar atunci cînd consumul atinge nivelul cel mai ridicat, de unde se extrage cantitatea de gaze acumulate în perioada declinului. Dispunînd de graficul de perspectivă, pentru acest interval de timp, este ușor să determinăm variația debitului în punctul de alimentare, aplicînd principiul superpoziției și admițînd o valoare medie a debitului în punctul de consum, într-un interval de timp astfel ales încît eroarea introdusă să fie admisibilă, sau să prevedem variația presiunii de-a lungul conductei corespunzătoare fiecărui debit în parte.

În ceea ce privește estimarea cantității de gaze care se află în conductă după un anumit interval de timp de la începerea exploatării acesteia, în ipoteza că condițiile limită sînt asigurate, și anume: în punctul de alimentare se reglează debitul în așa fel încît presiunea să rămînă invariabilă în timp, aceasta se obține din ecuația de bilanț material.

★

Trecem acum să arătăm posibilitatea determinării caracteristicilor hidrodinamice ale conductei pentru curgerea tranzitorie examinată. În acest scop vom scrie ecuația de bilanț material introducînd presiunea medie ponderată după lungimea conductei.

Dacă presupunem că din conductă s-a extras o cantitate de gaze cu debitul gravimetric Q, într-un timp τ, atunci presiunea medie va trebui să satisfacă egalitatea

$$Q\tau = \frac{\pi d^2}{4}\, l\, [\gamma(p_k) - \gamma(\bar{p})] \tag{14}$$

unde γ reprezintă greutatea specifică care după cum s-a arătat în lucrarea [1] se exprimă prin ecuația $\rho = \beta\, e^{\alpha p}$

În calculele hidrodinamice, referitoare la transportul gazelor prin conducte magistrale, se utilizează în mod curent noțiunea de presiune medie ponderată după lungime, definită prin relația

$$\bar{p} = \frac{1}{l}\int_0^l p(x)\,\mathrm{d}x. \tag{15}$$

Deoarece variația presiunii se exprimă prin ecuația transcedentă (9) efectuarea integralei (15) nu poate fi realizată decît numai prin metode numerice sau grafice. Pentru evitarea dificultăților menționate, vom introduce, într-o primă aproximație, valoarea medie ponderată a greutății specifice după lungimea conductei, respectiv a funcției $H(p)$.

Dacă ținem seama de expresia greutății specifice în funcție de presiune, ecuația (14) devine

$$Q\tau = \frac{\pi d^2}{4}\, l\, \beta g\, (e^{\alpha p_k} - e^{\alpha\bar{p}}) \tag{16}$$

iar valoarea diferenței $(e^{\alpha p_k} - e^{\alpha\bar{p}})$ rezultă din ecuația :

$$e^{\alpha\bar{p}} = \frac{1}{l}\int_0^l e^{\alpha p(x,t)}\,\mathrm{d}x = e^{\alpha p_k} - \frac{8\lambda Q^2 \alpha l}{g^2 \pi^2 d^5 \beta}\left[\frac{1}{2} - \frac{16}{\pi^3}\sum_{m=0}^{m=\infty}\frac{\exp - (2m+1)^2}{(2m+1)^3}\frac{\pi^2}{4}F_0\right]. \tag{17}$$

Introducînd relația (17) în (16) obținem :

$$\tau = \frac{2\, l^2 Q_m \lambda\alpha}{g\,\pi\, d^3}\left(-\frac{16}{\pi^3}\sum_0^\infty \frac{\exp - (2m+1)^2 \frac{\pi^2}{4} F_0}{(2m+1)^3} - \frac{1}{2}\right) \tag{18}$$

de unde pentru determinarea valorii lui λ sîntem conduși la soluționarea ecuației (18). În general, valorile parametrului Fourier întîlnite frecvent în practică permit să putem dezvolta în serie de puteri termenul exponențial, limitîndu-se numai la primii doi termeni. În acest caz ecuația (18) capătă forma finală

$$\lambda = \frac{1{,}28\, g d^3\, \pi\, \tau}{Q\, l^2\ \alpha} \pm \sigma \tag{19}$$

σ — fiind suma erorilor rezultate din aproximarea termenului exponențial prin variația liniară, respectiv fără termenul la puterea a doua din dezvoltarea în serie de puteri, și a neglijării termenilor de ordin mai mare ca $m > 0$ referitor la semnul sumă.

În figura 2 s-a redat variația erorilor σ' și σ'' în funcție de parametrul Fourier a căror sumă, $\sigma' + \sigma''$, reprezintă valoarea erorii totale; σ' — se referă la eroarea introdusă datorită neglijării termenilor de ordin mai mare ca unu ai seriei, iar σ'' se referă la eroarea rezultată în urma neglijării termenilor de ordin superior lui doi, din dezvoltarea în serie de puteri a termenului exponențial. Prin urmare, putem remarca că conver-

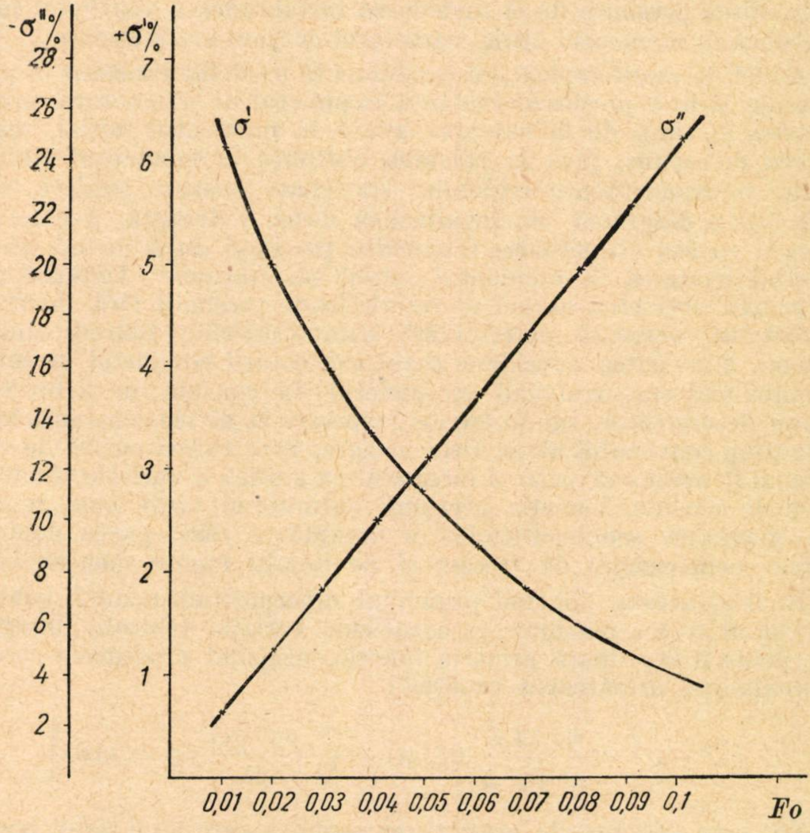


Fig. 2

genţa seriei devine mai rapidă odată cu creşterea parametrului Fourier, conducînd la reducerea erorilor σ', pe cînd în cazul lui σ'' vor creşte. Din acest motiv, pentru estimarea corectă a valorii lui λ, calculată cu ajutorul formulei (19), apare necesar să ţinem seamă, în general, că eroarea preponderentă este dată σ'', cînd $F_0 > 0{,}03$, şi de aceea λ va trebui să să fie determinat din rezolvarea ecuaţiei (18), utilizînd metoda încercării şi erorii.

După cum remarcăm ecuaţia (19), obţinută în acest mod, este aproximativ aceeaşi cu cea rezultată pentru estimarea timpului de stabilizare, arătată mai sus, admiţînd $F_0 = 2$, ceea ce era de aşteptat.

Este uşor de observat acum că în punctul terminus al conductei, $x = 0$, ecuaţia (9) este identică cu cea obţinută în lucrarea [1], privitoare la restabilirea presiunii după închiderea instantanee a ventilului în acest punct, dacă în momentul iniţial caracterul curgerii era staţionar.

Astfel, în cazul exploatării conductei la un debit constant în punctul de consum şi la o presiune constantă în punctul de alimentare, presiunea va scădea în timp de la valoarea avută în momentul iniţial, respectiv în starea de repaus, pînă la valoarea obţinută în momentul stabilizării curgerii, corespunzătoare regimului staţionar. Această scădere se efectuează într-o diagramă semilogaritmică după o dreaptă, a cărei pantă este egală cu cea din situaţia restabilirii presiunii după închiderea ventilului cînd curgerea în momentul iniţial era staţionar. Datorită acestui fapt, pentru obţinerea curbei de restabilire a presiunii fără întreruperea transportului, necesară determinării caracteristicilor hidrodinamice ale conductei, s-ar putea considera cazul exploatării conductei în condiţiile examinate mai sus, realizînd în punctul de consum un debit variabil continuu descrescător, sau în trepte, respectiv la nivele constante în intervale de timp convenabil alese. Prin urmare, construirea curbei de variaţie a presiunii în acest caz reclamă înregistrarea grafică a variaţiei debitului în punctul de consum. Variaţia presiunii obţinute în acest mod reprezintă într-o diagramă semilogaritmică o dreaptă, a cărei pantă depinde de valoarea coeficientului de frecare şi de ceilalţi factori menţionaţi deja.

În felul acesta, aplicînd principiul superpoziţiei, rezultă pentru căderea cumulativă a presiunii, în cazul cînd variaţia debitului, înregistrată grafic, poate fi exprimată printr-o funcţie, utilizînd procedeele cunoscute de aproximare, următoarea ecuaţie*)

$$e^{\alpha p_k} - e^{\alpha p} = \frac{64\,\lambda\, l\,\alpha}{\pi^2 d^5 g^2 \beta}\left[Q_0^2 f(t) + \int_0^t \frac{dQ^2(\lambda)}{d\lambda} f(t-\lambda)\,d\lambda\right] \qquad (20)$$

unde $f(t)$ este căderea de presiune corespunzătoare unui debit constant, a cărei expresie a fost stabilită mai sus. Primul termen al ecuaţiei (20) reprezintă căderea de presiune dacă conducta ar fi fost exploatată la un debit constant, iar ceilalţi termeni exprimă căderile de presiune suplimentare datorită variaţiei debitului în timp.

---

*) În ecuaţia (20) ca şi în cele precedente s-a presupus $Q = Q_m$.

În general, stabilirea formei funcției $Q(t)$ conduce la mari dificultăți matematice și de aceea este mult mai comod, în practică, să înlocuim curba reală printr-o variație în trepte, corespunzătoare unor succesiuni de debite descrescătoare în așa mod încît pentru un interval de timp convenabil ales să putem scrie ecuația (20) sub forma

$$e^{\alpha p_k} - e^{\alpha p} = \frac{64\,\lambda\, l\, \alpha}{\pi^2 d^5 g^2 \beta}[Q_0^2 f(t) + (Q_0^2 - Q_1^2) f(t-t_1) + \ldots + (Q_{n-1}^2 - Q_n) f(t-t_n)] \quad (21)$$

unde

$$Q_0 > Q_1 > Q_2 > Q_n.$$

De exemplu, dacă ne referim la situația cînd admitem pentru debitul inițial valoarea Q_0 și după timpul t_1 s-a schimbat debitul la valoarea Q_1, atunci ecuația (21) va deveni

$$e^{\alpha p_k} - e^{\alpha p} = \frac{64\,\lambda\, l\, Q_0^2\, \alpha}{\pi^2 d^5 g^2 \beta}[f(t) + (1 - \varepsilon^2) f(t - t_1)] \quad (22)$$

$\varepsilon = \dfrac{Q_1}{Q_0}$ – fiind raportul debitelor.

Pentru scopuri practice, în anumite cazuri, unde mai ales în afară de regimul tranzitoriu mai avem unul pseudo-permanent, este recomandabil să utilizăm principiul superpoziției sub următoarea formă [4].

$$\begin{aligned} e^{\alpha p_k} - e^{\alpha p} &= Q^2(t) f(t) + \int_0^{t-\varepsilon} (Q^2)'(t) f'(t-\lambda)\, d\lambda + \\ &+ \frac{1}{n!}\int_0^{t-\varepsilon} Q^{2n}[t - \theta(\lambda - t)](\lambda - t)^n f'(t-\lambda)\, d\lambda \end{aligned} \quad (23)$$

care se obține dezvoltînd în serie Taylor funcția $Q^2(t)$.

În ceea ce privește utilizarea funcției $f(t)$, dedusă mai sus, la prelucrarea datelor obținute din măsurători, aceasta implică respectarea anumitor condiții, și anume : presiunea în punctul de alimentare trebuie să rămînă invariabilă în timp, atît înaintea schimbării debitului cît și după. De asemenea, exploatarea conductei trebuie să fie asigurată pe un timp suficient de mare, după schimbarea regimului de exploatare, astfel încît debitul de tranziție să dispară. Acest fapt este reclamat de condiția limită din punctul de consum, adică debit constant, deoarece între două schimbări succesive ale regimului de exploatare va exista o variație a debitului și prin urmare măsurătorile vor trebui efectuate numai după ce în prealabil debitul a rămas constant.

Un alt procedeu care ar permite determinarea caracteristicilor hidrodinamice ale conductei magistrale se bazează pe ecuația (10). Pe de altă parte, trebuie să remarcăm că utilizarea acesteia este posibil în acest scop numai dacă, bineînțeles, ne referim la situațiile practice cînd influența termenilor superiori ai seriei devin neglijabili comparativ cu primul, întrucît în acest caz variația debitului în punctul de alimentare, după modificarea regimului de exploatare, reprezintă într-o diagramă semilogaritmică o dreaptă avînd panta proporțională cu coeficientul de frecare hidrodinamică. Aplicarea acestui procedeu necesită menținerea debitului, ca și în cazul precedent, la o valoare constantă în punctul de consum, în perioada înregistrării debitului în punctul de alimentare pînă la egalizarea acestora. În prezent problema poate fi soluționată cu ajutorul regulatorului de debit. Față de procedeul menționat anterior utilizarea ecuației (10) prezintă avantajul că reclamă numai înregistrarea debitului și nu a presiunii, ceea ce din punct de vedere practic se realizează în mod curent și continuu cu debitmetru înregistrator, atît în punctul de consum cît și în cel de alimentare.

Din cele ce preced, rezultă posibilitatea utilizării regimului tranzitoriu de curgere pentru stabilirea caracteristicilor hidrodinamice ale conductelor magistrale, atunci cînd acesta există, fie provocîndu-l prin închiderea instantanee a ventilului sau prin modificarea succesivă a debitului. Cu toate acestea, în majoritatea cazurilor reale, întîlnite frecvent, respectarea strictă a condițiilor limită și inițiale utilizate la deducerea funcției $f(t)$, respectiv a variației presiunii în timp pentru un debit constant, este condiționată de foarte mulți factori inerenți transportului, asupra cărora în general nu putem acționa eficient și în consecință construirea curbei de variație a presiunii cu ajutorul principiului superpoziției, prin modificarea succesivă a debitului, poate implica totdeauna introducerea unor erori prohibitive în prelucrarea matematică a datelor obținute, depășind limita erorilor admisă în mod obișnuit. Eliminarea erorilor aferente nerespectării stricte a condițiilor arătate ar fi posibilă dacă odată cu măsurarea debitelor simultan am înregistra și variația presiunii corespunzătoare acestora. În mod practic, o asemenea înregistrare a presiunii nu poate fi realizată, întrucît prin modificarea debitului se obține căderea cumulativă a presiunii în timp și nu cea corespunzătoare debitului modificat. După cum se știe, aplicarea principiului superpoziției, datorită liniarității ecuațiilor (1) și (2), permite să efectuăm prevederea creșterii sau declinului presiunii pentru cazul exploatării conductei la un debit variabil, crescător sau descrescător, fără să implice condiții cu privire la variația coeficientului de frecare de-a lungul conductei, respectiv asupra neuniformității valorii acestuia. În ceea ce privește condițiile la limită acestea nu trebuie să fie afectate de curgere.

Avînd în vedere cele menționate, putem obține în conformitate cu principiul superpoziției, după cum s-a arătat, valoarea presiunii corespunzătoare variației debitului în timp, din ecuația lui Duhamel

$$H_k - H = \int_0^t Q^2 (t - \lambda) f'(\lambda) \, d\lambda \tag{24}$$

care integrată prin părți conduce la ecuația cunoscută (20), scrisă sub forma

$$H_k - H = Q_0^2 f(t) + \int_0^t \frac{dQ^2 (t - \lambda)}{d\lambda} f(\lambda) \, d\lambda \tag{25}$$

unde în acest caz $f(t)$ este funcția necunoscută și $H_k - H = \frac{\beta}{\alpha}(e^{\alpha p_k} - e^{\alpha p})$, p — fiind presiunea cumulativă.

Pe de altă parte, într-un interval de timp $0 < t < t_1$ debitul gravimetric nu se anulează și prin urmare se observă imediat, introducînd notațiile,

$$\varphi_1(t-\lambda) = -\frac{(Q^2)'(t-\lambda)}{Q_0^2} \quad \text{și} \quad \varphi_0(t) = \frac{\beta}{\alpha}\frac{e^{\alpha p_k} - e^{\alpha p}}{Q_0^2} \tag{26}$$

că ecuația (25) devine în cele din urmă :

$$f(t) = \varphi_0(t) + \int_0^t \varphi_1(t-\lambda) f(\lambda)\, d\lambda \tag{27}$$

și deci pentru determinarea funcției $f(t)$ avem de rezolvat o ecuație integrală de tip Voltera de-a doua speță [5].

Deoarece variația în timp a presiunii cumulative se obține cu aparate înregistratoare, iar cea a debitului gravimetric este dată prin graficul de perspectivă, rezultă că vom dispune de curbele funcțiilor $\varphi_1(t-\lambda)$, care reprezintă nucleul ecuației, și $\varphi_0(t)$ — presiunea cumulativă. Dacă expresiile analitice ale curbelor înregistrate pot fi aproximate prin funcții cunoscute, utilizînd procedeele uzuale, atunci soluția ec. (27) se obține prin metoda aproximațiilor succesive, considerînd pentru funcția $f(t)$ seria infinită

$$f(t) = f_0(t) + f_1(t) + \ldots + f_n(t) \tag{28}$$

unde $f_0(t)$, $f_1(t)$ și $f_n(t)$ sînt aproximațiile succesive care se stabilesc din relațiile de mai jos

$$f_0(t) = \varphi(t) \quad \text{și} \quad f_n(t) = \int_0^t \varphi_1(t-\lambda) f_{n-1}(\lambda)\, d\lambda. \tag{29}$$

Seria (28), astfel obținută, este absolut convergentă și uniformă într-un interval de timp $0 < t < t_1$, și reprezintă soluția problemei, întrucît avem întotdeauna asigurată inegalitatea [6].

$$|f_n(t)| < \frac{\varphi_0 \varphi_1^n t^n}{n!}$$

φ_0 și φ_1 — fiind modulele maxime ale funcțiilor $\varphi_0(t)$ și $\varphi_1(t-\lambda)$.

Prelucrarea matematică a datelor obținute din măsurători, utilizînd procedeul propus, va necesita, bineînțeles, rezolvarea aproximativă a integralei (29) care are limita superioară variabilă. Efectuarea acesteia nu prezintă nici o dificultate în prezent cu ajutorul metodelor numerice, datorită mașinilor electronice de calcul.

Un alt procedeu care ne permite să transformăm ecuația (27) într-o ecuație algebrică se obține prin metoda calculului operațional. Ecuația algebrică corespunzătoare rezultă prin aplicarea metodei lui Fok [7].

Multiplicînd ambii membri ai ecuației (27) cu e^{-pt} și integrînd între limitele 0 și ∞, avem

$$\bar{f}(p) = \frac{\bar{\varphi}_0(p)}{1 - \bar{\varphi}_1(p)}. \tag{30}$$

Funcțiile $\bar{\varphi}_0(p)$, $\bar{\varphi}_1(p)$ și $\bar{f}(p)$ sînt transformatele lui Laplace, corespunzătoare funcțiilor din ec. (27), avînd expresiile

$$\bar{f}(p) = \int_0^\infty f(t)\, e^{-pt}\, \mathrm{d}t\,; \quad \bar{\varphi}_1(p) = \int_0^\infty \varphi_1(\xi)\, e^{-p\xi}\, \mathrm{d}\xi\,; \quad \bar{\varphi}_0(p) = \int_0^\infty \varphi_0(t)\, e^{-pt}\, \mathrm{d}t\,;$$

$$\xi = t - \lambda. \tag{31}$$

Dacă ne referim la cazul cînd originea timpului este diferită de zero, de ex. la t_0, și funcția transformată satisface condiția $\bar{\varphi}_1(p) < \varepsilon < 1$, ε fiind un număr pozitiv arbitrar mai mic decît 1, atunci în conformitate cu rezultatele stabilite în lucrarea [8] ec. (30) se conservă și are forma

$$\bar{\varphi}_{0\,t_0}(p) + \bar{\varphi}_{1\,t_0}(p)\,\bar{f}_{t_0}(p) = \bar{f}_{t_0}(p), \quad \text{unde} \quad \bar{f}_{t_0}(p) = \int_{t_0}^\infty f(t)\, e^{-pt}\, \mathrm{d}t. \tag{32}$$

În acest mod, cunoscînd funcțiile $\varphi_0(t)$ și $\varphi_1(\xi)$ care aproximează curbele de variație a presiunii cumulative și a debitului gravimetric, este ușor să determinăm transformatele acestora și să stabilim din ec. (30) transformata funcției necunoscute, iar cu ajutorul tabelelor [9] vom putea deduce originalul acesteia, care reprezintă variația presiunii în timp necesară calculului coeficientului de frecare hidrodinamic, sau al altor parametri. Se poate, de asemenea, utiliza pentru rezolvarea problemei metoda sumelor finite, care algebrizează ecuația integrală (30), transformînd-o într-un sistem de ecuații algebrice rezolvabile prin recurență, ceea ce permite stabilirea valorilor aproximative ale funcției $f(t)$ la momente succesive discrete. Un procedeu pentru integrarea numerică a ecuației integrale (27) este expus pe larg în lucrarea [10], unde s-a determinat o rețea de noduri în progresie aritmetică, într-un interval $t_0 < t < t_1$ pentru un număr pozitiv ε impus și algoritmul stabilirii numerelor $f_i(t)$, cînd $p = 0,1 \ldots \nu$ dacă este satisfăcută condiția $|f(t_i) - f_i^\nu| < 2\varepsilon$, pentru toate nodurile rețelei. În general, în tehnica actuală de calcul aceste metode sînt susceptibile mecanizării, oferind un mijloc rapid de soluționare a problemelor curente.

Dacă se alege, de exemplu, intervalul de timp astfel încît graficele referitoare la variația debitului și presiunii cumulative să poată fi aproximate prin funcții liniare de timp, sub următoarea formă

$$\varphi_0(t) = A + Bt \quad \text{și} \quad \varphi_1(t - \lambda) = C + D(t - \lambda) \tag{33}$$

atunci variația presiunii va fi dată de ecuația

$$f(t) = k_1 e^{m_1 t} + k_2 e^{m_2 t} \tag{34}$$

unde constantele K_1, K_2, m_1 și m_2 depind de A, B, C și D, obținîndu-se următoarele relații :

$$m_1 = \frac{C + \sqrt{C^2 + 4D}}{2}\,; \quad m_2 = \frac{C - \sqrt{C^2 + 4D}}{2}\,; \quad K_1 = \frac{B + m_1 A}{m_1 - m_2}\,, \quad K_2 = -\frac{B + m_1 A}{m_1 - m_2}.$$

Lipsa datelor practice, referitoare la cazurile frecvent întîlnite în exploatarea conductelor magistrale, nu ne-a permis să stabilim rapiditatea convergenței seriei (28) și în consecință să putem estima volumul de calcul necesar metodei prin aproximații succesive sau prin celelalte procedee. Din acest motiv, alegerea celei mai adecvate metode de rezolvare a ecuației integrale (27) urmează să fie făcută ulterior, după prelucrarea unor exemple luate din practică.

APENDICE

După cum s-a menționat la începutul lucrării, existența unei zone cu frecare diferită pe ultima porțiune a conductei se manifestă asupra curbei de restabilire a presiunii, obținută după închiderea ventilului în punctul de consum, prin abaterea acesteia de la variația liniară într-o diagramă semilogaritmică, față de cazul normal, pentru conducta de lungime finită. În urma acestui fapt, prelucrarea matematică a datelor rezultate din măsurători trebuie efectuată numai pe porțiunea rectilinie a curbei, care se restabilește după un anumit interval de timp. În cele ce urmează, va fi examinată această problemă. În acest scop, presupunem conducta alcătuită din două tronsoane cu lungimea l_1 și l_2, avînd în intervalul $0 < x < l_1$, $k = k_1$, și $l_1 < x < l$, $k = k_2$.

Ecuațiile de curgere pentru cele două tronsoane vor fi :

$$0 < x < l_1 \qquad \frac{\partial^2 H_1}{\partial x^2} = \frac{1}{k_1}\frac{\partial H_1}{\partial t} \tag{1}$$

$$l_1 < x < l \qquad \frac{\partial^2 H_2}{\partial x^2} = \frac{1}{k_2}\frac{\partial H_2}{\partial t}. \tag{2}$$

Pe de altă parte, în cadrul prezentei lucrări s-a arătat că curgerea tranzitorie rezultată prin închiderea instantanee a ventilului în punctul de consum, cînd în momentul inițial caracterul acesteia era staționar, este echivalentă, din punct de vedere al determinării coeficientului de frecare hidrodinamic, cu situația cînd în același punct curgerea se efectuează la un debit constant, dacă în momentul inițial gazele se aflau în stare de repaus ; presiunea fiind aceeași pe toată lungimea conductei magistrale. În felul acesta, devine acum posibil să studiem problema, pentru scopul propus, considerînd cazul exploatării la debit constant, cu următoarele condiții la limită și inițiale

$$t = 0,\ H_1 = H_k \ \text{și}\ H_2 = H_k$$

$$t > 0 \begin{cases} x = l_1, \quad H_1 = H_2 \\ \left(\dfrac{\partial H_1}{\partial x}\right)_{x=l_1} = \dfrac{\lambda_2}{\lambda_4}\left(\dfrac{\partial H_2}{\partial x}\right)_{x=l_1} \\ x = l, \quad H_2 = H_k \quad \text{și} \quad x = 0, \left(\dfrac{\partial H_1}{\partial x}\right)_{x=0} = -\dfrac{8\lambda_1 Q^2}{g^2 \pi^2 d^5}. \end{cases} \tag{3}$$

Deoarece, efectul abraziunii impurităților solide, precum și acumulările impurităților lichide se produce în general pe o lungime relativ mică din apropierea punctului de consum, comparativ cu lungimea conductei magistrale, unde gradientul de presiune, respectiv viteza, atinge valoarea maximă, putem admite situația unei conducte infinite, luînd condiția la limită în punctul de alimentare : $x = \infty$; $H_2 = H_k$.

Este evident, în cazul conductelor foarte lungi, cum sînt cele magistrale, ținînd seamă de dimensiunile reduse ale zonei cu frecare diferită, o asemenea presupunere nu va afecta sensibil calculele numerice, cu atît mai mult aspectul calitativ al procesului hidrodinamic de restabilire a presiunii.

Într-o lucrare recentă Scelkacev a studiat o problemă identică, întîlnită la exploatarea zăcămintelor de hidrocarburi fluide în situația curgerii fluidelor elastice printr-un mediu poros omogen și izotrop, în condițiile validității legii lui Darcy.

În conformitate cu rezultatele obținute [11], dacă utilizăm transformata lui Laplace, expresia funcției transformate pentru primul tronson, care satisface condițiile la limită (3), va fi

$$H_1^*(x, p) = \frac{8\lambda_1 Q^2}{g^2 d^5 \pi^2}\,\frac{\sqrt{k_1}}{p\sqrt{p}}\,\frac{\xi}{1 + \xi \exp - 2\sqrt{\dfrac{p}{k_1}}\, l_1} \times$$
$$\times \left(\exp \sqrt{\frac{p}{k_1}}\,(x - 2l_1) - \frac{1}{\xi} \exp - \sqrt{\frac{p}{k_1}}\, x\right) + \frac{H_k}{p} \tag{4}$$

unde s-a notat transformata lui Laplace

$$H_1^*(x, p) = \int_0^\infty H(x, t)\, e^{-pt}\, \mathrm{d}t\,; \qquad k_1 = \frac{\pi d^3 g}{2\lambda_1 \alpha Q_m}$$

și

$$\xi = \frac{1 - \sqrt{\left(\dfrac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^3}}{1 + \sqrt{\left(\dfrac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^3}}$$

pentru regimul pătratic.

Dacă, în particular, ne referim la curgerea laminară avem

$$k_1 = \frac{d^2}{32\,\mu\alpha} \quad \text{şi} \quad \lambda_2 = \lambda_1$$

iar ξ devine nul, şi prin urmare obţinem, $H_1 = H_2$, respectiv

$$H_1^*(x, p) = \frac{8\lambda_1 Q^2}{g^2 d^5 \pi^2} \frac{\sqrt{k_1}}{p\sqrt{p}} \exp - \sqrt{\frac{p}{k_1}}\, x + \frac{H_k}{p} \tag{5}$$

care reprezintă soluţia problemei cînd conducta este infinit lungă şi exploatată la debit constant.

Considerînd cazul $\lambda_1 < \lambda_2$ sau $0 < \xi < 1$, atunci utilizînd expresia cunoscută

$$\frac{1}{1 + \xi \exp - 2\sqrt{\frac{p}{k_1}}\, l_1} = \sum_{m=1}^{m=\infty} (-1)^{m-1} (\xi)^{m-1} \exp - 2(m-1)\sqrt{\frac{p}{k_1}}\, l_1 \tag{6}$$

în punctul de consum, $x = 0$, originalul funcţiei $H_1^*(x, t)$, ţinînd seamă de relaţia (6), devine

$$\begin{aligned} e^{\alpha p_k} - e^{\alpha p} = \frac{8\lambda_1 Q^2 \alpha}{g^2 d^5 \pi^2 \beta} \sqrt{k_1} \Bigg[2\sqrt{\frac{t}{\pi}} \left(1 + 2 \sum_{m=1}^{m=\infty} (-\xi)^m \exp - \frac{m^2 l_1^2}{k_1 t} \right) - \\ - \frac{4 l_1}{\sqrt{k_1}} \sum_{m=1}^{m=\infty} (\xi)^m \operatorname{erfc}\left(\frac{m l_1}{\sqrt{k_1 t}} \right) \Bigg] \end{aligned} \tag{7}$$

unde $\operatorname{erfc}\left(\frac{m l_1}{\sqrt{k_1 t}}\right)$ reprezintă funcţia lui Gauss

$$\operatorname{erfc} u = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left(1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^u e^{-u^2} \mathrm{d}u \right); \quad u = \frac{m l_1}{\sqrt{k_1 t}}$$

a cărei valoare se obţine din tabele.

Cu ajutorul relaţiei (7) putem efectua prelucrarea datelor rezultate din măsurători cînd pe ultima porţiune a conductei există o zonă cu frecare diferită, comparativ cu restul lungimii. Este interesant să examinăm acum comportarea regimului tranzitoriu pentru cazurile limită, şi anume : valori mari şi mici ale timpului. Se observă imediat, în cazul conductelor magistrale foarte lungi, unde lungimea zonei din apropierea punctului de consum este redusă, iar valoarea coeficientului de frecare relativ mică, faţă de restul conductei, că în primele momente avem

$$t \to 0 \left\{ \begin{array}{l} \exp - \dfrac{m^2 l_1^2}{k_1 t} \to 0 \\ \\ \operatorname{erfc}\left(\dfrac{m l_1}{\sqrt{k_1 t}} \right) \to 0 \end{array} \right.$$

şi prin urmare variaţia presiunii poate fi scrisă sub forma

$$e^{\alpha p_k} - e^{\alpha p} = \frac{16\,\lambda_1 Q^2\,\alpha}{g^2\,d^5\,\pi^2\,\beta}\sqrt{\frac{k_1 t}{\pi}}. \tag{8}$$

Cînd ne referim la valori mari ale timpului, ceea ce corespunde valorilor mici ale lui p, este suficient să ne limităm la primii doi termeni din dezvoltarea în serii de puteri a termenului exponenţial.

După cîteva transformări simple rezultă

$$H_1^*(0, p) = \frac{H_k}{p} - \frac{8\lambda_1 Q^2}{g^2\,d^5\,\pi^2}\sqrt{\frac{k_1}{p^3}}\,\frac{\lambda_1\sqrt{k_2} + \lambda_2\sqrt{p}\,l_1}{\lambda_2\sqrt{k_1}} \tag{9}$$

iar originalul acesteia va fi

$$e^{\alpha p_k} - e^{\alpha p} = \frac{\alpha}{\beta}\,\frac{8\,\lambda_1 Q^2}{g^2\,\pi^2\,d^5}\left(\lambda_1 l_1 + 2\lambda_2\sqrt{\frac{k_2 t}{\pi}}\right). \tag{10}$$

Pentru valori mici ale lui l_1 şi valori mari ale timpului, primul termen devine neglijabil faţă de-al doilea şi în consecinţă creşterea presiunii în timp va depinde numai de caracteristicile hidrodinamice ale conductei din a doua zonă.

Nu este greu de remarcat din relaţiile (7) şi (8) că în cazul unei conducte magistrale care are coeficienţi de frecare identici pe cele două tronsoane, însă diametre diferite, dacă lungimea tronsonului de pe ultima porţiune a conductei este mică, comparativ cu toată lungimea acesteia, vom obţine aceeaşi soluţie.

Rezultatele de mai sus ne permit acum să punem în evidenţă influenţa zonei cu frecare diferită asupra creşterii presiunii. Astfel, dacă într-o diagramă se notează abscisa $\sqrt{t}$ şi ordonata $(e^{\alpha p_k} - e^{\alpha p})$ variaţia presiunii se efectuează după ecuaţia (7) cu excepţia primelor momente, unde aceasta devine o dreaptă. Dacă ne referim la valori ale timpului care depăşesc o anumită limită*), atunci în conformitate cu ecuaţia (10) variaţia presiunii devine liniară şi în acest caz panta dreptei va depinde numai de caracteristicele hidrodinamice ale zonei a doua.

Valorile pantei dreptelor vor fi date de următoarele relaţii

$$\operatorname{tg}\beta_1 = \frac{16\lambda_1 Q^2\alpha}{g^2\pi^2 d^5\beta}\sqrt{\frac{k_1}{\pi}} \quad \text{şi} \quad \operatorname{tg}\beta_2 = \frac{16\,\lambda_2\,Q^2\,\alpha}{g^2\,d^5\,\pi^2\,\beta}\sqrt{\frac{k_2}{\pi}}. \tag{11}$$

Revenind la situaţia unei conducte omogene, cînd $\lambda_1 = \lambda_2$, originalul funcţiei $H_1^*(x_1\,p)$, dată de ecuaţia (5), poate fi scrisă sub forma

$$e^{\alpha p_k} - e^{\alpha p} = \frac{16\,Q^2\,\lambda\alpha}{\pi^2\,d^5\,g^2\,\beta}\sqrt{kt}\ \mathrm{I}\ \mathrm{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{kt}}\right) \tag{12}$$

---

*) Timpul limită este condiţionat de valoarea care asigură convergenţa seriei de puteri a termenului exponenţial pentru termenii de un ordin mai mare ca doi.

sau dacă în locul integralei probabilității introducem expresia cunoscută

$$\sqrt{kt}\ \mathbf{I}\ \mathrm{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{kt}}\right)=\sqrt{\frac{kt}{\pi}}\,e^{-\frac{x^2}{2kt}}-\frac{x}{\sqrt{k}}\,\mathrm{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{kt}}\right) \tag{13}$$

atunci obținem în cele din urmă

$$e^{\alpha p_k}-e^{\alpha p}=\frac{16\,Q^2\,\lambda\alpha}{\pi^2\,d^5\,g^2\,\beta}\left[\sqrt{\frac{kt}{\pi}}\,e^{\frac{x^2}{2kt}}-\frac{x}{\sqrt{k}}\,\mathrm{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{kt}}\right)\right]. \tag{14}$$

În punctul de consum variația presiunii va fi

$$e^{\alpha p_k}-e^{\alpha p}=\frac{16\,Q^2\,\lambda\alpha}{\pi^2\,d^5\,g^2\,\beta}\sqrt{\frac{kt}{\pi}} \tag{15}$$

care reprezintă de asemenea o dreaptă în același sistem de coordonate, analizat în cazul precedent.

Comparînd ecuația (7) cu (10) sau (8), constatăm că influența zonei cu frecare diferită în apropierea punctului de consum se manifestă prin termenul adițional

$$\theta\,(t,\,l_1\,\lambda_1\,\lambda_2)=4\sqrt{\frac{t}{\pi}}\sum_{m=1}^{m=\infty}(\xi)^m\exp-\frac{m^2\,l_1^2}{k_1\,t}-\frac{4\,l_1}{\sqrt{k_1}}\sum_{1}^{\infty}(-\xi)^m\,\mathrm{erf}\left(\frac{m\,l_1}{\sqrt{k_1 t}}\right). \tag{16}$$

Pentru o anumită valoare a timpului, care depinde de lungimea zonei și de valoarea coeficientului de frecare, termenul adițional (16) devine neglijabil în raport cu primul termen din ecuația (7) și în consecință efectul acestuia asupra creșterii presiunii nu se mai face simțit; ecuațiile (12), (10) și (8) devenind identice. Acest rezultat este foarte important în practica exploatării conductelor magistrale, deoarece ne permite să determinăm valoarea coeficientului de frecare hidrodinamic din a doua zonă, prelucrînd datele obținute din măsurători cu ajutorul porțiunii rectilinii a curbei reprezentată într-o diagramă $\sqrt{t}$, $(e^{\alpha pk}-e^{\alpha p})$. Valoarea timpului limită necesar restabilirii variației liniare poate fi estimat, într-o primă aproximație, căutînd valorile timpului care anulează expresia (16). În mod analog, se demonstrează validitatea rezultatelor stabilite mai sus și în cazul conductelor magistrale considerate finite.

Primită la redacție la 25 mai 1962

ÉCOULEMENT TRANSITOIRE DES GAZ DANS LES CONDUITES PRINCIPALES. II

RÉSUMÉ

L'auteur continue l'étude du problème abordé dans son travail [1], concernant l'écoulement transitoire des gaz dans les conduites principales, dans l'intention d'élaborer certaines méthodes pratiques, permettant de déterminer les caractéristiques hydrodynamiques des conduites et de prévoir la variation du débit et de la pression au point d'alimentation, en fonction de leur variation au point de consommation.

Il examine la situation de la conduite principale, exploitée à débit constant et à pression constante au point d'alimentation. En ce qui concerne la condition initiale, il considère le cas où, au moment initial, les gaz étaient au repos, la pression étant la même tout le long de la conduite, ainsi que le cas où, avant la modification du débit, l'écoulement était stationnaire.

Afin d'obtenir, sans interrompre le transport, la courbe de rétablissement de la pression nécessaire pour déterminer le coefficient de frottement hydrodynamique de la conduite, l'auteur, en vertu des résultats fournis par ce travail, se propose d'utiliser les données des mesures dans le cas de l'exploitation de la conduite sous une pression constante au point d'alimentation et avec débit variable, ou avec une variation par échelons, correspondant à des valeurs constantes dans des intervalles de temps convenablement choisis. En appliquant le principe de la superposition et en rendant linéaires les équations d'écoulement non stationnaire des gaz dans les conduites principales, on obtient une équation intégrale du type Volterra, de seconde espèce, dont la solution par des méthodes approximatives offre la possibilité de déterminer la chute de pression correspondant à la variation du débit, respectivement de construire la courbe de rétablissement de la pression d'après les données de pression et de débit enregistrées au point de consommation. Dans l'appendice, l'auteur examine le problème du rétablissement dans une conduite principale possédant, au voisinage du point de consommation, une zone dont le coefficient de frottement est différent sur une étendue très petite par rapport à la longueur de la conduite. Il montre que l'effet de cette dernière sur l'accroissement de la pression dans le temps n'est plus ressenti après un certain intervalle de temps qui dépend de la longueur de la zone et de ses caractéristiques hydrodynamiques.

BIBLIOGRAFIE

1. H. PASCAL, *Die Erdgasströmung durch Hauptleitungen*. Revue de Mécanique Appliquée, *1* (1962).
2. T. PENESCU, *Manometrul diferenţial pentru măsurarea presiunii de fund la sondele de petrol*. Brevet R.P.R., nr. *260*/41.441.
3. И. А. ЧАРНЫЙ, *О методах линеаризации нелинейных уравнений типа уравнений теплопроводности*. Известия, отд. техн. наук АН СССР, 6, (1951).
4. I. M. LASVERGÈRES, *Résolution numérique de l'équation de diffusivité dans un gisement hétérogène*. Revue de l'Institut français du pétrole, *10* (1961).
5. T. LALESCU, *Introducere la teoria ecuaţiilor integrale*. Ed. Acad. R.P.R., 1956.
6. E. GOURSAT, *Cours d'analyse mathématique*. **III**, Paris (1942).
7. Г. ДЕЧ, *Руководство к практическому применению преобразования Лапласа*. Москва, 1958.
8. MAURO PICONE, *Sur les équations intégrales linéaires de deuxième espèce de Volterra avec noyau de translation*. Comptes Rendus, 250, *1* (4 ianuarie), 46 (1960).
9. В. А. ДИТКИН, П. И. КУЗНЕЦОВ, *Справочник по операционному исчислению*. Москва, 1951.
10. D. V. IONESCU, *Integrarea numerică a ecuaţiei integrale de tip Volterra*. St. cerc. mec. apl., *1* (1961).
11. В. Н. ШЕЛКАЧЕВ, *Графики понижения-восстоновления забойного давления и скин-эффект в простейших условиях неоднородного пласта*. Подземная Гидродинамика, Гостоптехиздат, Москва, 1961.

NOTE

ASUPRA TORSIUNII SEMISPAȚIULUI ELASTIC

DE

EMERIC DEUTSCH

1. INTRODUCERE

În această lucrare vom studia starea de deformație și de tensiune într-un semispațiu elastic, omogen și izotrop, supus la torsiune de către anumite forțe tangențiale. Problema a mai fost recent studiată de A. K. Das [1]. Evitînd unele greșeli strecurate în [1], vom insista asupra unor cazuri particulare importante. Deformațiile și tensiunile corespunzătoare punctelor planului frontieră, le vom exprima cu ajutorul unor funcții elementare.

2. ECUAȚII FUNDAMENTALE

Să presupunem că semispațiul $z \geqslant 0$ este ocupat de un corp elastic, omogen și izotrop. Fie μ modulul de elasticitate transversală a mediului.

Se știe că în cazul în care semispațiul este supus la torsiune, deplasarea unui punct oarecare al semispațiului este perpendiculară pe planul meridian ce trece prin acest punct. Notînd această deplasare cu v, avem pentru tensiunile neidentic nule:

$$\tau_{z\theta} = \mu \frac{\partial v}{\partial z}, \qquad \tau_{r\theta} = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right), \tag{2.1}$$

(r, θ, z) fiind coordonatele cilindrice ale punctului considerat. Dintre ecuațiile de echilibru, două sînt identic satisfăcute, iar a treia se reduce la

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - \frac{v}{r^2} = 0. \tag{2.2}$$

Dacă asupra semispaţiului acţionează forţele tangenţiale de răsucire $F(r)$, situate în planul $z = 0$ şi distribuite simetric în raport cu axa Oz, atunci condiţiile la limită ale problemei sînt

$$\begin{aligned} (v)_{z\to+\infty} &= 0, \\ (\tau_{\theta z})_{z=0} &= F(r). \end{aligned} \tag{2.3}$$

Se ştie [2], că soluţia acestei probleme este dată de

$$v(r, z) = -\frac{1}{\mu}\int_0^\infty \bar{F}(\xi) J_1(r\xi) e^{-\xi z} \mathrm{d}\xi, \tag{2.4}$$

$$\tau_{\theta z}(r, z) = \int_0^\infty \xi \bar{F}(\xi) J_1(r\xi) e^{-\xi z} \mathrm{d}\xi, \tag{2.5}$$

$$\tau_{r\theta}(r, z) = \int_0^\infty \xi \bar{F}(\xi) J_2(r\xi) e^{-\xi z} \mathrm{d}\xi, \tag{2.6}$$

unde $J_n(x)$ este funcţia Bessel de speţa întîia şi de ordinul n, iar $\bar{F}(\xi)$ este transformata Hankel [3] de ordinul întîi a funcţiei $F(r)$, adică

$$\bar{F}(\xi) = \int_0^\infty r F(r) J_1(\xi r) \mathrm{d}r. \tag{2.7}$$

3. FORŢE TANGENŢIALE DE RĂSUCIRE DATE PE PLANUL FRONTIERĂ AL SEMISPAŢIULUI

Să considerăm cazul cînd distribuţia forţelor tangenţiale de răsucire, aplicate semispaţiului, este dată de

$$F(r) = \begin{cases} kr(a^2 - r^2)^n, & r \leqslant a, \\ 0, & r > a, \end{cases} \tag{3.1}$$

k şi n fiind constante ($n > -1$).

Notînd cu M momentul acestor forţe în raport cu axa Oz, avem

$$M = 2\pi k \int_0^a r^3 (a^2 - r^2)^n \mathrm{d}r = \frac{\pi k a^{2n+4}}{(n+1)(n+2)} \cdot \tag{3.2}$$

Transformata Hankel de ordinul întîi a funcţiei $F(r)$ dată de (3.1), este

$$\bar{F}(\xi) = k\int_0^a r^2 (a^2 - r^2)^n J_1(\xi r) \mathrm{d}r = k a^{2n+3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \lambda \cos^{2n+1} \lambda \, J_1(a\xi \sin\lambda) \mathrm{d}\lambda,$$

sau [4]

$$\bar{F}(\xi) = \frac{2^n \Gamma(n+1) k a^{n+2} J_{n+2}(a\xi)}{\xi^{n+1}} \cdot \tag{3.3}$$

Ţinînd seamă de (3.2), expresia funcţiei $\bar{F}(\xi)$ se mai poate scrie

$$\bar{F}(\xi) = \frac{2^n \Gamma(n+3) M J_{n+2}(a\xi)}{\pi a^{n+2} \xi^{n+1}} . \tag{3.4}$$

Înlocuind (3.4) în relaţiile (2.4) — (2.6), obţinem pentru deplasarea v şi tensiunile $\tau_{\theta z}$, $\tau_{r\theta}$, corespunzătoare unui punct oarecare al semispaţiului

$$v(r, z) = -\frac{2^n \Gamma(n+3) M}{\pi\mu a^{n+2}} \int_0^\infty \frac{J_1(r\xi) J_{n+2}(a\xi)}{\xi^{n+1}} e^{-\xi z} \,\mathrm{d}\xi, \tag{3.5}$$

$$\tau_{\theta z}(r, z) = \frac{2^n \Gamma(n+3) M}{\pi a^{n+2}} \int_0^\infty \frac{J_1(r\xi) J_{n+2}(a\xi)}{\xi^n} e^{-\xi z} \,\mathrm{d}\xi, \tag{3.6}$$

$$\tau_{r\theta}(r, z) = \frac{2^n \Gamma(n+3) M}{\pi a^{n+2}} \int_0^\infty \frac{J_2(r\xi) J_{n+2}(a\xi)}{\xi^n} e^{-\xi z} \,\mathrm{d}\xi. \tag{3.7}$$

Pentru punctele planului frontieră $z = 0$, găsim din (3.5) şi (3.7) (vezi [4])

$$v(r, 0) = \begin{cases} -\dfrac{Mr\,\Gamma(n+3)}{4\sqrt{\pi}\, a^3 \mu\, \Gamma\left(n + \dfrac{3}{2}\right)} F\left(\dfrac{3}{2}, -n-\dfrac{1}{2}; 2; \dfrac{r^2}{a^2}\right), & r < a, \\ -\dfrac{M}{4\pi\mu r^2} F\left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{1}{2}; n+3; \dfrac{a^2}{r^2}\right), & r > a, \end{cases} \tag{3.8}$$

$$\tau_{r\theta}(r, 0) = \begin{cases} \dfrac{3Mr^2\,\Gamma(n+3)}{8\sqrt{\pi}\, a^5\, \Gamma\left(n + \dfrac{1}{2}\right)} F\left(\dfrac{5}{2}, -n+\dfrac{1}{2}; 3; \dfrac{r^2}{a^2}\right), & r < a, \\ \dfrac{3M}{4\pi r^3} F\left(\dfrac{5}{2}, \dfrac{1}{2}; n+3; \dfrac{a^2}{r^2}\right), & r > a, \end{cases} \tag{3.9}$$

unde $F(\alpha, \beta; \gamma; x)$ reprezintă funcţia hipergeometrică.

Deplasarea $v(r, 0)$ este continuă în punctul $r = a$. Avem

$$v(a, 0) = -\frac{M\,\Gamma(n+1)\,\Gamma(n+3)}{4\pi\mu a^2\, \Gamma\left(n+\dfrac{3}{2}\right) \Gamma\left(n+\dfrac{5}{2}\right)} . \tag{3.10}$$

Tensiunea $\tau_{r\theta}(r,0)$ în punctul $r = a$ este discontinuă pentru $-1 < n \leqslant 0$ şi continuă pentru $n > 0$. Din (3.6) obţinem

$$\tau_{\theta z}(r,0) = \begin{cases} kr(a^2 - r^2)^n, & r < a, \\ 0, & r > a, \end{cases}$$

ceea ce coincide cu (3.1), după cum era de aşteptat.

4. CAZUL $n = \frac{1}{2}$

Să considerăm cazul în care distribuţia forţelor tangenţiale de răsucire este dată de

$$(\tau_{\theta z})_{z=0} = F(r) = \begin{cases} kr\sqrt{a^2 - r^2}, & r < a, \\ 0, & r > a. \end{cases} \tag{4.1}$$

Din (3.4) obţinem transformata Hankel a funcţiei $F(r)$:

$$\bar{F}(\xi) = \frac{15\,M}{4\sqrt{2\pi}\,a^{\frac{5}{2}}} \, \frac{J_{\frac{5}{2}}(a\xi)}{\xi^{\frac{3}{2}}} . \tag{4.2}$$

sau

$$\bar{F}(\xi) = \frac{15\,M}{4\,\pi a^5 \xi^4} \left[(3 - a^2\xi^2)\sin a\xi - 3a\,\xi\cos a\xi\right]. \tag{4.3}$$

Formulele (2.4) — (2.6) devin :

$$v(r, z) = -\frac{15\,M}{4\,\pi a^5 \mu} \int_0^{\infty} \frac{(3 - a^2\xi^2)\sin a\xi - 3a\xi\cos a\xi}{\xi^4} J_1(r\xi)\, e^{-\xi z}\, d\xi, \tag{4.4}$$

$$\tau_{\theta z}(r, z) = \frac{15\,M}{4\pi a^5} \int_0^{\infty} \frac{(3 - a^2\xi^2)\sin a\xi - 3a\xi\cos a\xi}{\xi^3} J_1(r\xi)\, e^{-\xi z}\, d\xi, \tag{4.5}$$

$$\tau_{r\theta}(r, z) = \frac{15\,M}{4\,\pi a^5} \int_0^{\infty} \frac{(3 - a^2\xi^2)\sin a\xi - 3\,a\xi\cos a\xi}{\xi^3} J_2(r\xi)\, e^{-\xi z}\, d\xi. \tag{4.6}$$

Punînd $n = \frac{1}{2}$ în relaţiile (3.8) şi (3.9), obţinem pentru deplasarea v şi tensiunea $\tau_{r\theta}$ corespunzătoare punctelor planului $z = 0$

$$v(r, 0) = \begin{cases} -\frac{15\,Mr}{32\,a^3\,\mu} F\left(\frac{3}{2}, -1; 2; \frac{r^2}{a^2}\right), & r \leqslant a, \\ -\frac{M}{4\,\pi\mu\, r^2} F\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}; \frac{7}{2}; \frac{a^2}{r^2}\right), & r \geqslant a, \end{cases} \tag{4.7}$$

$$\tau_{r\theta}(r, 0) = \begin{cases} \frac{45\,Mr^2}{64\,a^5} F\left(\frac{5}{2}, 0; 3; \frac{r^2}{a^2}\right), & r \leqslant a, \\ \frac{3\,M}{4\,\pi\, r^3} F\left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}; \frac{7}{2}; \frac{a^2}{r^2}\right), & r \geqslant a. \end{cases} \tag{4.8}$$

Funcțiile hipergeometrice care apar în aceste relații pot fi exprimate prin funcții elementare, astfel că

$$v(r,\,0)=\begin{cases}-\dfrac{15\,Mr}{32\,a^3\,\mu}\left(1-\dfrac{3\,r^2}{4\,a^2}\right), & r\leqslant a,\\[2ex] -\dfrac{15\,Mr^3}{64\pi a^5\mu}\left[\left(4\,\dfrac{a^2}{r^2}-3\right)\arcsin\dfrac{a}{r}+\dfrac{a}{r}\left(3-2\,\dfrac{a^2}{r^2}\right)\sqrt{1-\dfrac{a^2}{r^2}}\right], & r\geqslant a,\end{cases}\tag{4.9}$$

$$\tau_{r\theta}(r,\,0)=\begin{cases}\dfrac{45\,Mr^2}{64\,a^5}, & r\leqslant a,\\[2ex] \dfrac{15\,Mr^2}{32\pi\,a^5}\left[3\arcsin\dfrac{a}{r}-\dfrac{a}{r}\left(3+2\,\dfrac{a^2}{r^2}\right)\sqrt{1-\dfrac{a^2}{r^2}}\right], & r\geqslant a.\end{cases}\tag{4.10}$$

5. CAZUL $n=-\frac{1}{2}$

Să considerăm cazul în care distribuția forțelor tangențiale de răsucire este dată de

$$(\tau_{\theta z})_{z=0}=F(r)=\begin{cases}\dfrac{kr}{\sqrt{a^2-r^2}}, & r<a,\\[2ex] 0, & r>a.\end{cases}\tag{5.1}$$

Din (3.4) obținem transformata Hankel a funcției $F(r)$

$$\bar{F}(\xi)=\frac{3\,M}{4\sqrt{2\,\pi}\,a^{\frac{3}{2}}}\,\frac{J_{\frac{3}{2}}(a\xi)}{\xi^{\frac{1}{2}}},\tag{5.2}$$

sau

$$\bar{F}(\xi)=\frac{3M}{4\,\pi\,a^3\,\xi^2}\,(\sin a\xi-a\xi\cos a\xi).\tag{5.3}$$

Formulele (2.4) — (2.6) devin:

$$v\,(r,z)=-\frac{3\,M}{4\,\pi\,a^3\,\mu}\int_0^\infty\frac{\sin a\xi-a\xi\cos a\xi}{\xi^2}\,J_1\,(r\xi)e^{-\xi z}\,\mathrm{d}\xi,\tag{5.4}$$

$$\tau_{\theta z}\,(r,z)=\frac{3\,M}{4\,\pi\,a^3}\int_0^\infty\frac{\sin\,a\xi-a\xi\,\cos\,a\xi}{\xi}\,J_1\,(r\xi)\,e^{-\xi z}\,\mathrm{d}\xi,\tag{5.5}$$

$$\tau_{r\theta}\,(r,z)=\frac{3\,M}{4\,\pi\,a^3}\int_0^\infty\frac{\sin\,a\xi-a\xi\,\cos\,a\xi}{\xi}\,J_2\,(r\xi)\,e^{-\xi z}\,\mathrm{d}\,\xi.\tag{5.6}$$

Punînd în relațiile (3.8) și (3.9) $n = -\dfrac{1}{2}$, obținem pentru deplasarea v și tensiunea $\tau_{r\theta}$, corespunzătoare punctelor planului $z = 0$

$$v(r, 0) = \begin{cases} -\dfrac{3\,Mr}{16\,a^3\,\mu}\,F\left(\dfrac{3}{2}, 0\,;\, 2\,;\, \dfrac{r^2}{a^2}\right), & r \leqslant a, \\[2ex] -\dfrac{M}{4\,\pi\mu\,r^2}\,F\left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{1}{2}\,;\, \dfrac{5}{2}\,;\, \dfrac{a^2}{r^2}\right), & r \geqslant a, \end{cases} \tag{5.7}$$

$$\tau_{r\theta}(r, 0) = \begin{cases} 0, & r < a, \\[2ex] \dfrac{3\,M}{4\,\pi\,r^3}\,F\left(\dfrac{5}{2}, \dfrac{1}{2}\,;\, \dfrac{5}{2}\,;\, \dfrac{a^2}{r^2}\right), & r > a. \end{cases} \tag{5.8}$$

Funcțiile hipergeometrice care apar în aceste relații pot fi de asemenea exprimate prin funcții elementare, obținînd astfel

$$v(r, 0) = \begin{cases} -\dfrac{3\,Mr}{16\,a^3\,\mu}, & r \leqslant a, \\[2ex] -\dfrac{3\,Mr}{8\,\pi\,a^3\,\mu}\left(\text{arc sin}\,\dfrac{a}{r} - \dfrac{a}{r}\sqrt{1 - \dfrac{a^2}{r^2}}\right), & r \geqslant a, \end{cases} \tag{5.9}$$

$$\tau_{r\theta}(r,0) = \begin{cases} 0, & r < a, \\[2ex] \dfrac{3\,M}{4\,\pi\,r^3}\left(1 - \dfrac{a^2}{r^2}\right)^{-\frac{1}{2}}, & r > a. \end{cases} \tag{5.10}$$

Din (5.9) rezultă că problema studiată în acest paragraf corespunde cazului cînd o ștanță axial-simetrică — în aderență cu semispațiul pe cercul $r \leqslant a$ — este rotit în jurul axei sale cu un moment M.

Primită la redacție la 25 august 1962

SUR LA TORSION DU DEMI-ESPACE ÉLASTIQUE

RÉSUMÉ

L'auteur étudie l'état de déformation et tension dans un demi-espace élastique, homogène et isotrope, soumis à la torsion par les forces tangentielles données par (3.1). Pour les déplacements et les tensions

non-identiquement nulles il établit les relations (3.5) — (3.7), qui, aux points du plan frontière, se réduisent à (3.8) et (3.9). Les cas particuliers $n = \frac{1}{2}$ et $n = -\frac{1}{2}$ sont étudiés à part.

BIBLIOGRAFIE

1. A. K. DAS, *Note on stresses due to certain distributions of shearing forces prescribed over a circular area on the plane boundary of a semi-infinite elastic solid.* ZAMM, **42**, 125, (1962).
2. YI-YUAN YU, *Torsion of a semi-infinite body and a large thick plate.* Quart. Journal of Mechanics and Applied Mathematics, **7**, 287—298 (1954).
3. I. N. SNEDDON, *Fourier transforms.* New York, McGraw-Hill Publishing Co., 1951.
4. I. M. RIJIC, I. S. GRADSTEIN, *Tabele de integrale, sume, serii și produse.* Ed. tehnică, București, 1955.

MANIFESTĂRI ŞTIINŢIFICE PESTE HOTARE

PRIMA CONFERINŢĂ DE TEORIA MECANISMELOR ŞI MAŞINILOR DIN REGIUNEA BALTICĂ

KAUNAS, R.S.S. LITUANIA, U.R.S.S., 26–30 IUNIE 1962

DE

D. MANGERON[1])

621.01

Prima conferinţă de Teoria mecanismelor şi maşinilor din regiunea baltică, desfăşurată la Kaunas între 26—30 iunie 1962, a constituit, datorită prezenţei active a reprezentanţilor de seamă ai TMM din alte centre ale U.R.S.S., în frunte cu acad. I. I. Artobolevski şi S. N. Kojevnikov, un nou imbold determinator pe scară mondială în calea dezvoltării acestei discipline fundamentale în vasta gamă de automatizări a proceselor de producţie.

Tematica conferinţei, axată îndeosebi pe dinamica mecanismelor [2]), a fost inaugurată de către acad. I. I. Artobolevski prin expunerea unei lucrări de sinteză consacrată celor mai actuale probleme de teoria maşinilor, aşa cum ele rezultă din cercetări recente în acest domeniu promovate în U.R.S.S. şi în alte ţări [3]).

Jaloanele pe care a fost clădit subiectul lucrării constă în : 1) teoria proceselor de lucru şi problematica acestei teorii ; 2) sinteza mecanismelor complexe conţinînd sisteme mecanice, hidraulice şi pneumatice ; 3) dinamica mecanismelor şi maşinilor şi problematica ei ; 4) teoria maşinilor automate şi sistemelor de reglare a proceselor de lucru ; 5) rolul metodelor experimentale în dezvoltarea teoriei maşinilor.

---

[1]) Institutul politehnic, Iaşi.

[2]) A se vedea studiul fundamental datorit acad. I. I. Artobolevski „Grundlegende Probleme einer moderner Dynamik der Maschinen", Maschinenbautechnik, 9, 11, 575–589 (1960).

[3]) D. Mangeron, R. C. Bogdan, A Treia Conferinţă Unională asupra problemelor fundamentale ale teoriei mecanismelor şi maşinilor, Moscova, 23–28 iunie 1961. Studii şi cercetări de mec. apl., XIII, 3, 783–790 (1962). D. Mangeron, A III-a Conferinţă generală poloneză asupra teoriei mecanismelor şi maşinilor, Rogów/Warszawa, 8–10 iunie 1961. Studii şi cercetări de mec. apl., XIII, 1, 235–240 (1962).

Prof. dr. S. N. Kojevnikov, membru corespondent al Academiei de Ştiinţe a R. S. S. Ucraina, şi-a consacrat expunerea analizei problemelor de dinamica maşinilor luînd ca bază modelarea electronică.

Prof. dr. N. I. Kolčin a tratat despre metoda mecanismelor înlocuitoare cu cuple cinematice inferioare cu privire specială la problemele de angrenare dinţată.

Prof. dr. A. E. Kobrinski, adîncind problema de dinamică şi stabilitate a sistemelor de vibropercuţie, analizează problema stabilităţii prin metoda diferenţelor finite, care rezultă deosebit de eficace în studiul unor atare sisteme.

Prof. dr. L. Petrokas expune pe larg problematica actuală a teoriei maşinilor automate ţinînd seamă de fenomenele de diferenţiere ce au loc în cadrul acestei teorii şi de preluare a ideilor şi metodelor noi de cercetare din alte ramuri de ştiinţă şi în particular din teoria informaţiilor.

Prof. dr. A. P. Bessonov îşi consacră expunerea unor probleme de dinamică mecanismelor cu mase variabile, oprindu-şi atenţia îndeosebi asupra particularităţilor ecuaţiilor de mişcare a mecanismelor cu masă variabilă care pun în evidenţă forţa reactivă redusă, variaţia maselor şi a momentelor de inerţie, precum şi mişcarea relativă a centrului de inerţie al elementelor componente, mecanismul.

Cand. în şt. tehnice O. G. Ozol, ţinînd seama de faptul că rolul dinamicii, ca bază ştiinţifică generală a teoriei şi calculului de proiectare a mecanismelor şi maşinilor este în neîncetată creştere, îşi consacră expunerea elaborării unei teorii structurale a mecanismelor avînd ca fundament dinamica. Introducînd noţiunea de legătură, concepută într-un sens mai vast decît acel îndeobşte utilizat în mecanică teoretică, autorul aduce o contribuţie de preţ în vasta problemă de structură a celor peste 100 000 mecanisme ce şi-au găsit pînă acum aplicaţie în tehnică. Totodată dă unele indicaţii pentru dezvoltarea căilor de creaţie a mecanismelor de mîine.

Prof. cand. în şt. tehn. A. J. Jasiulionis, pornind de la ecuaţiile simplificate ale mişcării maşinilor

$$M = \frac{dI_0}{dS} \cdot \frac{w_0^2}{2},$$

în care w_0 este viteza unghiulară constantă arbitrar aleasă, iar I_0 este momentul de inerţie fictiv redus, reprezentat prin graficul energiei cinetice a maşinii, elaborează, în prezenţa forţelor arbitrare, o simplă metodă grafo-analitică şi una grafică de construcţie a tachigramelor elementului de reducere a maşinii.

G. L. Efremova a expus problema de determinare a randamentelor mecanismelor elicoidale cu bile şi role, folosite pe scară largă în agregatele mecanismelor de aviaţie cu acţionare electrică.

Cand. în şt. tehnice K. Ragulskis a tratat despre unele probleme de stabilitate dinamică a mecanismelor supuse la vibraţia batiului. Metoda a doi parametri mici și metoda mediatizării au stat la baza rezolvării schemelor matematice corespunzătoare constituite din ecuații diferențiale neliniare.

Cand. în șt. tehnice A. A. Piktys, pornind de la analiza pulsometrilor, subdivizați pe baza clasificației cunoscute a lui F. Winkler în opt grupe și folosiți în studiul încercărilor la oboseală a materialelor textile, scoate în evidență faptul că cele mai perfecționate pulsometre fac parte din grupa a V-a de clasificație amintită și expune avantajele ce le prezintă pulsometrul „sv-4", construit de autor.

Cand. în șt. tehnice E. Rivin și V. V. Augustaitis pornind de la proprietățile strungului mod. 1283 cu 8 axe principale, adoptat ca strung de bază pentru fabricarea unei game de strunguri semiautomate, studiază dinamica dispozitivului de acționare principal al strungurilor semiautomate verticale.

Prof. K. Dirgéla aduce o contribuție la studiul de acționare optimă a amortizorului dinamic al oscilațiilor torsionale luînd ca bază de plecare un amortizor de tip mixt, constituit din pendule, legate de butuc (batiu) cu ajutorul unei legături elastice.

I. B. Karintzev studiază stabilitatea unui rotor solid rigid în lagăre cu frecare lichidă ținîndu-se seamă de regimul turbulent de scurgere al lubrifiantului.

Cand. în șt. tehn. V. Neiland, folosind metoda caracteristicilor geometrice și elaborînd un șir de formule aproximative pentru caracteristicile geometrice ale unui mecanism articulat cu patru elemente și doi parametri, expune problema de sinteză a mecanismelor articulate cu patru elemente, fiind dată funcție viteza.

Cand. în șt. tehnice V. A. Katonov expune o nouă metodă analitică și una grafo-analitică de sinteză cinematică a unui reductor planetar cu două roți centrale cu angrenare interioară.

Prof. O. E. Kepe expune, în cadrul studiilor de analiza și sinteza mecanismelor, metoda de folosire a planelor secante paralele pentru determinarea grafică a poziției elementelor componente mecanisme spațiale cu mai multe grade de libertate, în raport cu unul sau mai multe elemente constitutive.

Cand. în șt. tehn. O. G. Ozol, deja citat, elaborează o formulă generală structurală interesînd teoria mecanismelor, care are avantajul că pune în evidență — ca și formula lui P. A. Malîșev — numărul de legături pasive, permițînd totodată și calculul nemijlocit al numărului de conture. Formula obținută conservă și lărgește principiul de formare al mecanismelor propus de Assur, menținînd și noțiunile de clasă și de ordin, introduse în TMM respectiv de prof. dr. G. G. Baranov și acad. I. I. Artobolevski.

Prof. I. Tartakovski expune folosirea diagramelor cinematice, ca de ex.,

$$\frac{dS}{d\varphi}=f_1(S)\,;\quad \frac{d^2S}{d\varphi^2}=f_2(S)\,;\quad \frac{d^2S}{d\varphi^2}=f_3\left(\frac{dS}{d\varphi}\right);\quad \frac{d^3S}{d\varphi^3}=f_4\left(\frac{d^2S}{d\varphi^2}\right),$$

în care S este deplasarea tachetului, iar φ este unghiul de rotire al camei, în probleme de sinteză aproximativă a mecanismelor cu came.

L. D. Ruzimov, folosind variate metode de sinteză şi subliniind că a ajuns să construiască un mare număr de mecanisme plane şi spaţiale principial noi, expune caracteristicile unor noi mecanisme cu bare care permit ca elementul condus să reproducă mişcări prescrise.

Iu. V. Katonov expune analiza mecanismelor cu came prin „metoda schemei reduse", aceasta din urmă fiind constituită dintr-o camă ce se mişcă rectiliniu şi dintr-un tachet ce se deplasează sub un unghi γ. Lucrarea se încheie cu determinarea razei de curbură a camei.

Tematica celei dintîi Conferinţe baltice de TMM, expusă de mai mulţi mari specialişti sovietici, va contribui fără îndoială prin materialul prezentat la desfăşurarea ulterioară înfloritoare a teoriei mecanismelor şi maşinilor şi va constitui unul din punctele de reper ale recentului simpozion internaţional al oamenilor de ştiinţă consacrat problemelor învăţămîntului tehnic superior, desfăşurat în septembrie 1962 la Moscova, la care — după cum spune sugestiv în titlul articolului său, inserat în Vestnik Vîsşei Školy prof. dr. I. Grivkov[1]) — „oamenii de ştiinţă sovietici vor avea despre ce povesti".

ERSTE GETRIEBSLEHRE-KONFERENZ DER BALTISCHEN SOZIALISTISCHEN SOWJETREPUBLIKEN

ZUSAMMENFASSUNG

Die erste Getriebslehre-Konferenz der Baltischen Sozialistischen Sowjetrepubliken, die in Kaunas vom 26.—30. Juni 1962 stattfand, bildete einen neuen entscheidenden Antrieb für die Entwicklung dieses für die mannigfaltigen Automatisierungsprozesse der Produktionsvorgänge grundlegenden Zweiges. Unter den zahlreichen Anwesenden seien die wichtigsten Vertreter der Getriebslehre aus anderen Zentren der Sowjetunion, die sich durch aktive Teilnahme auszeichneten, insbesondere Akad. I. I. Artobolewski und S. N. Koshewnikow, erwähnt.

Die Konferenz, die insbesondere auf die Getriebsdynamik ausgerichtet war, wurde von Akad. I. I. Artobolewski mit einer Synthese der aktuellsten Fragen der Getriebslehre auf Grund der neuesten Untersuchungen auf diesem Gebiet in der Sowjetunion und anderen Ländern eröffnet. Die Hauptpunkte des Vortrages waren : 1) Theorie der Arbeitsprozesse und deren Problematik ; 2) Synthese der komplexen Getriebe einschließlich hydraulischer und pneumatischer Systeme ; 3) Dynamik der Getriebe und Maschinen und deren Problematik ; 4) Theorie der Automaten und Regelsysteme der Arbeitsprozesse ; 5) Rolle der experimentellen Methoden für die Entwicklung der Maschinenlehre.

Wertvolle Beiträge brachten :

Prof. Dr. S. N. Koshewnikow, Dr. N. I. Koltschin, Prof. Dr. A. E. Kobrinski, Prof. Dr. L. Petrokas, Prof. Dr. A. P. Bessonow, Kand. techn.

---

[1]) I. I. Grivkov, „Sovetskim učenym est' o čem rasskazat'", Vestnik vîsşei şkolî nr. 8, p. 67—70 (1962).

Wiss. O. Gr. Osol, Prof. Kand. techn. Wiss. A. I. Jassiulionis, Kand. techn. Wiss. K. Ragulskis, Kand. techn. Wiss. A. A. Piktys, Kand. techn. Wiss. E. Riwin und V. V. Augustaitis, Prof. K. Dirdschela, Prof. O. E. Kepe, Kand. techn. Wiss. V. Neiland, I. B. Karintsew, Kand. techn. Wiss. W. A. Katonow, Prof. I. Tartakovski, L. D. Rusimow, Iu. W. Katonow, G. L. Efremowa. Die Arbeiten behandelten Fragen der Maschinendynamik auf Grund der elektronischen Methode, Ersatzgetriebe mit besonderer Berücksichtigung von Zahnradfragen, Getriebedynamik und - stabilität, Automatentheorie, Dynamik der Maschinen mit veränderlicher Masse, strukturelle Theorie der Getriebe mit Berücksichtigung der dynamischen Charakteristik; Methoden zur Konstruktion und Anwendung von kinematischen und dynamischen Diagrammen, kinematische Getriebssynthese, Konstruktion neuer Getriebe, usw.

RECENZII

GRIGORE IOACHIM, *Extracția țițeiului și gazelor*. Edit. tehnică, București, 1961, 512 p.

Lucrarea de față reflectă preocuparea permanentă a autorului de a pune la dispoziția inginerilor un material complet, care să cuprindă aspectele teoretice și practice ale problemelor fundamentale, întîlnite frecvent în exploatarea zăcămintelor de hidrocarburi fluide, în lumina ultimelor rezultate obținute în țară și străinătate.

Apariția acestei cărți completează o lacună, unanim recunoscută, a literaturii noastre tehnice.

Autorul a reușit să prezinte o lucrare cuprinzînd cele mai noi realizări ale tehnicii actuale, printr-o judicioasă prezentare critică și selectare a materialului bibliografic, totodată aducînd contribuții originale prin prezentarea rezultatelor propriilor sale cercetări.

Expunerea este clară și precisă, insistîndu-se mai mult asupra fundamentării teoretice și aplicării acesteia în practica exploatării, decît asupra detaliilor de calcul. Cu toate acestea, demonstrațiile matematice pot fi urmărite cu destulă ușurință fără să greveze înțelegerea textului.

Cititorul este introdus progresiv în actuala tehnică a extracției țițeiului; acest lucru ușurează mult înțelegerea aspectelor dificile ale problemelor tratate, care necesită în general cunoștințe ample și profunde din alte discipline tehnice.

Privită în ansamblu, lucrarea oferă inginerilor chemați să realizeze regimul tehnologic optim de extracție, capabil să asigure exploatarea rațională a zăcămintelor de hidrocarburi fluide, posibilitatea conducerii și controlului eficient al proceselor de extracții complexe, cu ajutorul metodelor moderne de investigații a sondelor, care apar o dată cu creșterea adîncimii acestora și a ritmului de extracție.

Analiza critică, efectuată de autor, avînd la bază conceptul cu privire la considerarea sistemului strat-sondă ca un tot unitar, din punct de vedere hidrodinamic, ridică probleme noi pentru cercetătorii care vor să aprofundeze studierea problemelor tratate.

Capitolul I tratează problema pregătirii găurii de sondă pentru exploatare, expunîndu-se considerații teoretice și practice referitoare la realizarea condițiilor optime necesare deschiderii stratului productiv, scheme de tubaj ale stratului productiv, imperfecțiunea hidrodinamică a sondelor după caracterul și gradul deschiderii, filtre de sondă, filtre de pietriș, pachere, precum și echipamentul de fund și suprafața pentru exploatarea simultană și selectivă a straturilor productive prin aceeași sondă.

Capitolul II conține considerații asupra sondelor în producție, examinîndu-se cu precădere metodele utilizate în prezent.

Bazele teoretice ale ascensiunii fluidelor bifazice în țevile de extracție, redate în capitolul III, sînt discutate pe larg insistîndu-se asupra rezultatelor calitative și cantitative cele mai importante. Utilitatea cunoașterii particularităților de curgere ascensională a amestecului gaze-țiței, care constituie premisele practice necesare folosirii raționale a energiei zăcămîntului, este ilustrată prin numeroase exemple de calcul. De asemenea, este de remarcat analiza critică a metodelor aplicate în prezent, cît și a celor propuse în literatură, făcîndu-se recomandări utile asupra domeniului de aplicabilitate ale acestora.

În continuare, în capitolele IV, V, VI și VII se expun : extracția țițeiului prin erupția naturală, erupția artificială, continuă și intermitentă, precum și prin piston liber. În aceste capitole este de remarcat tratarea originală a problemelor referitoare la calculul procesului fizic al separării amestecului gaze -țiței și al echipamentului de fund și suprafață , care poate asigura o separare eficace. De asemenea, este discutată problema dimensionării coloanei de extracție, pe baza calculului hidrodinamic, ținîndu-se seama pe cît posibil de condițiile reale de curgere în țevile de extracție, care asigură ascensiunea fluidelor cu randamentul maxim. O atenție deosebită este acordată problemei micșorării presiunii de demaraj a sondei, cu ajutorul supapelor de pornire, unde se redau date complete cu privire la metodologia stabilirii adîncimii de fixare a acestora.

Un volum important din lucrare este consacrat metodei de extracție a țițeiului prin pompajul de adîncime. În acest capitol, în afară de problemele clasice, se redau, în mod original și amplu, probleme de mare actualitate, de ex. : determinarea eforturilor unitare în prăjina lustruită, măsurarea acestora cu ajutorul dinagrafelor mecanice și electrice, dimensionarea garniturii de prăjini, pe baza calculului de rezistență la oboseală, precum și analiza fenomenelor vibratorii în garnitura de prăjini, care permit prelucrarea și interpretarea corectă a dinamogramelor.

Un alt capitol IX se ocupă de instalațiile individuale de pompare cu prăjini, prezentîndu-se mai ales considerațiile teoretice referitoare la calculul cinematic și dinamic al acestora.

Problema simulării fenomenelor din garnitura de prăjini cu ajutorul modelării mecanice și electrice a pompajului de adîncime, care prezintă un mare interes, datorită posibilităților largi oferite prin studiul comportării garniturii pentru condiții foarte variate de lucru întîlnite la sonde, este redat în capitolul X.

Tot în cadrul preocupărilor pentru introducerea tehnicii noi, autorul examinează în capitolul XI pompele fără prăjini, și anume : pompe hidraulice cu piston, pompe de fund cu piston acționate de electromotoare, pompe centrifuge de fund acționate cu motoare electrice și în sfîrșit pompe speciale.

Metodologia cercetării sondelor pe baza curgerii tranzitorie a fluidelor omogene și heterogene printr-un mediu poros omogen și izotrop, în ipoteza validității legii lui Darcy, în scopul obținerii informațiilor utile asupra parametrilor fizici ai stratului productiv, determinarea caracteristicilor de lucru a sondelor și a anomaliilor apărute în procesul de exploatare, este prezentată la nivelul cunoștințelor actuale obținute în lumina ultimelor cercetări.

Problemele speciale ale metodelor moderne de exploatare, de exemplu : exploatarea primară cu menținerea presiunii prin injecția extraconturală și intraconturală a fluidelor în zăcămînt, precum și recuperarea secundară, sînt discutate în capitolul XII.

Lucrarea se încheie printr-un capitol consacrat instalațiilor de automatizare ale extracției țițeiului, făcîndu-se descrierea instalațiilor utilizate în prezent precum și analiza comportării acestora în exploatare.

Din această succintă prezentare a lucrării se poate remarca că autorul a tratat în mod original toate problemele principale ale tehnologiei extracției țițeiului, la nivelul tehnicii actuale, aducînd în acest mod o valoroasă contribuție la introducerea tehnicii noi în țara noastră și la pregătirea cadrelor de specialiști.

H. Pascal

DAN TAŞCĂ şi IOAN BĂCANU, *Culegere de probleme de hidraulică tehnică*. Edit. tehnică, Bucureşti, 1962, 319 p.

Lucrarea reprezintă o culegere de probleme din cele mai importante capitole ale hidraulicii. Sînt prezentate aproximativ 300 probleme grupate în 21 capitole, care se succed într-o ordine normală de studiu a hidraulicii şi dintre care amintim : proprietăţile fizice ale fluidelor, forţe de presiune pe suprafeţe plane şi curbe, echilibrul relativ al fluidelor conţinute în recipiente, mişcări potenţiale plane şi axial-simetrice, mişcări datorite vîrtejurilor, similitudine, mişcări laminare, orificii şi deversoare, rezistenţe locale, calculul conductelor şi al reţelelor de conducte, curgerea lichidelor prin albii, forţe de acţiune şi reacţiune, portanţa şi rezistenţa de înaintare, aplicaţii la maşinile hidraulice şi pneumatice, curgerea fluidelor prin medii poroase şi transportul materialelor solide cu ajutorul fluidelor etc.

Prezentarea materialului este judicioasă. La începutul fiecărui capitol se dă un rezumat al principalelor noţiuni teoretice şi formule, necesare aplicaţiilor din capitolul respectiv. Urmează apoi problemele propriu-zise, rezolvate integral. Problemele sînt gradat prezentate, atît în cadrul fiecărui capitol, cît şi în întreaga lucrare, începînd cu aplicaţii simple şi terminînd cu probleme mai complexe.

Subliniem în mod deosebit faptul că autorii au reuşit să alcătuiască o culegere de probleme rezolvate în mod unitar. De asemenea mai trebuie scos în relief şi faptul că s-a urmărit şi s-a reuşit ca marii majorităţi problemelor să li se dea un caracter aplicativ în diferite domenii ale tehnicii şi practicii unde intervine hidraulica.

Autorii, consultînd o bibliografie bogată, au realizat o culegere variată, în care pe lîngă probleme cunoscute din alte lucrări, au introdus şi probleme noi, care reprezintă contribuţia lor.

Datorită calităţilor sale, lucrarea umple un gol în literatura noastră tehnico-ştiinţifică, fiind utilă atît studenţilor şi cadrelor didactice din învăţămîntul tehnic superior, cît şi inginerilor proiectanţi.

E. D. Deciu

Л. И. СЕДОВ, *Введение в механику сплошной среды* (Introducere în mecanica mediilor continue). Государственное издательство физико-математической литературы, Москва, 1962, 284 p.

În ultimul timp practica impune din ce în ce mai mult să se studieze medii continue deformabile care nu se mai pot aproxima prin cele considerate în cercetările matematice clasice (corpuri perfect elastice, omogene şi izotrope sau fluide perfecte incompresibile). De aceea, pe lîngă studiul tensorului tensiune (eventual ecuaţiile de echilibru sau de mişcare scrise pe un element în formă deformată, decupat din mediul continuu deformabil—neliniaritate mecanică) şi studiul tensorului deformaţie specifică sau studiul tensorului vitezelor de deformare (eventual ţinînd seama de neliniaritatea geometrică) trebuie făcut un studiu sistematic al relaţiilor care pot exista între aceşti tensori (un studiu al legii constitutive al mediului continuu deformabil respectiv). Pentru aceasta trebuie, în general, să se ţină seama şi de influenţa altor cîmpuri de forţe care pot interveni : un cîmp termic (aspectul termodinamic al problemei), un cîmp electromagnetic etc. Un asemenea studiu este deosebit de dificil, totuşi numai în acest fel se poate ajunge la o formulare corectă a problemelor impuse de practică. În cele trei capitole ale cărții sale, L. I. Sedov prezintă o trecere în revistă a acestor probleme — o dezvoltare a cursului ținut la Universitatea de stat din Moscova.

Capitolul întîi este dedicat unor elemente de calcul tensorial. După introducerea sistemelor de coordonate curbilinii și a transformărilor de coordonate se introduc funcțiile tensoriale. Menționăm funcțiile tensoriale potențiale ca și introducerea tensorului Riemann-Cristoffel. De asemenea, se consideră modul de diferențiere al tensorilor în raport cu coordonatele spațiale și în raport cu parametrii.

În capitolul al II-lea se studiază cinematica mediilor deformabile. Se consideră deformațiile infinit mici și deformațiile finite ale mediului deformabil și se studiază caracterul lor tensorial. Se introduc vectorul deplasare și vectorul rotație. O atenție deosebită este acordată condițiilor de continuitate ale mediului.

Ecuațiile dinamice și termodinamice, care caracterizează mediul considerat, sînt studiate în capitolul al III-lea. După stabilirea ecuațiilor generale de mișcare, după utilizarea teoremei energiei și după considerații generale de ordin termodinamic, autorul trece la considerarea mediilor fluide. Se prezintă astfel cazul lichidelor și gazelor perfecte, cazul fluidelor compresibile, cazul fluidelor vîscoase și cazul mișcării turbulente. Apoi se consideră mediul perfect elastic și deformațiile termoelastice, mediul cu proprietăți plastice, diferite modele reologice etc.

Lucrarea este însoțită de o bibliografie de 96 titluri, în special cărți.

Cartea acad. L. I. Sedov nu își propune să rezolve probleme concrete ale mecanicii mediilor continue deformabile, ci prezintă cu deosebită conciziune și claritate modul în care se pun aceste probleme în cercetările moderne, fiind astfel deosebit de utilă tuturor cercetătorilor din acest domeniu.

P. P. Teodorescu

W. A. GROSS, *Gas film lubrication* (John Wiley and Sons Inc. N. Y., London, 1962, 413 p.).

Interesul deșteptat de studiul teoretic al lubrificației cu gaze, cît și de aplicațiile practice mereu mai numeroase ale acesteia, au făcut să apară în ultimii ani multe lucrări care tratează diferite probleme din domeniul respectiv. Nu a existat pînă în prezent o tratare completă care să întrunească toate elementele necesare pentru o cunoaștere completă a ungerii cu gaze, în ansamblu. Varietatea mare a formelor constructive și a cazurilor posibile din punct de vedere teoretic și practic a condus în mod inevitabil la o limitare a cercetărilor la unele dintre aceste situații. Meritul volumului dr. W. A. Gross este de a cuprinde toate aspectele majore ale lubrificației cu medii gazoase, redîndu-le pentru prima oară în mod unitar într-o lucrare de proporții mari. Ca în cea mai mare parte a problemelor tehnicii moderne, tratarea matematică joacă un rol de seamă și aici; autorul a reușit să redea o imagine clară a soluțiilor, alegînd de preferință pe acelea care prezintă o mai mare precizie, sau care conduc la formule finale ușor de folosit în calculele numerice. Un număr mare de diagrame sintetizează aceste rezultate, sau permit comparația cu datele experimentale.

Autorul însuși a adus contribuții importante la rezolvarea ecuațiilor de bază cu ajutorul mașinilor de calcul, sau prin aplicarea metodei perturbațiilor și, concomitent, a urmărit unele faze experimentale. De pe urma acestei activități, lucrarea în ansamblu a avut de cîștigat, dovedind în general o judicioasă selecțiune și acordînd o pondere corectă diferitelor capitole.

Pornind de la constatarea că în anumite condiții, frecvente în practică, comportarea filmului lubrifiant de gaz este apropiată de aceea a mediilor incompresibile, totuși cu condiții la limită mai simple, autorul a redat în cursul diferitelor capitole o sinteză a ungerii cu lichide, în cazurile considerate. Din acest punct de vedere, volumul este interesant pentru toți acei care studiază ungerea hidrodinamică, indiferent de lubrifiantul folosit.

În primul capitol, se prezintă tipurile principale de ungere și de lagăre folosite, condițiile de similitudine și modelarea dinamică a fenomenului. Al doilea capitol tratează derivarea ecuațiilor de bază ale ungerii, ecuația lui Reynolds și a energiei, iar al treilea capitol expune problema bidimensională în cazul diferitelor forme ale filmului lubrifiant. Capitolul 4 urmărește, în continuare, problema tridimensională, expunînd la început metodele de rezolvare a ecuațiilor diferențiale (analitică, analogică, numerică), apoi soluțiile pentru lagăre plane, dreptunghiulare, lagăre axiale și lagăre radiale, în regim uniform, fără alimentare exterioară. Lagărele alimentate sub presiune fac obiectul capitolului 5, în care se studiază complet regimurile de lucru și efectele compresibilității, ținînd seama de viteza de scurgere a gazului, de dimensiunile filmului și de forma suprafețelor lubrificate. Ultimul capitol, al șaselea, prezintă regimurile de lubrificație nestaționare, efectul variației de grosime a filmului cu timpul și al accelerațiilor tangențiale, oscilațiile după normala la suprafețe și comportarea dinamică a lagărelor plane, apoi regimurile dinamice și stabilitatea lagărelor radiale și axiale; se scoate în evidență, pe lîngă instabilitatea de rotație, și instabilitatea pneumatică, caracteristică ungerii cu gaze.

O mare varietate de lagăre este examinată în cursul diferitelor capitole: plane, axiale, radiale, suprafețe paralele, înclinate, cu trepte, cu înclinare variabilă, lagăre compuse, suprafețe cu rostogolire, lagăre cu cuzinet flexibil etc. Lucrarea acoperă astfel toate situațiile care apar în practica proiectării și a construcției diferitelor agregate. Ea interesează deopotrivă pe cercetătorii din acest domeniu, pe proiectanți, ingineri și pe studenți. Conținînd rezultate foarte noi, tabele, date numerice și numeroase referințe bibliografice, volumul este un prețios ajutor pentru acei care se ocupă, sub toate formele, de lubrificația cu gaze. O mențiune specială merită condițiile de prezentare, figurile și diagramele, clar concepute și redate.

N. Tipei

D. MEKSYN, *New methods in laminar boundary-layer theory* (Metode noi în teoria stratului limită laminar). Pergamon Press, Oxford — London — New York — Paris, 1961, XXIV + 294 p.

După aproape șase decenii de la începuturile ei, teoria stratului limită se află încă în plină dezvoltare. O nouă carte asupra acestei probleme, fie chiar mărginită numai la stratul limită laminar, cum este aceea a lui D. Meksyn, nu poate fi decît binevenită, mai ales dacă pune la dispoziția specialiștilor o sinteză a unor lucrări mai recente, așa cum sugerează titlul.

Autorul, specialist cunoscut în acest domeniu, a pornit de la o idee diferită de aceea care stă la baza cunoscutului tratat al lui H. Schlichting. Considerînd așa cum spune în prefață, teoria stratului limită ca o ramură a fizicii matematice, a recurs la o tratare în consecință, punînd accentul asupra unor metode specifice de rezolvare a problemelor.

Cartea este împărțită în două părți, prima consacrată rezolvării diferitelor probleme de scurgere în stratul limită, iar a doua stabilității scurgerii laminare.

În introducere, autorul expune unele generalități asupra soluțiilor asimptotice ale ecuațiilor diferențiale, metodă frecvent utilizată în acest volum. Primul capitol are ca obiect ecuațiile de mișcare ale fluidelor vîscoase incompresibile, în timp ce capitolul al doilea conține o descriere fizică a stratului limită. În capitolul al treilea sînt prezentate cîteva soluții exacte ale unor probleme clasice de mișcare laminară. Stabilirea ecuațiilor stratului limită formează obiectul capitolului al patrulea, iar capitolul următor conține cîteva soluții simple ale acestor ecuații. Capitolul al șaselea este consacrat transformării ecuațiilor stratului limită pentru mișcarea în jurul unui corp solid, după un procedeu utilizat de autor și de H. Görtler. În capitolul al șaptelea sînt cuprinse o serie de considerații de natură matematică și aplicarea lor la ecuația $f'' + 2ff' = 0$ care apare în unele probleme de scurgere în stratul limită. Capitolul al optulea are ca obiect studiul scurgerii în jurul unei plăci semi-infinite, prin diverse modificări ale metodei propuse inițial de H. Blasius. În capitolul al nouălea sînt expuse unele probleme care pot fi reduse la rezolvarea ecuației $f''' - ff'' = \lambda(1 - f'^2)$ dată de V. M. Falkner și S. W. Skan. Rezultatele obținute sînt utilizate în capitolul al zecelea la rezolvarea ecuației generale care a fost obținută în capitolul al șaselea. Ca aplicație, se studiază în capitolul al unsprezecelea scurgerea în jurul unui cilindru eliptic. Următorul capitol conține unele considerații asupra problemelor desprinderii stratului limită. În capitolul al doisprezecelea, autorul trece pe scurt în revistă alte metode, bazate îndeosebi pe dezvoltarea în serii de puteri a soluției după ideea lui Blasius, perfecționată prin seriile noi ale lui Görtler. Capitolul ce urmează este dedicat expunerii metodelor aproximative, bazate pe ecuația impulsului dată de Kármán. Mișcarea în stratul limită tridimensional este tratată în capitolul al cincisprezecelea. Urmează apoi capitolul consacrat scurgerii nestaționare și acela în care se prezintă problemele legate de aspirația sau suflarea stratului limită. Un capitol mai amplu se referă la problemele de transfer de căldură în stratul limită, tratîndu-se atît convecția forțată cît și cea liberă.

Metoda nouă utilizată de autor în cele mai multe probleme, cu excepția celor expuse în capitolele V, XII și XIII, constă în esență în considerarea funcțiilor stratului limită ca soluții asimptotice în raport cu variabila normală pe peretele solid. În acest caz, prezintă o importanță deosebită evaluarea unor integrale definite; procedeul utilizat este acela numit al punctului-șa, iar cînd rezultatul este divergent, se utilizează procedeul lui Euler pentru sumarea seriilor divergente.

Ultimele trei capitole ale primei părți constituie o pregătire matematică pentru tratarea problemelor cuprinse în partea a doua a volumului. Este vorba de dezvoltările asimptotice ale soluțiilor unor ecuații diferențiale care conțin un parametru mare.

Partea a doua cuprinde șapte capitole. Primele două, cu caracter general, conțin expunerea metodei perturbațiilor mici, cu o scurtă privire asupra principalelor rezultate și cîteva considerații asupra unor factori care afectează stabilitatea. Ultimele patru capitole care, nu știm din ce motive, apar în volum ca formînd o a treia parte, sînt dedicate prezentării în amănunt a soluțiilor ecuației stabilității, studiului stabilității scurgerii între doi cilindri coaxial în rotație și stabilității scurgerii în jurul unei suprafețe concave.

Scrisă într-un stil clar și concis, cu utilizarea multor rezultate originale ale autorului, cartea lui D. Meksyn este utilă pentru specialiștii în problemele stratului limită și eventual din alte domenii în care metodele matematice utilizate cu precădere de autor își pot găsi aplicație.

T. Oroveanu

В. И. ЗУБОВ, *Колебания в нелинейных и управляемых системах* (Oscilaţii în sisteme neliniare şi de reglare automată). Судпромгиз, Ленинград, 1961, 629 p.

Vastul şir de cercetări, cristalizat într-o serie de trei monografii de specialitate, datorite cunoscutului matematician sovietic prof. dr. V. I. Zubov de la Universitatea ,,A. A. Jdanov'' din Leningrad, şi-a găsit acum o oglindire fructuoasă în noul volum intitulat *Oscilaţii în sisteme neliniare şi de reglare automată.*

Într-unul din volumele sale precedente consacrat metodelor lui Liapunov şi aplicaţiilor lor (Izd. LGU, 1957) V. I. Zubov, plecînd de la cele două metode ale lui Liapunov şi anume dezvoltarea soluţiei sistemului

$$\frac{dx_s}{dt} = f_s(x_1, x_2, \ldots, x_n, t) \qquad (s = 1, 2, \ldots, n),$$

în serii de formă specială şi folosirea funcţiei $V(x_1, x_2, \ldots, x_n, t)$ şi a derivatei sale în raport cu timpul

$$W(x_1, x_2, \ldots, x_n, t) = \frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial t} f_s,$$

calculată pe baza sistemului neautonom şi posedînd anume proprietăţi în raport cu $(x_1, x_2, \ldots, x_n, t)$, lărgeşte nebănuit cea de-a doua metodă şi ajunge la o teorie completă a stabilităţii pentru mulţimi invariante de sisteme dinamice.

În această monografie un loc însemnat îl ocupă problema de studiu al comportării curbelor integrale ale sistemelor de ecuaţii diferenţiale în vecinătatea poziţiilor de echilibru şi a orbitelor periodice, precum şi cercetarea soluţiilor aproape periodice a unor astfel de sisteme.

Referentul subliniază în mod deosebit faptul că autorul a reuşit să contribuie din plin prin materialul elaborat în această monografie la rezolvarea numeroaselor probleme legate de teoria de existenţă şi de ansamblu, de metode de determinare a regimurilor staţionare, aflate în neîncetata dezvoltare, lărgire şi adîncire astăzi în întregul domeniu pînă mai ieri complet necunoscut al mecanicii neliniare a vibraţiilor.

În acest scop se folosesc, completate adesea cu numeroase contribuţii proprii, chiar inedite, metoda micului parametru, teoria perturbaţiei regimurilor staţionare, teoria perturbaţiei orbitelor periodice şi multe alte metode.

Capitolul I al cărţii este consacrat îndeosebi determinării formei soluţiei generale a unui sistem liniar de ecuaţii diferenţiale avînd coeficienţi, combinaţii liniare de funcţii exponenţial descrescătoare, cu coeficienţi periodici sau aproape periodici.

În capitolul II, în vederea expunerii teoriei perturbaţiei unei orbite periodice (§. 10), se tratează în prealabil proprietăţile sistemelor dinamice şi se determină condiţiile în care soluţia periodică a sistemului este o autooscilaţie sau este stabilă în sensul lui Liapunov.

Capitolul III gravitează în jurul problemelor de existenţă a oscilaţiilor periodice şi forţate, asimptotic stabile în mare. Atare probleme se rezolvă pe baza metodelor calitative şi a evaluărilor cantitative, obţinute cu ajutorul unor funcţii, asemănătoare cu acelea introduse de A. M. Liapunov în cadrul studiilor sale asupra stabilităţii mişcării.

Capitolul IV este consacrat studiului oscilaţiilor în variate sisteme plane, autonome, neautonome, liniare şi neliniare. Trebuie subliniat aici aportul original al autorului relativ la rezolvarea problemei de stabilitate, instabilitate ş.a.

Capitolul V se ocupă cu studiul oscilațiilor în sisteme cu remanență și cu construirea aproximativă a regimurilor, insistîndu-se asupra comportării celorlalte curbe integrale în vecinătățile unor atare regimuri.

Aici și-au găsit loc în particular serii de dezvoltări, deosebit de sugestive și capabile de multilaterale aplicații în tehnică, relative la aplicarea metodei aproximațiilor succesive în vederea găsirii regimurilor staționare (§. 21) ; la construcția și la studiul oscilațiilor staționare proprii în sisteme de reglare automată ; la studiul oscilațiilor forțate în sisteme de reglare automată ; la determinarea criteriilor cantitative de stabilitate a regimurilor staționare în atare sisteme (§. 24).

Ultimul capitol (VI) este axat în jurul problemei de formare a legilor de reglare automată din condițiile de optimizare. El interesează ansamblul proceselor tranzitorii și studiul acționărilor fortuite asupra sistemelor neliniare, încadrîndu-se din acest punct de vedere în vastul domeniu al teoriei matematice a optimizării proceselor dinamice, creație strălucită cu totul recentă a colectivului laureat al premiului V. I. Lenin pentru anul 1962, condus de matematicianul sovietic L. Pontreagin.

Volumul recenzat, avînd la bază lucrările academicienilor A. M. Liapunov și N. N. Bogoliubov, precum și numeroase cercetări originale ale autorului, va fi deosebit de util în munca cercetătorilor științifici și aspiranților. El constituie un deosebit de prețios aport la vastul și mărețul edificiu al mecanicii neliniare a vibrațiilor, ce și-a găsit piatra de temelie în clasica lucrare a academicienilor sovietici N. M. Krylov și N. N. Bogoliubov, consacrată unor noi metode de mecanică neliniară (Novye metody nelinienoi mehaniki, ONTI, 1934).

D. Mangeron

A. SOMMERFELD , *Mechanik* (Mecanica). Ed. a 6-a, Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig K.-G., Leipzig, 1962, XII +256 p.

După moartea autorului, cunoscut cercetător în domeniul fizicii teoretice, apare a 6-a ediție a *Lecțiilor de fizică teoretică*, prelucrată și completată de E. Fues. Aceste lecții cuprind șase volume, primul fiind cel destinat mecanicii clasice ; celelalte volume cuprind : mecanica mediilor deformabile [1]), electrodinamica, optica, termodinamica și statistica, ecuațiile cu derivate parțiale ale fizicii.

Mecanica lui Arnold Sommerfeld este o carte cu caracter clasic, fiind destinată în special fizicienilor. Ea cuprinde opt capitole, urmate de o culegere de probleme și de soluțiile lor pentru primele șase capitole.

Capitolul I cuprinde mecanica punctului material. După introducerea axiomelor lui Newton și după unele considerații cu caracter general, se trece la studiul cinematicii și staticii punctului material în plan și în spațiu. După studiul dinamicii punctului se fac unele aplicații pentru cazuri particulare ; menționăm astfel problema lui Kepler. Se consideră și punctul de masă variabilă, stabilindu-se formula lui Meșcerski-Țiolkovski.

În capitolul al II-lea se studiază mecanica sistemelor de puncte materiale. Se introduc noțiunile de grad de libertate și deplasare virtuală, enunțîndu-se principiul lucrului mecanic virtual. Se trece apoi la principiul lui d'Alembert și se deduc ecuațiile lui Lagrange de speța întîi. Toate aceste rezultate sînt însoțite de numeroase exemple. Se stabilesc apoi două teoreme generale (teorema impulsului și teorema momentului cinetic) și se fac unele considerații privitoare la legile frecării.

---

[1]) Recenzată în „Studii și cercetări de mecanică aplicată", vol. XII, nr. 4, 1961, p.933.

Unele probleme privind micile mișcări sînt studiate în capitolul al III-lea. Menționăm astfel pendulul matematic și pendulul fizic, pendulul cicloidal și pendulul sferic. Se consideră și cazul vibrațiilor forțate, cazul vibrațiilor amortizate, cazul vibrării „prin simpatie", pendulul dublu etc.

Capitolul al IV-lea este dedicat problemei solidului rigid. Se studiază statica solidului rigid, cu care ocazie se iau în considerare diferitele sisteme de forțe care pot acționa asupra acestuia. Teorema impulsului și teorema momentului cinetic capătă o formă specială. Se introduc unghiurile și ecuațiile lui Euler și se consideră unele cazuri de integrare. Rezultatele obținute se aplică în cazul giroscopului, pentru care se indică cîteva aplicații tehnice, și în cazul dinamicii jocului de biliard.

Mișcarea relativă este cercetată în capitolul al V-lea. Se introduce forța lui Coriolis și se studiază acțiunea forțelor complementare la suprafața pămîntului. Rezultatele obținute se aplică la pendulul Foucault și la cazul special de problemă a celor trei corpuri, considerat de Lagrange.

Principiile mecanicii fac obiectul capitolelor VI și VII. În cadrul principiilor integrale se prezintă principiul lui Hamilton și principiul lui Maupertuis. Din primul principiu se deduc ecuațiile lui Lagrange de speța a doua, pentru care se dau numeroase aplicații. Se consideră apoi principiul diferențial al lui Gauss, echivalent cu principiul celei mai drepte traiectorii al lui Hertz.

Capitolul al VIII-lea este destinat teoriei lui Hamilton privitoare la mecanica analitică. Se stabilesc ecuațiile canonice ale lui Hamilton, folosind ecuațiile lui Lagrange sau principiul lui Hamilton, se consideră ecuațiile lui Routh și unele sisteme cu legături neolonome și se studiază separat cazul sistemelor conservative și neconservative. Se prezintă apoi metoda de rezolvare Hamilton-Iacobi și se aplică rezultatele obținute la problema lui Kepler.

Cartea lui A. Sommerfeld are în special un caracter didactic, fiind foarte utilă studenților facultăților de fizică, dar — datorită numeroaselor observații și adnotări pe care le cuprinde — prezintă interes și pentru cercetătorii științifici.

P. P. Teodorescu

BRUNO FINZI, PAOLO UDESCHINI, *Esercizi di Meccanica razionale.* Tamburini Editore, Milano, Terza edizione, 1962, VIII +547 p.

Culegerea de probleme de mecanică teoretică, elaborată de cunoscutul autor al apreciatelor volume de mecanică teoretică¹), ²), prof. Bruno Finzi în colaborare cu prof. P. Udeschini, are meritul de a urmări sistematic, pe lîngă asimilarea cunoștințelor necesare viitorilor ingineri în domeniul mecanicii teoretice, formarea unei gîndiri logice și însușirea metodologiei cercetării științifice. Toate exercițiile și problemele expuse sau enunțate în acest volum (peste 1 000) sînt prevăzute cu răspunsuri și ori de cîte ori s-a simțit nevoia cu figuri și indicații

---

¹) A se vedea, de ex., recenzia cărții *Calcolo tensoriale e applicazioni* (N. Zanichelli Editore, Bologna, 1949) de Bruno Finzi și Maria Pastori, făcută de tov. prof. M. Haimovici în „Buletinul Institutului politehnic din Iași", 3, *2*, 326 (1948).

²) A se vedea recenzia precedentă.

asupra căii sau căilor posibile de rezolvare. Contribuind din plin la deprinderea — adoptată la mecanica teoretică—de a se trece fără încetare prin fazele procesului cunoaşterii, de la schematizarea problemei fizice la traducerea problemei fizice în problema matematică, pentru a se trece apoi la rezolvarea problemei matematice şi a se încheia cu interpretarea rezultatului obţinut, insuflînd studenţilor dorinţa de a păşi la rezolvarea problemelor de mecanică teoretică cu propriile lor forţe şi de a apela la acest volum-ghid doar în cazul vreunui insucces, această culegere de probleme promovează o adevărată pasiune pentru mecanică, aşa cum ne-a fost dat să constatăm din propria noastră practică, în care am folosit ani de-a rîndul neîntrecutul volum de probleme datorit celebrului creator al mecanicii corpurilor cu masă variabilă, I. V. Mescerski.

Subliniem, aşa cum am făcut-o cu ocazia recenzării primei ediţii a acestei culegeri de probleme în ,,Buletinul Institutului politehnic din Iaşi'' (vol. 3, fasc. 1, 1948, p. 512—514), deosebita utilitate a capitolelor VIII, IX, XV, XIX, care reflectă tendinţa entuziastă a autorilor de a contribui la reînnoirea cursurilor de matematică şi mecanică teoretică, fiind consacrate respectiv staticii sistemelor articulate, a firelor şi a vergelelor, staticii corpurilor continue deformabile, introducerii în teoria modelelor şi a similitudinii mecanice şi dinamicii corpurilor continue deformabile.

D. Mangeron

H. RICHTER, *Rohrhydraulik. Ein Handbuch für praktische Strömungsberechnung* (Hidraulica ţevilor. Un manual pentru calculul practic al scurgerii). Vierte Auflage (Ediţia a patra), Springer - Verlag, Berlin — Göttingen — Heidelberg, 362 p., 229 fig.

Ajunsă la a patra ediţie, cartea lui H. Richter conţine un material bogat, referitor la o problemă a cărei importanţă practică a dat naştere la numeroase studii.

Prima parte a cărţii reprezintă o scurtă introducere în care sînt prezentate cîteva noţiuni fundamentale, mecanice şi termodinamice care îşi găsesc utilizarea în dezvoltările ulterioare.

Partea a doua, mult mai amplă, conţine consideraţiile teoretice asupra scurgerii prin ţevi şi materialul experimental aferent acestei probleme. La început, se stabileşte ecuaţia generală a căderii de presiune în ţevi drepte cu diametrul constant. Se consideră pe rînd cazul fluidelor incompresibile, acela al gazelor, în ipoteza unei evoluţii izotermice, adiabatice sau politropice precum şi cazul aburilor. Se tratează apoi problema scurgerii laminare în ţevi circulare drepte şi se prezintă o serie de consideraţii asupra trecerii de la regimul laminar la cel turbulent. Următoarele capitole cuprind studiul scurgerii turbulente în ţevile circulare drepte netede şi rugoase, în ţevile cu alte secţiuni transversale, în ţevi cu secţiune variabilă şi în ţevi cu axa curbă, în coturi şi ramificaţii.

Partea a treia este consacrată calculului practic al conductelor. Sînt date mai întîi formulele pentru calculul căderii de presiune, debitului şi diametrului pentru conducte de lichide, gaze şi aburi. În capitolele ce urmează sînt cuprinse o serie de date necesare pentru utilizarea acestor formule şi anume valori ale greutăţii specifice şi vîscozităţii pentru diferite fluide, diagrame pentru calculul coeficientului de rezistenţă şi valori ale diferiţilor coeficienţi de rezistenţă locală. În încheiere, se tratează pe rînd calculul conductelor de apă, de petrol, de aer, de gaze şi de aburi, dîndu-se pentru fiecare caz în parte şi exemple numerice, sub formă de probleme.

Cartea lui H. Richter poate fi utilizată cu succes pentru calculul conductelor în diferite situații. Atît formulele de calcul cît și diagramele auxiliare permit să se ia în considerare o mare diversitate de cazuri practice. Avîndu-se în vedere faptul că autorul pare a încerca o tratare exhaustivă a problemei, ar fi fost util să includă în volum și rezultatele importante obținute de hidraulicienii sovietici. De asemenea, ultimele capitole, care se referă la calculul efectiv al conductelor ar fi putut fi mai complete dacă s-ar fi introdus și calculul conductelor cu diametrul variabil pe porțiuni, cu derivații sau cu ramificații, destul de des utilizate în practică. Cartea rămîne foarte utilă pentru inginerii care se ocupă de calculul conductelor, dar ar fi cîștigat în valoare dacă ar fi fost dezvoltată și în direcția menționată mai sus.

T. Oroveanu

- S. K. **Kalinin**, Z. E. **Fain**, Sbornik vysokoho uceni technickoho v Brne, nr. 1–2/1961; 3–4/1961.
- Prace Instytutu Mechaniki Precyzyjnej, Warszawa, vol. IX, nr. 1,2,3,4/1961; vol. X, 1/1962.
- Polish Technical Abstracts, nr. 3/1962.
- Archiwum gornictwa, nr. 1,2/1962.
- Isotopentechnik, nr. 6,7/1962.
- Zeitschrift für messen, steuern, regeln, nr. 6,7,8/1962.
- Physica status solidi, nr. 6,7/1962.
- Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences, X, 5/1962.
- Wissenschaftliche Zeitschrift der Technischen Hochschule, Dresden, nr. 2/1962.
- The Review of the Polish Academy of Sciences, nr. 2/1962.
- Zeszyty Naukowe. Mechanika, 8/1962.
- „ „ Elektryka, 27/1962.
- Acta Technica CSAV, nr. 4/1962.
- Prace a studie, nr. 15/1962.
- Évkönyve. Az épitöipari és közlekedési müszaki egyetem, Budapest, 1961.
- Tudományos közlemények. Az épitöipari és közlekedési müszaki egyetem, Budapest, 1/1962.
- Jármüvek mezögazdasági gépek, 8/1962.
- UTIA Report, nr. 81,82,83/1962.
- UTIA Technical Note, nr. 56, 57/1962 (Institute of Aerophysics, University of Toronto).
- Mémoires et Travaux. Supplément au vol. 1, 1962 (Société Hydrotechnique de France, Paris).
- Physikalische Verhandlungen, nr. 1–2/1962; 5,6,7/1962 (Verband Deutscher Physikalischer Gesellschaften, Braunschweig).
- Physikertagung in Stuttgart 24–28 Sept. 1962 (Physikalisch-Technische Bundesanstalt, Braunschweig).
- Bibliografia Italiana di Idraulica, nr. 41,42,43,44/1960; nr. 45,46,47/1961.
- Bibliografia Italiana di Elettrotecnica, nr. 74–75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86/1962.
- Hydraulics Research Station Notes, nr. 4/1962 (Hydraulics Research Station D.S.I.R., Wallingford).
- Reports & Memoranda, nr. 3244, 3254, 3268, 3281, 3286/1962 (Aeronautical Research Council, Teddington).
- Pubblicazione, nr. 1–6, 8–21/1962 (Facolta di Ingegneria dell'Universita di Roma).
- Technical Reports of the Engineering Research Institute of Kyoto University, vol. XI, nr. 9–13/1961; vol. XII, nr. 1–5/1962.
- Report on Research Session 1959/1960 (The Royal College of Science & Technology, Glasgow).
- CoA Note, nr. 121, 122, 126/1962; CoA Report, nr. 153, 155/1962 (The College of Aeronautics, Cranfield).
- Transactions of Chalmers University of Technology, Göteborg, nr. 259/1962.
- International Journal of Mechanical Sciences, vol. 4, iulie-august 1962.
- Journal of the Franklin Institute, vol. 274, nr. 1/1962.
- Mathematical Reviews, vol. 24, nr. 2A, 2B/1962.
- Applied Mechanics Reviews, vol, 15, no. 7, 1962.

PUBLICAŢII PRIMITE PRIN SCHIMB LA REDACŢIE

S. K. KALININ, Z. E. FAIN, Spektralnîi analiz mineralnogo sîria. Izdat. Akademii Nauk Kazanskoi S.S.R., Alma-Ata, 238 p., 1962.

— Alexandr Ilici Ţiumenov, Izdat. Akademii Nauk S.S.S.R., Moskova, 89 p., 1962.

— Trudî Novocerkasskogo Politehniceskogo Instituta, t. 130, 1961.

— Trudî Tallinskogo Politehniceskogo Instituta, nr. 179, 180, 183, 184, 186/1960 ; 190/1961 ; 192/1962.

— Trudî Moskovskogo Energheticeskogo Instituta, nr. XXXV/1961.

— Trudî Konferenţii po teorii plastin i obolocek. Izdat. Kazanskogo Universiteta, 426 p., 1961.

— Soobşcenia Akademii Nauk Gruzinskoi SSR, t. XVII, nr. 6/1961 ; t. XVIII, nr. 1,2,3,4/1962.

— Izvestia Akademii Nauk Kazahskoi SSR. Seria matematika i mehanika, nr. 10/1962 ; Seria energheticeskaia, nr. 1/1962.

— Izvestia Kazanskogo Filiala Akademii Nauk SSSR, nr. 7/1955; nr. 10/1956; nr. 12/1958; nr. 14/1960.

— Izvestia Akademii Nauk Estonskoi SSR nr. 1,2,3,4/1958 ; nr. 1,2,3,4/1959 ; nr. 1,2,3,4/1960 ; nr. 1,2,3,4/1961 ; nr. 1/1962.

— Izvestia vîsşih ucebnîh zavedenii. Ţvetnaia metallurghia, nr. 3,4/1962.

— Izvestia vîsşih ucebnîh zavedenii. Fizika, nr. 6/1961 ; nr. 1,2/1962.

— Izvestia vîsşih ucebnîh zavedenii. Matematika, nr. 1,2,3/1962.

— Dokladî T.S.H.A., nr. 74/1962, (Ghidrotehnika i melioraţia.) 398 p.

— Referativnîi Jurnal. Mehanika, nr. 6,7,8/1962.

— Jurnal prikladnoi mehaniki i tehniceskoi fiziki, nr. 4/1962.

— Prikladna Mehanika, t. VIII, nr. 2,3,4/1962.

— Prikladnaia matematika i mehanika, vol. XXVI, nr. 3,4/1962.

— Bibliografia izdanii Akademii Nauk Belorusskoi SSR, Izdat. Akad. Nauk BSSR, Minsk, 1962.

— Ermüdungsfestigkeit von Werkstoffen und Bauelementen. Warschauer Tagung 12. —14. Mai 1960.

— Informationsdienst. „Angewandte Mechanik", Serie A. Strömungslehre., nr. 6a/1962 ; 7a/1962, Serie B. Festigkeit, Leichtbau, nr. 6b/1962 ; 7a/1962 (Institutul Politehnic, Dresden).

— Wissenschaftliche Zeitschrift der Universität Rostock, nr. 1,2,3/1961.

Disertaţii primite de la Institutul Politehnic din Karlsruhe

O. SCHIELE : *Ein Beitrag zur Theorie instationärer und periodisch arbeitender Propulsionsorgane*, 1961, 159 p.

D. H. STEGEMANN : *Radioisotopen als Hilfsmittel zur Untersuchung des Kolbenringdrehens und seines Einflusses auf die Abdichtung*, 1962, 123 p.

J. RAASCH : *Beanspruchung und Verhalten suspendierter Feststoffteilchen in Scherströmungen difhoher Zähigkeit*, 1961, 96 p.

K. W. WESTPHAL : *Eine elektrokinetische Anlage als Strömungsmaschine*, 1962, 68 p.

H. H. FERNHOLZ : *Theoretische Untersuchung zur optimalen Druckumsetzung in Unterschalldiffusoren*, 1961, 62 p.

O. SWATZKI : *Über den Einfluss der Rotation und der Wandstösse auf die Flugbahnen kugliger Teilchen im Luftstrom*, 1961, 143 p.

H. THIELEN : *Die Dämpfung von Druckstössen in Rohrleitungen für Flüssigkeiten und Flüssigkeits-Gasgemische*, 1962, 88 p.

R. KRUMMEL : *Druckstösse in gemischten Wasserrohrleitungen und deren Registrierung unter besonderer Berücksichtigung der Druckwellengeschwindigkeit und der Wassertemperatur*, 1961, 67 p.

Disertaţii primite de la Institutul Politehnic din Aachen

G. GOTSCH : *Untersuchungen zum Problem der Aktivität kleiner Kondensationskerne*, 1962, 116 p.

J. JANZING : *Untersuchungen über den Einfluss von stochastischen Störgrössen auf lineare und nichtlineare Regelkreise*, 1962, 89 p.

R. EMEIS : *Ein Legierungsverfahren zur Herstellung von Silizium - Leistungstransistoren*, 1962, 44 p.

Disertaţii primite de la Universitatea din Liège

T. GRÉDAY : *Examen des aspects métallurgiques des aciers à bas carbone*, 1961, 128 p.

R. BAUS : *Contribution au calcul à la rupture de béton armé*, 1960, 191 p.

Disertaţii primite de la Institutul Politehnic din Stuttgart

H. RUPP : *Beiträge zur Sprachübertragung über gestörte Übertragungskanäle unter besonderer Berücksichtung der Amplitudenbegrenzung*, 1961, 240 p.

G. BRINKMANN : *Die Eigenschwingungen von Schalen am Beispiel der Tonnenschalen mit Binderscheiben an den Meridianenden*, 1961, 42 p.

D. SEITZER : *Verformung von Impulsen auf inhomogenen Leitungen*, 1961, p. 81.

G. HELLER : *Elektromechanisches Totzeitglied mit kapazitiven Speichern*, 1961, 98 p.

U. VOGEL : *Der Biege- und Membranspannungszustand der rechteckigen orthotropen Platte mit grosser Durchbiegung unter gleichmässig verteilter Vollast bei Navierschen Randbedingungen, näherungsweise behandelt mit Hilfe der Energie-Methode*, 1961, 142 p.

F. WAHL : *Die Bewegung des Einflusses der Coulomb'schen Reibung auf das statische und dynamische Verhalten von Drehzahlreglern ohne Hilfsenergie für Einspritzpumpen von Dieselmotoren*, 1961, 60 p.

E. KLEIN : *Die Tunneldiode als Schwingungserzeuger*, 1961, 101 p.

W. AUER : *Über die fortlaufende digitale Messung von Zeitintervallen*, 1961, 59 p.

Disertaţii primite de la Institutul Politehnic Federal din Zürich

W. HEIERLI : *Die Dynamik eindimensionaler Bodenkörper im nichtlinearen, nichtelastischen Bereich*, 1961, 119 p.

F. HARTMANN : *Gegenstrom von Flüssigkeitsfilm und Gas im senkrechten Rohr*, 1961, 50 p.

R. VUILLEUMIER : *Analogieverfahren für die Bestimmung elektromagnetischer Wechselfelder in Leitern und Halbleitern*, 1961, 108 p.

A. RUEGG : *Les fonctions caractéristiques pondérées des lois de probabilité*, 1961, 61 p.

MARGRIT FREI : *Über die Lösungen linearer Differentialgleichungen mit ganzen Funktionen als Koeffizienten*, 1961, 222 p.

★

R. H. CERNI, L. E. FOSTER : *Instrumentation for Engineering Measurement*, John Wiley & Sons, Inc., New York-London.

* * * *Handbook of Engineering Mechanics*. — Editor W. Flügge McGraw-Hill Book Company, 1962.

DAN TAŞCĂ, IOAN BĂCANU : *Culegere de probleme de hidraulică tehnică*, Bucureşti, Editura tehnică, 1962.

Comitetul de redacţie al revistei face următoarea

RECTIFICARE

La lucrarea ,,Contribuţii asupra cercetării uzurii roţilor dinţate cu ajutorul izotopilor radioactivi'', apărută în ,,Studii şi cercetări de mecanică aplicată'' nr. 6/1962, autorii sînt :
A. Chişu, D. Maroş, T. Albu, G. Hulpe, D. Mateişanu, A. Daly, A. Szabó şi A. Vereş.

F 2557

F 2557

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÎNE
INSTITUTUL DE MECANICĂ APLICATĂ „TRAIAN VUIA"

Bmk

2

ANUL XIV
1963

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM KÖZPONTI KÖNYVTÁRA 1848

1963 AUG 2 3

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

COMITETUL DE REDACŢIE

Redactor responsabil:

ACADEMICIAN E. CARAFOLI

Membri :

ACADEMICIAN N. PROFIRI ;
ACADEMICIAN A. BELEŞ ;
GR. MATEESCU, membru corespondent al Academiei R.P.R. ;
N. TIPEI, membru corespondent al Academiei R.P.R. ;
R. BOGDAN, conferenţiar la Institutul de petrol, gaze şi geologie, Bucureşti ;
M. ARCAN, şef secţie, Institutul de cercetări în construcţii şi economia construcţiilor (INCERC), Bucureşti.

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ
APARE DE 6 ORI PE AN
Redacţia : INSTITUTUL DE MECANICĂ APLICATĂ „TRAIAN VUIA"
Str. Const. Mille 15, tel. 17.34.09

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÎNE
INSTITUTUL DE MECANICĂ APLICATĂ „TRAIAN VUIA"

STUDII ŞI CERCETĂRI DE
MECANICĂ APLICATĂ

2

ANUL XIV

1963

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

Revista

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

publică:

- Studii originale *de înalt nivel cu caracter fundamental de interes general ştiinţific şi reflectare în practică.*
- Note *(lucrări mai scurte) cu caracter original sau constituind o punere la punct a unei anumite chestiuni.*
- Referate ştiinţifice şi tehnice *în care se expune: stadiul actual al unei anumite probleme, subliniindu-se aspectul nou, observaţii şi discuţii asupra unor lucrări de mecanică aplicată.*
- Recenzii *asupra cărţilor şi studiilor romîne sau străine.*

Domeniile de specialitate ale revistei sînt:

- *Astrodinamică (optimizarea traiectoriilor, calculul orbitelor sau al segmentelor de orbite, optimizarea transferului interorbital, impactul vehiculelor spaţiale cu meteoriţii, orbite sincrone, astrorelativitate, zborul în atmosfera rarefiată, reintrarea în atmosfera densă, frînarea şi captarea aerodinamică a unui vehicul cosmic).*
- *Aeromecanică (mecanica fluidelor, aerodinamică, dinamica gazelor, mecanica avionului, aeroelasticitate, aerodinamica motoarelor cu ardere internă, termo-aerodinamica motoarelor cu reacţie, ventilaţie, aeromotori).*
- *Hidromecanică (hidraulică, construcţii hidrotehnice, irigaţie, turbine şi pompe, amenajări hidraulice).*
- *Construcţii de maşini (cinematica şi dinamica mecanismelor, frecare, ungere, uzură, metode moderne de calculul maşinilor, automatizare, studiul suprafeţelor, tehnologia mediilor solide continue).*
- *Mecanică generală (rezistenţa materialelor, elasticitate, plasticitate, vibraţii şi şocuri, stabilitate, analogii electrice şi hidraulice).*
- *Statica şi dinamica construcţiilor (metode pentru calculul static şi dinamic al construcţiilor, studiul materialelor neomogene, geotehnică, stabilitatea terenurilor, metode de executarea lucrărilor de construcţii).*
- *Tehnica măsurătorilor (aparate electronice pentru măsurarea mărimilor mecanice, utilizarea ultrasunetului şi a izotopilor radioactivi în tehnică).*

Revista urmăreşte stimularea activităţii ştiinţifice precum şi difuzarea lucrărilor valoroase, primind în acest scop spre publicare articole de la toţi specialiştii din ţară şi de la colaboratorii din străinătate.

★

Articolele vor fi redactate într-o formă concisă şi clară, evitîndu-se introduceri lungi referitoare la părţile cunoscute ale problemei.

Manuscrisele se vor preda în trei exemplare, dactilografiate la două rînduri, iar formulele vor fi scrise clar şi citeţ cu cerneală. Figurile şi graficele se vor desena în tuş pe hîrtie de calc. Se vor utiliza figuri numai cînd este absolut necesar şi în număr cît mai mic.

Literatura citată în text se va insera la sfîrşitul lucrării sub formă de bibliografie. Se va indica numele autorului, titlul lucrării, tomul, pagina, locul, editura, anul de apariţie, iar pentru revistă se va indica şi numărul respectiv. Trimiteri la lucrări nepublicate nu se admit.

Pe lîngă text se vor înainta pentru fiecare exemplar rezumate în limba romînă, eventual în rusă, franceză, engleză şi germană. Rezumatele vor fi în medie una pagină dactilografiată la 20 pagini de text.

Aceleaşi norme sînt valabile şi pentru colaborările din străinătate, care pot fi redactate în limbile rusă, engleză, franceză sau germană.

Manuscrisele se vor trimite la sediul Institutului de mecanică aplicată, Bucureşti str. C. Mille nr. 15, raionul „16 Februarie”.

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÎNE
INSTITUTUL DE MECANICĂ APLICATĂ „TRAIAN VUIA”

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

Tomul XIV, nr. 2 1963

SUMAR

STUDII

Pag.

N. TIPEI, Lubrificaţia hidrodinamică a lagărelor axiale cu sectoare 279
V. N. CONSTANTINESCU, Determinarea presiunilor în lagărele lubrificate cu gaze formate din suprafeţe plane dreptunghiulare 289
H. PASCAL, Asupra prelucrării datelor de presiune şi debit obţinute la curgerea tranzitorie a gazelor în zăcămînt, fără întreruperea exploatării sondei 301
GH. VASILCA şi AL. NICA, Aspecte de structură în suprafaţa activă la unele materiale antifricţiune pentru lagăre 311
OLGA BIŢĂ şi I. DINCĂ, Aspecte ale comportării la uzură a unor materiale de lagăre 319
RADU P. VOINEA şi MIHAIL C. ATANASIU, Contribuţii la determinarea pe cale analitică a vitezelor şi acceleraţiilor la un mecanism plan 331
CHR. PELECUDI, Asupra mecanismelor utilizate pentru controlul automat al suprafeţelor pieselor sferice 355
RADU C. BOGDAN, Utilizarea analizei armonice în studiul grupelor assurice plane de aspectul II şi III 365
IOAN I. ARON, Studiul mişcării giroscopului astatic rapid, în regim tranzitoriu 373
N. G. POPINCEANU şi M. D. GAFIŢANU, Contribuţii asupra proiectării şi construcţiei economice a roţilor dinţate 385
P. P. TEODORESCU, Consideraţii în legătură cu problema plană a teoriei elasticităţii în coordonate rectilinii oarecare 403
N. IOSIPESCU, Stabilirea şi experimentarea unui procedeu nou pentru încercarea oţelurilor la forfecare pură 419
VALERIU PETCU, Generalizarea metodei indirecte de calcul plastic al structurilor de beton armat 441

REFERATE ŞTIINŢIFICE ŞI TEHNICE

VASILE GABRIELESCU, Studiul baterii piloţilor 447

MANIFESTĂRI ŞTIINŢIFICE PESTE HOTARE

D. MANGERON, Al şaptelea Congres de mecanică teoretică şi aplicată, Bombay, 23–26 decembrie, 1961 467
RECENZII 473
PUBLICAŢII PRIMITE PRIN SCHIMB LA REDACŢIE 487

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

Le périodique

«*STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ*»
(*ÉTUDES ET RECHERCHES DE MÉCANIQUE APPLIQUÉE*)

publie:

- *des* études originales *à caractère hautement scientifique, recherches fondamentales d'intérêt général, orientées vers l'activité pratique;*
- *des* notes *(communications brèves) à caractère général, ou constituant une mise au point d'une certaine question;*
- *des* exposés scientifiques et techniques *où l'on expose: l'état actuel d'un certain problème, en soulignant son aspect nouveau; des remarques et discussions concernant certains travaux de mécanique appliquée;*
- *des* notes bibliographiques *au sujet des livres et des études roumains et étrangers.*

Les domaines de spécialité de la revue sont les suivants:

- *astrodynamique (réalisation des trajectoires optimums, calcul des orbites, ou des segments d'orbites, obtention du transfert interorbital optimum, impact des véhicules spatiaux avec les météorites, orbites synchrones, astrorelativité, vol en atmosphère raréfiée, retour dans l'atmosphère dense, freinage et saisie aérodynamique d'un véhicule cosmique).*
- *aéromécanique (mécanique des fluides, aérodynamique, dynamique des gaz, mécanique de l'avion, aéroélasticité, aérodynamique des moteurs à combustion interne, thermo-aérodynamique des moteurs à réaction, ventilation, aéromoteurs);*
- *hydromécanique (hydraulique, constructions hydrotechniques, irrigation, turbines hydrauliques et pompes);*
- *constructions mécaniques (cinématique et dynamique des mécanismes, frottement, lubrification, usure, méthodes modernes de calcul des machines, automation, étude des surfaces, technologie des milieux solides continus);*
- *mécanique générale (résistance des matériaux, élasticité, plasticité, vibrations et chocs, stabilité, analogies électriques et hydrauliques);*
- *statique et dynamique des constructions (méthodes de calcul statique et dynamique des constructions, étude des matériaux hétérogènes, mécanique des sols, stabilité des terrains, méthodes d'exécution des travaux de construction);*
- *technique des mesures (appareils électroniques pour la mesure des grandeurs mécaniques, utilisation des ultra-sons et des isotopes radioactifs en technique).*

La revue tend à stimuler la recherche scientifique et la diffusion des travaux méritoires en publiant, dans ce but, les articles scientifiques des collaborateurs roumains et étrangers.

★

Les articles seront rédigés dans un style concis et clair, étant évitées les introductions trop longues concernant les données connues des problèmes.

Les manuscrits seront envoyés en trois exemplaires, dactylographiés, aux formules écrites, de manière lisible, à l'encre. Les figures, ainsi que les diagrammes, seront tracés à l'encre de Chine sur du papier calque. On utilisera le nombre de figures strictement indispensable.

Les références bibliographiques seront mentionnées à la fin de l'article. On y indiquera le nom de l'auteur, le titre de l'ouvrage, le tome, la page, le lieu de la parution et, pour les périodiques on ajoutera le numéro auquel on se réfère. On ne fera pas mention des travaux non publiés.

Les manuscrits seront accompagnés d'un résumé en roumain ou, éventuellement, en russe, français, anglais ou allemand (environ une page pour 20 pages dactylographiées de texte).

Les mêmes normes sont valables pour les collaborateurs étrangers, qui peuvent rédiger leurs travaux en russe, anglais, français ou allemand.

Les manuscrits seront envoyés à l'adresse suivante: Institut de Mécanique Appliquée «Traian Vuia», 15, str. Constantin Mille, Bucarest, Roumanie.

Журнал

„ТРУДЫ И ИССЛЕДОВАНИЯ ПО ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКЕ”

публикует:

- Оригинальные исследования *высокого уровня, представляющие общий научный интерес, связанный с практикой.*
- Заметки *(краткие работы) оригинального характера, представляющие уточнение некоторого вопроса.*
- Научные и технические рефераты, *в которых излагаются: современное состояние определенной задачи с выявлением нового подхода к ней, замечания и обсуждения некоторых работ по прикладной механике.*
- Рецензии *на румынские или зарубежные книги и исследования.*

В журнале публикуются работы по следующим специальностям:

- *Астродинамика (оптимальные траектории, расчет орбит или отрезков орбит, оптимальная межорбитальная теплопередача, удар космических экипажей о метеориты, полет в разреженной атмосфере, возвращение в плотную атмосферу, торможение и аэродинамическое улавливание космического экипажа).*
- *Аэромеханика (механика жидкостей и газов, аэродинамика, газодинамика, механика самолета, аэроупругость, аэродинамика двигателей внутреннего сгорания, термоаэродинамика реактивных двигателей, вентиляция, ветродвигатели).*
- *Гидромеханика (гидравлика, гидромеханические сооружения, орошение, гидравлические турбины и насосы, гидравлические устройства).*
- *Машиностроение (кинематика и динамика механизмов, трение, смазка, износ, современные методы расчета различных машин, автоматизация, исследование поверхностей, механика сплошных твердых сред).*
- *Общая механика (сопротивление материалов, упругость, пластичность, вибрация и удары, устойчивость, электрические и гидравлические аналогии).*
- *Статика и динамика сооружений (методы статистического и динамического расчета сооружений, исследование неоднородных материалов, механика грунтов, устойчивость грунтов, методы производства строительных работ).*
- *Техника измерений (электронные приборы для измерения механических величин, применение ультразвука и радиоактивных изотопов в механике).*

Журнал предназначен для стимулирования научной деятельности, а также для распространения выдающихся работ и принимает с этой целью к опубликованию статьи всех отечественных специалистов и зарубежных сотрудников.

★

Статьи должны быть написаны в сжатой и ясной форме, избегая длинных введений (относящихся к уже известным частям проблемы).

Рукописи следует направлять в трех экземплярах, напечатанных на машинке через два интервала, формулы должны быть вписаны чернилами четко и ясно. Рисунки и графики следует делать китайской тушью на кальке. Присылать рисунки следует только в случае совершенной необходимости и в ограниченном количестве.

Литература, цитированная в тексте должна даваться общим списком в конце статьи. Нужно указывать инициалы и фамилию автора, заглавие, том, страницу, место издания, издательство, год издания, а для журналов — и соответствующий номер. Ссылки на неопубликованные работы не допускаются.

Кроме текста, для каждого экземпляра нужно представлять резюме на румынском языке или же на русском, французском, английском или немецком языках. Резюме должно составлять 1 страницу, написанную на машинке, на 20 страниц текста. Эти же нормы относятся и к работам зарубежных сотрудников, редактированным на русском, английском, французском или немецком языках.

Рукописи препровождаются по адресу: Институт прикладной механики, Бухарест, ул. Константин Милле, № 15, район Г. Георгиу-Деж.

STUDII

LUBRIFICAȚIA HIDRODINAMICĂ A LAGĂRELOR AXIALE CU SECTOARE

DE

N. TIPEI

621.89 : 532 : 621.82

Foarte mult folosite în construcția turbinelor hidraulice și în numeroase construcții de mașini, lagărele axiale s-au bucurat de o atenție deosebită în ultimul timp, datorită rolului important pe care-l îndeplinesc în tehnica modernă și condițiilor deosebit de grele în care lucrează uneori. Aceste condiții, sarcini mari și viteze reduse, cer o cercetare riguroasă și amănunțită pentru realizarea unui regim hidrodinamic de ungere, care permite o funcționare normală cu o siguranță deplină în exploatare. În esență, lagărele axiale cu sectoare se compun dintr-o suprafață mobilă în formă de coroană circulară *1*, care se rotește în jurul unui ax și o serie de plăci imobile *2*, în formă de sector, ce se sprijină tot timpul pe coroana în rotație. Încărcarea exterioară se transmite acesteia prin intermediul plăcuțelor care pot bascula în jurul unui pivot sau care se sprijină pe reazeme elastice de celelalte piese fixe. În consecință, plăcuțele *2* pot avea o așezare relativă oarecare față de suprafața mobilă care alunecă de-a lungul lor (fig. 1). Între suprafețele *1* și *2* se găsește filmul de lubrifiant. În regim hidrodinamic de ungere, el separă complet cele două corpuri, mărginite de *1* și *2*, evitînd contactul direct, uzura suprafețelor și pierderile mari de putere prin frecare directă.

Plăcuțele sînt plane, iar distanța lor, h, față de suprafața în rotație variază atît cu unghiul θ, cît și cu raza r. Dacă se consideră o așezare oarecare a unei plăci și se prelungește suprafața corespunzătoare, poziția acesteia rezultă prin rotația în jurul unei axe oarecare AB sau respectiv a generatricei O_1O_2 (fig. 1), paralelă cu această axă, la care se adaugă distanța de la O_1O_2 la planul de referință al suprafeței *1* și eventual o translație în lungul acestei axe. Fie $O_1'E$ perpendicular pe AB și paralel cu planul de referință, la o distanță oarecare h_0' de acesta și $O_1''C$ intersecția planului definit de O_1O_2 și de axa O_1O_3 a sistemului cu planul de referință. Fie, de asemenea, $O_1'E = a$, ε_0 tangenta unghiului dintre axa AB

şi suprafaţa 1, ε_1 tangenta unghiului dintre aceeaşi suprafaţă şi dreapta PD, definită prin intersecţia planului normal pe $O_1'' C$ şi conţinînd punctul P (situat pe plăcuţă) cu planul suprafeţei *2*. Notînd cu r distanţa punctului P_1 (proiecţia lui P pe *1*) la axa O_1O_3, cu θ unghiul dintre $P_1 O_1''$

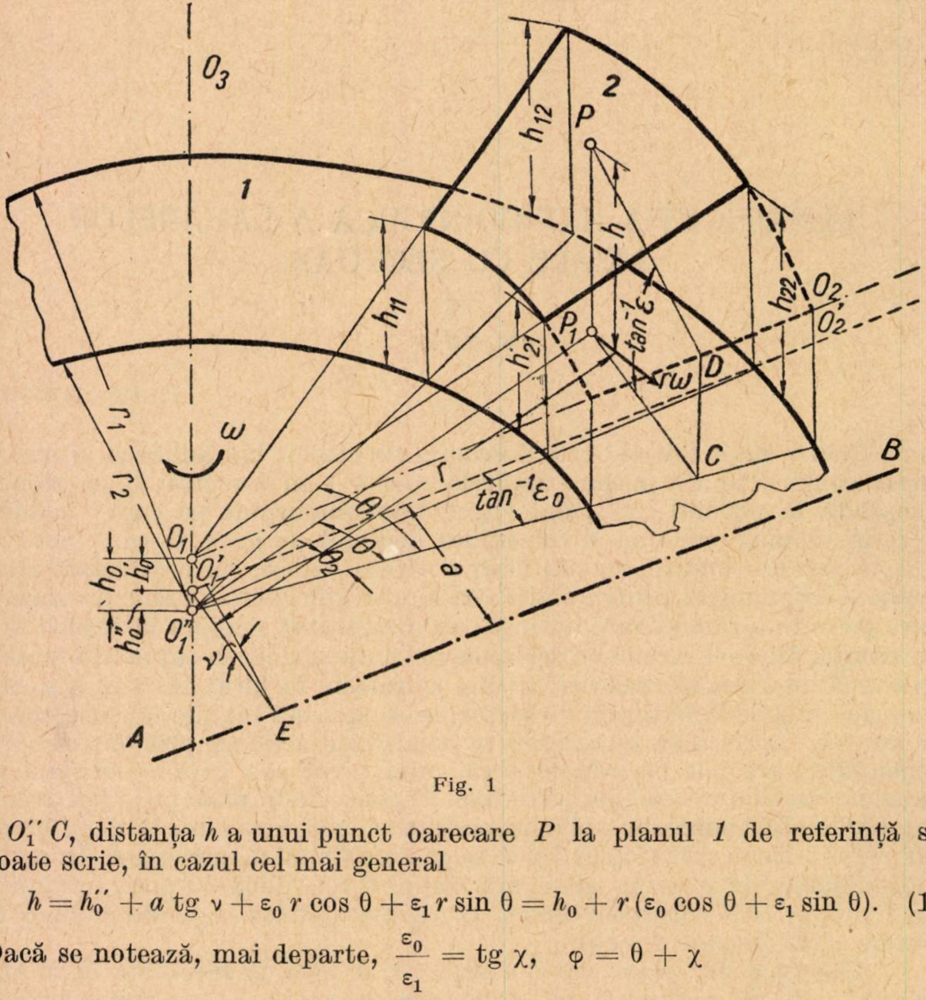


Fig. 1

şi $O_1'' C$, distanţa h a unui punct oarecare P la planul *1* de referinţă se poate scrie, în cazul cel mai general

$$h = h_0'' + a \operatorname{tg} \nu + \varepsilon_0 r \cos\theta + \varepsilon_1 r \sin\theta = h_0 + r(\varepsilon_0 \cos\theta + \varepsilon_1 \sin\theta). \quad (1)$$

Dacă se notează, mai departe, $\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_1} = \operatorname{tg} \chi, \quad \varphi = \theta + \chi$

$$h = h_0 + \sqrt{\varepsilon_0^2 + \varepsilon_1^2}\, r \sin\varphi = h_0 + \varepsilon\, r \sin\varphi. \quad (2)$$

Fie ω viteza unghiulară a coroanei circulare *1* în jurul axei O_1O_3; conform convenţiei de semne pentru θ şi φ din figura 1, ω este negativ şi trebuie considerat ca atare în calculele numerice. Ecuaţia diferenţială a presiunilor p se scrie [1]

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{h^3}{\mu}\frac{\partial p}{\partial\varphi}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{r\,h^3}{\mu}\frac{\partial p}{\partial r}\right) = 6\,\omega\frac{\partial h}{\partial\varphi}. \quad (3)$$

Viscozitatea μ poate fi considerată constantă sau variabilă cu grosimea h [1] după o lege experimentală

$$\mu = \mu_1 \left(\frac{h}{h_1}\right)^q, \quad h_1 = h(\theta_1), \tag{4}$$

care conduce la ecuația presiunilor sub o formă asemănătoare cu (3)

$$\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(h^{3-q}\frac{\partial p}{\partial \varphi}\right) + \frac{r}{h_1^q}\frac{\partial}{\partial r}\left(r h_1^q h^{3-q}\frac{\partial p}{\partial r}\right) = \frac{6\mu_1 \omega r^2}{h_1^q}\frac{\partial h}{\partial \varphi}. \tag{5}$$

Presupunînd cunoscută repartiția de presiuni care satisface această ecuație precum și condițiile pe frontiere

$$\begin{aligned} &\theta = \theta_1, \quad p = p_0; \quad \theta = \theta_2, \quad p = p_0, \\ &r = r_1, \quad p = p_0; \quad r = r_2, \quad p = p_0, \end{aligned} \tag{6}$$

se pot deduce componentele presiunilor și frecărilor pe placa *2* după un sistem de axe oarecare, de ex. $O_1'' O_3$, $O_1'' C$ și normala la acestea. Calculînd și momentele față de aceleași axe, rezultă 6 ecuații de echilibru; momentele în jurul lui $O_1'' O_3$ determină cuplul motor ce trebuie aplicat suprafeței mobile *1*, în timp ce celelalte două momente determină coordonatele r și θ ale rezultantei, respectiv punctul de oscilație al plăcuței. Celelalte 3 ecuații de echilibru ale forțelor stabilesc parametrii ε_0 ε_1 și h_0, definind complet soluția problemei.

Integralele presiunilor și ale forțelor de frecare vor depinde de aceste elemente care, în general, nu pot fi fixate a priori. De aici întreaga dificultate de rezolvare a ecuației (5) care, în principiu nu este susceptibilă de simplificări inițiale bazate pe particularizări asupra lui h. Totuși, soluțiile cunoscute introduc asemenea simplificări, fără de care calculul direct nu este posibil. Astfel A. Diacikov [2] consideră o variație exponențială a lui h cu θ, iar Skinner [3] o variație cu produsul puterilor lui r și θ. Dacă se consideră cazul limită $r_2 = 0$ se observă imediat că $h_0 = 0$ deoarece viteza este nulă și presiunea egală cu p_0 în axul sistemului, unde se produce astfel contactul direct între suprafețe. Ținînd seama că presiunile sînt proporționale cu viteza relativă, deci cu raza, se poate extinde și la cazul $r_2 \neq 0$ ipoteza $h_0 = 0$. În aceste condiții, ecuația presiunilor se scrie

$$\frac{\partial^2 p}{\partial \varphi^2} + (3-q)\operatorname{ctg}\varphi\frac{\partial p}{\partial \varphi} + (4-q)r\frac{\partial p}{\partial r} + r^2\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} = \frac{6\mu_1\omega}{\varepsilon^2 \sin^q \varphi_1}\cdot\frac{\cos\varphi}{\sin^{3-q}\varphi}. \tag{7}$$

Fie soluția particulară $p = p_\infty(\varphi)$, independentă de rază. Rezultă

$$\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}p_\infty}{\mathrm{d}\varphi} = \frac{6\mu_1\omega}{\varepsilon^2\sin^q\varphi_1}\cdot\frac{1}{\sin^{2-q}\varphi}\left(1 + \frac{C_1'(r)}{\varepsilon r \sin\varphi}\right) = \frac{6\mu_1\omega}{\varepsilon^2\sin^q\varphi_1}\cdot\frac{1}{\sin^{2-q}\varphi}\left(1 - \frac{\sin\varphi_0}{\sin\varphi}\right), \\ &p_\infty = \frac{6\mu_1\omega}{\varepsilon^2\sin^q\varphi_1}\int\left(1 - \frac{\sin\varphi_0}{\sin\varphi}\right)\frac{\mathrm{d}\varphi}{\sin^{2-q}\varphi} + C, \end{aligned} \tag{8}$$

pentru calculul lui p_∞ se observă că există formula de recurență

$$I_k = \int \frac{d\varphi}{\sin^k \varphi} = \frac{1}{k-1}\left(k\, I_{k-2} - \frac{\cos\varphi}{\sin^{k-1}\varphi}\right). \tag{9}$$

Cu ajutorul acesteia se poate exprima apoi I_{k-2}, în funcție de I_{k-4} etc. Cum însă puterile sinusului de sub integrală cresc mereu și devin pozitive, se poate opri calculul la I_{k-2m}, dacă m este suficient de mare, deoarece $(I_{k-2m})_{m\to\infty} \to 0$. Pentru valori întregi ale lui q, se găsește, cu condițiile $p_\infty = p_0$ pentru $0 = \theta_1$ și $\theta = \theta_2$ $(\varphi = \varphi_1, \varphi_2)$

$$p_\infty = p_0 + \frac{6\mu_1\omega}{\varepsilon^2}\left\{ - \operatorname{ctg}\varphi + \right.$$

$$\left. + \frac{(\operatorname{ctg}\varphi_1 - \operatorname{ctg}\varphi_2)\left(\dfrac{\cos\varphi}{\sin^2\varphi} - \ln \operatorname{tg}\dfrac{\varphi}{2}\right) - \operatorname{ctg}\varphi_1 \dfrac{\cos\varphi_2}{\sin^2\varphi_2} + \operatorname{ctg}\varphi_2 \dfrac{\cos\varphi_1}{\sin^2\varphi_1} + \operatorname{ctg}\varphi_1 \ln\operatorname{tg}\dfrac{\varphi_2}{2} - \operatorname{ctg}\varphi_2 \ln \operatorname{tg}\dfrac{\varphi_1}{2}}{\dfrac{\cos\varphi_1}{\sin^2\varphi_1} - \dfrac{\cos\varphi_2}{\sin^2\varphi_2} + \ln\dfrac{\operatorname{tg}\dfrac{\varphi_2}{2}}{\operatorname{tg}\dfrac{\varphi_1}{2}}}\right\},$$

$$q = 0$$

$$p_\infty = p_0 + \frac{6\mu_1\omega}{\varepsilon^2 \sin\varphi_1}\left[\ln\frac{\operatorname{tg}\dfrac{\varphi}{2}}{\operatorname{tg}\dfrac{\varphi_1}{2}} - \frac{\operatorname{ctg}\varphi - \operatorname{ctg}\varphi_1}{\operatorname{ctg}\varphi_2 - \operatorname{ctg}\varphi_1}\ln\frac{\operatorname{tg}\dfrac{\varphi_2}{2}}{\operatorname{tg}\dfrac{\varphi_1}{2}}\right], \quad q = 1$$

$$p_\infty = p_0 + \frac{6\mu_1\omega}{\varepsilon^2\sin^2\varphi_1}\left(\varphi - \varphi_1 - \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{\ln\dfrac{\operatorname{tg}\dfrac{\varphi_2}{2}}{\operatorname{tg}\dfrac{\varphi_1}{2}}}\ln\frac{\operatorname{tg}\dfrac{\varphi}{2}}{\operatorname{tg}\dfrac{\varphi_1}{2}}\right), \quad q = 2 \tag{10}$$

$$p_\infty = p_0 + \frac{6\mu_1\omega}{\varepsilon^2\sin^3\varphi_1}\left[\cos\varphi_1 - \cos\varphi + \frac{\cos\varphi_2 - \cos\varphi_1}{\varphi_2 - \varphi_1}(\varphi - \varphi_1)\right], \quad q = 3.$$

Soluția ecuației (7) fără membrul al doilea se poate scrie

$$p^* = f_1(\varphi)\cdot f_3(r). \tag{11}$$

Înlocuind aceasta în ecuația diferențială, se obține astfel următorul sistem de ecuații cu derivate drepte, în care χ_m este un parametru arbitrar ales

$$\begin{aligned} &\frac{d^2 f_{1m}}{d\varphi^2} + (3 - q)\operatorname{ctg}\varphi\,\frac{d f_{1m}}{d\varphi} + \chi_m f_{1m} = 0,\\ &\frac{d^2 f_{3m}}{dr^2} + \frac{4 - q}{r}\,\frac{d f_{3m}}{dr} - \frac{\chi_m}{r^2} f_{3\,m} = 0. \end{aligned} \tag{12}$$

Fie substituţia

$$\cos\varphi = 2\xi - 1 \tag{13}$$

cu ajutorul căreia prima ecuaţie (12) se scrie

$$\xi(\xi - 1)\frac{\mathrm{d}^2 f_{1m}}{\mathrm{d}\xi^2} + (4 - q)\left(\xi - \frac{1}{2}\right)\frac{\mathrm{d} f_{1m}}{\mathrm{d}\xi} - \chi_m f_{1m} = 0. \tag{14}$$

Soluţia acestei ecuaţii este [4] exprimată prin funcţiile hipergeometrice

$$f_{1m} = C_{11m} F(\alpha, \beta; \gamma; \xi) + C_{12m}\,\xi^{1-\gamma} F(\alpha - \gamma + 1, \beta - \gamma + 1; 2 - \gamma; \xi), \tag{15}$$

$$\alpha = \frac{3-q}{2}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{4\chi_m}{(3-q)^2}}\right);\quad \beta = \frac{3-q}{2}\left(1 - \sqrt{1 + \frac{4\chi_m}{(3-q)^2}}\right);\quad \gamma = 2 - \frac{q}{2},$$

dacă γ nu este un număr întreg; în cazul contrariu ($\gamma > 0$)

$$f_{1m} = C_{11m} F(\alpha, \beta; \gamma; \xi) + C_{12m}\Bigg\{\ln\xi\, F(\alpha, \beta; \gamma; \xi) +$$
$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \xi^k \frac{\alpha^{\boxed{k}}\,\beta^{\boxed{k}}}{\gamma^{\boxed{k}}\,k!}\,[h(k) - h(0)] - \sum_{k=1}^{\gamma-1} \frac{(k-1)!\,(1-\gamma)^{\boxed{k}}}{(1-\alpha)^{\boxed{k}}\,(1-\beta)^{\boxed{k}}}\,\xi^{-k}\Bigg\}. \tag{16}$$

În această expresie s-a notat

$$\alpha^{\boxed{k}} = \alpha(\alpha + 1)\ldots(\alpha + k - 1);\quad \beta^{\boxed{k}} = \beta(\beta + 1)\ldots(\beta + k - 1)\ \text{etc.},$$
$$h(n) = \psi(\alpha + n) + \psi(\beta + n) - \psi(\gamma + n) - \psi(n + 1), \tag{17}$$
$$\psi(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln\Gamma(x) = -\psi(1) - \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{x + k} - \frac{1}{k + 1}\right),$$

$\psi(x)$ fiind derivata funcţiei logaritm-gama, $\psi(1) \cong 0{,}577$ constanta lui Euler.

Pentru $\gamma = 1$ ($q = 2$), soluţia se scrie în mod asemănător

$$f_{1m} = C_{11m} F(\alpha, \beta; 1; \xi) + C_{12m}\Bigg\{F(\alpha, \beta; 1; \xi)\ln\xi +$$
$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \xi^k \frac{\alpha^{\boxed{k}}\,\beta^{\boxed{k}}}{(k!)^2}\,\{\psi(\alpha + k) - \psi(\alpha) + \psi(\beta + k) - \psi(\beta) + \tag{18}$$
$$+ 2\,\psi(k + 1) - 2\,\psi(1)\}\Bigg\},$$

în care se poate pune, ca şi în formula (16)

$$\psi(\alpha + k) - \psi(\alpha) = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha + 1} + \ldots + \frac{1}{\alpha + k - 1}. \tag{19}$$

Pentru $q = 4$, $\gamma = 0$, ecuația (14) este de tipul Legendre. Notînd $x = \cos\varphi$, ea se scrie [5]

$$\begin{gathered}(x^2 - 1)\frac{\mathrm{d}^2 f_{1m}}{\mathrm{d}x^2} - \nu(\nu + 1) f_{1m} = 0,\\ \nu = \sqrt{\frac{1}{4} + \chi_m} - \frac{1}{2},\end{gathered} \tag{20}$$

iar soluția este exprimată tot cu ajutorul funcțiilor hipergeometrice

$$\begin{aligned} f_{1m} = (1 - x^2)\frac{\partial}{\partial x}\Bigg[C_{11m} F\left(-\frac{\nu}{2}, \frac{1+\nu}{2}; \frac{1}{2}; x^2\right) + \\ + C_{12m}\, x F\left(\frac{1-\nu}{2}, 1 + \frac{\nu}{2}; \frac{3}{2}; x^2\right)\Bigg]. \end{aligned} \tag{21}$$

Un caz simplu se obține pentru $q = 3$:

$$f_{1m} = C_{11m} \sin\sqrt{\chi_m}\,\varphi + C_{12m}\cos\sqrt{\chi_m}\,\varphi. \tag{22}$$

A doua ecuație (12) are o soluție mult mai simplă, care se poate exprima cu ajutorul puterilor lui r și anume

$$f_{3m} = C_{31m}\, r^{-\frac{3-q}{2} + \sqrt{\frac{(3-q)^2}{4} + \chi_m}} + C_{32m}\, r^{-\frac{3-q}{2} - \sqrt{\frac{(3-q)^2}{4} + \chi_m}}. \tag{23}$$

Soluția generală va fi astfel

$$\begin{gathered} p = p_\infty + \sum_{m=1}^{\infty} f_{1m} f_{3m} = p_\infty + \sum_{m=1}^{\infty} p_m^\star(\varphi, r, C_{1m}, C_{2m}, C_{3m}),\\ C_{1m} = C_{11m}\, C_{31m};\ C_{2m} = \frac{C_{12m}}{C_{11m}};\ C_{3m} = \frac{C_{32m}}{C_{31m}}. \end{gathered} \tag{24}$$

Această soluție depinde de $3\,m + 2$ constante arbitrare, care permit satisfacerea condițiilor pe frontiere într-un număr egal de puncte. Pentru p_∞ s-au determinat cele două constante φ_0, C, în acest scop, în cîteva cazuri particulare. Condițiile vor fi îndeplinite cu o aproximație cu atît mai bună, cu cît numărul punctelor va crește, iar pentru $m \to \infty$ pot fi satisfăcute exact.

Se remarcă, de asemenea, că pentru $q = 3$ ecuația (5) nu mai depinde decît de derivata $\partial h/\partial\varphi$. Condițiile pe frontiere ale soluției $p^\star$ sînt $p^\star = 0$ pentru $\varphi = \varphi_1, \varphi_2$ și $r = r_1, r_2$. Forma acestei soluții permite imediat determinarea constantelor C_{2m}, C_{3m}, dacă se impune ca aceste condiții să fie riguros îndeplinite în lungul a două frontiere, de ex. $\varphi = \varphi_1$ și $r = r_1$. Notînd în general

$$f_{1m} = C_{11m} f_{11m}(\varphi) + C_{12m} f_{12m}(\varphi), \tag{25}$$

rezultă pentru fiecare soluție

$$C_{2m} = -\frac{f_{11m}(\varphi_1)}{f_{12m}(\varphi_1)}, \; C_{3m} = -r_1^{2\sqrt{\frac{(3-q)^2}{4}+\chi_m}}. \tag{26}$$

Pe celelalte două frontiere $\varphi = \varphi_2$ şi $r = r_2$ condițiile nu mai pot fi îndeplinite riguros pentru valori finite ale lui m. Cu ajutorul constantelor C_{1m} se poate realiza însă o aproximare bună chiar cu un număr m suficient de mic. Pentru satisfacerea condițiilor amintite pot fi alese în consecință şi valorile χ_m. Astfel, dacă m_1 şi m sînt două numere întregi oarecare, soluția (22) se poate scrie

$$\begin{gathered} f_{1m} = C_{11m}\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\left(m_1 - m\frac{\varphi_2}{\varphi_1-\varphi_2}\right)\pi}\,\sin\pi\left(m\frac{\varphi-\varphi_2}{\varphi_1-\varphi_2}+m_1\right), \\ \sqrt{\chi_m} = \frac{m\pi}{\varphi_1-\varphi_2}. \end{gathered} \tag{27}$$

În acest caz, pot fi satisfăcute simultan şi exact condițiile pe frontierele $\varphi = \varphi_1$, $\varphi = \varphi_2$ şi $r = r_1$ sau $r = r_2$ rămînînd ca numai pentru una din valorile extreme ale lui r să se folosească constantele C_{1m}. Deoarece m_1 nu influențează decît semnul întregii expresii, se poate considera $m_1 = 0$, înglobînd acest semn în constanta C_{11m}.

Rezultanta presiunilor (forța portantă a plăcuței) este

$$W = \int_{\varphi_2}^{\varphi_1}\int_{r_2}^{r_1}(p-p_0)\,r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r, \tag{28}$$

sau pentru $q = 3$, dacă se înglobează în C_{1m} şi radicalul expresiei (27)

$$\begin{aligned} W = {} & \int_{\varphi_2}^{\varphi_1}\int_{r_2}^{r_1}\left\{\frac{6\mu_1\omega}{\varepsilon^2\sin^3\varphi_1}\left[\cos\varphi_1-\cos\varphi+\frac{\cos\varphi_2-\cos\varphi_1}{\varphi_2-\varphi_1}(\varphi-\varphi_1)\right]+\right. \\ & \left.+\sum_{m=1}^{\infty}C_{1m}\sin\left(m\pi\frac{\varphi-\varphi_2}{\varphi_1-\varphi_2}\right)\cdot\left(r^{\sqrt{\chi_m}}+C_{3m}\,r^{-\sqrt{\chi_m}}\right)\right\}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r = \\ & = \frac{3\mu_1\omega}{\varepsilon^2\sin^3\varphi_1}\left[\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2}(\cos\varphi_1+\cos\varphi_2)+\sin\varphi_2-\sin\varphi_1\right](r_1^2-r_2^2)+ \\ & +\sum_{m=1}^{\infty}C_{1m}\frac{\varphi_1-\varphi_2}{m\pi}\left[1-(-1)^m\right]\cdot\left[\frac{1}{1+\sqrt{\chi_m}}\left(r_1^{1+\sqrt{\chi_m}}-r_2^{1+\sqrt{\chi_m}}\right)+\right. \\ & \left.+C_{3m}\frac{1}{1-\sqrt{\chi_m}}\left(r_1^{1-\sqrt{\chi_m}}-r_2^{1-\sqrt{\chi_m}}\right)\right]. \end{aligned} \tag{29}$$

Efortul tangențial unitar exercitat pe suprafața în mişcare (1) se scrie sub forma tensorială, dacă v_φ, v_2 sînt componentele vitezei fluidului pe direcțiile φ (normală pe raza r) şi x_2 (normală pe suprafață)

$$\begin{gathered} \tau_{2\varphi} = -\mu\left(v_{\varphi/2}+v_{2/\varphi}\right), \\ v_{2/\varphi} \cong 0, \qquad v_{\varphi/2} = \frac{\partial v_\varphi}{\partial x_2} - v_j\left\{\begin{matrix} j \\ \varphi\;\; 2 \end{matrix}\right\}. \end{gathered} \tag{30}$$

Ultima expresie cuprinde sumarea în raport cu indicele j și simbolurile cunoscute ale lui Cristoffel. În sistemul de coordonate ales (φ, x_2, r), coeficienții lui Lamé sînt $H_1 = r$, $H_2 = H_3 = 1$; rezultă astfel [1], ținînd seama că $v_2 \cong 0$

$$\begin{aligned} v_{\varphi/2} + v_{2/\varphi} &= \frac{\partial (H_1 v_\varphi)}{\partial x_2} + \frac{\partial (H_2 v_2)}{\partial \varphi} - 2\left(v_\varphi \frac{\partial H_1}{\partial x_2} + v_2 \frac{\partial H_2}{\partial \varphi}\right) \cong \\ &\cong \frac{\partial (H_1 v_\varphi)}{\partial x_2} = r\,\frac{\partial v_\varphi}{\partial x_2}. \end{aligned} \tag{31}$$

Viteza tangențială în interiorul filmului este [1]

$$v_\varphi = \frac{1}{2\mu}\, x_2 (x_2 - h)\, \frac{\partial p}{r\,\partial \varphi} + r\,\omega \left(1 - \frac{x_2}{h}\right). \tag{32}$$

Cu ajutorul acesteia și al relației (31), se obține din (30)

$$\tau_{2\varphi} = \frac{h}{2r}\,\frac{\partial p}{\partial \varphi} + \mu\,\frac{r\omega}{h}, \tag{33}$$

iar momentul de frecare, dirijat după axa de rotație, va fi

$$M_2 = \int_{r_2}^{r_1}\int_{\varphi_2}^{\varphi_1} \tau_{2\varphi}\, r^2\, \mathrm{d}r\, \mathrm{d}\varphi = \int_{r_2}^{r_1}\int_{\varphi_2}^{\varphi_1} \left(\frac{h}{2}\, r\, \frac{\partial p}{\partial \varphi} + \mu\, \frac{r^3 \omega}{h}\right) \mathrm{d}\varphi\, \mathrm{d}r. \tag{34}$$

Integrînd prin părți primul termen și ținînd seama de (4) rezultă, decă h_{φ_1}, h_{φ_2} sînt valorile lui h pentru $\varphi = \varphi_1, \varphi_2$

$$\begin{aligned} M_2 = {} & \int_{r_2}^{r_1} \frac{r}{2}\left[p_0 (h_{\varphi_1} - h_{\varphi_2}) - \int_{\varphi_2}^{\varphi_1} p\, \frac{\partial h}{\partial \varphi}\, \mathrm{d}\varphi\right] \mathrm{d}r + \\ & + \mu_1 \omega \int_{r_2}^{r_1} r^3 \left[\int_{\varphi_2}^{\varphi_1} \frac{(h_0 + \varepsilon r \sin \varphi)^{q-1}}{(h_0 + \varepsilon r \sin \varphi_1)^q}\, \mathrm{d}\varphi\right] \mathrm{d}r. \end{aligned} \tag{35}$$

În cazul considerat anterior $h_0 = 0$, $q = 3$, rezultă

$$\begin{aligned} M_2 = {} & -\frac{\mu_1 \omega}{\varepsilon \sin^3 \varphi_1} (r_1^3 - r_2^3) \left[\cos \varphi_1 \sin \varphi_1 - \cos \varphi_2 \sin \varphi_2 + \frac{(\cos \varphi_2 - \cos \varphi_1)^2}{\varphi_1 - \varphi_2} - \right. \\ & \left. - \frac{1}{6}\left(\varphi_1 - \varphi_2 - \frac{\sin 2\varphi_1 - \sin 2\varphi_2}{2}\right)\right] + \frac{\varepsilon}{4} \sum_{m=1}^{\infty} C_{1m} \left(\frac{r_1^{3+\sqrt{\chi_m}} - r_2^{3+\sqrt{\chi_m}}}{3 + \sqrt{\chi_m}} + \right. \\ & \left. + C_{3m} \frac{r_1^{3-\sqrt{\chi_m}} - r_2^{3-\sqrt{\chi_m}}}{3 - \sqrt{\chi_m}}\right) \frac{\dfrac{m\pi}{\varphi_1 - \varphi_2}}{\dfrac{m^2 \pi^2}{(\varphi_1 - \varphi_2)^2} - 1} [(-1)^m \cos \varphi_1 - \cos \varphi_2]. \end{aligned} \tag{36}$$

Formulele (28) și (34) permit calculul rezultantei și momentului pentru orice valoare q, dacă se utilizează expresiile corespunzătoare ale presiunilor, date de (24) și de formulele (10), (11), (15), (16), (18), (21), (22) și (23). Aceste formule cuprind dezvoltări în serii de puteri întregi ale $\cos \varphi$ și $\sin \varphi$, sau fracționare ale lui r și nu prezintă greutăți deosebite de calcul. Ele pot fi însă laborioase. Pentru exemplificare, s-a folosit valoarea $q = 3$ care are avantajul de a elimina dezvoltările în serie ale lui f_{1m} și de a exprima pe W și M_2 sub o formă mai simplă. Această valoare corespunde foarte bine cazului cînd ε nu are valori mari

$$\varepsilon \leqslant \frac{h_2}{r(\sin\varphi_1 - \sin\varphi_2)}; \; h_2 = h_0 + \varepsilon r \sin\varphi_2, \tag{37}$$

așa cum s-a arătat în alte lucrări [6]. Practic, se poate spune că $q = 3$ convine în cazul lagărelor care nu sînt mult încărcate, sau care lucrează la viteze de rotație ridicate.

Pentru $q = 3$ se poate deduce mai general momentul de frecare, considerînd parțial și influența lui h_0. Fie

$$A = h_0^2(\varphi_1 - \varphi_2); \; B = 2h_0\,\varepsilon(\cos\varphi_2 - \cos\varphi_1);$$

$$C = \frac{\varepsilon^2}{2}\left(\varphi_1 - \varphi_2 - \frac{\sin 2\varphi_1 - \sin 2\varphi_2}{2}\right);$$

$$a = \frac{C}{\varepsilon^3 \sin^3\varphi_1}; \; b = \frac{B - \dfrac{3h_0 C}{\varepsilon \sin\varphi_1}}{\varepsilon^3 \sin^3\varphi_1}; \; c = \frac{A - \dfrac{3h_0}{\varepsilon\sin\varphi_1}\left[\dfrac{h_0}{\varepsilon\sin\varphi_1}(1 - 3C) + B\right]}{\varepsilon^3\sin^3\varphi_1};$$

$$d = -ah_0^3 - 3h_0\,\varepsilon\sin\varphi_1(bh_0 + c\,\varepsilon\sin\varphi_1); \; e = -h_0^2(bh_0 + 3c\,\varepsilon\sin\varphi_1); \tag{38}$$

$$f = -ch_0^3; \; L = f - \frac{h_0}{\varepsilon\sin\varphi_1}\left(e - \frac{dh_0}{\varepsilon\sin\varphi_1}\right);$$

$$M = \frac{e - \dfrac{2\,dh_0}{\varepsilon\sin\varphi_1}}{\varepsilon\sin\varphi_1}; \; N = \frac{\mathrm{d}}{\varepsilon^2\sin^2\varphi_1}.$$

Cu aceste notații, ultimul termen din formula (35) se scrie

$$\begin{aligned}
&\mu_1'\,\omega\int_{r_2}^{r_1} r^3\left[\int_{\varphi_2}^{\varphi_1}\frac{(h_0 + \varepsilon r\sin\varphi)^2}{(h_0 + \varepsilon r \sin\varphi_1)^3}\,\mathrm{d}\varphi\right]\mathrm{d}r = \mu_1\omega\int_{r_2}^{r_1}\Bigg(ar^2 + br + c + \\
&+ \frac{L}{(h_0 + \varepsilon r\sin\varphi_1)^3} + \frac{M}{(h_0 + \varepsilon r \sin\varphi_1)^2} + \frac{N}{h_0 + \varepsilon r\sin\varphi_1}\Bigg)\mathrm{d}r = \\
&= \mu_1\omega\Bigg\{\left[\frac{a}{3}(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2) + \frac{b}{2}(r_1 + r_2) + c\right](r_1 - r_2) + \\
&+ \frac{L}{2\varepsilon\sin\varphi_1}\left[\frac{1}{(h_0 + \varepsilon r_2\sin\varphi_1)^2} - \frac{1}{(h_0 + \varepsilon r_1 \sin\varphi_1)^2}\right] + \\
&+ \frac{M}{\varepsilon\sin\varphi_1}\left(\frac{1}{h_0 + \varepsilon r_2\sin\varphi_1} - \frac{1}{h_0 + \varepsilon r_1\sin\varphi_1}\right) + \\
&+ \frac{N}{\varepsilon\sin\varphi_1}\ln\frac{h_0 + \varepsilon r_1\sin\varphi_1}{h_0 + \varepsilon r_2 \sin\varphi_2}\Bigg\}.
\end{aligned} \tag{39}$$

Această expresie urmează astfel să înlocuiască termenul

$$\frac{\mu_1 \omega}{6\varepsilon \sin^3 \varphi_1} (r_1^3 - r_2^3) \left(\varphi_1 - \varphi_2 - \frac{\sin 2\varphi_1 - \sin 2\varphi_2}{2} \right), \tag{40}$$

din formula (36) în cazul $h_0 \neq 0$.

Primită la redacție la 1 decembrie 1962

HYDRODYNAMIC LUBRICATION OF TILTING-PAD THRUST BEARINGS

ABSTRACT

The general form of lubricant layer thickness is established by considering that both surfaces (the tilting pad and the rotating circular ring) are plane and have anyone relative position. Assuming that the extensions of these surfaces have a common point on the rotation axis of the system, the pressure distribution is determined in the general case when the viscosity is also variable. The assumption is justified from the operation viewpoint and rigorous of the pad forms a complete circular sector. For a viscosity variation corresponding to the parameter $q = 3$, the solution is expressed in a simpler form.

The solution shows that the boundary conditions can be always rigorously satisfied for two boundaries or for three boundaries when $q = 3$ and with any degree of approximation for the remaining ones. The pressure resultant and the friction moment about the system axis are then determined. The operating characteristics assume a simple form for $q = 3$ and the corresponding results may be easily used for design purposes mainly for high rotation velocities and moderate loads. In other cases, the general expressions established may be used.

BIBLIOGRAFIE

1. N. Tipei, *Theory of Lubrication.* Stanford, 1962, 55.
2. A. К. Дьячков, *Развитие гидродинамической теории смазки применительно к упорным подшипникам скольжения*, Издательство Академии Наук СССР, Москва, 1959, 9.
3. S. M. Skinner, *Film Lubrication of Finite Curved Surfaces.* J. Appl. Phys., *9*, 409—421 (1938).
4. Ж. Рыжик, И. Градштейн, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*, Гостехиздат, Москва, 1951, 415, 421.
5. E. Камке, *Справочник поо быкновенным дифференциальным уравнениям.* Москва, 1951, 597, 612.
6. N. Tipei, V. N. Constantinescu, Al. Nica, O. Bita, *Lagăre cu alunecare.* Ed. Acad. R.P.R., 1961, 76.

STUDII

DETERMINAREA PRESIUNILOR ÎN LAGĂRELE LUBRIFICATE CU GAZE FORMATE DIN SUPRAFEȚE PLANE DREPTUNGHIULARE

DE

V. N. CONSTANTINESCU

621.82 : 621.89 : 533 : 517.9

Ecuațiile lubrificației cu gaze sînt după cum se știe, neliniare, fapt care îngreunează mult tratarea analitică a problemei, chiar pentru cazuri particulare simple. Dacă în plus se ține seama că fenomenul real de scurgere în stratul de lubrifiant este tridimensional, rezultă că, cel puțin în stadiul actual, nu se pot obține rezultate corecte pentru aplicații practice decît prin integrarea numerică a ecuațiilor diferențiale ale problemei. Rezultatele obținute prin metode numerice prezintă însă neajunsul că nu permit generalizări și extrapolări, relevarea anumitor condiții de optimum, a unor factori secundari etc. De aceea, în vederea obținerii unei imagini cît mai complete asupra caracteristicilor și particularităților funcționale ale lagărelor lubrificate cu gaze este necesar și util ca, în paralel cu dezvoltarea metodelor numerice de integrare, să se elaboreze și metode analitice aproximative care să permită deducerea rezultatelor sub o formă cît mai simplă, chiar dacă pentru acest scop este necesară introducerea unor aproximații mai mari.

Astfel plecînd de la ecuația presiunilor în stratul de lubrifiant pentru mişcări izoterme tridimensionale permanente

$$\frac{\partial}{\partial \bar{x}}\left(\bar{h}^3\,\bar{p}\,\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}}\right)+\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\left(\bar{h}^3\,\bar{p}\,\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}}\right)=6H\,\frac{\partial(\bar{p}\,\bar{h})}{\partial \bar{x}}, \tag{1}$$

unde

$$\bar{p}=\frac{p}{p_0}\,;\quad \bar{h}=\frac{h}{h_m};\quad \bar{x}=\frac{x}{l};\quad \bar{z}=\frac{z}{l};\quad H=\frac{\mu V l}{p_0 h_m^2}, \tag{2}$$

în lucrarea [1] prin neglijarea unor termeni nelineari (ținînd seama de comportarea soluției în cazurile extreme $V \to 0$, $V \to \infty$) și aproximarea altora cu valori constante, se deduce în locul ecuației (1) ecuația liniară

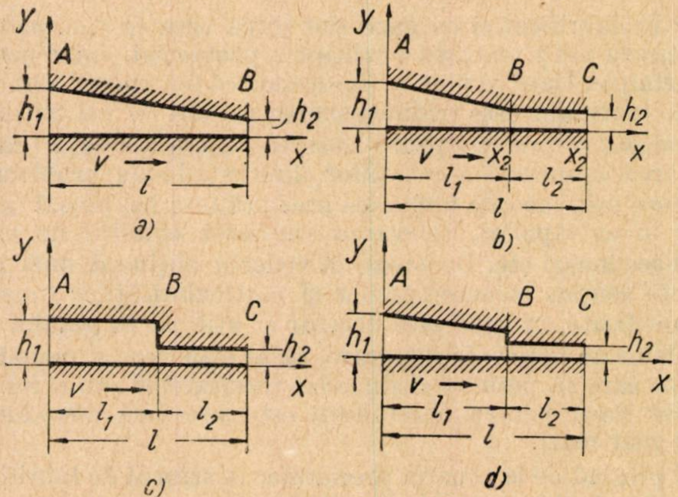
$$\frac{\partial^2\overline{\Pi}}{\partial\overline{x}^2} - 6H\frac{\partial\overline{\Pi}}{\partial\overline{x}} + \frac{\partial^2\overline{\Pi}}{\partial\overline{z}^2} = \frac{\partial^2\overline{h}}{\partial\overline{x}^2}, \qquad (3)$$

în care

$$\overline{\Pi} = \overline{p}\,\overline{h}. \qquad (4)$$

În relațiile de mai sus s-a notat cu p, h, μ, V, l, respectiv presiunea, grosimea filmului de lubrifiant, viscozitatea gazului, viteza suprafeței mobile și lungimea zonei lubrificate în sensul vitezei V respectiv în lungul axei x. De asemenea, cu p_0 s-a notat presiunea mediului înconjurător, iar cu h_m grosimea medie h.

Sub forma (3) ecuația presiunilor a fost utilizată în lucrarea [1] pentru deducerea presiunilor și a caracteristicilor de funcționare ale lagărelor circulare. Cu anumite corecții [2] rezultatele obținute concordă în mod satisfăcător cu datele numerice și experimentale existente. Este de menționat că aceste corecții sînt necesare nu pentru a compensa erorile metodei și mai mult pentru a compensa anumite aproximații asupra condițiilor la limită, introduse în lucrarea [1] cu scopul de a obține o soluție analitică a presiunilor sub o formă închisă [2].



a) b) c) d)

Fig. 1

Rezultatele pozitive menționate fac desigur interesantă și utilă aplicarea metodei de mai sus și la alte tipuri de lagăre. Să considerăm de exemplu lagărele compuse din suprafețe plane (fig. 1) studiate anterior prin metode riguroase în ipoteza că alungirea lagărelor este infinită [3].

Pentru toate aceste tipuri de lagăre, grosimea $h(x)$ este liniară sau constantă pe porţiuni ; în consecinţă $\mathrm{d}^2h/\mathrm{d}x^2 = 0$ iar ecuaţia (3) ia forma mai simplă

$$\frac{\partial^2\overline{\Pi}}{\partial\bar{x}^2} - 6H\frac{\partial\overline{\Pi}}{\partial\bar{x}} + \frac{\partial^2\overline{\Pi}}{\partial\bar{z}^2} = 0. \tag{5}$$

MIŞCĂRI BIDIMENSIONALE

În cazul lagărelor de alungire infinită presiunea nu depinde de z şi o dată cu aceasta nici variabila $\Pi(\partial\Pi/\partial z = 0)$. Prin urmare ecuaţia presiunilor (5) se scrie

$$\frac{\mathrm{d}^2\overline{\Pi}}{\mathrm{d}\bar{x}^2} - 6H\frac{\mathrm{d}\overline{\Pi}}{\mathrm{d}\bar{x}} = 0, \tag{6}$$

sau, după o primă integrare în raport cu x

$$\frac{\mathrm{d}\overline{\Pi}}{\mathrm{d}\bar{x}} - 6\,H\,\overline{\Pi} = C_1' \tag{7}$$

sau, în sfîrşit

$$\overline{\Pi} = C_2\,\mathrm{e}^{6H\bar{x}} + C_1 \tag{8}$$

unde C_2 şi $C_1 = -\,C_1'/6\,H$ sînt constante de integrare.

Să considerăm următoarele condiţii generale

$$\left.\begin{array}{ll} \text{la } \bar{x} = 0, & \bar{p} = \bar{p}_1, \\ \bar{x} = 1, & \bar{p} = \bar{p}_2. \end{array}\right\} \tag{9}$$

În aceste condiţii, dacă $h = \text{const.}$ (suprafeţe paralele)

$$\overline{\Pi} = h\left[\bar{p}_1 - (\bar{p}_1 - \bar{p}_2)\frac{\mathrm{e}^{6H\bar{x}} - 1}{\mathrm{e}^{6H} - 1}\right] \tag{10}$$

şi

$$\bar{p} = \bar{p}_1 - (\bar{p}_1 - \bar{p}_2)\frac{\mathrm{e}^{6H\bar{x}} - 1}{\mathrm{e}^{6H} - 1}. \tag{11}$$

Dacă h variază liniar cu $\bar{x}$ după relaţia

$$\bar{h} = \bar{h}_1 - (\bar{h}_1 - \bar{h}_2)\,\bar{x} \tag{12}$$

rezultă analog

$$\overline{\Pi} = \bar{p}_1\,\bar{h}_1 - (\bar{p}_1\,\bar{h}_1 - \bar{p}_2\,\bar{h}_2)\,\frac{\mathrm{e}^{6H\bar{x}} - 1}{\mathrm{e}^{6H} - 1}, \tag{13}$$

sau

$$\bar{p} = \frac{\bar{p}_1 \bar{h}_1}{\bar{h}} - \frac{\bar{p}_1 \bar{h}_1 - \bar{p}_2 \bar{h}_2}{\bar{h}} \frac{e^{6H\bar{x}} - 1}{e^{6H} - 1}. \tag{14}$$

Formulele (11) şi (14) permit determinarea presiunilor în mod simplu pentru toate tipurile de lagăre prezentate în figura 1. Astfel pentru lagărul din figura 1 *a*, distribuţia presiunilor este dată de formula (14) cu $\bar{p}_1 = \bar{p}_2 = 1$

$$\bar{p} = \frac{h_1}{h} - \frac{h_1 - h_2}{h} \frac{e^{6H\bar{x}} - 1}{e^{6H} - 1}. \tag{15}$$

Pentru lagărul din figura 1 *b*, procedînd analog ca în lucrarea [3] obţinem pentru zona *AB*

$$\bar{p} = \frac{h_1}{h} - \frac{h_1 - \bar{p}_s h_2}{h} \frac{e^{6H_1\bar{x}_1} - 1}{e^{6H_1} - 1}; \quad H_1 = \frac{\mu V l_1}{p_0 h_m^2}, \tag{16}$$

unde $\bar{p}_s$ este presiunea în punctul *B*. Pentru zona *BC* din (11) se deduce

$$\bar{p} = \bar{p}_1 - (\bar{p}_s - 1) \frac{e^{6H_2\bar{x}_2} - 1}{e^{6H_2} - 1}; \quad H_2 = \frac{\mu V l_2'}{p_0 h_2^2}. \tag{17}$$

Necunoscuta p_s se deduce din relaţia de racordare pentru derivatele presiunilor

$$\left\{\left(\frac{h_1}{h_2} - 1\right)\bar{p}_s - \left(\frac{h_1}{h_2} - \bar{p}_s\right)\frac{6H_1 e^{6H_1}}{e^{6H_1} - 1}\right\}\frac{1}{l_1} = -(\bar{p}_s - 1)\frac{6H_2}{e^{6H_2} - 1}\frac{1}{l_2}, \tag{18}$$

sau

$$\bar{p}_s = \frac{\dfrac{h_1}{h_2}\dfrac{6H_1 e^{6H_1}}{e^{6H_1} - 1} + \dfrac{l_1}{l_2}\dfrac{6H_2}{e^{6H_2} - 1}}{\dfrac{h_1}{h_2} - 1 + \dfrac{6H_1 e^{6H_1}}{e^{6H_1} - 1} + \dfrac{l_1}{l_2}\dfrac{6H_2}{e^{6H_2} - 1}}. \tag{19}$$

Se constată că dacă H_1, $H_2 \to \infty$ atunci $\bar{p}_s \to \frac{h_1}{h_2}$ iar dacă $H_1, H_2 \to 0$ după ridicarea nedeterminării, se deduce $\bar{p}_s \to 1$. De asemenea cînd $\frac{h_1}{h_2} = 1$, $\bar{p}_s = 1$.

De asemenea în cazul din figura 1 *c* pentru zona *AB* presiunea este dată de relaţia

$$\bar{p} = 1 + (\bar{p}_s - 1)\frac{e^{6H_1\bar{x}_1} - 1}{e^{6H_1} - 1}; \quad H_1 = \frac{\mu V l_1}{p_0 h_1^2}, \tag{20}$$

iar pentru zona BC de relația (17). Necunoscuta $\bar{p}_s$ se determină din condiția de conservare a debitului masic (de exemplu debitul în punctul A să fie egal cu debitul în punctul C)

$$-\frac{\rho_0 h_1^3 p_0}{12 \mu l_1}\left(\frac{d\bar{p}}{d\bar{x}_1}\right)_{\bar{x}_1=0} + \frac{\rho_0 V h_1}{2} = -\frac{\rho_0 h_2^3 p_0}{12 \mu l_2}\left(\frac{d\bar{p}}{d\bar{x}_2}\right)_{\bar{x}_2=1} + \frac{\rho_0 V h_2}{2}, \tag{21}$$

sau

$$-\frac{h_1}{h_2}\frac{\bar{p}_s - 1}{e^{6H_1} - 1} + \frac{h_1}{h_2} = (\bar{p}_s - 1)\frac{e^{6H_2}}{e^{6H_2} - 1} + 1, \tag{22}$$

de unde

$$\bar{p}_s = \frac{\dfrac{e^{6H_2}}{e^{6H_2} - 1} + \dfrac{h_1}{h_2}\dfrac{1}{e^{6H_1} - 1} + \dfrac{h_1}{h_2} - 1}{\dfrac{e^{6H_2}}{e^{6H_2} - 1} + \dfrac{h_1}{h_2}\dfrac{1}{e^{6H_2} - 1}}. \tag{23}$$

De o manieră analoagă se poate construi și distribuția presiunilor pentru lagărul din figura 1d ca și pentru alte tipuri de lagăre compuse din suprafețe plane. De asemenea se pot calcula, fără dificultăți de principiu, numeric sau analitic, caracteristicile de funcționare ca : rezultanta presiunilor, momentele de frecare, poziția rezultantei presiunilor etc.

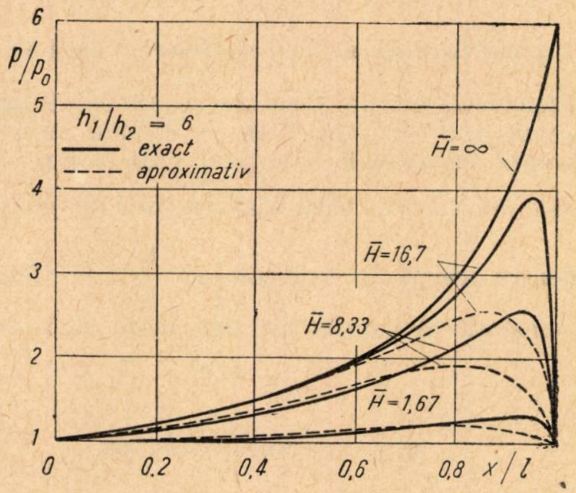


Fig. 2

Rezultatele de mai sus prezintă interes prin faptul că, în comparație cu rezultatele corecte [3], permit punerea în evidență a erorii metodei. De exemplu pentru lagărul din figura 1 a, distribuția presiunilor pentru diferite numere $\bar{H}$

$$\bar{H} = \frac{\mu V l}{p_0 h_2^2} = \frac{h_m^2}{h_2^2} H = \left(\frac{h_1}{h_2} + 1\right)^2 \frac{H}{4}, \tag{24}$$

şi $\frac{h_1}{h_2} = 6$ este prezentată în figura 2. Se constată că în regiunea $\bar{x} \sim 1$ apar diferenţe importante. Aceste diferenţe sînt de obicei mult mai reduse (în exemplu de mai sus s-a luat intenţionat un raport $\frac{h_1}{h_2}$ mare ; de obicei $\frac{h_1}{h_2} = 1{,}5, \ldots, 4$) şi în orice caz tind către zero o dată cu creşterea numărului $\bar{H}$. De asemenea, erorile absolute se anulează nu numai pentru $\bar{H} \to \infty$, dar şi pentru $\bar{H} \to 0$. Mai mult, în calcule interesează în primul rînd eroarea asupra capacităţii portante, eroare care este mai redusă. Astfel în figura 3 s-a trasat curba coeficientului de încărcare $\zeta = \frac{P}{p_0\, l}$ în funcţie de $\bar{H}$ pentru acelaşi tip de lagăr $\left(\text{cu } \frac{h_1}{h_2} = 6\right)$ faţă de valorile corecte [3]. Se constată că erorile nu sînt mari, mai mult ele sînt acoperitoare.

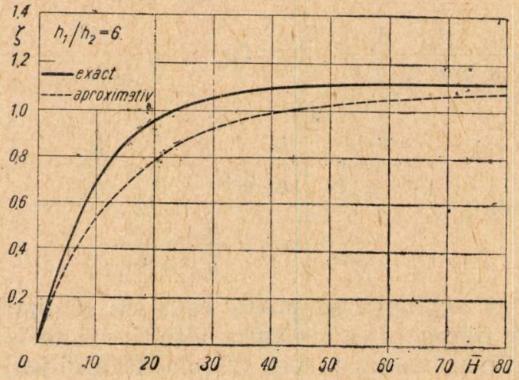


Fig. 3

MIŞCĂRI TRIDIMENSIONALE

Dacă lăţimea b a lagărului este finită (suprafaţa de formă în plan dreptunghiulară), trebuie să se considere ecuaţia presiunilor sub forma completă (5). Să considerăm soluţia acesteia sub forma

$$\bar{\Pi} = \bar{\Pi}_\infty - \bar{\Pi}^* \tag{25}$$

unde $\bar{\Pi}_\infty$ este soluţia problemei bidimensionale (8) iar $\bar{\Pi}^*$ soluţia ecuaţiei (5). Forma (25) a soluţiei facilitează după cum se va arăta punerea condițiilor la limită ale problemei (astfel, introducerea soluției $\overline{\Pi}_\infty$ nu este absolut necesară, deoarece ecuația (5) este omogenă).

În plus, să considerăm soluția $\overline{\Pi}^*$ sub forma unei serii de produse de funcții numai de $\bar{x}$, respectiv numai de $\bar{z}$

$$\overline{\Pi}^* = \sum_{m=1}^{\infty} f_{1m}(\bar{x}) f_{2m}(\bar{z}). \tag{26}$$

Introducînd această soluție în ecuația (5) se obțin următoarele ecuații diferențiale ordinare pentru funcțiile f_{1m} și f_{2m}

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2 f_{1m}}{d\bar{x}^2} - 6H\frac{df_{1m}}{d\bar{x}} + \chi_m f_{1m} = 0, \\ &\frac{d^2 f_{2m}}{d\bar{z}^2} - \chi_m f_{2m} = 0, \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

unde χ_m este un parametru arbitrar.

Ecuațiile (27) pot fi integrate cu ușurință în cazul general. Se pot obține astfel

$$f_{1m} = e^{3H\bar{x}}\left[C_{1m}\exp\left(\bar{x}\sqrt{9H^2 - \chi_m}\right) + C_{2m}\exp\left(-\bar{x}\sqrt{9H^2 - \chi_m}\right)\right], \tag{28}$$

și

$$f_{2m} = C_{3m}\,\mathrm{ch}\sqrt{\chi_m}\,\bar{z} + C_{4m}\,\mathrm{sh}\sqrt{\chi_m}\,\bar{z}. \tag{29}$$

În acest mod, soluția generală a ecuației diferențiale (5) este constituită pentru orice formă de lagăr compus din suprafețe plane înclinate sau paralele (fig. 1). Urmează însă ca în funcție de tipul de lagăr considerat să se impună condițiile la limită și de racordare corespunzătoare.

Să considerăm astfel un lagăr plan simplu (fig. 1*a*). La acesta, presiunea trebuie să fie egală cu presiunea p_0 din mediul înconjurător la $x = 0$ și $x = l$ ($\bar{p} = 1$ pentru $\bar{x} = 0$, $\bar{x} = 1$) oricare ar fi $\bar{z}$. Totodată, dacă se aleg axele de coordonate cu axa x în planul median al lagărului atunci presiunea trebuie să fie simetrică în raport cu z, deci $C_{4m} = 0$. Se constată că deoarece condiția $\bar{p} = 1$ pentru $\bar{x} = 0$, $\bar{x} = 1$ este automat satisfăcută de soluția $\overline{\Pi}_\infty$ (15), deducerea soluției totale $\overline{\Pi}$ (25) ar fi mult ușurată dacă s-ar putea realiza ca soluția (28) și o dată cu aceasta $\overline{\Pi}^*$ să se anuleze la capitolele lagărului

$$f_{1m} = 0 \text{ pentru } \bar{x} = 0,\ \bar{x} = 1. \tag{30}$$

Aceste condiții pot fi satisfăcute cu ajutorul constantelor arbitrare χ_m. Într-adevăr, dacă se ia

$$\chi_m = 9\bar{H}^2 + \pi^2 m^2 \tag{31}$$

atunci

$$\exp\left(\bar{x}\sqrt{9H^2 - \chi_m}\right) = e^{im\pi\bar{x}}; \quad \exp\left(-\bar{x}\sqrt{9\bar{H}^2 - \chi_m}\right) = e^{-im\pi\bar{x}}, \tag{32}$$

astfel încît soluția (29) se scrie dacă în plus se ia $C_{1m} = - C_{2m} = = \frac{C_m}{2}$ sub forma

$$f_{2m} = C_m \, e^{3H\bar{x}} \sin \pi m\bar{x}. \tag{33}$$

Cum nu este un număr întreg, condițiile (30) sînt astfel automat realizate.

În acest mod, ținînd seama și de simetria presiunilor în raport cu z, din (33) și (29) se deduce soluția $\overline{\Pi}^*$ sub forma

$$\overline{\Pi}^* = \sum_{m=1}^{\infty} C_m \frac{\operatorname{ch} \sqrt{9\overline{H}^2 + \pi^2 m^2} \cdot \bar{z}}{\operatorname{ch} \sqrt{9\overline{H}^2 + \pi^2 m^2} \cdot \frac{\lambda}{z}} \cdot e^{3H\bar{x}} \cdot \sin \pi m\bar{x} \tag{34}$$

unde cu $\lambda = \frac{b}{l}$ s-a notat alungirea lagărului.

Condițiile la limită pentru soluția totală $\overline{\Pi}$ sînt

$$\left.\begin{aligned} &\text{la } \bar{x} = 0\,; && \bar{p} = 1\,; && \overline{\Pi} = \bar{h}_1\,; \\ &\bar{x} = 1\,; && \bar{p} = 1\,; && \overline{\Pi} = \bar{h}_2\,; \\ &\bar{z} = + \frac{\lambda}{2}\,; && \bar{p} = 1\,; && \overline{\Pi} = \bar{h}(\bar{x}). \end{aligned}\right\} \tag{35}$$

Primele două soluții sînt, după cum am văzut, satisfăcute în mod automat. Apoi, din ultima condiție, ținînd seama de relațiile (33), (25), (15) se deduc pentru $\overline{\Pi}^*$ condițiile

$$(\overline{\Pi}^*)_{\bar{z} = \pm\lambda/2} = \overline{\Pi}_\infty - \bar{h}\,, \tag{36}$$

de unde

$$C_m \sin \pi m\bar{x} = (\overline{\Pi}_\infty - \bar{h}) e^{-3H\bar{x}} = 2 \frac{h_1 - h_2}{h_1 + h_2} \left[\bar{x} \, e^{-3H\bar{x}} - \frac{2 \operatorname{ch} 3\mathrm{H}\bar{x}}{e^{6H} - 1} \right] \cdot \tag{37}$$

Prin urmare coeficienții necunoscuți C_m reprezintă coeficienții dezvoltării în serie Fourier ai funcției cunoscute (37)

$$C_m = 2 \int_0^1 (\overline{\Pi}_\infty - \bar{h}) \, e^{-3H\bar{x}} \sin \pi m x \, dx = \tag{38}$$

$$= 4 \frac{h_1 - h_2}{h_1 + h_2} \int_0^1 \left(\bar{x} \, e^{-3H\bar{x}} - \frac{2 \operatorname{ch} 3\overline{H}\bar{x}}{e^{6H} - 1} \right) \sin \pi m\bar{x} \, d\bar{x}.$$

Soluția $\overline{\Pi}$ va fi deci

$$\overline{\Pi} = \bar{h} + \sum_{m=1}^{\infty} C_m \left(1 - \frac{\operatorname{ch}\sqrt{9H^2 + \pi^2 m^2}\cdot\bar{z}}{\operatorname{ch}\sqrt{9H^2 + \pi^2 m^2}\cdot\dfrac{\lambda}{2}}\right) e^{3H\bar{x}}\cdot\sin\pi m\bar{x}, \tag{39}$$

iar distribuția presiunilor va fi dată de relația

$$\bar{p} = \frac{\overline{\Pi}}{\bar{h}} = 1 + \frac{1}{\bar{h}} \sum_{m=1}^{\infty} C_m \left(1 - \frac{\operatorname{ch}\sqrt{9H^2 + \pi^2 m^2}\cdot\bar{z}}{\operatorname{ch}\sqrt{9H^2 + \pi^2 m^2}\cdot\dfrac{\lambda}{2}}\right) e^{3H\bar{x}}\cdot\sin\pi m\bar{x}. \tag{40}$$

Se constată că soluția (40) conține toate proprietățile unei soluții a problemei tridimensionale a lubrificației cu gaze. Astfel dacă alungirea lagărului crește nemărginit ($b \to \infty$, $\lambda \to \infty$) rapoartele $(\operatorname{ch}\sqrt{9H^2 + \pi^2 m^2}\cdot\bar{z}) \Big/ \left(\operatorname{ch}\sqrt{9H^2 + \pi^2 m^2}\cdot\dfrac{\lambda}{2}\right)$ se anulează pentru orice $\bar{z}$ mărginit astfel încît

$$(\bar{p})_{\lambda\to\infty} = 1 + \frac{1}{\bar{h}} \sum_{m=1}^{\infty} C_m\, e^{3H\bar{x}}\cdot\sin\pi m\bar{x}, \tag{41}$$

iar din relația (37) rezultă că aceasta este tocmai soluția $\bar{p}_\infty$ dedusă anterior (15). Cînd $H \to \infty$, se obține de asemenea $(\operatorname{ch}\sqrt{9H^2 + \pi^2 m^2}\cdot\bar{z}) \Big/ \left(\operatorname{ch}\sqrt{9H^2 + \pi^2 m^2}\cdot\dfrac{\lambda}{2}\right) \to 0$ cu excepția punctelor $\bar{z} = \pm\dfrac{\lambda}{2}$ deci $p \to p_\infty$; în plus suma $\sum C_m\, e^{3H\bar{x}}\sin\pi m\bar{x}$ (41) tinde către o limită mărginită, deoarece coeficienții C_m rezultă proporționali cu $e^{-3H\bar{x}}$ (38) pentru numere H mari. În sfîrșit presiunile cresc cu raportul $\dfrac{h_1}{h_2}$ din cauza factorului $\dfrac{1}{\bar{h}}$. Pentru studiul tipurilor de lagăre din figura 1 *b* și *d*, în locul condițiilor (35) trebuie să se admită condițiile mai generale

$$\left.\begin{array}{lll} \text{la } \bar{x}_1 = 0\,; & \bar{p} = 1\,; & \overline{\Pi} = \bar{h}_1\,; \\ \bar{x}_1 = 1\,; & \bar{p} = \bar{p}_s\,(\bar{z})\,; & \overline{\Pi} = \bar{p}_s(\bar{z})\bar{h}_2\,; \\ \bar{z} = \pm\dfrac{\lambda}{2}\,; & \bar{p} = 1\,; & \overline{\Pi} = \bar{h}(\bar{x})\,; \end{array}\right\} \tag{42}$$

unde $\bar{p}_s$ este acum o funcție necunoscută $\bar{z}$. Condiția ca la $\bar{x} = 1$, $\bar{p} = p_s(\bar{z})$ complică destul de mult forma soluției. În particular valorile (31) pentru constantele χ_m nu mai pot fi utilizate.

Prima condiție (42) impune ca, în soluția (28) să se considere $C_{1m} = C_{2m}$. Apoi dacă în continuare axa x este plasată la mijlocul lagărului, $p(z) = p(-z)$ iar $C_{4m} = 0$ (29). În acest mod soluția $\overline{\Pi}^*$ se scrie

$$\overline{\Pi}^* = \sum_{m=1}^{\infty} C_m \frac{\operatorname{ch} \sqrt{\chi_m} \bar{z}}{\operatorname{ch} \sqrt{\chi_m} \dfrac{\lambda}{2}} e^{3H_1 \bar{x}_1} \cdot \operatorname{sh} \sqrt{9H_1^2 - \chi_m} \cdot \bar{x}_1 . \tag{43}$$

Urmează ca șirul de constante C_m să se determine din ultima condiție (42) care se scrie analog cu (36)

$$C_m \, e^{3H_1 \bar{x}_1} \cdot \operatorname{sh} \sqrt{9H_1^2 - \chi_m} \cdot \bar{x}_1 = \overline{\Pi}_\infty - \bar{h}, \tag{44}$$

unde $\overline{\Pi}_\infty$ este dat de relația (16) iar șirul χ_m din condițiile de racordare.

Pentru a pune aceste condiții să considerăm lagărul din figura 1 *b*. Pentru zona BC, $h = h_2 =$ const., iar condițiile la limită sînt

$$\left.\begin{array}{lll} \text{la } \bar{x}_2 = 0\,; & \bar{p} = \bar{p}_s(\bar{z})\,; & \overline{\Pi} = \bar{p}_s(\bar{z})\,\bar{h}_2\,; \\ \bar{x}_2 = 1\,; & \bar{p} = 1\,; & \overline{\Pi} = \bar{h}_2\,; \\ \bar{z} = \pm \dfrac{\lambda}{2}\,; & \bar{p} = 1\,; & \overline{\Pi} = \bar{h}_2 = \text{const.} \end{array}\right| \tag{45}$$

Soluția se scrie sub aceeași formă (43)

$$\overline{\Pi}^* = \sum_{m=1}^{\infty} C'_m \frac{\operatorname{ch} \sqrt{\chi'_m}\, \bar{z}}{\operatorname{ch} \sqrt{\chi'_m} \dfrac{\lambda}{2}} \cdot e^{-3H_2 \bar{x}'_2} \cdot \operatorname{sh} \sqrt{9H_2^2 - \chi'_m} \cdot \bar{x}'_2 \tag{46}$$

în care

$$\bar{x}'_2 = 1 - \bar{x}_2 . \tag{47}$$

Pentru constantele C'_m se deduce relația

$$C'_m \, e^{-3H_2 \bar{x}'_2} \cdot \operatorname{sh} \sqrt{9H_2^2 - \chi'_m} \cdot \bar{x}'_2 = \overline{\Pi}_\infty - \bar{h}_2 , \tag{48}$$

unde $\overline{\Pi}_\infty$ este dat de relația (17). În sfîrșit, condițiile de racordare în punctul B se scriu

$$(p)_{AB} = (p)_{BC}\,; \quad \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_{AB} = \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_{BC} . \tag{49}$$

Sistemul format de relațiile (33) (48) (49) formează un sistem de 4 ecuațiii pentru determinarea celor patru șiruri de necunoscute C_m, C'_m, χ_m, χ'_m.

Pentru lagărele din figurile 1*c* și 1*d* problema se pune în mod analog. Soluția pentru zona AB este chiar soluția (43) pentru lagărul din figura 1 *d* și o soluție exact de aceeași formă pentru lagărul din figura 1 *c*. Condițiile de limită și de racordare se pun în mod asemănător, cu excepția ultimei condiții (49) care acum se scrie, analog cu (21)

$$\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}\left\{-\frac{\rho_0 h_1^3 p_0}{12\mu\, l_1}\left(\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}_1}\right)_{\bar{x}_1=0}+\frac{\rho_0 V h_1}{2}\right\}\mathrm{d}\bar{z}=\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}\left\{\frac{\rho_0 h_2^3 p_0}{12\,\mu\, l_2}\left(\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}_2'}\right)_{\bar{x}_2'=0}+\frac{\rho_0 V h_2}{2}\right\}\mathrm{d}\bar{z}. \qquad (50)$$

Deși cu excepția lagărului din figura 1 *a*, forma soluției și mai ales relațiile de determinare a constantelor sînt destul de complexe, ele pot fi utilizate pentru programarea aplicațiilor numerice la mașinile de calcul actuale. În particular, pentru lagărul din figura 1 *a*, soluția completă (40) este simplă și ușor de aplicat, deoarece constantele C_m sînt furnizate direct de relațiile simple (38).

Primită la redacție la 10 decembrie 1962

DETERMINATION OF PRESSURES IN GAS LUBRICATED BEARINGS CONSISTING OF RECTANGULAR PLANE SURFACES

ABSTRACT

This paper examines the possibility of determining the pressures in bearings consisting of plane surfaces by using the approximate differential equation (3) [1]. For two-dimensional motions, the solutions are obtained under a simple form. The pressure distribution is also deduced under a relatively explicit form for a bearing of finite length consisting of two inclined plane surfaces.

BIBLIOGRAFIE

1. I. S. Ausman, *An Improved Analytical Solution for Self-Acting Gas-Lubricated Journal Bearings of Finite Length.* ASME Transactions, Series D, Journal of Basic Engineering, 83, *2*, June, 188—194 (1961).
2. V. N. Constantinescu, *Asupra unor metode aproximative de calcul ale lagărelor cu gaze.* St. cerc. mec. apl., **XIII**, *4*, 935—955 (1962).
3. V. N. Constantinescu, *Calculul lagărelor de alungire infinită lubrifiate cu gaze, compuse din suprafețe plane.* St. cerc. mec. apl., **VII**, *3*, 741—771 (1956).

ASUPRA PRELUCRĂRII DATELOR DE PRESIUNE ȘI DEBIT OBȚINUTE LA CURGEREA TRANZITORIE A GAZELOR ÎN ZĂCĂMÎNT, FĂRĂ ÎNTRERUPEREA EXPLOATĂRII SONDEI

DE

H. PASCAL[1]

533 : 622.24

Pentru determinarea unor proprietăți fizice ale zăcămintelor de hidrocarburi fluide și a presiunii acestora se aplică în prezent metode bazate pe prelucrarea matematică a datelor rezultate din măsurători, asupra variației presiunii în timp, în cazul curgerii tranzitorii a fluidelor într-un mediu poros, omogen și izotrop.

Astfel, vom menționa, de exemplu, restabilirea presiunii de fund după întreruperea instantanee a curgerii fluidelor în sondă.

Aplicarea acestei metode implică respectarea strictă a condițiilor la limită și inițiale, utilizate pentru stabilirea funcției care exprimă variația presiunii în timp necesară prelucrării datelor obținute din măsurători.

Dacă ne referim la închiderea sondei, atunci curgerea se consideră staționară în momentul inițial, respectiv înaintea închiderii sondei, iar după întreruperea afluxului de gaze presiunea se admite constantă pe conturul de alimentare și egală cu valoarea avută în momentul inițial. În ceea ce privește întreruperea curgerii, aceasta se presupune că se produce la talpa sondei și nu la suprafață, după cum se efectuează în condiții reale, neglijîndu-se în acest mod efectul compresibilității gazelor, inerției și frecării acestora de pereții sondei.

În situațiile reale, întîlnite cel mai frecvent la majoritatea sondelor, asigurarea condițiilor de limită și inițiale, menționate mai sus, este condiționată de foarte mulți factori inerenți exploatării zăcămintelor de hidrocarburi fluide, asupra cărora nu putem acționa.

Pe de altă parte, prin închiderea sondei se întrerupe exploatarea acesteia și în consecință se pierde producția, întrucît în cazul zăcămintelor de hidrocarburi fluide cu o permeabilitate relativ redusă pentru estimarea presiunii stabilizate, aferente zonei de drenaj a sondei cu o rază relativ mare, este necesar un interval de timp care poate atinge, în anumite situații, ordinul zilelor. Din acest motiv, este foarte important ca informațiile obținute, după închiderea sondei, asupra creșterii presiunii într-un interval de timp relativ redus să poată fi extrapolate cît mai corect pentru tot timpul necesar stabilizării curgerii.

---

[1] Ministerul Petrolului și Chimiei, laboratorul de cercetări geologice, București.

★

În lucrarea de față vom încerca să examinăm posibilitatea determinării permeabilității zăcămintelor de gaze și a presiunii stabilizate fără întreruperea producției, respectiv fără a mai fi necesară închiderea sondei.

În acest scop, considerăm ca punct de plecare pentru soluționarea problemei propuse ecuațiile de curgere nestaționară a gazelor într-un mediu poros, omogen și izotrop, stabilite în lucrările [1] și [2]. În ceea ce privește mediul poros, admitem că acesta este omogen din punct de vedere statistic. Datorită acestui fapt, proprietățile sale fizice se vor referi la valorile medii statistice, aferente zonei de drenaj a sondei.

După cum s-a arătat în lucrarea [1] dacă se presupune validitatea legii lui Darcy și evoluția izotermică, atunci ecuația curgerii nestaționare a gazelor în zăcămînt are forma

$$\frac{k}{\eta}\operatorname{div}(\rho\operatorname{grad}p) = m\frac{\partial\rho}{\partial t}. \tag{1}$$

Introducînd funcția $f(p) = \int \rho\,\mathrm{d}p + c$, pentru liniarizarea ecuației (1), și admițînd că variația masei specifice, într-un interval de variație a presiunii convenabil ales, se efectuează exponențial, de forma $\rho = \beta e^{\alpha p}$ respectiv presupunînd $\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}p} = \alpha\rho$ rezultă

$$f(p) = \frac{\beta}{\alpha}(e^{\alpha p} - e^{\alpha p_0}), \tag{2}$$

unde p_0 este presiunea de referință, iar α și β reprezintă constantele care se deduc din condiția $\beta\int_{p_1}^{p_2} e^{\alpha p}\,\mathrm{d}p = \int_{p_1}^{p^2}\frac{p\,\mathrm{d}p}{\overline{Z}R\overline{T}}$, avînd expresiile

$$\alpha = \frac{\log\dfrac{p_2}{p_1}}{p_2 - p_1};\quad \beta = \frac{\alpha(p_2^2 - p_1^2)}{2\,g\,R\overline{T}\overline{Z}(e^{\alpha p_2} - e^{\alpha p_1})}.$$

În acest mod, ecuația (1) devine liniară și poate fi scrisă

$$\frac{k}{\eta}\nabla^2 f = m\alpha\frac{\partial f}{\partial t}. \tag{3}$$

În cazul problemei la care ne referim, afluxul gazelor în zăcămînt este plan radial și în consecință avem din (3)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r}=\frac{m\alpha\eta}{k}\frac{\partial f}{\partial t}. \tag{4}$$

Semnificațiile fizice ale notațiilor utilizate mai sus sînt : μ — coeficientul de viscozitate dinamic al gazelor, m — porozitatea mediului poros, k — coeficientul de permeabilitate, p_2 și p_1 — reprezentînd limita superioară, respectiv cea inferioară, a intervalului de variație a presiunii convenabil ales pentru ca aproximarea introdusă la liniarizarea ecuației de curgere să fie în limita erorilor acceptabile.

În conformitate cu rezultatele stabilite în lucrarea [3] creșterea presiunii de fund într-o sondă, după închiderea instantanee la talpa acesteia, se exprimă în cazul zăcămîntului finit, alimentat pe conturul exterior, prin ecuația

$$\frac{f_s-f_{s0}}{f_k-f_{s0}}=1-\frac{2}{\log\frac{R_k}{R_s}}\sum_{m=1}^{m=\infty}\frac{I_0\left(x_m,\frac{R_s}{R_k}\right)e^{-x_m^2F_0}}{x_m^2\,I_1^2\,(x_m)}, \tag{5}$$

unde x_m — reprezintă rădăcina ecuației $I_0\,(x_m)=0$, I_0 și I_1 — fiind funcțiile Bessel de prima speță și ordinul zero, respectiv de ordinul unu, F_0 — parametrul adimensional Fourier, $F_0=\frac{kt}{\varkappa m\,R_k^2}$, f_s — valoarea funcției $f\,(p)$ pe conturul sondei, după închiderea acesteia, f_{s0} — valoarea funcției $f(p)$ pe conturul sondei înaintea închiderii, respectiv în momentul inițial, f_k — valoarea funcției $f(p)$ pe conturul de alimentare al sondei, R_k — raza conturului de alimentare și R_s — raza sondei.

De obicei, ecuația (5) se utilizează în aplicațiile curente în funcție de valoarea debitului sondei, înaintea închiderii acesteia, cînd caracterul curgerii este staționar, eliminîndu-se căderea de presiune (f_k-f_{s0}). Din ecuația (4) vom avea, considerînd regimul staționar, următoarea distribuție a funcției $f(p)$

$$f=f_{s0}+\frac{f_k-f_{s0}}{\log\frac{R_k}{R_s}}\log\frac{r}{R_s} \tag{1'}$$

iar din ecuația lui Darcy rezultă

$$Q=\frac{2\pi\,Rs\,kh\,\rho}{\eta}\frac{\partial p}{\partial r}=\frac{2\pi\,Rs\,kh}{\eta}\frac{\partial f}{\partial r}, \tag{2'}$$

de unde se obține pentru expresia debitului gravimetric

$$Q=\frac{2\pi\,kh\,g}{\eta}\cdot\frac{f_k-f_{s0}}{\log\frac{R_k}{R_s}} \tag{3'}$$

sau în funcție de presiune, ținînd seamă de relația (2),

$$Q = \frac{2\pi\, kh\, \beta g}{\alpha\eta} \, \frac{(e^{\alpha p_k} - e^{\alpha p_{s0}})}{\log \frac{R_k}{R_s}}. \tag{4'}$$

Introducînd relația (3′) în ecuația (5), obținem în cele de urmă o relație similară cu cea utilizată în prezent

$$f_k - f_s = \frac{Q \cdot \eta}{g\pi\, kh} \cdot \sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{I_0\left(x_m, \frac{R_s}{R_k}\right) e^{-x_m^2 F_0}}{x_m^2\, I_1^2\,(x_m)}. \tag{5'}$$

Deoarece în majoritatea cazurilor reale ne putem limita, cu o bună aproximație, numai la primul termen al seriei, atunci este ușor de observat că variația presiunii se efectuează, ținînd seama de ecuația (5′), într-o diagramă semilogaritmică după o dreaptă avînd panta $i = \frac{5{,}78\,\gamma}{R_k^2}$ și intersecția cu axa ordonatei $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,(e^{\alpha p_k} - e^{\alpha p_{s0}})$, $\mathrm{A} = \log \frac{1{,}18\, Q\, \alpha\, \eta\, \gamma}{\beta\, h\, g\, k\, R_k^2}$ (6)

unde

$$\gamma = \frac{k}{m\, \alpha\, \eta}.$$

În felul acesta, prelucrarea matematică a datelor asupra variației presiunii de fund după închiderea sondei, rezultate din măsurători, permite să determinăm valoarea coeficientului de permeabilitate a zăcămîntului de gaze și să extrapolăm curba reală de creștere a presiunii de fund, obținută într-un anumit interval de timp după închiderea sondei, pentru stabilirea valorii presiunii stabilizate, aferentă zonei de drenaj.

Dacă considerăm acum situația exploatării sondei la un debit constant și cu o presiune constantă pe conturul de alimentare, admițînd afluxul gazelor spre sondă din starea de repaus, presiunea fiind aceeași în tot zăcămîntul și egală cu cea de pe conturul de alimentare, rezultă următoarele condiții la limită și inițiale

$$F_0 = 0, \qquad f(p) = f_k$$

$$F_0 > 0 \quad \begin{cases} r = R_s & \left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)_{r = R_s} = \frac{Q\, \eta}{2\pi\, R_s\, h\, k} = A \\ r = R_k & f = f_k \end{cases} \tag{7}$$

unde A este o constantă, iar pentru variația presiunii avem ecuația (3)

$$\frac{f_k - f_s}{f_k - f_{s0}} = 1 - \frac{2}{\log \frac{R_k}{R_s}} \sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{I_0\left(x_m, \frac{R_s}{R_k}\right) e^{-x_m^2 F_0}}{x_m^2\, I_1^2\,(x_m)}. \tag{8}$$

În general, după o perioadă relativ mare de exploatare a sondei raza conturului de alimentare depăşeşte cu mult raza sondei, $R_k > 50\,R_s$, şi prin urmare valoarea termenului $I_0\left(x_m, \frac{R_s}{R_k}\right)$ poate fi admisă egală cu unitatea.

Este uşor de remarcat acum că ecuaţia (8) este identică cu ecuaţia (5), cu deosebirea valorii presiunii de fund corespunzătoare regimului staţionar, unde avem valoarea presiunii de pe conturul de alimentare al sondei, corespunzătoare momentului iniţial.

Astfel, în cazul exploatării sondei din starea de repaus, respectiv la punerea acesteia în producţie, cu un debit constant şi la o presiune constantă pe conturul de alimentare, presiunea de fund va scădea în timp după aceeaşi ecuaţie ca şi în cazul creşterii acesteia după închiderea sondei, dacă în momentul iniţial caracterul curgerii era staţionar. Prin urmare, această scădere se va efectua într-o diagramă semilogaritmică de asemenea după o dreaptă, avînd aceeaşi pantă.

Faţă de cele arătate mai sus, rezultă că obţinerea curbei de restabilire a presiunii de fund, fără închiderea sondei, necesară prelucrării datelor de presiune, este echivalentă din punct de vedere al determinării proprietăţilor fizice ale zăcămîntului cu cea obţinută în cazul întreruperii exploatării.

În practică, debitul sondei nu poate fi menţinut în general constant şi în acest caz pentru prevederea variaţiei presiunii apare necesar să aplicăm, datorită liniarităţii ecuaţiei curgerii nestaţionare (4), integrala lui Duhamel, care se exprimă sub forma

$$f_k - f = \int_0^t Q\,(t-\lambda)\,f'(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda, \tag{9}$$

sau dacă integrăm prin părţi obţinem

$$f_k - f = Q_0\,f\,(t) + \int_0^t \frac{\mathrm{d}Q\,(t-\lambda)}{\mathrm{d}\lambda}\,\mathrm{d}\lambda, \tag{10}$$

unde primul termen reprezintă căderea de presiune corespunzătoare unui debit constant, iar al doilea termen căderea de presiune suplimentară datorită variaţiei debitului şi Q — debitul de gaze măsurat la talpa sondei.

În ceea ce priveşte funcţia $f(t)$, expresia acesteia este dată de ecuaţia (8), iar diferenţa $(f_k - f)$ rezultă din ecuaţia (2), p — fiind în acest caz presiunea de fund cumulativă.

Pe de altă parte, după cum s-a menţionat deja, în majoritatea situaţiilor reale întîlnite posibilitatea asigurării respectării condiţiilor la limită şi iniţiale, utilizate la deducerea funcţiei $f(t)$, corespunzătoare variaţiei presiunii la un debit constant, este condiţionată de foarte mulţi factori inerenţi exploatării sondelor în general. În urma acestui fapt, prelucrarea matematică a datelor, rezultate din măsurători, poate introduce erori prohibitive, care depășind limita admisibilă conduce la obținerea unor informații eronate asupra parametrilor urmăriți.

Eliminarea erorilor aferente nerespectării condițiilor la limită și inițiale, a celor introduse datorită neomogenității mediului poros, neînchiderii instantanee a ventilului, precum și a influenței geometriei sistemului, ar deveni posibilă dacă o dată cu măsurarea debitului simultan s-ar efectua înregistrarea căderii de presiune corespunzătoare acestuia. În practică o asemenea măsurare a presiunii nu poate fi efectiv realizată, întrucît prin variația debitului se obține căderea de presiune cumulativă și nu cea corespunzătoare debitului modificat.

După cum se știe, aplicarea principiului superpoziției permite să prevedem creșterea sau declinul presiunii în situația exploatării sondei la un debit variabil, crescător sau descrescător, dacă ecuațiile care descriu curgerea sînt liniare, fără să implice restricții cu privire la distribuția neuniformității proprietăților fizice ale zăcămîntului.

Dacă ținem seama că debitul nu se anulează într-un interval de timp $0 < t < t_1$, atunci introducînd notațiile

$$\varphi_0(t) = \frac{f_k - f}{Q_0} \quad \text{și} \quad \varphi_1(t-\lambda) = -\frac{1}{Q_0}\frac{\mathrm{d}Q(t-\lambda)}{\mathrm{d}\lambda} \tag{11}$$

ecuația (10), după cîteva calcule simple, devine

$$f(t) = \varphi_0(t) + \int_0^t \varphi_1(t-\lambda) f(\lambda)\, \mathrm{d}\lambda \cdot \tag{12}$$

În acest mod, variația presiunii în timp corespunzătoare exploatării sondei la un debit variabil, crescător sau descrescător, necesară determinării proprietăților fizice ale zăcămîntului și ale presiunii stabilizate, se obține rezolvînd ecuația integrală (12) de tip Volterra și de speța a doua.

Deoarece variația presiunii cumulative și a debitului se determină cu ajutorul aparatelor înregistratoare rezultă că vom dispune numai de curbele variației funcțiilor $\varphi_1(t-\lambda)$, care reprezintă nucleul ecuației, și $\varphi_0(t)$ — presiunea cumulativă.

Cînd expresiile analitice ale curbelor înregistrate pot fi aproximate prin funcții cunoscute, utilizînd în acest scop procedeele uzuale, soluția ecuației (12) poate fi determinată prin metoda aproximațiilor succesive, considerînd pentru funcția $f(t)$ seria infinită

$$f(t) = f_0(t) + f_1(t) + \dots + f_n(t), \tag{13}$$

unde $f_0(t)$ și $f_n(t)$ sînt aproximațiile succesive, care se obțin din relațiile

$$f_0(t) = \varphi_0(t) \quad \text{și} \quad f_n(t) = \int_0^t \varphi_1(t-\lambda) f_{n-0}(\lambda)\, \mathrm{d}\lambda \tag{14}$$

funcția $f(t)$ fiind absolut convergentă și uniformă în intervalul $0 < t < t_1$.

De asemenea, utilizînd metoda operațională putem transforma ecuația integrală (12) într-o ecuație algebrică, iar cu ajutorul tabelelor din lucrarea [4] să stabilim, în anumite cazuri, originalul funcției transformate $f(t)$.

Astfel, aplicînd transformata lui Laplace ecuației (12), rezultă

$$\bar{f}(s) = \frac{\bar{\varphi}_0(s)}{1 - \bar{\varphi}_1(s)}, \tag{15}$$

unde funcțiile $\bar{\varphi}_0(s)$, $\bar{\varphi}_1(s)$ și $\bar{f}(s)$ sînt transformatele lui Laplace, corespunzătoare funcțiilor din ecuația (12), care au expresiile

$$\begin{gathered}\bar{f}(s) = \int_0^\infty f(t)\, e^{-st} dt\,; \quad \bar{\varphi}_1(s) = \int_0^\infty \varphi_1(\xi)\, e^{-s\xi}\, d\xi, \\ \bar{\varphi}_0(s) = \int_0^\infty \varphi_0(t)\, e^{-st} dt \quad \text{și} \quad \xi = t - \lambda.\end{gathered} \tag{16}$$

În cazul cînd graficele referitoare la variația debitului și a presiunii de fund cumulative pot fi aproximate prin funcții liniare de timp, sub forma

$$\varphi_0(t) = A + Bt \quad \text{și} \quad \varphi_1(t - \lambda) = C + D(t - \lambda), \tag{17}$$

atunci din ecuațiile (16) avem următoarele relații pentru funcțiile transformate

$$\bar{\varphi}_0(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2}\,; \; \bar{\varphi}_1(s) = \frac{C}{s} + \frac{D}{s^2}, \tag{18}$$

iar din ecuația (15) obținem

$$\bar{f}(s) = \frac{As + B}{s^2 - Cs - D}. \tag{19}$$

Prin urmare, originalul funcției (19) va fi în acest caz

$$f(t) = K_1\, e^{at} - K_2\, e^{bt} \tag{20}$$

unde coeficienții K_1, K_2, a și b se deduc din relațiile de mai jos

$$\begin{gathered}K_1 = \frac{B + aA}{a - b}\,; \quad K_2 = \frac{B + bA}{a - b}, \\ a = \frac{C}{2} + \sqrt{\frac{C^2}{4} + D}\,; \quad b = \frac{C}{2} - \sqrt{\frac{C^2}{4} + D}.\end{gathered} \tag{21}$$

Deoarece în practică se observă destul de frecvent, în anumite situații, un declin constant, respectiv o variație exponențială a debitului în timp, iar pe baza ecuației (8) variația presiunii este de asemenea exponențială, vom considera cazul cînd $\varphi_1(t - \lambda)$ și $\varphi_0(t)$ au expresiile

$$\varphi_0(t) = A\, e^{-mt} \quad \text{și} \quad \varphi_1(t - \lambda) = A_1\, e^{-m_1(t-\lambda)}. \tag{22}$$

Se poate remarca, cu destulă ușurință, utilizînd relația (11), că admițînd pentru nucleul ecuației integrale o variație exponențială va corespunde debitului următoarea ecuație diferențială :

$$-\frac{1}{Q_0}\frac{\mathrm{d}\dot{Q}(t-\lambda)}{\mathrm{d}\lambda} = A_1\,\mathrm{e}^{-m_1(t-\lambda)}, \tag{23}$$

care conduce, după integrare, la o variație a debitului sub forma

$$Q(t-\lambda) = Q_0 + \frac{A_1 Q_0}{m_1}\left(1 - \mathrm{e}^{-m_1(t-\lambda)}\right), \tag{24}$$

Q_0 — fiind valoarea debitului inițial, corespunzător $t = \lambda$.

Prin urmare, rezultă în acest caz pentru funcția transformată $\bar{f}(s)$ ecuația

$$\bar{f}(s) = \frac{\mathrm{A}(m_1 + s)}{m\,\beta\left(1 + \frac{s}{m}\right)\left(1 + \frac{s}{\beta}\right)}, \tag{25}$$

unde am notat $\beta = m_1 - A_1$, iar originalul acesteia va fi

$$f(t) = \frac{1}{\beta - m}\left[A\,(m_1 - m)\,\mathrm{e}^{-mt} - AA_1\,\mathrm{e}^{-\beta t}\right]. \tag{26}$$

Dacă ținem seama de relațiile (22), care exprimă variația debitului și presiunii cumulative, atunci după cîteva transformări simple ecuația (26) poate fi scrisă sub forma

$$f(t) = \frac{1}{\beta - m}\left[(m_1 - m)\,\varphi_0(t) - A\,\varphi_1(t)\,\mathrm{e}^{A_1 t}\right]. \tag{27}$$

Ecuațiile (20) și (27) permit să efectuăm prin extrapolare, într-o primă aproximație, prevederea comportării presiunii de fund, respectiv să stabilim valoarea presiunii dinamice de zăcămînt, în cazul declinului sau creșterii debitului, iar pe de altă parte să obținem permeabilitatea mediului poros.

Examinînd ecuațiile (24), (22) și (27) rezultă cînd timpul crește debitul și presiunea cumulativă vor crește de asemenea, iar presiunea de fund va scădea. Același lucru reiese și pentru situația precedentă, unde s-a considerat o variație liniară.

În situația cînd funcțiile $\varphi_1(t-\lambda)$ și $\varphi_0(t)$ nu pot fi aproximate satisfăcător putem obține soluția ecuației integrale aplicînd procedeul de integrare numerică indicat în lucrarea [5]. Cu toate că integrarea numerică necesită un volum laborios de calcule numerice totuși, datorită dezvoltării tehnicii mașinilor electronice de calcul, procedeele numerice sînt aplicate astăzi cu succes, fără să prezinte nici o dificultate.

După cum s-a arătat în lucrarea [5] putem obține o rețea de noduri în progresie aritmetică într-un interval de timp $[t_0, tn]$, care să corespundă unui număr pozitiv ε impus, precum și algoritmul calculului numerelor f_i^p, unde $p = 0,1\ldots \nu$, în așa fel încît să avem satisfăcută condiția

$$|f(t_i) - f_i^{\nu}| < 2\varepsilon .$$

Astfel, pentru intervalul $[t_0, t_n]$, constituit din nodurile $t_0, t_1, \ldots t_{n-1}, t_n$, rezultă

$$f_0(t) = \varphi_0(t), \tag{28}$$

$$f_i^p = \varphi_0(t_i) - \frac{t_n - t_0}{2n}\left[\varphi_1(t_i, t_0) f^{(p-1)} + \varphi_1(t_i, t_i)\, f_i^{(p-1)} + 2\sum_{j=i}^{i-1} \varphi_1(t_i, t_j) f_i^{(p-1)}\right],$$

iar pe nodurile rețelei avem

$$f^p(t_i) = f_i^p + R_i^p \cdot \tag{29}$$

Restul R_i^p satisfăcînd inegalitatea

$$R_i^p < (1 + Q + \ldots Q^{(p-1)})\varepsilon_i , \tag{30}$$

unde prin Q s-a notat

$$Q = (t_n - t_0)\, \varphi_{10}, \tag{31}$$

φ_{10} — fiind marginea superioară a lui $\varphi_1(t, \lambda)$.

În felul acesta, apare posibilitatea cercetării sondelor care exploatează zăcăminte de gaze în scopul obținerii informațiilor utile asupra valorilor proprietăților fizice ale mediului poros, cît și a prevederii variației presiunii dinamice de zăcămînt, fără a mai fi necesară închiderea sondei.

Trebuie să menționăm, în ceea ce privește aplicarea procedeului, că extinderea acestuia în cazul sondelor care exploatează zăcăminte de țiței este condiționată de asigurarea liniarității ecuației curgerii nestaționare. Cînd presiunea de zăcămînt este inferioară celei de saturație curgerea va fi bifazică, constituită dintr-un amestec de țiței și gaze, iar descrierea matematică conduce la o ecuație neliniară. În consecință, procedeul nu poate fi aplicat decît numai la sondele unde expulzarea țițeiului din zăcămînt se produce în regim elastic, presiunea fiind superioară celei de saturație, iar curgerea monofazică.

În afară de aceasta, dificultățile legate de măsurarea debitului în condiții de fund pentru un fluid heterogen, în particular amestecul gaze-țiței, constituie de asemenea un serios inconvenient în tehnologia actuală a extracției țițeiului.

O discuție mai amplă, asupra rezultatelor obținute mai sus, implică bineînțeles cunoașterea valorilor numerice a coeficienților care aproximează curbele reale pentru parametrii măsurați, înregistrați la sondele cercetate. Acest fapt, ar putea permite să stabilim utilitatea procedeului, precum și domeniul său de aplicabilitate. Lipsa datelor menționate ne obligă să examinăm ulterior acest aspect al problemei, după ce în prealabil vor fi prelucrate un număr cît mai mare de date obținute la sonde.

Primită la redacție la 18 septembrie 1962

SUR L'ÉTUDE DES DONNÉES DE PRESSION ET DE DÉBIT FOURNIES PAR L'ÉCOULEMENT TRANSITOIRE DES GAZ DANS UN GISEMENT, SANS INTERRUPTION DE L'EXPLOITATION DE LA SONDE

RÉSUMÉ

L'auteur examine le problème de l'étude des sondes à gaz, sans interruption de l'exploitation, afin de déterminer les propriétés physiques du gisement et la pression stabilisée, afférente à la zone de drainage, en utilisant l'étude des données de pression et de débit dans le cas de l'écoulement transitoire des gaz à travers un milieu poreux.

Il montre que le rétablissement de la pression dans une sonde préalablement fermée équivaut, au point de vue de la détermination de la perméabilité, à la situation d'une sonde exploitée à débit constant à partir de l'état de repos, c'est-à-dire à sa mise en état de production. Ceci permet de prévoir la variation de la pression de fond dans le cas de l'exploitation de la sonde à débit variable — croissant ou décroissant — par l'application du principe de la superposition due à la forme linéaire de l'équation de l'écoulement non stationnaire établie dans les travaux [1] et [2].

En vue d'établir la variation de pression nécessaire à la connaissance des propriétés physiques et de la pression dynamique du gisement, l'auteur obtient une équation intégrale du type Volterra, de seconde espèce, dont la solution requiert la mesure simultanée de la variation du débit et de la pression de fond cumulative. Il déduit ensuite, au moyen de la méthode opérationnelle, la fonction exprimant la variation de la pression dans le cas de l'exploitation de la sonde à débit variable, tout en considérant pour le débit et la pression cumulative, dans les conditions de fond, une variation en temps linéaire et exponentielle. En vue de la résolution effective de l'équation intégrale, l'auteur recommande la méthode des approximations successives lorsque les courbes réelles de débit et de pression, enregistrées à la sonde, peuvent être exprimées approximativement par des fonctions connues ou bien par l'application de la méthode d'intégration numérique dans le cas contraire.

BIBLIOGRAFIE

1. И. А. Чарный, *Неустановившееся движение реальной жидкости в трубах.* Гостоптехиздат, Москва, 1951.
2. Т. Oroveanu, *Asupra scurgerii gazelor prin medii poroase neomogene.* St. cerc. mec. apl., *5* (1960).
3. Б. Н. Щелкачев, *Разработка нефтеводопластов при упругом режиме*, Москва, 1959.
4. Б. А. Диткин, Н. Кузнецов, *Справочник по операционному исчислению*, Москва, 1951.
5. V. D. Ionescu, *Integrarea numerică a ecuației integrale de tip Volterra.* St. cerc. mec. apl., *1* (1961).

ASPECTE DE STRUCTURĂ ÎN SUPRAFAȚA ACTIVĂ LA UNELE MATERIALE ANTIFRICȚIUNE PENTRU LAGĂRE

DE

GH. VASILCA și AL. NICA

620.10 : 62182

La stabilirea rețetei pentru obținerea unui aliaj antifricțiune de lagăre se are în vedere o anumită schemă pentru structură, în funcție de condițiile de funcționare ale lagărului, de natura materialelor de care se dispune, precum și de felul constituenților care pot fi realizați cu ajutorul materialelor disponibile. De la schema clasică pentru structură, realizată cu materialele antifricțiune din acea vreme, s-au dezvoltat treptat scheme noi pentru a răspunde, în fiecare perioadă, exigențelor crescînde față de lagăre, isvorîte din nivelul ascendent în domeniul construcției de mașini pe de o parte, iar pe de altă parte pentru a folosi din plin progresul continuu realizat în direcția obținerii de materiale noi.

De la schema clasică pusă în evidență de Charpy, caracterizată prin existența în structură a unor constituenți duri într-o matrice mai moale [1], s-a trecut treptat la tipul de schemă la care în matricea mai dură sînt înglobați constituenți mai moi, iar apoi la schema de structură eterogenă sau omogenă cu duritate sporită. Aliajele principale care fac parte din primul tip de schemă sînt materiale antifricțiune pe bază de staniu, plumb și aluminiu, în al doilea tip de schemă se încadrează bronzurile de plumb, iar din categoria materialelor cu structură eterogenă sau omogenă fac parte aliajele eutectice și eutidoide, ca de exemplu bronzurile.

Corespunzător fiecărui tip de schemă de structură s-au emis și ipoteze cu privire la modul în care structura participă la procesul de alunecare din lagăre [2]. Astfel, în cazul aliajelor corespunzătoare primului tip de schemă, sub acțiunea presiunii din lagăr, matricea moale a structurii se deformează mai mult, lăsînd în relief constituenții duri. Același efect îl produce și uzarea mai rapidă, în contact cu fusul, a fazei moi din structură. Urmarea este că în caz de frecare semifluidă, fusul vine în contact numai cu constituenții duri, reducîndu-se astfel în mod substanţial uzura materialului antifricţiune. Denivelarea de suprafaţă produsă pe aceste căi, are un efect favorabil şi asupra ungerii, deoarece prin aceasta suprafaţa se măreşte, adsorbţia lubrefiantului se îmbunătăţeşte, iar spaţiile mai joase dintre cristalele dure constituie pungi microscopice în care se acumulează şi rămîne ulei.

Proprietăţile favorabile la alunecare a bronzurilor de plumb, care fac parte din categoria de aliaje cu schema de structură de tip dur, se explică prin aceea că în porţiunile mici de suprafaţă activă unde iau naştere concentraţii termice mari, plumbul din structură ajunge la starea de plasticitate şi este antrenat, acoperind ca o peliculă faza dură a structurii. Prin aceasta vîrfurile de temperatură nu mai cresc ci scad, iar griparea lagărului este evitată.

În cazul structurilor eutectice, compuşii fazei posedă la scară microscopică proprietăţi la uzură diferite, explicaţia comportării la alunecare revenind în esenţă la aceea dată pentru structura cu constituenţi duri înglobaţi într-o matrice moale.

Nu este greu de sesizat că ipotezele de mai sus, cu privire la mecanismul de participare a constituenţilor de structură la procesul complex de frecare şi uzură din lagăr, admit în mod tacit că în suprafaţa activă aliajele au aceeaşi structură ca şi în masa lor, structură care stă la baza tehnologiei elaborării lor.

S-a putut însă observa că lustruirea metalelor este însoţită de o deformare plastică la rece a reţelei cristaline de la suprafaţă şi dacă această şlefuire se face în prezenţa oxigenului, pe suprafaţa lustruită poate lua naştere şi un strat superficial de oxid. Tensiunile interne introduse pe această cale în reţeaua cristalină pot provoca o recristalizare şi deci schimbarea de structură în suprafaţă. Stratul amorf Beilby nu a putut fi însă pus în evidenţă [2], iar cercetările lui S.A.Vekşinski [1] arată că asemenea straturi, dacă pot fi obţinute în anumite condiţii cu totul speciale, ele nu sînt stabile.

Procesul complex de frecare şi uzură din lagăr putînd fi privit ca o lustruire, este de aşteptat ca în suprafaţa activă a lagărelor să apară modificări de structură faţă de structura din masa materialului antifricţiune şi chiar să ia naştere produşi noi.

Criteriul formării de produşi noi în suprafaţa activă a putut fi pus la baza unei metode [3] de caracterizare, într-un anumit grad şi cantitativă, a proprietăţilor la alunecare a materialelor antifricţiune.

Efectele pe care le pot crea tensiunile din reţelele cristaline deformate din suprafaţa lustruită a metalului, asupra procesului de recristalizare şi ca urmare de modificare a structurii în suprafaţa activă, precum şi dacă această modificare este de dorit sau nu, constituie probleme încă nelămurite pe deplin. Punerea în evidenţă a unor aspecte de structură în suprafaţa activă la cîteva materiale pentru lagăre, care constituie obiectul acestei lucrări, poate fi deci utilă.

În acest scop a fost cercetată structura în suprafaţa activă la patru aliaje pentru lagăre, după o funcţionare cu intermitenţă de 40 ore în diferite regimuri de sarcină statică, viteză şi temperatură. Două dintre aceste aliaje sînt pe bază de plumb şi anume P_1 = PbSn6Sb6 şi P_2 =

Y-PbSn10, unul pe bază de aluminiu ASM, iar unul este un bronz de plumb B_1 = BzPb3o. Ele au fost obținute prin turnare în cochilă metalică și au compoziția chimică:

P_1 = PbSn6Sb6 : 6%Sn, 6%Sb, 88%Pb;
P_2 = Y-PbSn10 : 10%Sn, 15%Sb, 1%Cu, 74%Pb;
ASM : 5%Sb, 0,5%Mg, 94,5%Al;
B_1 = BzPb30 : 30%Pb, 70%Cu.

Încercarea de funcționare s-a făcut la temperaturi ale cuzineților pînă la 80°C, la sarcini statice și viteze continue, acești din urmă parametri avînd respectiv valorile maxime de funcționare în regim

P_1 : $p_m = 240$ kg/cm², $V = 9{,}5$ m/s,
P_2 : $p_m = 240$ ” , $V = 8{,}3$ ” ,
ASM : $p_m = 280$ ” , $V = 13{,}5$ ” ,
B_1 : $p_m = 200$ ” , $V = 9{,}4$ ” .

Folosind pentru încercare o instalație de laborator, cu cuzinetul fixat într-o montură metalică și cu lagăre de sprijin, s-a urmărit obținerea unei suprafețe active cît mai apropiate de acelea de la lagărele industriale.

Lubrifiantul folosit a fost uleiul tip 305 STAS, presiunea de alimentare a lagărului fiind $p_i = 1{,}5$ atm. Cuzinetul experimental a fost în formă de bucșă cilindrică cu pereți groși (6 mm), cu diametrul nominal d = 36 mm, alungirea relativă $\lambda = 0{,}7$, jocul relativ $\psi = 1{,}2^0/_{00}$, suprafața activă fiind obținută prin strungire cu un avans de 0,03 mm. Fusul a fost din oțel de cementație OLC 16, tratat la HB = 550 și rectificat la finețea $\nabla\nabla\nabla/7$.

Structura materialului în suprafața activă a fost studiată în zona de suprapresiuni maxime din lagăr, drept comparație servind structura în masa aliajului, situată într-un plan perpendicular pe axa lagărului.

Pregătirea fețelor pentru examinarea structurii în masa materialului s-a făcut după metodele metalografice obișnuite, reactivii folosiți pentru atac fiind Nital 5% pentru aliajele P_1 și P_2, o soluție de 1% hidroxid de sodiu pentru ASM, iar pentru bronzul de plumb o soluție de 5 g clorură ferică + 50 g acid clorhidric + 100 ml apă. Structura în suprafața activă a fost examinată în starea de lustruire în care a rezultat această suprafață din funcționarea lagărului, pentru atac folosindu-se reactivii arătați mai sus.

Constituenții metalografici în masa aliajului PbSn6Sb6 sînt:

- faza α, o soluție solidă de Pb, ca fază de cristalizare primară,
- eutecticul binar $\alpha + \beta'$, în care β' este faza rezultată prin transformarea peritectică a compusului definit Sn_3Sb_2;
- eutecticul ternar $\alpha + \beta' + \delta$, avînd compoziția chimică: 12%Sb, 4%Sn, 84%Pb și temperatura de solidificare de 239°C, în care δ este o soluție solidă de Sb.

Dintre fazele de bază cea mai moale este α, mai dură este β' și cea mai dură δ, iar drept consecință eutecticul ternar are o duritate mai mare decît eutecticul binar.

În structura atacată (fig. 2), eutecticul binar se prezintă sub formă de ochiuri mari, de culoare mai închisă, care includ și faza α. Eutecticul ternar umple golurile dintre ochiurile fazei α + β′ și ca atare se prezintă ca o rețea de culoare mai deschisă. Constituentul cel mai dur al acestui aliaj se prezintă deci sub formă de rețea. În proba neatacată (fig. 1) se pot distinge pete neregulate de culoare închisă care pot fi de faza α sau porțiuni de ochiuri ale fazei α + β′.

Din examinarea suprafeței active, pe o porțiune situată în zona de presiuni maxime și pe toată lățimea cuzinetului, obținută în condițiile de funcționare arătate mai sus, rezultă mai întîi că, în ansamblu (fig. 3), aliajul formează o suprafață de lucru netedă, fără rizuri. Ca aspect, cea mai mare parte a suprafeței este mată, o parte din această suprafață este însă lucioasă.

O porțiune din zona mată, neatacată, la mărirea de 600 : 1 se arată în figura 4, putîndu-se constata, în comparație cu aspectul obținut prin șlefuire metalografică în masa aliajului (fig. 1), o asemănare în ceea ce privește petele negre — probabil de fază α și α + β′ — precum și porțiunile de culoare mai deschisă reprezentînd luciul.

După atac, aspectul structurii în porțiunea mată a suprafeței active (fig. 5) se prezintă cu unele modificări față de structura din masa aliajului (fig. 2). Nu se vede mai ales configurația rețelei constituentului dur al eutecticului ternar α + β′ + δ.

Numeroasele puncte de culoare mai deschisă care se văd, și care pot fi particule din acest eutectic, nu mai au o dispoziție ordonată și sînt mai rare. Nu se mai pot deosebi, în mod clar, nici zonele de eutectic binar și nici faza α de Pb.

Această constatare arată posibilitatea ca în procesul de rodaj și de frecare în regimul de funcționare ulterior normal, unii constituenți de structură ai masei materialului din suprafața activă să treacă prin modificări, în cazul de față suficient de evidente în ceea ce privește dispoziția în rețea a eutecticului ternar, rețea care a fost fărîmițată.

Examinate comparativ la microscop cu lumină oblică, în figura 5 apar și cantitativ mai puține părticele dure în relief de culoare mai deschisă, deci neatacate de reactiv (eutectic ternar), decît în figura 2. Aceasta duce la presupunerea că în suprafața activă o parte din părticelele rețelei fărîmate de eutectic ternar au fost smulse și eliminate din lagăr sub forma de produse de uzură. Sau, sub acțiunile fizico-chimice mai complexe din lagăr, unele părticele din acest eutectic au suferit o modificare de constituție, devenind produse noi. Unele dintre acestea nelegîndu-se la metalul de bază, au fost eliminate prin intermediul lubrifiantului, iar altele au rămas în compunerea stratului superficial al suprafeței active. Fiind atacate de către reactiv, acestea nu au putut fi puse în evidență pe această cale. De aici rezultă că și din punct de vedere cantitativ eutecticul ternar mai dur a suferit transformări în suprafața activă. Examinîndu-se aspectul lucios constatat pe o parte din suprafața activă s-a putut stabili că acest strat superficial lucios este de altă natură decît stratul superficial de luciu rezultat la pregătirea prin șlefuire a probelor metalografice din acest aliaj (fig. 1). Acest din urmă strat este atacat de reactivul Nital 5%, în timp ce stratul lucios din suprafața activă, prezentat în figura 6 după un astfel de atac, se prezintă ca un produs rezistent la corodarea chimică respectivă.

Suprafața activă mată neatacată (fig. 4) nu prezintă nici un aspect din care ar putea rezulta un indiciu în legătură cu structura stratului superficial, mai ales în ce privește eutecticul ternar.

Al doilea aliaj pe bază de plumb și anume Y-PbSn10, face parte din aceeași categorie de materiale antifricțiune ca și PbSn6Sb6. Dacă se face deocamdată abstracție de compușii datorați prezenței cuprului, constituenții de structură în masa materialului sînt :

— faza β′, pe bază de Sn_3Sb_2, sub formă de cristalite rombice imperfecte și dure, ca produse de cristalizare primară ;

— faza de eutectic binar $\alpha + \beta'$, cu cea mai mică duritate ;

— faza de eutectic ternar $\alpha + \beta' + \delta$ care se solidifică ultima la temperatura de 239°C.

Prezența cuprului în proporție de 1% în acest aliaj dă naștere unui al patrulea constituent și anume compusul definit Cu_2Sb, avînd duritatea și temperatura de solidificare cele mai mari dintre toți constituenții materialului. El se solidifică sub formă de bastonașe și are, pe de o parte, efectul de a mări duritatea aliajului, iar pe de altă parte, un efect de omogenizare structurală, prin faptul că solidificîndu-se cel dintîi, mărește viscozitatea lichidului, împiedicînd prin aceasta în mare măsură segregarea cristalitelor fazei β′.

În structura atacată (fig. 8) eutecticul binar $\alpha + \beta'$ se prezintă sub formă de ochiuri mici de culoare mai închisă, care umple golurile întregei rețele de constituenți, iar eutecticul ternar sub formă de linii drepte sau frînte. Bastonașele de Cu_2Sb se deosebesc de eutecticul ternar prin grosimea și lungimea lor mai mari.

În structura neatacată (fig. 7), cristalitele fazei β′ se văd perfect, acestea putînd fi observate uneori și cu ochiul liber.

Examinînd suprafața activă, pe o porțiune situată în zona de presiuni maxime și pe toată lățimea cuzinetului, obținută în condițiile de funcționare arătate mai sus, se poate constata mai întîi că, în ansamblu (fig. 9), aliajul formează o suprafață de lucru netedă, iar aspectul este mat.

Din examinarea structurii în suprafața activă după atac rezultă că dintre constituenții din masa materialului (fig. 8) nu mai apare decît faza β′, adică cristalite rombice pe bază de Sn_3Sb_2 (fig. 11). Nu mai pot fi observate bastonașele fazei Cu_2Sb și nici liniile frînte și drepte ale eutecticului ternar. Atît în imediata apropiere a cristalitelor fazei β′ cît și la o depărtare mai mare de acestea, adică în tot restul de spațiu dintre cristalite (fig. 12), structura prezintă aspectul obișnuit al materialului corodat de către reactiv. Nu apar nici diferențe la atac, care ar putea constitui indicii cu privire la natura constituenților influențați de către reactiv.

Din figura 11 reiese, de asemenea, că sub influența complexului de fenomene care însoțesc procesul de alunecare și frecare, cristalitele fazei β′

suferă alterări, a căror lămurire completă în privința naturii și mecanismului producerii lor ar putea prezenta interes. Nu s-au putut constata goluri, care ar putea fi socotite cu certitudine drept spații provenite din smulgerea cristalitelor sau a bastonașelor fazei Cu_2Sb. Examinînd structura în imediata vecinătate a cristalitelor (fig. 11) și în restul spațiului dintre ele (fig. 12) cu lumină oblică, pot fi constatate puncte de culoare mai deschisă situate în relief. Acestea pot fi părticele rămase din sfărîmarea bastonașelor fazei Cu_2Sb. Nu par a fi fărîmituri ale fazei β′ împlîntate în fazele eutectice mai moi.

Mai trebuie menționat că faza β′ poate fi observată în structura suprafeței active chiar și fără atac (fig. 10), așa cum iese în evidență această fază după operația de șlefuire a probei metalografice (fig. 7). De aici rezultă că asupra fazei β′ procesul de frecare din timpul funcționării lagărului produce un efect similar de punere în evidență ca și această șlefuire.

Din aceste constatări rezultă, ca element caracteristic de bază, că la aliajul Y-PbSn10 nu rezistă acțiunii procesului de rodaj și de frecare din lagăr decît cristalitele rombice dure ale fazei β′. Poate fi, de asemenea, utilă cunoașterea cît mai completă a mecanismului și proceselor prin care ceilalți constituenți duri din masa aliajului și anume faza Cu_2Sb și eutecticul ternar, dar mai ales primul care este cel mai dur, sînt eliminați și nu participă direct în această stare la procesul de frecare.

După compoziția sa chimică, aliajul ASM face parte din categoria materialelor antifricțiune, a căror schemă de structură constă dintr-o matrice eutectică semidură cu incluziuni dure. Incluziunile dure constau din compusul definit AlSb [4]. Eutecticul este format dintr-o soluție solidă de aluminiu cu compusul definit AlSb. Conținutul de 0,5 Mg este complet solubil în aluminiu, imprimînd o duritate mai mare soluției solide de aluminiu care se formează.

În structura atacată (fig. 14), faza dură AlSb se prezintă sub formă de pete alungite și de ochiuri mici de culoare mai închisă, iar matricea în culoare deschisă. Constituentul dur poate fi observat sub formă de pete de culoare închisă și la proba lustruită și neatacată (fig. 13). Forma și distribuția mai detaliată ale acestei faze se văd în proba atacată și la o mărire mai mare (fig. 15).

Din examinarea suprafeței active, pe o porțiune situată în zona de presiuni maxime și pe toată lățimea cuzinetului, obținută în condițiile de funcționare arătate mai sus, se poate constata că, în ansamblu (fig. 16), finețea suprafeței este suficient de bună, iar aspectul este mat.

Constatarea de bază care se desprinde din examinarea structurii suprafeței active (fig. 18) este că prin procesul de frecare în regimul normal de funcționare a lagărului, constituenții structurali din masa aliajului se păstrează și în suprafața activă. Faza dură AlSb, precum și eutecticul mai moale apar în suprafața activă nemodificați, sau cel mult cu o modificare imperceptibilă în condițiile de cercetare arătate, aspecte puse mai bine în evidență la probele atacate (fig. 14, 15, 18 și 19). La acest aliaj rămîn deci activi în procesul de frecare ambii constituenți de structură.

Mai poate fi menționat și faptul că în suprafața activă neatacată (fig. 17) și la mărirea de 100 : 1 se poate distinge faza dură AlSb sub forma de pete de culoare mai închisă.

La categoria de bronz de plumb tehnic studiată, structura se compune dintr-o matrice din cupru, mai dură, cu incluziuni de plumb ca fază moale. Plumbul, ca fază, nu este curat, ci este în realitate un eutectic de Pb cu 0,07% Cu.

Din figura 20 se vede că în masa materialului forma incluziunilor de plumb în matricea de cupru nu este în general globulară și nu apar semne pronunțate de segregare a plumbului. Multe asemenea incluziuni sînt însă mari și cum se vede în figura 21, dar mai ales în figura 22, ochiurile sînt aproape legate între ele. Structura cea mai favorabilă a bronzurilor de plumb este considerată cu plumbul sub formă de globule mici repartizate uniform în matricea de cupru. Asemenea aspecte pot fi rezolvate pe căi tehnologice și constituie principala dificultate în obținerea practică a unor bronzuri de plumb cu structura cea mai favorabilă pentru întrebuințarea lor ca materiale pentru lagăre.

Din examinarea ca aspect a suprafețelor active, pe o porțiune situată în zona de presiuni maxime și pe toată lățimea cuzinetului, obținută în condițiile de funcționare arătate mai sus, rezultă că bronzul de plumb formează o suprafață cu rizuri (fig. 23). Mărimea rizurilor, ca lățime și adîncime, este însă foarte diferită, ceea ce face să se poată deosebi cu greu acelea care se datoresc impurităților dure mai mari din lubrifiant, de acelea rezultate în mod normal, dar specifice acțiunii impurităților dure curente din lubrifiant asupra materialului de lagăr respectiv. Aspectul general al suprafeței active este mat.

În ceea ce privește structura materialului în suprafață activă, din figurile 24 și 25 se vede, că prin procesul de frecare și uzură în timpul funcționării lagărului, suprafața activă nu se netezește, ci capătă rugozități cu vîrfurile proeminente din cupru ceea ce arată că nu este omogenă structural. Pot fi observate cîteva ochiuri mai întunecate care sînt Pb (fig. 24), însă în orice caz nu apare structura omogenă ca în masa materialului (fig. 20). Aspectul de neomogenitate este pus și mai bine în evidență în figura 25, dar mai ales în figura 26. În al doilea rînd, incluziunile de Pb par a nu mai avea forma din masa materialului, ele apar ca spații îngustate ca urmare a unei deformări plastice a matricei de cupru. Pentru matricea de cupru mai apare caracteristic faptul că prezintă fărămițări analoage cu grăunții de solidificare (fig. 26), fără a se fi putut preciza dacă spațiile dintre grăunți sînt umplute cu plumb, sau sînt goale. Nu pare a fi exclusă o deformare plastică a cuprului cu formarea unei astfel de texturi a structurii.

Lucrări mai cuprinzătoare în această direcție pot contribui nu numai la îmbunătățirea tehnică a materialelor pentru lagăre, dar pot constitui pași înainte spre a determina cît mai mulți din factorii care fac ca materialele antifricțiune să aibă o comportare specifică la alunecare.

Primită la redacție la 19 decembrie 1962

BETRACHTUNGEN ÜBER DIE STRUKTUR IN DER AKTIVEN LAUFFLÄCHE BEI EINIGEN LAGERMETALLEN

ZUSAMMENFASSUNG

Da sich durch das Schleifen auf der Metalloberfläche eine Schicht mit deformierter Kristallstruktur bildet, die sich rekristallisieren und folglich zu einer neuen Struktur führen kann, besteht die Möglichkeit, daß in der aktiven Lauffläche eines Gleitlagers infolge einer analogen Reibung die Struktur des Lagermetalls im Vergleich zu der übrigen Masse verändert erscheint.

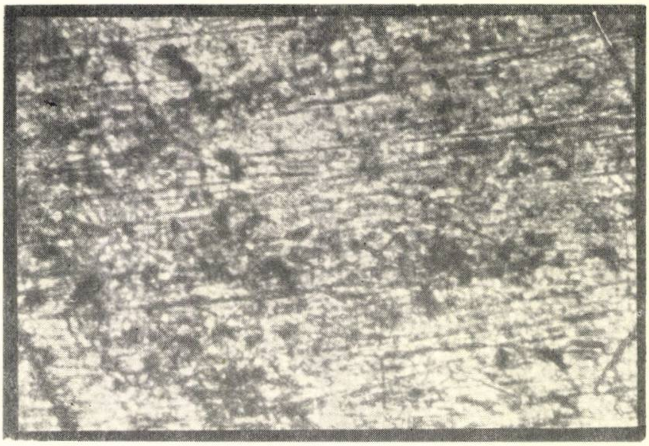
Es wurden daher Untersuchungen der Struktur der aktiven Lauffläche mit vier verschiedenen Lagermetallen durchgeführt, die zur Herstellung der Lagerschalen von Verbrennungsmotoren dienen. Die aktive Lauffläche wird mit Hilfe einer Versuchseinrichtung bei Lagerbetrieb mit bestimmter Belastung, Geschwindigkeit und Temperatur erzielt.

Die Versuchsergebnisse zeigen, daß nur bei der ASM-Legierung keine Veränderung der Materialstruktur in der aktiven Lauffläche festzustellen war.

BIBLIOGRAFIE

1. G. A. KASCENKO, *Bazele metalurgiei fizice.* Ed. tehnică, București, 1952, 481.
2. E. SCHMID, R. WEBER, *Gleitlager.* Springer Verlag, Berlin, 1953, 38.
3. B. LUNN, *Epilamen- und Mischreibung aus der Sicht des Metallkundlers.* VDI-Berichte, **20**, 1957, 41.
4. R. CAZAUD, *Le frottement et l'usure des métaux antifriction.* Paris, 1956, 147.

Fig. 1. — $PbSn_6Sb_6$, structura în masa aliajului, fără atac, 600 : 1.



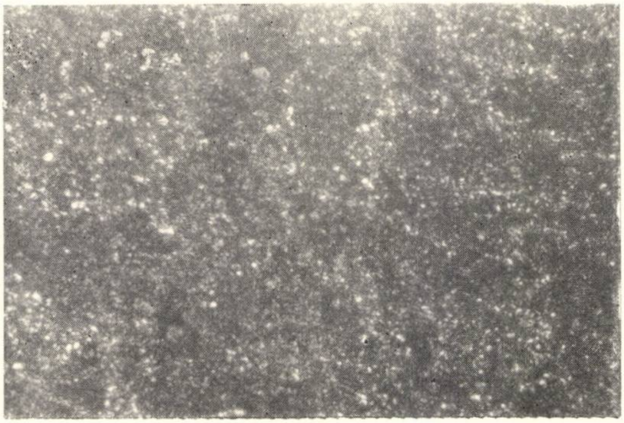


Fig. 2. — $PbSn_6Sb_6$, structura în masa aliajului, cu atac, 600 : 1.

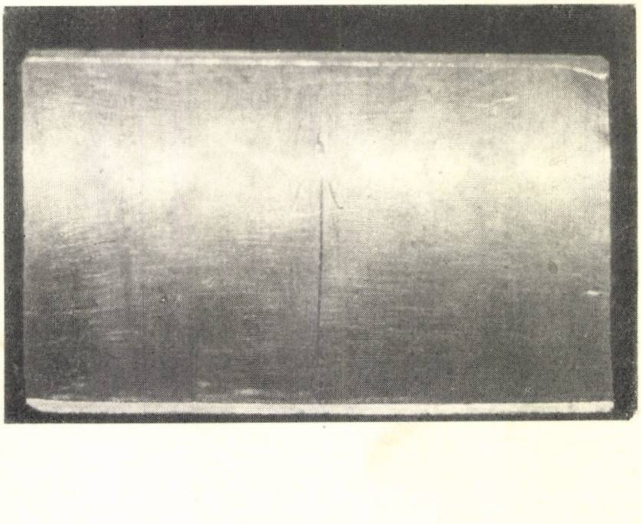


Fig. 3. — $PbSn_6Sb_6$, suprafaţa activă pe întreaga lăţime a cuzinetului, în zona presiunilor maxime, fără atac, 3 : 1.

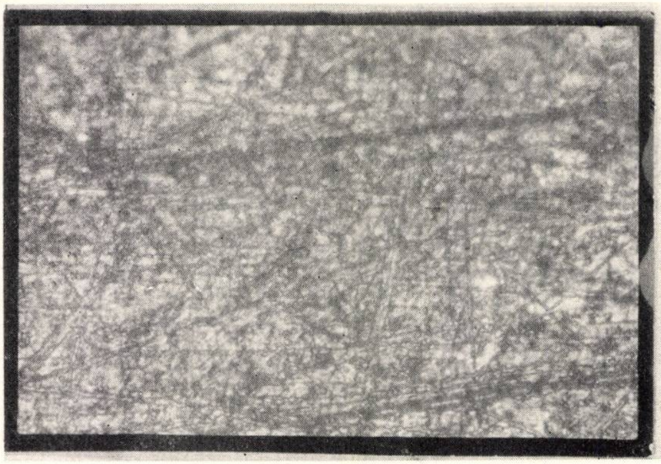


Fig. 4. — $PbSn_6Sb_6$, suprafaţa activă (eşantion fig. 3), în zona mată, fără atac, 600 : 1.

Fig. 5. — $PbSn_6Sb_6$, suprafaţa activă (eşantion fig. 3), în zona mată, cu atac, 600 : 1.

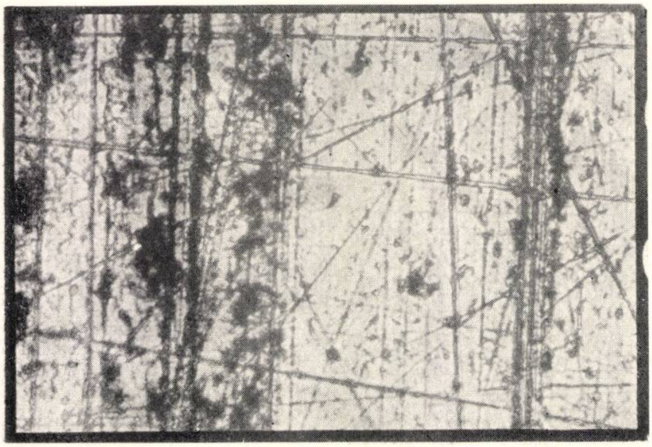
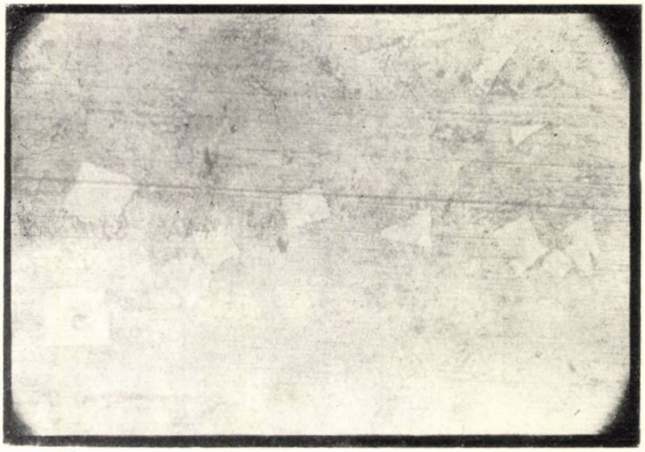


Fig. 6. — $PbSn_6Sb_6$, suprafaţa activă (eşantion fig. 3), în zona cu luciu, cu atac, 600 : 1.

Fig. 7. — Y-PbSn$_{10}$, structura în masa aliajului, fără atac, 100 : 1.



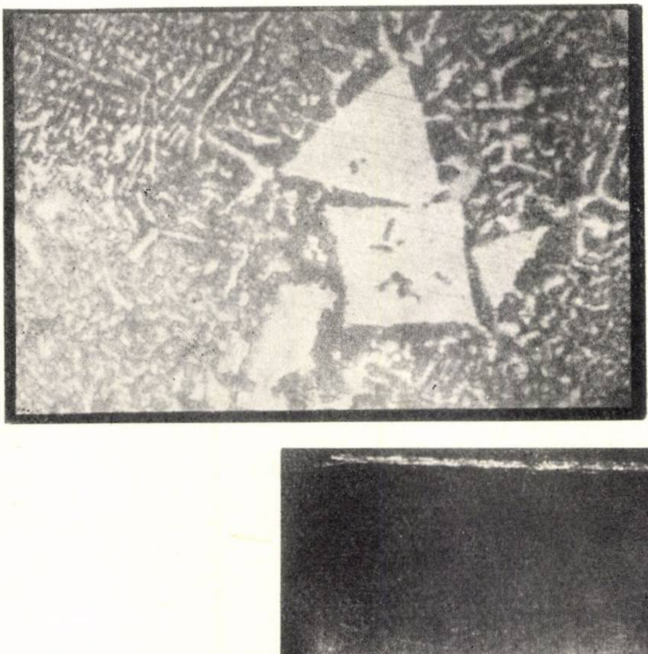


Fig. 8. — Y-PbSn$_{10}$, structura în masa aliajului, cu atac, 600 : 1.

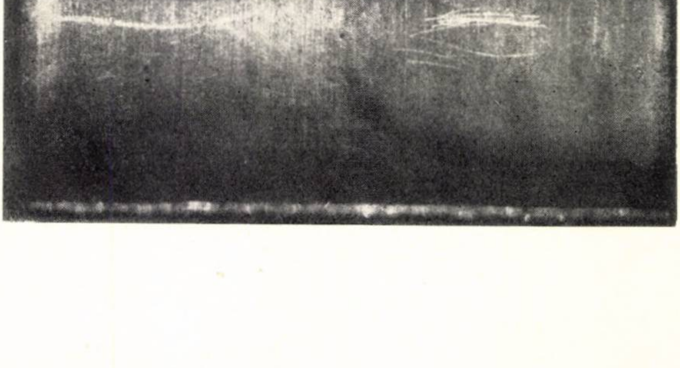


Fig. 9. — Y-PbSn$_{10}$, suprafața activă pe întreaga lățime a cuzinetului, în zona de presiuni maxime, fără atac, 3 : 1.

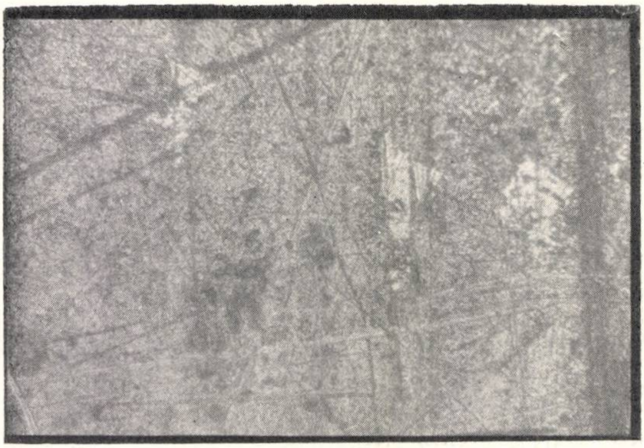


Fig. 10.— Y-PbSn$_{10}$, suprafaţa activă (eşantion fig. 9), în zona mată, fără atac 138 : 1.

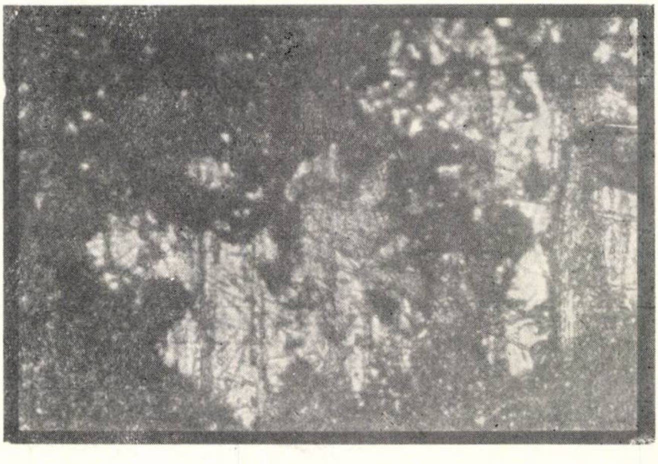


Fig. 11.— Y-PbSn$_{10}$, suprafaţa activă (eşantion fig. 9), în zona mată cu cristalit, cu atac, 600 : 1.

Fig. 12.— Y-PbSn$_{10}$, suprafaţa activă (eşantion fig. 9), în zona mată, cu atac, 600 : 1.

Fig. 13. — ASM, structura în masa aliajului, fără atac, 100 : 1.

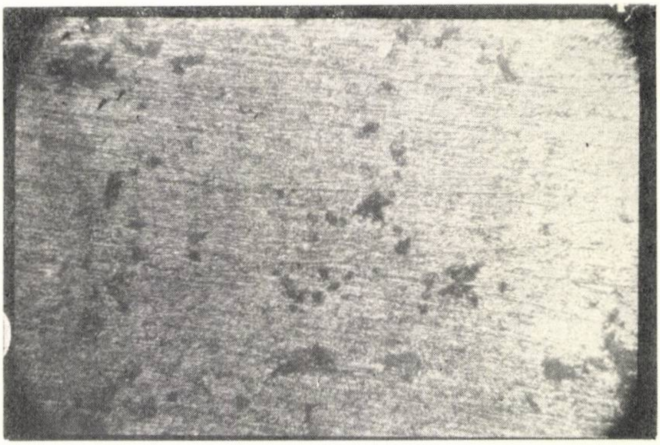
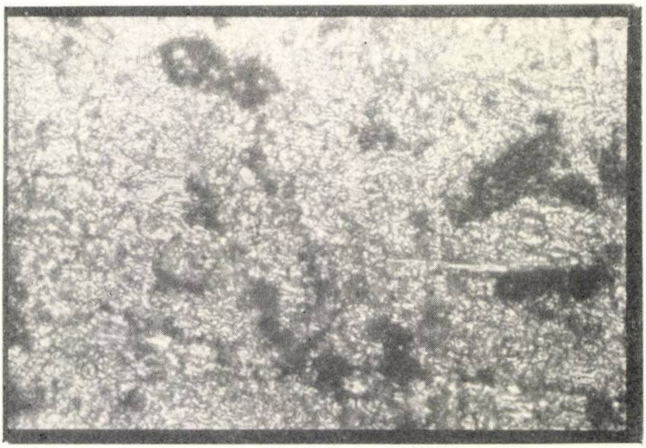


Fig. 14. — ASM, structura în masa aliajului, cu atac, 100 : 1.

Fig. 15. — ASM, structura în masa aliajului, cu atac, 600 : 1.



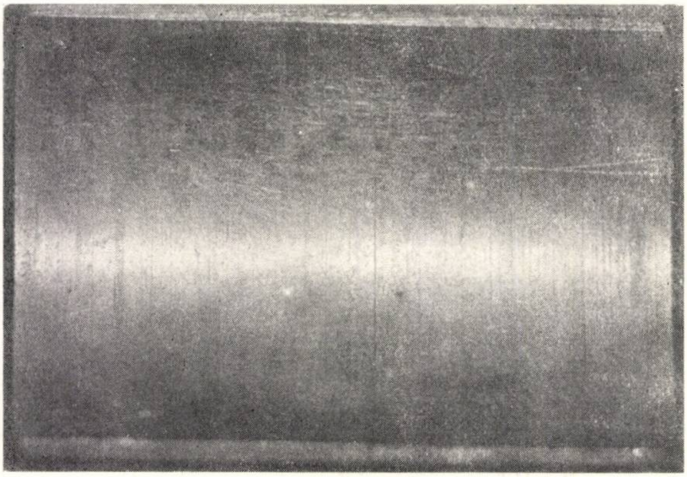
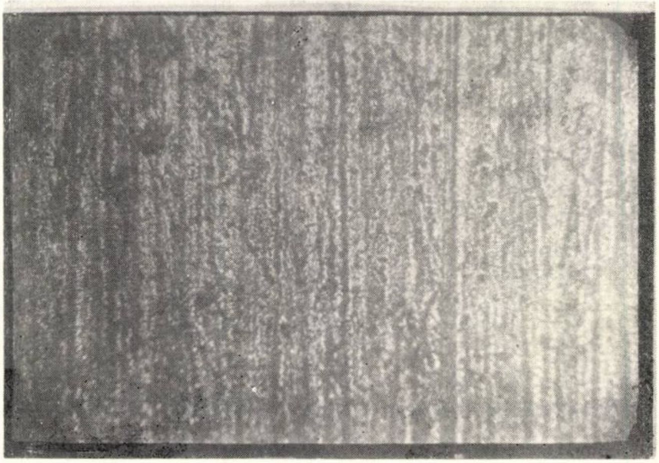


Fig. 16. — ASM, suprafața activă pe întreaga lățime a cuzinetului, în zona de presiuni maxime, fără atac, 3 : 1.

Fig. 17. — ASM, suprafața activă (eșantion fig. 16), fără atac, 100 : 1.



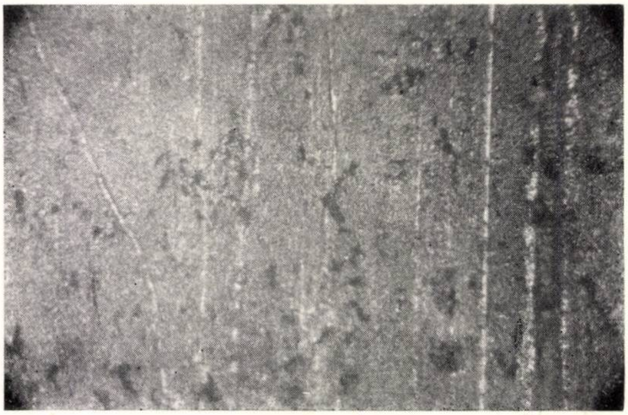
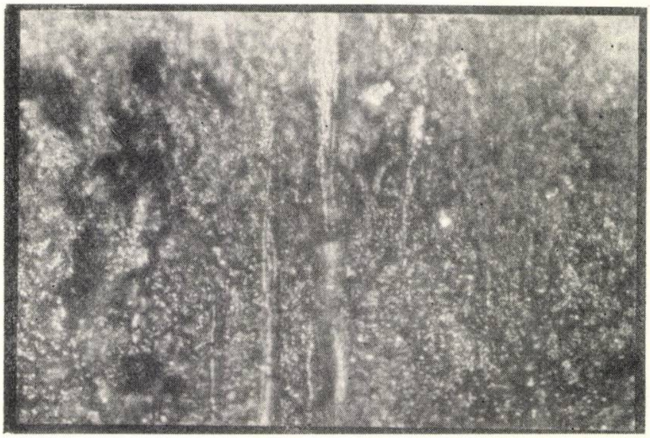


Fig. 18. — ASM, suprafața activă (eșantion fig. 16), cu atac, 100 : 1.

Fig. 19. — ASM, suprafaţa activă (eşantion fig. 16), cu atac, 600 : 1.



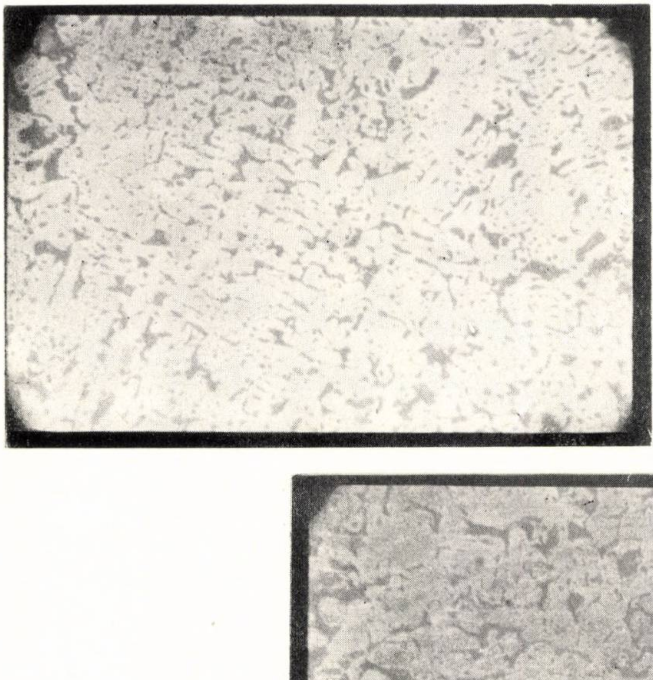


Fig. 20. — BzPb 30, structura în masa materialului, fără atac, 100 : 1.

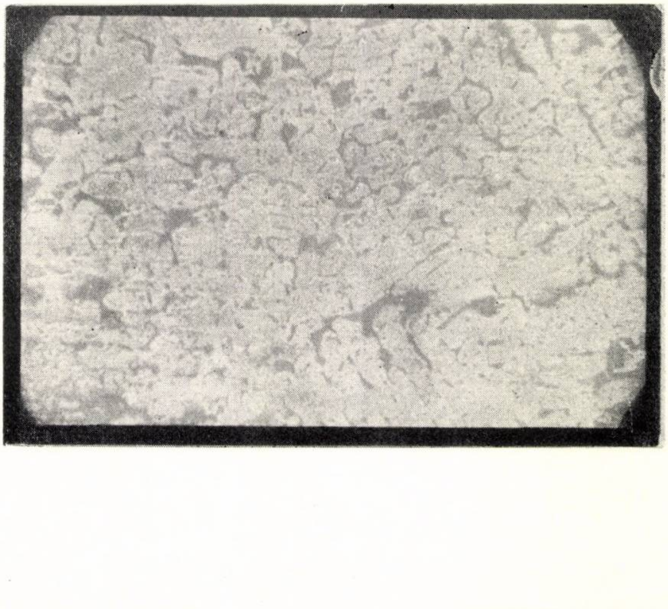


Fig. 21. — BzPb 30, structura în masa materialului, cu atac, 100 : 1.

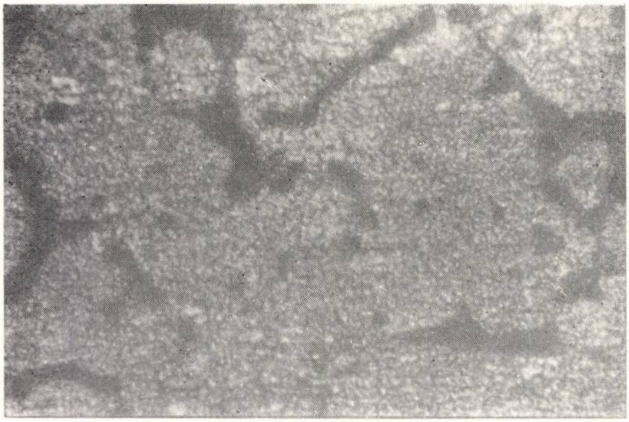


Fig. 22. — BzPb 30, structura în masa materialului, cu atac, 600 : 1.

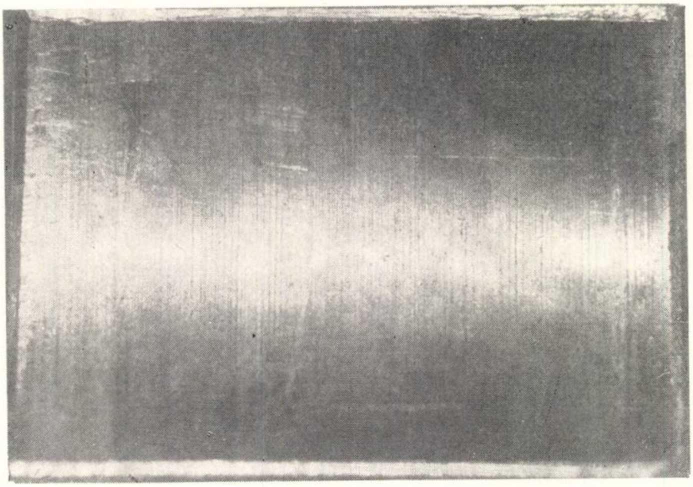


Fig. 23. — BzPb 30, suprafaţa activă pe întreaga lăţime a cuzinetului, în zona de presiuni maxime, fără atac, 3 : 1.

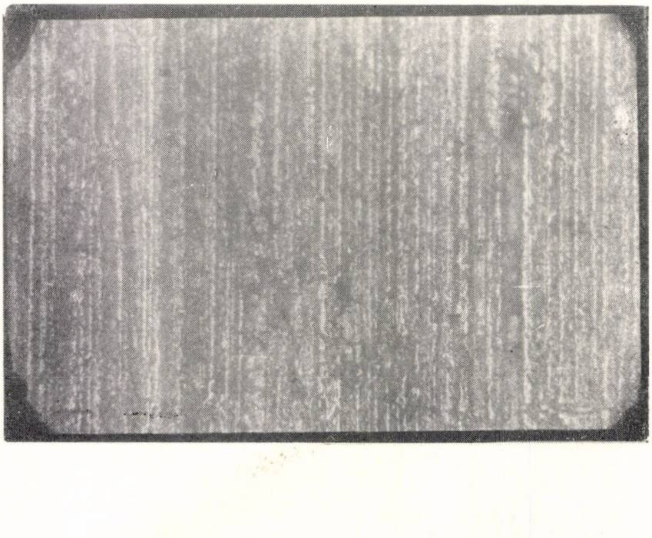


Fig. 24. — BzPb 30, suprafaţa activă (eşantion fig. 23), fără atac, 100 : 1.

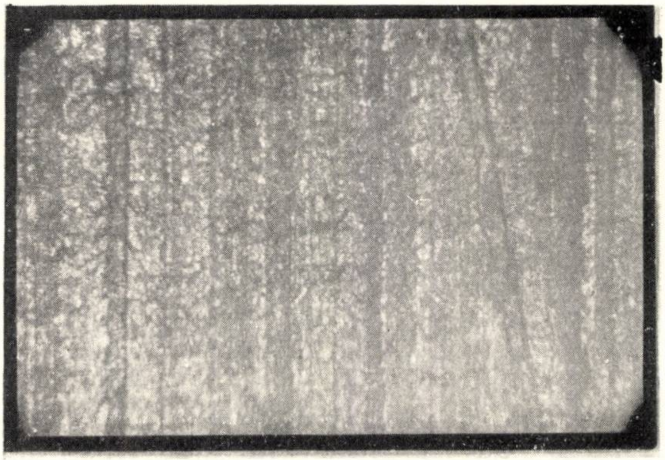


Fig. 25. — BzPb 30, suprafaţa activă (eşantion fig. 23), cu atac, 100 :1.

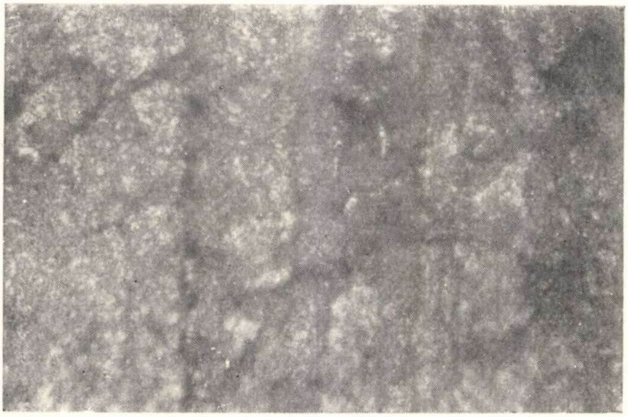


Fig. 26. — BzPb 30, suprafaţa activă (eşantion fig. 23), cu atac, 600 : 1.

STUDII

ASPECTE ALE COMPORTĂRII LA UZURĂ A UNOR MATERIALE DE LAGĂRE

DE

OLGA BIȚĂ și I. DINCĂ

620.1 : 621.82

Compoziția sau natura materialelor, face parte dintre factorii importanți care influențează comportarea la uzură a lagărelor de la motoarele cu ardere internă.

Studierea influenței acestui factor asupra duratei de funcționare a lagărelor, trebuie să aibă în vedere condițiile specifice de lucru ale acestora, inclusiv condițiile de ungere, și, în funcție de acestea, tipurile principale de uzură care intervin.

În alte lucrări publicate [1], s-a arătat că tipurile de uzură reprezentative întîlnite în funcționarea lagărelor, sînt : uzura de aderență sau de contact, coroziunea, abraziunea și uzura de oboseală.

Ținînd seama de faptul că materialele folosite curent la fabricarea cuzineților de la lagărele motoarelor cu ardere internă sînt mai susceptibile la acțiunea agenților corosivi întîlniți în funcționarea acestora, lucrarea de față se va ocupa în special de influența mediului corosiv asupra comportării la uzură a unor materiale antifricțiune de lagăre. Se va urmări îndeosebi rezistența acestor materiale la acțiunea acidității organice din lubrifianți și a unor aditivi pe bază de fosfor (lecitina și tricrezil fosfatul).

1. GENERALITĂȚI

După datele cunoscute, asupra uzurii de coroziune acționează în mod specific : natura materialelor, agresivitatea mediului, temperatura și viteza de lucru. Întreruperea regimului hidrodinamic de ungere al lagărelor, mărește efectele uzurii corosive datorită, pe de o parte, lipsei peliculei protectoare de lubrifiant și, pe de altă parte, a temperaturilor ridicate care apar la punctele de contact intermetalic [1].

În ceea ce privește *natura materialelor*, se știe că metalele întîlnite de obicei în compoziția materialelor de lagăre (Pb, Cd, Sn, Zn, Cu, Al etc.) sînt mai susceptibile la coroziune. Viteza lor de reacție este însă funcție directă și specifică de natura agentului chimic cu care vin în contact [1].

Coroziunea este puternic influențată de prezența unor metale disimilare sau chiar a metalului cu propriul său oxid, cînd se favorizează crearea microelementelor galvanice și implicit coroziunea electrochimică.

De asemenea, uzura de coroziune este mai intensivă în stratul de oxizi și acolo unde există căi de acces pentru pătrunderea agentului chimic, ca de exemplu : microfisuri, planuri de alunecare, regimuri de perturbare a ordinii cristaline etc.

În cazul lagărelor de la motoarele cu ardere internă, acțiunea corosivă a *mediului de ungere* se manifestă prin prezența în lubrifiant a acizilor organici cu greutate moleculară mare, proveniți din alterarea acestuia, a acizilor naftenici, a acizilor organici cu greutate moleculară mică și a acizilor anorganici, care pot apărea în urma pătrunderii în lubrifiant a produselor de ardere ale combustibililor cu sau fără conținut de sulf. Mai rar, poate apărea chiar sulful și unele combinații ale acestuia [2]. Acțiunea acizilor organici cu greutate moleculară mare din ulei, reprezintă cea mai frecventă și cea mai răspîndită cauză a coroziunii lagărelor iar dintre metalele conținute în compoziția cuzineților, cele mai expuse acestui tip de coroziune sînt plumbul și cadmiul. Acizii organici pot să se găsească în ulei fie sub formă de acizi grași, fie sub formă de acizi naftenici.

În acest caz, reacția chimică dintre acidul gras și metal are loc prin intermediul oxidului metalic care se formează pe suprafețele de lucru, ca rezultat al acțiunii peroxizilor din lubrifiant sau a oxigenului molecular, asupra metalului. Chiar acizii naftenici, cu toate că prezintă proprietăți acide relativ slabe, provoacă uneori coroziunea metalelor cu care vin în contact, mai ales a celor neferoase, dînd săpunuri organo-metalice, care pot rămîne în stare dizolvată sau care se depun.

Acizii cu greutate moleculară mică, cu toate că sînt mult mai tari, au o acțiune corosivă mai redusă deoarece sînt destul de volatili și se elimină ușor printr-o bună ventilație a carterului motorului.

Produsele de ardere ale unui combustibil ce conține sulf și prezența apei în fază lichidă, pot fi destul de periculoase și pentru lagărele motoarelor cu ardere internă.

Acțiunea sulfului se manifestă în special asupra cuprului, între aceste elemente existînd o afinitate deosebită. Inițial, se formează un complex al metalului cu sulful care, în condiții de temperatură înaltă, se descompune cu formare de CuS dură și fragilă. Acest compus se exfoliază cu ușurință provocînd, pe de o parte, uzura cuzinetului prin pierdere de material, și pe de altă parte, contribuind la intensificarea uzurii abrazive a lagărului, datorită particulelor dure de CuS care impurifică lubrifiantul.

Lubrifiantul conferă o oarecare protecție suprafețelor metalice împotriva coroziunii, prin împiedicarea difuziei reactanților și prin reducerea regimului termic. Acest fapt a fost dovedit și prin aceea că o dată cu creșterea debitului de ulei în lagăr scade și uzura acestuia [1].

Folosirea aditivilor detergenţi în lubrifiant măreşte uneori pericolul uzurii lagărelor prin coroziune, deoarece prin menţinerea suprafeţelor metalice de frecare curată, acestea sînt mult mai susceptibile la acţiunea diferiţilor agenţi corosivi cu care vin în contact.

De asemenea, aditivii folosiţi pentru îmbunătăţirea calităţilor lubrifiantului, pot avea, în anumite condiţii, o acţiune corosivă specifică faţă de unele metale din compoziţia de lagăre (exemplu : sulful în prezenţa cuprului).

Creşterea *temperaturii* influenţează deosebit de puternic intensificarea coroziunii aliajelor de cadmiu fără a mări însă practic coroziunea celor de plumb şi staniu. Temperatura rămîne însă unul dintre factorii principali care intensifică procesele de coroziune dintr-un lagăr. Observaţia se referă mai ales la temperaturile excesive care apar local, în punctele de contact intermetalic.

La fel, *viteza* de lucru intervine prin influenţarea regimului termic de lucru al lagărului şi prin intermediul timpului disponibil necesar procesului chimic.

În experimentările efectuate nu s-a urmărit influenţa ultimilor doi factori, aceştia menţinîndu-se constanţi.

2. PARTEA EXPERIMENTALĂ

Studiul experimental prezentat în lucrarea de faţă, a urmărit în special influenţa mediului şi regimului de ungere asupra comportării la uzură a cîtorva materiale antifricţiune întîlnite mai des în construcţia motoarelor cu ardere internă.

În tabela 1 sînt prezentate cele cinci tipuri de materiale antifricţiune experimentale.

Tabela 1

Nr. crt.	Denumirea materialului	Compoziţia chimică a materialului
1	ASM	96% Al, 3,5% Sb, 0,4% Mg
2	Y-PbSn10	10 ± 2,5% Sn, 15,5 ± 1% Sb, 1 ± 0,5% Cu, 73,5 + 1% Pb
3	Pb Sn6Sb6	6% Sn, 6% Sb, rest Pb
4	Y-Sn 83	83 ± 1% Sn, 11 ± 1% Sb, 6 ± 0,5% Cu
5	Bz Pb 25	25,2% Pb, 2% Zn, rest Cu

Toate materialele din tabela 1 au fost încercate în pereche cu un oţel de axe, folosit la fabricarea motoarelor Diesel, şi anume, OL 41 MoC11 normalizat şi călit, cu duritatea $H_{Rc} = 55$ ($\cong 550\ H_B$).

Partea experimentală a cercetărilor a cuprins două aspecte.

2. 1. INFLUENȚA ACIDITĂȚII ORGANICE DIN LUBRIFIANT ASUPRA UZURII MATERIALELOR DE LAGĂRE

Lucrînd

a) în condiții normale de ungere (ungere hidrodinamică),
b) în condiții speciale de laborator.

2.2. COMPORTAREA MATERIALELOR DE LAGĂRE ÎN PREZENȚA UNOR ADITIVI PE BAZĂ DE FOSFOR

2.1.a) *Influența acidității organice din lubrifiant* asupra comportării la uzură a materialelor de lagăre care lucrează în condiții normale de ungere, a fost urmărită pe lagăre experimentale cu funcționare în regim hidrodinamic [1], [3].

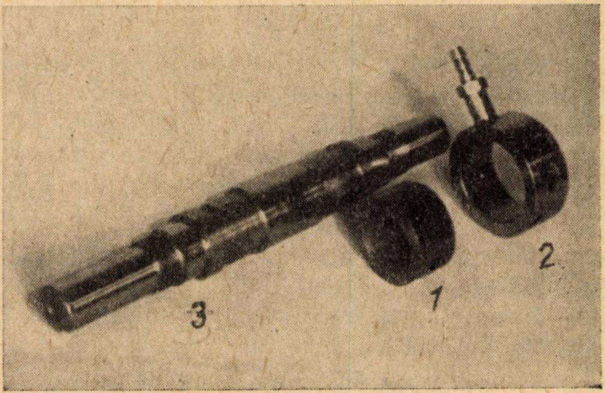


Fig. 1. — Epruvetele încercate pe lagărele experimentale.
1 — cuzinetul (aliaj antifricțiune); *3* — axul (OL 41 Mo C 11 călit cu CIF); *2* — carcasă (oțel).

Condiții de experimentare

Epruvetele experimentale folosite sînt prezentate în figura 1.

Suprafața lucrativă a axelor de oțel utilizate (fig. 1_3) a fost tratată cu CIF și a prezentat o rugozitate inițială de $\mathrm{NsK} = 0,75-0,8\mu$.

Cuzineții experimentați (fig. 1_1) au lucrat în carcase simple de oțel (fig. 1_2) și au prezentat următoarele caracteristici constructive: diametrul nominal $d_i = 36$ mm, alungirea $\lambda = 0,7$, jocul relativ $\psi = 1,5$‰, diametrul orificiului de alimentare cu lubrifiant $b_1 = 4$ mm etc.

Au fost menținute constante toate condițiile de experimentare: turația fusului $n = 1\,350$ rot/min, corespunzînd unei viteze relative $v = 2,5$ m/s, încărcarea lagărului $P = 200$ kgf, corespunzînd unei valori $p_m = 22$ kgf/ cm^2, presiunea de alimentare cu ulei $P_u = 1,5$ atm și temperatura mediului ambiant $t_a \cong 22$°C.

Înainte de începerea experimentării propriu-zise, toate epruvetele (perechile axe-cuzineți) au fost supuse unui regim identic de rodaj progresiv pe o durată de 12 ore, pînă la 300 kgf.

Uzura cuzineților a fost determinată prin diferență de greutate și a fost exprimată și volumetric pentru a putea fi comparabilă în cazul materialelor cu greutăți specifice diferite.

Urmărirea comportării la uzură a axelor care au lucrat în pereche cu diferitele materiale antifricțiune încercate, s-a făcut fotografic, nefiind posibilă cîntărirea lor.

Fiecare pereche de materiale a lucrat peste 80 ore cu ulei 410 (STAS 751/41) și 45 ore cu același tip de ulei acidulat cu 1% acid oleic.

Rezultate

Rezultatele comparative privind comportarea la uzură a materialelor antifricțiune studiate, în condiții de funcționare normală, sînt redate în tabela 2 și figurile 2 și 3.

Tabela 2

Materialul Uzura	ASM	Y-PbSn10	PbSn6Sb6	Y-Sn83	BzPb25	Mediul de ungere
$g/oră \cdot 10^{-3}$	0,163	1,07	1,05	0,623	0,475	410
	0,17	2,73	6,65	0,45	2,16	410 + acid oleic
$cm^3/oră \cdot 10^{-3}$	0,054	0,109	0,105	0,082	0,051	410
	0,057	0,28	0,665	0,06	0,23	410 + acid oleic

După cum reiese din datele cuprinse în tabela 2 și figurile 2 și 3, influența acidității organice este insensibilă în cazul materialelor antifricțiune fără plumb (ASM și Y-Sn 83). Acțiunea acidității organice din lubrifiant se manifestă numai asupra materialelor ce conțin acest element, intensificîndu-se o dată cu creșterea conținutului acestuia.

În figura 2 sînt prezentate curbele de variație a uzurii materialelor antifricțiune încercate, în funcție de timpul lor de lucru, în cazul funcționării normale a lagărelor. Comportarea cea mai bună, din acest punct de vedere, au prezentat-o materialul pe bază de aluminiu (ASM) și bronzul de plumb (BzPb25).

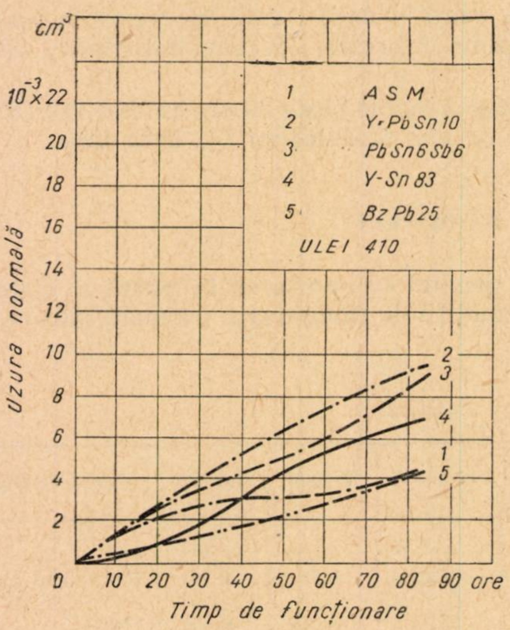
Diferența dintre ele s-a manifestat prin faptul că uzura materialului ASM a prezentat o tendință destul de mare spre stabilizare, în timp ce aceea a materialului BzPb25 a continuat să crească.

Curbele de uzură ale celorlalte materiale pe bază de plumb încercate au prezentat aproximativ aceeași alură, diferind și valoric destul de puțin, în funcție de conținutul de plumb.

Materialul Y-Sn83 s-a plasat pe o poziție medie.

Înlocuirea mediului normal de ungere cu unul cu aciditatea organică mărită (ulei 410 + 1% acid oleic) a permis urmărirea comportării acestor materiale din punctul de vedere al rezistenţei lor la coroziunea organică.

Curbele din figura 3 pun în evidenţă susceptibilitatea materialelor antifricţiune ce conţin plumb, la acţiunea acidităţii organice din lubrifiant.



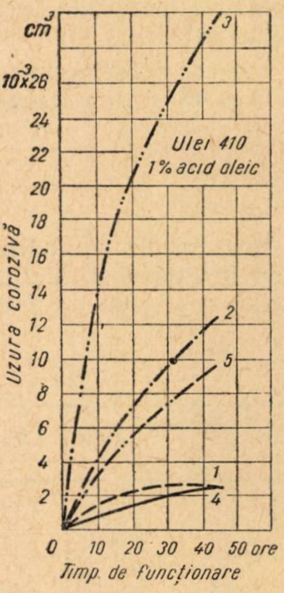


Fig. 2. — Uzura normală în funcţie de timp a celor cinci materiale antifricţiune încercate în condiţii hidrodinamice de lucru.
1 – ASM; 2 – Y-PbSn10; 3 – PbSn6Sb6; 4 – Y-Sn 83; 5 – Bz Pb 25.

Fig. 3. — Influenţa mediului de ungere cu aciditate organică mărită, asupra uzurii corosive a aceloraşi materiale antifricţiune.

Uzura corosivă creşte o dată cu conţinutul de plumb din material (fig. 4).

Poziţia de uzură maximă a cuzinetului datorită coroziunii se află, după cum s-a mai arătat [1], în zona peliculei minime de lubrifiant, deplasată cu cca 30° în aval faţă de punctul de aplicare a sarcinii. Zona uzurii corosive se întinde de-o parte şi de alta a acestui punct maxim pe o distanţă corespunzînd unui unghi de 140—180°.

În figura 5 se prezintă uzura corosivă dimensională a cuzinetului din BzPb25.

Acţiunea materialelor antifricţiune studiate asupra suprafeţei conjugate din oţel călit, s-a manifestat diferit, în funcţie de natura şi duritatea acestora.

În fotografiile din figurile 6 *a*,*b*,*c*,*d* şi *e* se reliefează net influenţa durităţii cuzinetului asupra fusului. Materialele cu conţinut de plumb şi staniu uzează foarte puţin suprafaţa axului (fig. 6*a*, *b*, *c*, şi *d*). Aliajul pe bază de aluminiu însă (fig. 6*e*), datorită durităţii sale mai ridicate ($H_B \cong 22$) şi mai ales a prezenţei oxidului său (Al_2O_3) de duritate mult

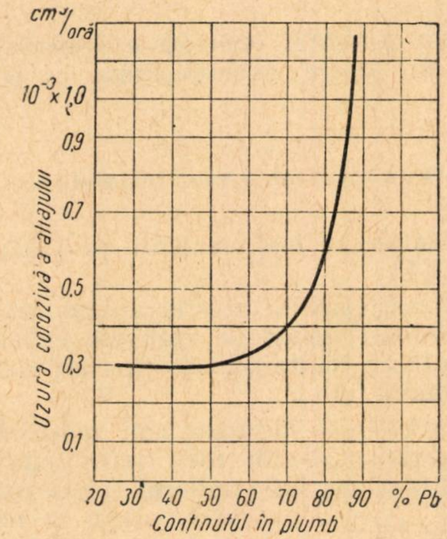


Fig. 4. — Influenţa conţinutului în plumb asupra rezistenţei la coroziune organică a aliajelor antifricţiune.

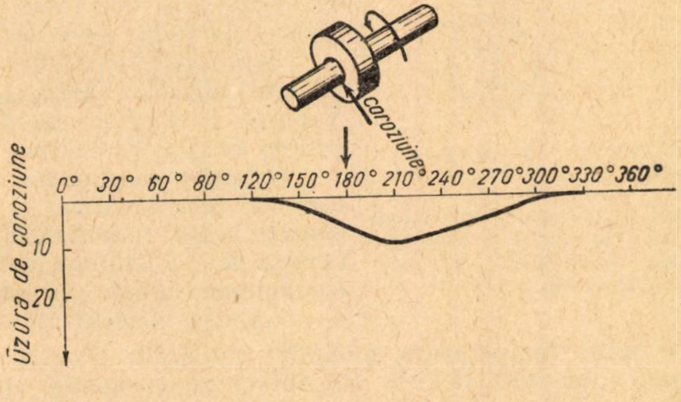

coroziune
Uzura de coroziune
10
20
0°
30°
60°
80°
120°
150°
180°
210°
240°
270°
300°
330°
360°

Fig. 5. — Poziţia geometrică a uzurii corosive a cuzinetului de BzPb 25.

mai mare, acţionează intens asupra suprafeţei conjugate, care prezintă o uzură pronunţată, cu rizuri profunde şi cu deplasări de material în sensul mişcării.

Pentru a pune în evidență mai net acest aspect, s-a trasat pe suprafața axului, perpendicular pe sensul mișcării, o amprentă al cărui profil a fost urmărit la sfîrșitul fiecărei etape de experimentare, în comparație cu partea nelucrată a suprafeței axului (partea superioară a fotografiilor din fig. 6).

2.1 b) *Influența acidității organice a mediului lubrifiant asupra uzurii materialelor de lagăre* experimentate în condiții speciale de laborator.

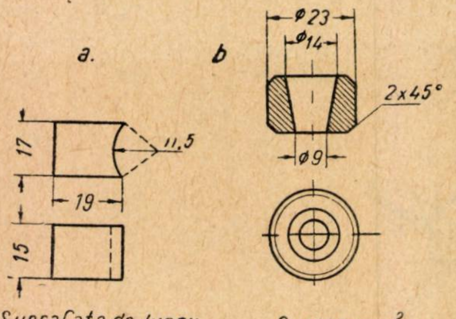
Condiții de experimentare

Aceste experimentări au fost efectuate pe dispozitivul pentru studiul uzurii-tip IMA [4].

Principiul de funcționare al acestui aparat este simplu, permițînd executarea unor încercări rapide pe epruvete experimentale (tambur-sabot) în condiții de lucru foarte variate (frecare uscată, ungere semilichidă, și în strat limită etc.).

Dimensiunile epruvetelor încercate sînt redate în figura 7 *a* și *b*.

Epruvetele experimentale au fost confecționate: sabotul (piesa statică) din aliaj antifricțiune iar tamburul (piesa rotitoare) din același oțel folosit la axele experimentate mai înainte (v.2.1.*a*) și anume, OL41MoC11 normalizat și călit, cu $H_{Rc} = 55$.



Suprafața de lucru 280 mm²

S = 1080 mm²

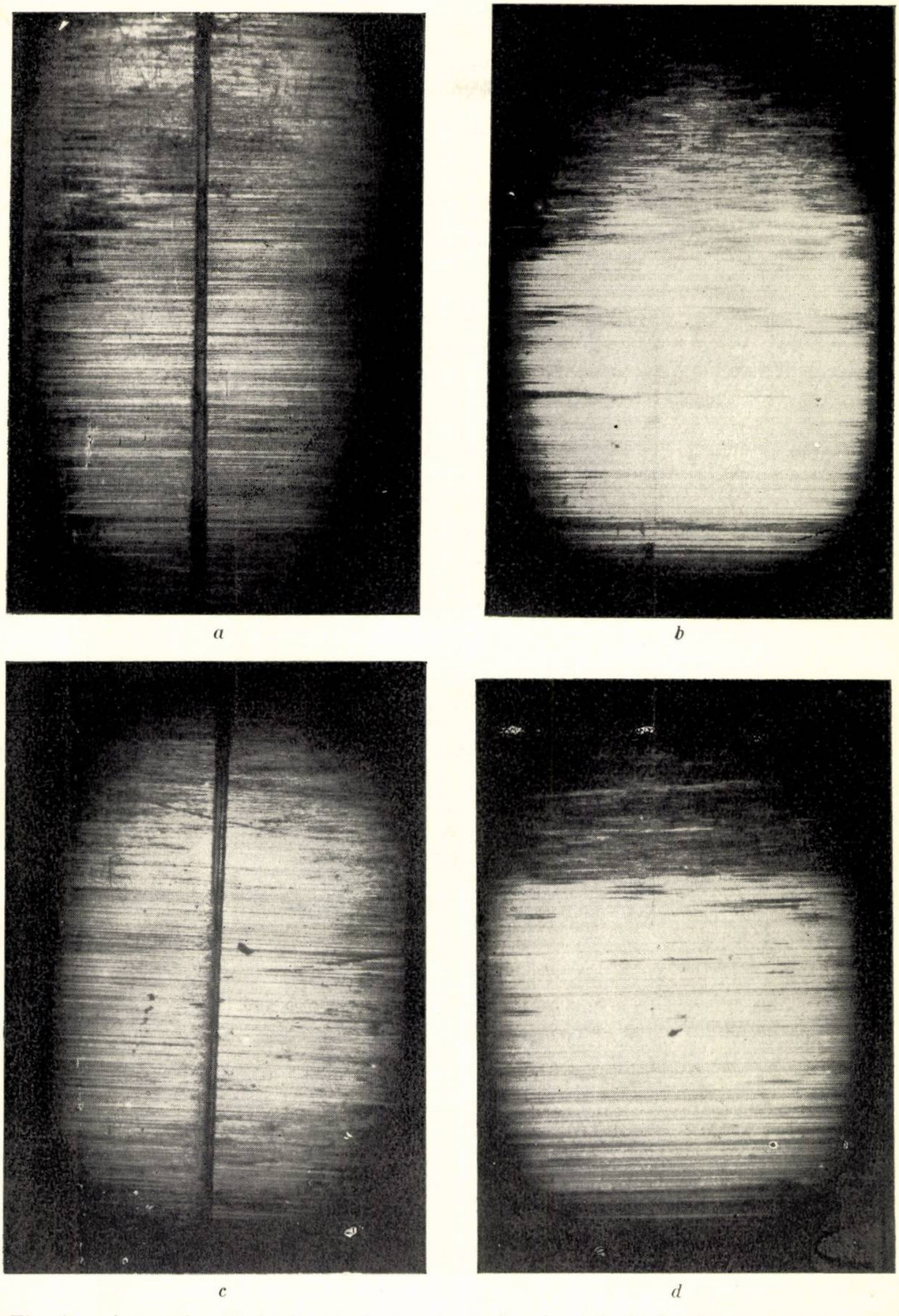
Fig. 7. — Epruvetele încercate pe dispozitivul pentru studiul uzurii în condiții de laborator. *a* — sabotul (aliaj antifricțiune); *b* — tamburul (OL 41 Mo C 11).

Înainte de a trece la experimentarea propriu-zisă, fiecare cuplu de epruvete a fost supus unui regim identic de rodaj de 2 ore.

Sarcina de lucru a fost 60 kgf/cm² pentru aliajele AMS, Y-PbSn10, Y-Sn83 și BzPb25 și 45 kgf/cm² pentru aliajul PbSn6Sb6.

Celelalte condiții de experimentare au fost identice și constante pentru toate materialele studiate: turația $n = 1\,325$ rot/min, ceea ce corespunde unei viteze relative, $v = 1{,}5$ m/s, timpul de experimentare, $\tau = 60$ min, temperatura mediului ambiant, $t_a \cong 22°\mathrm{C}$, iar mediul de ungere ulei 413 (STAS 757/49) curat și același ulei cu 1% acid oleic.

În timpul experimentărilor s-a urmărit variația coeficientului de frecare și a uzurii materialelor studiate în funcție de aciditatea mediului de ungere folosit. Uzura epruvetelor s-a urmărit gravimetric și s-a exprimat și volumetric, raportîndu-se în ambele cazuri la unitatea de suprafață de lucru a epruvetelor și la timpul de o oră.



a b c d

Fig. 6. — Aspectul suprafețelor de lucru ale axelor de oțel, după o funcționare în regim hidrodinamic de 80 ore, în pereche cu :
a — BzPb 25 ; *b* — Y-PbSn 10 ; *c* — PbSn 6Sb 6 ; *d* — Y-Sn 83.

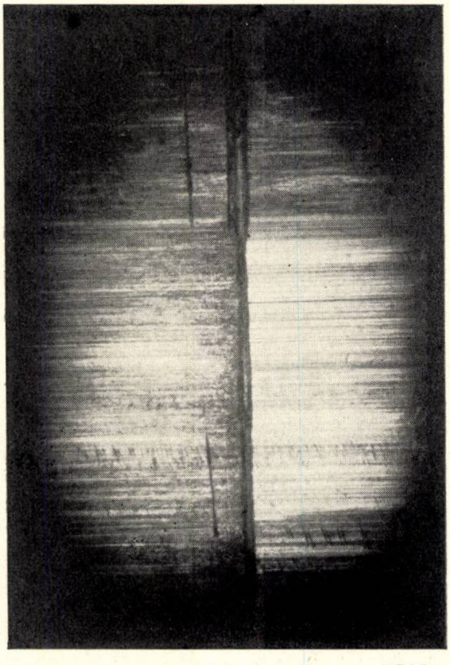


Fig. 6*e* — lucrînd în pereche cu ASM.

Rezultate

Rezultatele comparative obținute în cazul experimentărilor efectuate cu ulei 413 curat și cu același ulei cu 1% acid oleic sînt redate în tabela 3 și în figura 8.

Tabela 3

Nr. probei	Denumirea materialului	Mediul de ungere	Temp. de lucru °C	Coeficientul de frecare μ	
				inițial	final
1	ASM	413 413 + 1% acid oleic	47 47,5	0,025 0,024	0,02 0,02
2	Y-PbSn10	413 413 + ac. oleic	48 55	0,024 0,0225 0,025	0,0225 0,024 0,024
3	PbSn6Sb6	413 413 + ac. oleic	67 65	0,052 0,03 0,03	0,037 0,039 0,049
4	Y-Sn83	413 413 + ac. oleic	53 53	0,0265 0,024	0,022 0,022
5	BzPb25	413 413 + ac. oleic	56,5 58	0,034 0,031	0,031 0,031

După cum se vede, și în aceste condiții de experimentare, materialele antifricțiune studiate s-au comportat diferit, în funcție de compoziția lor : cea mai bună comportare prezentînd-o aliajele ASM și Y-Sn83. Uzura corosivă datorită acidității organice din lubrifiant se manifestă numai față de materialele pe bază de plumb, crescînd o dată cu conținutul acestuia (fig. 8).

Prezența conținutului de plumb ridicat (cca. 88% Pb), face ca aliajul PbSn6Sb6 să fie mai plastic și mai aderent față de suprafața conjugată de oțel, ceea ce conduce la un coeficient de frecare mai mare și implicit și la un regim termic mai ridicat. Regimul termic mai ridicat se datorează și posibilităților mai slabe ale acestui material de a evacua căldura.

În prezența agentului corosiv, coeficienții de frecare scad sau rămîn constanți ; numai în cazul aliajului PbSn6Sb6 s-a observat însă o ușoară creștere.

Uzura tamburilor din oțel călit a fost foarte puțin influențată de aciditatea organică din mediul de ungere.

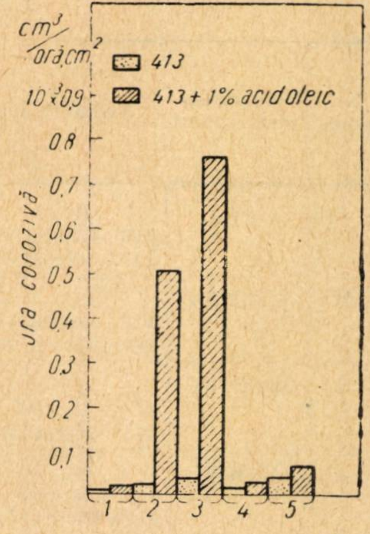


Fig. 8. — Uzura corosivă a aliajelor antifricțiune experimentate în condiții speciale de laborator.

2.2. COMPORTAREA MATERIALELOR DE LAGĂRE ÎN PREZENȚA UNOR ADITIVI PE BAZĂ DE FOSFOR

În aceleași condiții ca și în cazul acidității (v.2.1.*b*), s-au efectuat o serie de încercări, ale căror rezultate sînt centralizate în tabela 4.

Aceste experimentări au scos în evidență comportarea materialelor de lagăre studiate, în prezența lecitinei industriale, de natură animală, în concentrație de 0,5% în ulei 413 și a tricrezil fosfatului pur, în concentrație de 1% în ulei 413.

Au fost aleși pentru experimentare acești aditivi pe bază de fosfor datorită caracterului lor polifuncțional. De exemplu:

— lecitina prezintă proprietăți antioxidante, antigripante și onctuoase și este folosită și ca aditiv de rodaj în rodarea chimică a motoarelor cu ardere internă [5];

— tricrezil fosfatul prezintă proprietăți detergent-dispergente superioare și de asemenea calități antigripante și onctuoase.

Rezultate

Datele experimentale redate în tabela 4 prezintă influența acestor adaosuri în lubrifiant, asupra comportării materialelor de lagăre.

În general, uzura materialelor antifricțiune urmărite este puțin mai mare, față de cea observată în ulei curat, însă comportarea lor este superioară (coeficienții de frecare mai mici și regim termic mai scăzut).

Explicația uzurii mai ridicate înregistrate în toate cazurile în prezența aditivilor, este aceea că, datorită condițiilor de ungere imperfectă,

Tabela 4

Nr. probei	Denumirea materialului	Mediul de ungere	Sarcina kgf/cm^2	Temp. uleiului °C	Coeficientul de frecare, μ		Uzura sabotului $\times 10^{-3}$	
					inițial	final	g/oră, cm^2	cm^3/oră, cm^2
1	ASM	413	60	47	0,025	0,02	0,01	0,003
		413+lecitină	60	47	0,024	0,021	0,074	0,025
		413+tricrezil fosfat	60	47	0,024	0,02	0,148	0,049
2	Y-PbSn10	413	60	48	0,028	0,0225	0,22	0,021
		413+lecitină	60	48	0,021	0,02	0,74	0,075
		413+tricrezil-fosfat	60	46	0,025	0,02	0,37	0,038
3	PbSn6Sb6	413	45	67	0,052	0,037	0,33	0,033
		413 + lecitină	45	49	0,03	0,028	0,48	0,048
		413+tricrezil-fosfat	45	49,5	0,025	0,028	0,445	0,0445
4	Y-Sn83	413	60	53	0,026	0,022	0,11	0,0146
		413 + lecitină	60	54	0,025	0,025	0,148	0,0195
		413+tricrezil-fosfat	60	56	0,026	0,021	0,22	0,029
5	BzPb25	413	60	56,5	0,034	0,031	0,445	0,048
		413 + lecitină	60	58,0	0,033	0,031	0,26	0,028
		413+tricrezil-fosfat	60	56,5	0,032	0,025	0,37	0.040

realizate între tambur și sabot, apar contacte intermetalice punctiforme și deci temperaturi locale ridicate. Se creează astfel, în jurul acestor puncte, condițiile necesare descompunerii aditivilor și apoi, reacției dintre aceste produse de descompunere și metal.

Prin descompunerea lecitinei de exemplu, pot apărea acidul ortofosforic (H_3PO_4) și următorii acizi organici : oleic, palmitic, stearic, linolic și arachidonic.

Această uzură nu are însă caracterul unei uzuri corosive permanente ci ea poate să apară numai la punctele de contact intermetalic dintre suprafețe sau la un moment dat, substituind un eventual accident de gripaj.

3. CONCLUZII

Studiul experimental întreprins a scos în evidență strînsa legătură dintre natura mediului lubrifiant și compoziția materialelor antifricțiune folosite la lagărele de la motoarele cu ardere internă, în ceea ce privește rezistența la uzură a acestora.

Rezultatele obținute au permis tragerea unei concluzii foarte importante și anume, că în condițiile normale de funcționare ale lagărelor de la motoarele cu combustie internă (regim hirodinamic) și folosirea lubrifianților adecvați, toate aliajele antifricțiune încercate dau satisfacție. Diferențierea apare în momentul în care alterarea sau impurificarea lubrifiantului folosit depășește o anumită limită de aciditate, cînd apare net superioritatea în ceea ce privește rezistența la coroziune organică a materialelor fără conținut de plumb. Rezistența la uzura de coroziune scade la aceste materiale în funcție de conținutul lor în plumb.

S-a remarcat, de asemenea, faptul că toate aceste aliaje prezintă o comportare mai bună în prezența aditivilor polifuncționali care îmbunătățesc, în special, calitățile onctuoase și antigripante ale lubrifianților. Coeficienții de frecare ai acestor materiale lucrînd pe oțel călit, sînt mai scăzuți în cazul funcționării cu lubrifiant aditivat.

În ceea ce privește natura materialelor de lagăre, acest studiu experimental comparativ a scos în evidență superioritatea calitativă a materialelor pe bază de aluminiu (ASM), staniu (Y-Sn 83) și a bronzului de plumb (BzPb25) în toate condițiile de experimentare urmărite.

Primită la redacție la 15 decembrie 1962

ASPECTS OF THE BEHAVIOUR OF SOME BEARING MATERIALS SUBJECTED TO WEAR

ABSTRACT

This paper is an experimental study emphasizing the influence of the lubricant on the wear resistance of some anti-friction materials used in the construction of the bearings of internal combustion engines.

The influence of the organic acidity and phosphorus additions on the behaviour of these alloys under various testing conditions (hydrodynamic lubrication and imperfect lubrication) is particularly discussed.

BIBLIOGRAFIE

1. N. TIPEI, V. N. CONSTANTINESCU, AL. NICA, OLGA BIŢĂ, *Lagăre cu alunecare, — calcul, proiectare, ungere*. Ed. Acad. R. P. R., 1961, 385.
2. N. I. CERNOJUKOV, S. E. KREIN, B. V. LOSIKEV, *Chimia uleiurilor minerale*. Ed. de stat tehn.-ştiinţifică, I.D.T., 1951.
3. GH. VASILCA şi colab., *Studii experimentale asupra unor materiale antifricţiune de înlocuire pentru lagărele de alunecare*. St. cerc. mec. apl., **VI**, *3* (1956).
4. GH. MARIN, *Aparat pentru calorimetrarea proceselor de uzură*. St. cerc. mec. apl., **XI**, *2* (1960).
5. OLGA BIŢĂ, I. DINCĂ, *Reducerea timpului de rodaj prin metode chimice. Cercetări în domeniul aşchierii metalelor şi rodajului* (lucrările Consf. asupra tehnicii aşchierii metalelor şi rodajului, Bucureşti, 15—17 dec. 1960), **III**, I.D.T., 1962.

CONTRIBUȚII LA DETERMINAREA PE CALE ANALITICĂ A VITEZELOR ȘI ACCELERAȚIILOR LA UN MECANISM PLAN

DE

RADU P. VOINEA[1]) şi MIHAIL C. ATANASIU[1])

531.1 : 681.1

Într-o lucrare anterioară [15] s-a indicat o metodă generală de determinare pe cale analitică a vitezelor şi accelerațiilor într-un mecanism oarecare. În baza acestei metode, se atașează unui mecanism un sistem de corpuri rigide, denumit sistemul conjugat mecanismului respectiv. Fiecărui contur, independent din punct de vedere topologic, aparținînd mecanismului îi corespunde în sistemul conjugat un corp rigid. Vitezelor (accelerațiilor) unghiulare relative din cuplele mecanismului, care aparțin unui singur contur, le corespund în sistemul conjugat ,,forțe" exterioare, iar celor comune la două contururi le corespund ,,forțe" interioare. De asemenea, vitezelor (accelerațiilor) liniare relative din cuplele cinematice le corespund în sistemul conjugat ,,cupluri" exterioare, respectiv interioare.

Ecuațiilor de condiție pentru vitezele şi accelerațiile relative situate pe un contur, aparținînd mecanismului, le corespund ecuații de echilibru pentru rigidul corespunzător din sistemul conjugat.

Aspectele generale ale problemei determinării pe cale analitică a stării cinematice a unui mecanism au fost arătate în lucrarea [15]. În lucrarea de față se prezintă unele aspecte particulare ale acestei probleme în cazul mecanismelor plane.

1. STABILIREA FORMULELOR DE CALCUL

Să considerăm un contur de elemente aparținînd unui mecanism şi să ne fixăm atenția asupra a două elemente j şi i (fig. 1), legate între ele în A [1]) printr-o cuplă de clasa a patra[2]) care permite :

---

[1]) Institutul politehnic Bucureşti.

— deplasarea relativă a elementelor într-o anumită direcție

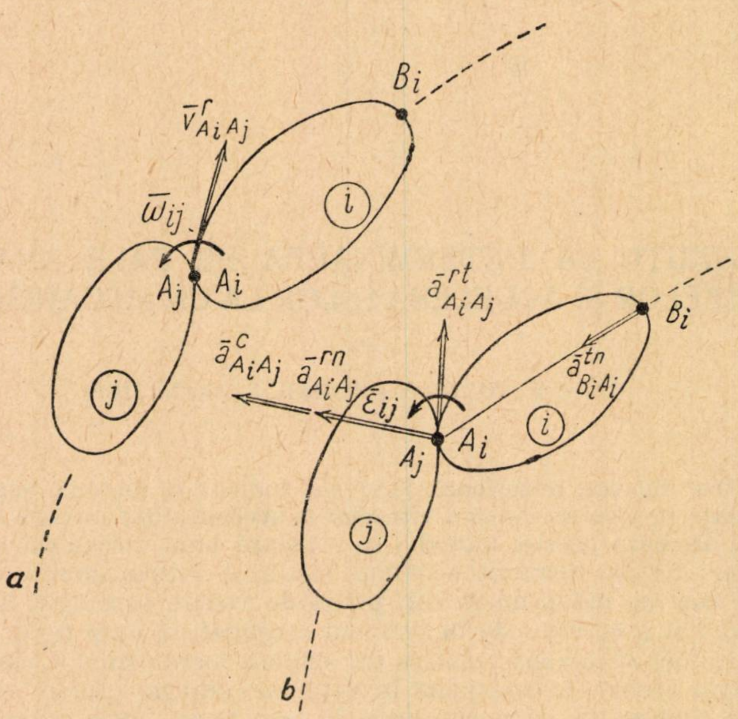


Fig. 1 *ab*

— rotirea lor relativă în jurul unei axe ce trece prin A și este normală pe planul mecanismului.

În baza celor arătate în lucrarea [15], pentru determinarea vitezelor, încărcarea sistemului conjugat, pe porțiunea corespunzătoare elementului i, este cea arătată în fig. 1 a, adică „forța'' $\bar{\omega}_{ij}$ egală cu viteza unghiulară relativă a celor două elemente, normală pe planul mecanismului și „cuplul'' $\bar{v}^r_{A_iA_j}$ egal cu viteza relativă a punctelor A_i și A_j.

---

[1]) În punctul geometric A se află în coincidență două puncte aparținînd celor două corpuri i și j. Ele au fost notate în figura 1 cu A_i și A_j, indicii corespunzînd corpurilor pe care se află punctele. Ca urmare două puncte notate cu același indice aparțin aceluiași corp (de ex. în figura 1, punctele A_i și B_i aparțin corpului i), iar două puncte notate cu aceeași literă și cu indici diferiți aparțin la două corpuri diferite dar ocupă aceeași poziție în spațiu (de exemplu punctele A_i și A_j). În sfîrșit, două puncte notate cu indici diferiți și cu litere diferite aparțin la corpuri diferite și ocupă poziții distincte în spațiu (de exemplu punctele A_j și B_i).

[2]) Cazul cuplei de clasa a cincea se deduce ca un caz particular al cuplei de clasa a patra, făcînd viteza relativă nulă (articulație) sau viteza unghiulară relativă nulă (cupla de translație).

Se poate stabili o formulă de recurență pentru vitezele absolute. Să presupunem că se cunoaște viteza unghiulară absolută $\overline{\omega}_{j0}$ a elementului j față de elementul fix O. Să presupunem de asemenea că se cunoaște viteza absolută $\overline{v}_{A_jA_0}$ a punctului A_j de pe elementul j în raport cu punctul A_0 de pe elementul fix O. Obținem pentru viteza unghiulară absolută $\overline{\omega}_{i0}$ a elementului i și pentru viteza absolută $\overline{v}_{B_iB_0}$ formulele de recurență

$$\begin{gathered} \overline{\omega}_{i0} = \overline{\omega}_{j0} + \overline{\omega}_{ij}, \\ \overline{v}_{B_iB_0} = \overline{v}_{A_jA_0} + \overline{v}^r_{A_iA_j} + \overline{v}^t_{B_iA_i}. \end{gathered} \tag{1}$$

Formulele (1) proiectate pe axele Ox și Oy situate în planul mecanismului și pe axa Oz normală pe acest plan, conduc la relațiile scalare

$$\begin{gathered} \omega_{i0} = \omega_{j0} + \omega_{ij}, \\ (\overline{v}_{B_iB_0})_x = (\overline{v}_{A_jA_0})_x + (\overline{v}^r_{A_iA_0})_x + (\overline{v}^t_{B_iA_i})_x, \\ (\overline{v}_{B_iB_0})_y = (\overline{v}_{A_jA_0})_y + (\overline{v}^r_{A_iA_j})_y + (\overline{v}^t_{B_iA_i})_y, \end{gathered} \tag{2}$$

unde

$$\begin{gathered} (\overline{v}^r_{A_iA_j})_x = \overline{v}^r_{A_iA_j} \cdot \cos \alpha_A, \\ (\overline{v}^r_{A_iA_j})_y = v^r_{A_iA_j} \cdot \sin \alpha_A, \end{gathered} \tag{3}$$

și

$$\begin{gathered} (\overline{v}^t_{B_iA_i})_x = - \omega_{i0} \cdot \Delta y_i, \\ (\overline{v}^t_{B_iA_i})_y = + \omega_{i0} \cdot \Delta x_i. \end{gathered} \tag{4}$$

În formulele (3) s-a notat cu α_A unghiul dintre axa Ox și vectorul $\overline{v}^r_{A_iA_j}$. Acest unghi este în general cunoscut. În formulele (4) s-a notat cu Δx_i și Δy_i coordonatele relative ale punctului B_i față de punctul A_i, adică

$$\begin{gathered} \Delta x_i = x_{B_i} - x_{A_i}, \\ \Delta y_i = y_{B_i} - y_{A_i}. \end{gathered} \tag{5}$$

Dacă ne referim acum la calculul accelerațiilor, atunci, în baza celor arătate în lucrarea [15], încărcarea sistemului conjugat pe porțiunea corespunzătoare elementului i este cea din figura 1 *b*, adică ,,forța'' $\overline{\varepsilon}_{ij}$ egală cu accelerația unghiulară relativă, normală pe planul mecanismului și ,,cuplurile'' $\overline{a}^{rt}_{A_iA_j}$, $\overline{a}^{rn}_{A_iA_j}$, $\overline{a}^{tn}_{B_iA_i}$ și $\overline{a}^{c}_{A_iA_j}$ egale respectiv cu : accelerația relativă tangențială, accelerația relativă normală, accelerația de transport normală și accelerația Coriolis corespunzătoare mișcării celor două corpuri i și j.

Se poate stabili și pentru accelerațiile absolute o formulă de recurență. Să presupunem că se cunosc : accelerația unghiulară absolută ε_{j0} a elementului j și accelerația absolută $\overline{a}_{A_jA_0}$ a elementului A_j de pe elementul j în raport cu punctul A_0 de pe elementul fix O. Expresia accelerației unghiulare absolute $\bar{\varepsilon}_{i0}$ și aceea a accelerației absolute $\bar{a}_{B_iB_0}$ vor fi date de formulele de recurență

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}_{i0} &= \bar{\varepsilon}_{j0} + \bar{\varepsilon}_{ij}\,, \\ \bar{a}_{B_iB_0} &= \bar{a}_{A_iA_0} + \bar{a}^{rt}_{A_iA_j} + \bar{a}^{rn}_{A_iA_j} + \bar{a}^{tn}_{B_iA_i} + \bar{a}^{tt}_{B_iA_i} + \bar{a}^{c}_{A_iA_j}. \end{aligned} \tag{6}$$

Proiectînd pe axe aceste relații, obținem

$$\begin{aligned} \varepsilon_{i0} &= \varepsilon_{j0} + \varepsilon_{ij} \\ (a_{B_iB_0})_x &= (a_{A_iA_0})_x + (a^{rt}_{A_iA_j})_x + (a^{rn}_{A_iA_j})_x + (a^{tn}_{B_iA_i})_x + (a^{tt}_{B_iA_i})_x + (a^{c}_{A_iA_j})_x \\ (a_{B_iB_0})_y &= (a_{A_iA_0})_y + (a^{rt}_{A_iA_j})_y + (a^{rn}_{A_iA_j})_y + (a^{tn}_{B_iA_i})_y + (a^{tt}_{B_iA_i})_y + (a^{c}_{A_iA_j})_y \end{aligned} \tag{7}$$

unde

$$\begin{aligned} (a^{rt}_{A_iA_j})_x &= a^{rt}_{A_iA_j} \cdot \cos\alpha_A\,, \\ (a^{rt}_{A_iA_j})_y &= a^{rt}_{A_iA_j} \cdot \sin\alpha_A\,, \end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned} (a^{rn}_{A_iA_j})_x &= -\frac{(v^{r}_{A_iA_j})^2}{\rho} \cdot \sin\alpha_A\,, \\ (a^{rn}_{A_iA_j})_y &= +\frac{(v^{r}_{A_iA_j})^2}{\rho} \cdot \cos\alpha_A\,, \end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned} (a^{tn}_{B_iA_i})_x &= -(\omega_{i0})^2 \cdot \Delta x_i\,, \\ (a^{tn}_{B_iA_i})_y &= -(\omega_{i0})^2 \cdot \Delta y_i\,, \end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned} (a^{tt}_{B_iA_i})_x &= -\varepsilon_{i0} \cdot \Delta y_i\,, \\ (a^{tt}_{B_iA_i})_y &= +\varepsilon_{i0} \cdot \Delta x_i\,, \end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned} (a^{c}_{A_iA_j})_x &= -2\omega_{j0} \cdot (v^{r}_{A_iA_j})_y\,, \\ (a^{c}_{A_iA_j})_y &= +2\omega_{j0} \cdot (v^{r}_{A_iA_j})_x\,. \end{aligned} \tag{12}$$

În formulele (9) ρ reprezintă raza de curbură a traiectoriei punctului A_i în mișcarea sa relativă față de corpul j.

Formulele (2)... (12) arată că starea cinematică a unui mecanism plan poate fi determinată foarte comod dacă se cunosc toate vitezele relative și toate accelerațiile relative.

Într-adevăr dacă se cunosc vitezele unghiulare relative ω_{ij}, atunci cu ajutorul primei formule (2) se pot determina, din aproape în aproape, vitezele unghiulare absolute ω_{i0}. Cunoscînd vitezele relative $\bar{v}^r_{A_iA_j}$, cu ajutorul ultimelor două formule (2), se pot determina proiecțiile pe axe ale vitezelor absolute $\bar{v}_{B_iB_0}$. Calculele se pot dispune într-o tabelă.

După aceea, trecînd la calculul accelerațiilor, vom observa că, dacă se cunosc accelerațiile unghiulare relative ε_{ij} atunci, cu ajutorul primei formule (7) se pot determina, din aproape în aproape, accelerațiile unghiulare absolute ε_{i0}. Cunoscînd accelerațiile relative $\bar{a}^r_{A_iA_j}$, cu ajutorul ultimelor două formule (7), folosind și expresiile (8) ...(12), se pot determina proiecțiile pe axe ale accelerațiilor absolute $\bar{a}_{B_iB_0}$. Calculele se pot dispune de asemenea într-o tabelă.

2. DETERMINAREA VITEZELOR ȘI ACCELERAȚIILOR RELATIVE NECUNOSCUTE LA UN MECANISM DUBLU CONEX

a) *Generalități.* Să considerăm un mecanism cu un singur contur închis (dublu conex). Să notăm elementul fix cu O; cele n elemente mobile ale mecanismului considerat le vom nota în ordinea în care se succed cu : 1, 2, 3, ...,n (s-a ales un anumit sens de parcurgere a conturului). Elementul n este cuplat cu elementul fix O. Să notăm cu A, B, C, ..., M, N, P, ...punctele în care se află, la un moment dat, cuplele lanțului cinematic. De fapt, în fiecare asemenea punct există, așa cum s-a arătat mai sus, două puncte în coincidență, situate pe corpurile ce vin în contact. Cu notațiile adoptate, aceste puncte vor fi A_0 și A_1, B_1 și B_2, C_2 și C_3 ... M_α și M_β, N_β și N_γ, P_γ și P_δ .... Să notăm cu x_A și y_A coordonatele punctului A, cu x_B și y_B coordonatele punctului B,.. etc. ... față de un sistem de referință xOy situat în planul mecanismului. În fiecare asemenea punct există viteze relative (unghiulare și liniare în cazul unei cuple de clasa a patra, sau numai unghiulare, sau numai liniare, în cazul unei cuple de clasa a cincea). O parte dintre aceste viteze relative sînt cunoscute, iar altele sînt necunoscute. Vom observa că nu pot fi mai mult de trei viteze relative necunoscute, dintre care cel mult două pot fi viteze liniare.

Într-adevăr, sistemul conjugat se reduce în cazul unui mecanism dublu conex la un singur rigid, deoarece mecanismul are un singur contur. Acest rigid este acționat, așa cum s-a arătat mai sus, de „forțe" normale pe planul mecanismului și de „cupluri" ale căror vectori se află în planul mecanismului. În aceste condiții rezultă că nu se pot scrie decît trei ecuații de echilibru : o ecuație de proiecție pe axa Oz, normală pe planul mecanismului și două ecuații de momente în raport cu axele Ox și Oy din planul mecanismului. Rezultă deci că nu pot fi determinate mai mult de trei necunoscute. Vom observa acum că vitezele unghiulare relative intervin în general în toate cele trei ecuații de echilibru în timp ce vitezele liniare relative, asimilate cu cuplurile, nu pot interveni decît în cele două ecuații de momente în raport cu axele Ox și Oy. Rezultă deci că nu pot fi determinate mai mult de trei viteze relative necunoscute și mai mult de două viteze liniare relative necunoscute.

În concluzie, necunoscutele pot fi :

— trei viteze unghiulare relative,

— două viteze unghiulare relative și o viteză liniară relativă,

— o viteză unghiulară relativă și două viteze liniare relative.

Un raționament similar ne duce la concluzia că, în ceea ce privește accelerațiile, necunoscutele pot fi

— trei accelerații unghiulare relative,

— două accelerații unghiulare relative și o accelerație liniară relativă,

— o accelerație unghiulară relativă și două accelerații liniare relative.

b) *Determinarea vitezelor relative necunoscute.* În cele ce urmează vom considera, pentru a fixa ideile, că necunoscutele sînt : viteza unghiulară relativă $\bar{\omega}_{\beta\alpha}$ din articulația M (care cuplează corpurile α și β), viteza unghiulară $\bar{\omega}_{\gamma\beta}$ din articulația N (care cuplează corpurile β și γ) și viteza liniară relativă $\bar{v}^r_{P_\delta P_\gamma}$ din cupla de translație P (dintre corpurile γ și δ). Vom presupune că se cunosc coordonatele x_M, y_M și x_N, y_N ale punctelor M și N și direcția vectorului $\bar{v}^r_{P_\delta P_\gamma}$, caracterizată prin unghiul α_p dintre axa Ox și suportul său.

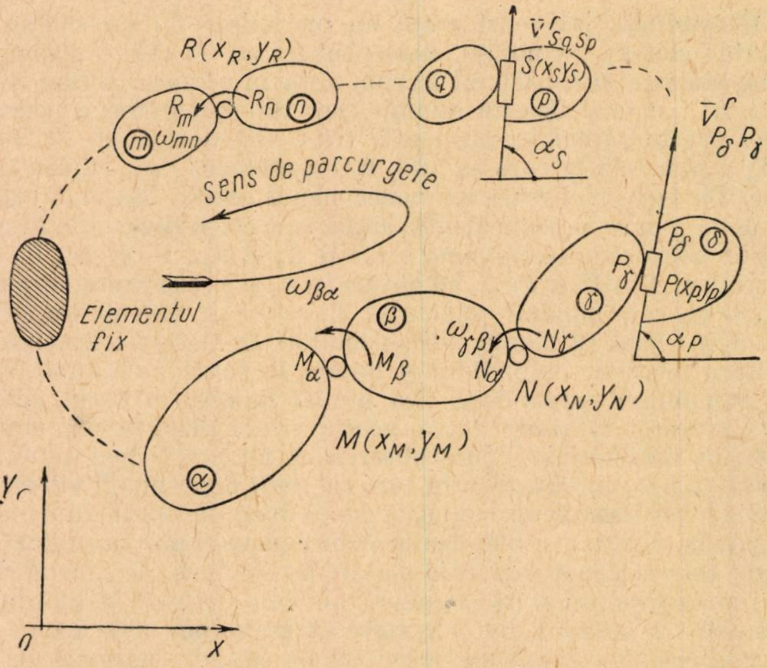


Fig. 2

Vom presupune că în articulația R dintre corpurile m și n se cunoaște viteza unghiulară relativă $\bar{\omega}_{mn}$ iar în cupla de translație S dintre corpurile p și q se cunoaște viteza relativă $\bar{v}^r_{S_q S_p}$ a cărei direcție face unghiul α_S cu axa Ox (fig.2). Vom presupune de asemenea că se cunosc coordonatele tuturor punctelor în care se află cuple cinematice. Scriind ecuațiile de echilibru (proiecții pe axa Oz, momente în raport cu axele Oy și Ox) obținem

$$\begin{aligned}
&\omega_{\beta\alpha} + \omega_{\gamma\beta} + \Sigma'\omega_{mn} = 0,\\
&x_M\cdot\omega_{\beta\alpha} + x_N\cdot\omega_{\gamma\delta} - v^{r}_{P_\delta P_\gamma}\cdot\sin\alpha_p + \Sigma' x_R\cdot\omega_{mn} - \Sigma'' v^{r}_{S_q S_p}\cdot\sin\alpha_S = 0,\\
&y_M\cdot\omega_{\beta\alpha} + y_N\cdot\omega_{\gamma\delta} + v^{r}_{P_\delta P_\gamma}\cdot\cos\alpha_p + \Sigma' y_R\cdot\omega_{mn} + \Sigma'' v^{r}_{S_q S_p}\cdot\cos\alpha_S = 0.
\end{aligned}\tag{13}$$

În sistemul (13) sumele Σ' se extind la toate vitezele unghiulare relative cunoscute, iar sumele Σ'' se extind la toate vitezele liniare relative cunoscute. Rezolvînd sistemul de ecuații (13), obținem pentru necunoscutele $\omega_{\beta\alpha}$, $\omega_{\gamma\beta}$ și $v^{r}_{P_\delta P_\gamma}$ expresiile

$$\omega_{\beta\alpha} = \Sigma' - \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0\\ x_R & x_N & -\sin\alpha_P\\ y_R & y_N & +\cos\alpha_P \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0\\ x_M & x_N & -\sin\alpha_P\\ y_M & y_N & +\cos\alpha_P \end{vmatrix}}\,\omega_{mn} + \Sigma'' - \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0\\ -\sin\alpha_S & x_N & -\sin\alpha_P\\ +\cos\alpha_S & y_N & +\cos\alpha_P \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0\\ x_M & x_N & -\sin\alpha_P\\ y_M & y_N & +\cos\alpha_P \end{vmatrix}}\,v^{r}_{S_qS_p}$$

$$\omega_{\gamma\beta} = \Sigma' - \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0\\ x_M & x_R & -\sin\alpha_P\\ y_M & y_R & \cos\alpha_P \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0\\ x_M & x_N & -\sin\alpha_P\\ y_M & y_N & \cos\alpha_P \end{vmatrix}}\,\omega_{mn} + \Sigma'' - \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0\\ x_M & -\sin\alpha_S & -\sin\alpha_P\\ y_M & \cos\alpha_S & \cos\alpha_P \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0\\ x_M & x_N & -\sin\alpha_P\\ y_M & y_N & \cos\alpha_P \end{vmatrix}}\,v^{r}_{S_qS_p}$$

$$v^{r}_{P_\delta P_\gamma} = \Sigma' - \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1\\ x_M & x_N & x_R\\ y_M & y_N & y_R \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0\\ x_M & x_N & -\sin\alpha_P\\ y_M & y_N & \cos\alpha_P \end{vmatrix}}\,\omega_{mn} + \Sigma'' - \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0\\ x_M & x_N & -\sin\alpha_S\\ y_M & y_N & \cos\alpha_S \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0\\ x_M & x_N & -\sin\alpha_S\\ y_M & y_N & \cos\alpha_S \end{vmatrix}}\,v^{r}_{S_qS_p} \tag{14}$$

Folosind notațiile

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0\\ x_M & x_N & -\sin\alpha_P\\ y_M & y_N & \cos\alpha_P \end{vmatrix} = (MN\alpha_P)\,; \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1\\ x_M & x_N & x_R\\ y_M & y_N & y_R \end{vmatrix} = (MNR)\,;\ \text{etc...} \tag{15}$$

relaţiile (14) se scriu mai simplu

$$
\begin{aligned}
\omega_{\beta\alpha} &= \Sigma' - \frac{(RN\alpha_P)}{(MN\alpha_P)}\,\omega_{mn} + \Sigma'' - \frac{(\alpha_S N\alpha_P)}{(MN\alpha_P)}\,\overset{r}{v}_{S_q S_p}, \\
\omega_{\gamma\beta} &= \Sigma' - \frac{(MR\alpha_P)}{(MN\alpha_P)}\,\omega_{mn} + \Sigma'' - \frac{(M\alpha_S\alpha_P)}{(MN\alpha_P)}\,\overset{r}{v}_{S_q S_p}, \qquad (16) \\
\overset{r}{v}_{P_\delta P_\gamma} &= \Sigma' - \frac{(MNR)}{(MN\alpha_P)}\,\omega_{mn} + \Sigma'' - \frac{(MN\alpha_S)}{(MN\alpha_P)}\,\overset{r}{v}_{S_q S_p}.
\end{aligned}
$$

În aceste formule, aşa cum s-a arătat mai sus, sumele $\sum'$ se extind la toate vitezele unghiulare relative cunoscute, iar sumele $\sum''$ se extind la toate vitezele liniare relative cunoscute.

Regulile care se desprind din formulele (16) sînt următoarele:

— La numitor apare determinantul necunoscutelor luate într-o anumită ordine, aleasă după voie. Coloanele acestui determinant sînt formate din (1, x_A, y_A) dacă necunoscuta este viteza unghiulară relativă din articulaţia A şi din (0, $-\sin\alpha_B$, $\cos\alpha_B$) dacă necunoscuta este viteza liniară relativă din cupla de translaţie B.

— La numărător apare, după regula lui Cramer, acelaşi determinant de la numitor în care coloana corespunzătoare necunoscutei se înlocuieşte cu o nouă coloană corespunzătoare vitezei relative cunoscute. Această nouă coloană se scrie după aceleaşi reguli ca la alineatul precedent, adică dacă viteza cunoscută este o viteză unghiulară relativă, coloana considerată este de forma (1, x, y), iar dacă viteza cunoscută este o viteză liniară relativă coloana considerată este de forma (0, $-\sin\alpha$, $\cos\alpha$).

c) *Determinarea acceleraţiilor*. Determinarea acceleraţiilor relative necunoscute constituie o problemă analogă determinării vitezelor relative necunoscute; singura deosebire constă în aceea că în ecuaţiile de momente în raport cu axele Oy şi Ox intervine şi suma proiecţiilor acceleraţiilor relative normale, acceleraţiilor de transport normale şi acceleraţiilor complimentare (Coriolis). Aceste acceleraţii pot fi uşor determinate dacă se cunosc vitezele unghiulare absolute şi vitezele liniare relative. Calculele pot fi de asemenea prezentate sub formă de tabele. Rezultă că în ecuaţiile de echilibru mai apar în plus următorii termeni:

$$
\begin{aligned}
&-\Sigma\,(a^{rn}_{A_i A_j})_y - \Sigma\,(a^{tn}_{B_i A_i})_y - \Sigma\,(a^{c}_{A_i A_j})_y, \\
&\Sigma\,(a^{rn}_{A_i A_j})_x + \Sigma\,(a^{tn}_{B_i A_i})_x + \Sigma\,(a^{c}_{A_i A_j})_x.
\end{aligned} \qquad (17)
$$

Sumele ce intervin în expresiile (17) trebuie extinse la *toate* acceleraţiile relative normale, de transport normale şi la toate acceleraţiile Coriolis. Notînd simbolic cu Γ coloana (17) formulele pentru determinarea accelerațiilor relative necunoscute se deduc prin analogie cu relațiile (16) :

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{\beta\alpha} &= \Sigma' - \frac{(RN\alpha_P)}{(MN\alpha_P)}\,\varepsilon_{mn} + \Sigma'' - \frac{(\alpha_S N\alpha_P)}{(MN\alpha_P)}\,a^{rt}_{S_q S_p} - \frac{(\Gamma N\alpha_P)}{(MN\alpha_P)},\\
\varepsilon_{\gamma\beta} &= \Sigma' - \frac{(MR\alpha_P)}{(MN\alpha_P)}\,\varepsilon_{mn} + \Sigma'' - \frac{(M\alpha_S\alpha_P)}{(MN\alpha_P)}\,a^{rt}_{S_q S_p} - \frac{(M\Gamma\alpha_P)}{(MN\alpha_P)},\\
a^{rt}_{P_\delta P_\gamma} &= \Sigma' - \frac{(MNR)}{(MN\alpha_P)}\,\varepsilon_{mn} + \Sigma'' - \frac{(MN\alpha_S)}{(MN\alpha_P)}\,a^{rt}_{S_q S_p} - \frac{(MN\Gamma)}{(MN\alpha_P)}.
\end{aligned} \tag{18}$$

Formulele (18) rezolvă problema determinării accelerațiilor relative necunoscute.

3. DETERMINAREA VITEZELOR ȘI ACCELERAȚIILOR RELATIVE NECUNOSCUTE LA UN MECANISM MULTIPLU CONEX

În cazul unui mecanism la care numărul de contururi este mai mare decît unul, se poate aplica un procedeu asemănător celui folosit la calculul eforturilor în barele unei grinzi cu zăbrele. Astfel, se poate începe rezolvarea, dacă este posibil, cu un contur pe care nu se află decît trei viteze relative necunoscute. Ele se vor determina cu ajutorul formulelor (16), apoi se va trece la un alt contur pe care se află de asemenea numai trei necunoscute și așa mai departe.

Dacă nu există de la început nici un contur cu numai trei necunoscute, sau dacă, folosind procedeul arătat la alineatul precedent, ajungem după cîteva rezolvări de conture la situația că dintre conturele rămase nu mai există nici unul cu numai trei necunoscute, se poate proceda astfel : se alege un contur cu patru necunoscute și se exprimă trei dintre acestea în funcție de cea de a patra, ca și cînd aceasta din urmă ar fi cunoscută. Se trece apoi de la un contur la altul, căutînd pe cele care au numai trei necunoscute *noi* și se exprimă astfel toate vitezele relative necunoscute în funcție de necunoscuta aleasă inițial. La un moment dat, se ajunge la o ecuație de condiție pentru această necunoscută. Din această ecuație se determină valoarea vitezei necunoscute. Toate celelalte viteze relative necunoscute, vor rezulta imediat, deoarece expresiile lor în funcție de aceasta au fost determinate anterior.

Acest ultim procedeu care amintește de metoda înlocuirii barelor, folosită la determinarea eforturilor la grinzile cu zăbrele, este aplicabil la mecanisme plane dintre cele mai complexe. Pentru cazuri excepționale se pot alege două sau eventual mai multe viteze relative necunoscute în funcție de care să se exprime celelalte viteze relative necunoscute. Se ajunge la sfîrșit la un sistem alcătuit din două sau mai multe ecuații. Din acest sistem se determină necunoscutele alese inițial după care rezultă imediat și celelalte viteze relative necunoscute.

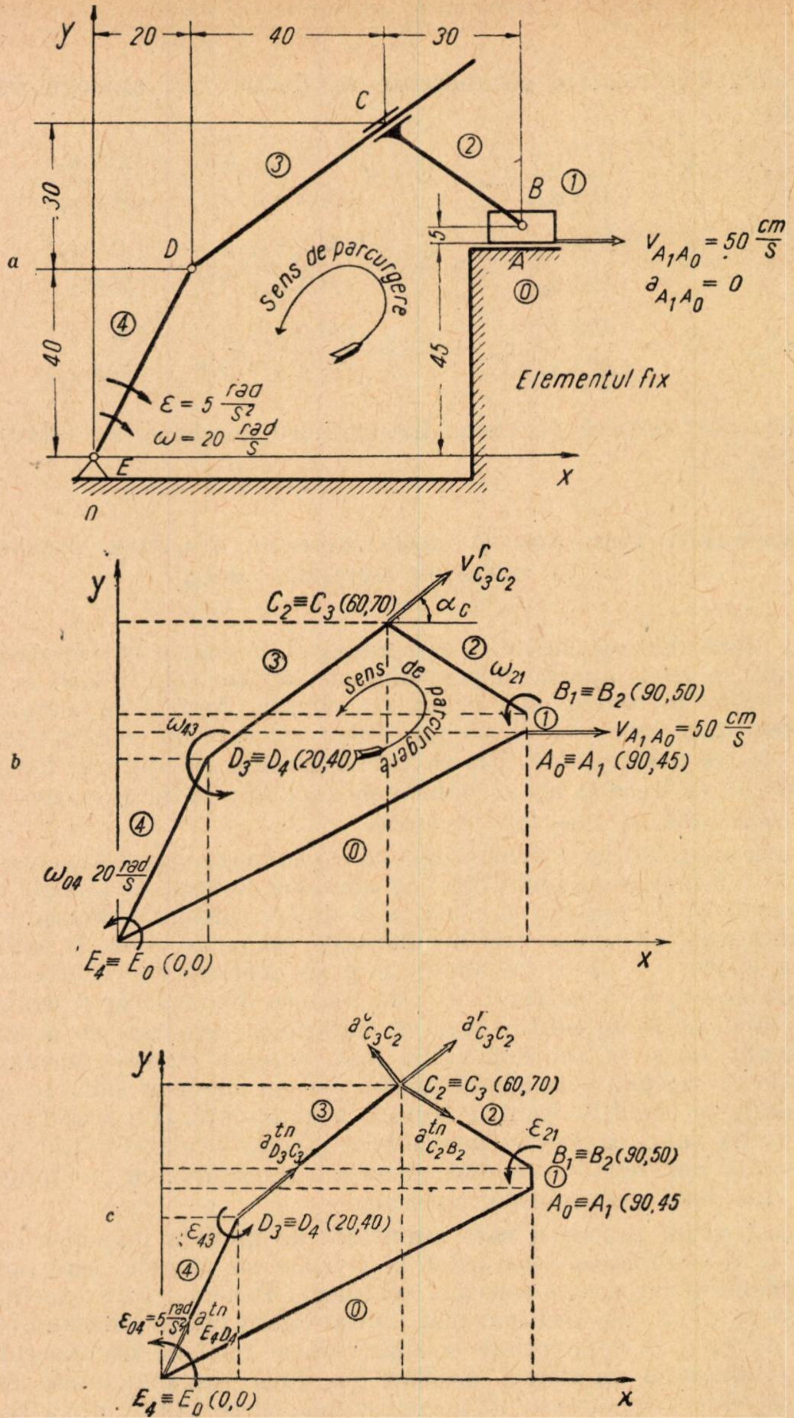

a
y
20
40
30
C
③
②
B
①
30
5
D
A
$v_{A_1A_0} = 50\,\frac{cm}{s}$
$a_{A_1A_0} = 0$
⓪
Sens de parcurgere
④
40
45
Elementul fix
$\varepsilon = 5\,\frac{rad}{s^2}$
$\omega = 20\,\frac{rad}{s}$
E
x
0
b
y
$v^r_{C_3C_2}$
$C_2 \equiv C_3\,(60,70)$
α_C
③
②
ω_{21}
Sens de parcurgere
$B_1 \equiv B_2\,(90,50)$
ω_{43}
①
$v_{A_1A_0} = 50\,\frac{cm}{s}$
$D_3 \equiv D_4\,(20,40)$
$A_0 \equiv A_1\,(90,45)$
④
⓪
$\omega_{04}\ 20\,\frac{rad}{s}$
$E_4 \equiv E_0\,(0,0)$
x
c
$a^c_{C_3C_2}$
$a^r_{C_3C_2}$
y
$C_2 \equiv C_3\,(60,70)$
③
②
$a^{tn}_{D_3C_3}$
$a^{tn}_{C_2B_2}$
ε_{21}
$B_1 \equiv B_2\,(90,50)$
①
$A_0 \equiv A_1\,(90,45$
ε_{43}
$D_3 \equiv D_4\,(20,40)$
④
⓪
$\varepsilon_{04} = 5\,\frac{rad}{s^2}$
$a^{tn}_{E_4D_4}$
$E_4 \equiv E_0\,(0,0)$
x

Fig. 3

După determinarea tuturor vitezelor relative necunoscute se pot determina vitezele absolute folosind formulele de recurență (2). În mod analog se determină și accelerațiile relative necunoscute după care folosind formulele de recurență (7) rezultă imediat și accelerațiile absolute. Calculele pot fi prezentate sub formă de tabele așa cum se arată în aplicațiile tratate în cele ce urmează.

4. APLICAŢII

Aplicația 1. Se consideră mecanismul din figura 3*a*. Cunoscînd viteza și accelerația unghiulară a manivelei 4 și viteza și accelerația culisei *1*, se cere să se determine starea cinematică a mecanismului.

Rezolvare. În figura 3 *b* și 3 *c* s-au reprezentat încărcările grinzii conjugate, pentru calculul vitezelor, respectiv al accelerațiilor. Calculele numerice sînt prezentate în tabelele *1a* *1b*, *1c* și *1d*.

Tabela 1a

Determinarea vitezelor relative necunoscute la mecanismul din fig. 3a

Determinarea vitezelor relative	Coordonate ; unghiuri Calculul determinanților
$\omega_{21} = -\dfrac{(\alpha_A D\alpha_c)\, v_{A_1A_0} + (ED\alpha_c)\, \omega_{04}}{(BD\alpha_c)} =$ $= -\dfrac{-0{,}6 \times 50 + 40 \times 20}{-62} = 12{,}42\ \dfrac{\text{rad}}{\text{s}}$	$B\,(90,\ 50),\quad D\,(20{,}40),\quad E\,(0,\ 0)$ $\sin\alpha_c = 0{,}6,\quad \cos\alpha_c = 0{,}8$ $\sin\alpha_A = 0,\quad \cos\alpha_A = 1$ $(BD\alpha_c) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 90 & 20 & -0{,}6 \\ 50 & 40 & 0{,}8 \end{vmatrix} = -62$
$\omega_{43} = -\dfrac{(B\alpha_A\alpha_c)\, v_{A_1A_0} + (BE\alpha_c)\, \omega_{04}}{(BD\alpha_c)} =$ $= -\dfrac{0{,}6 \times 50 - 102 \times 20}{-62} = -32{,}42\ \dfrac{\text{rad}}{\text{s}}$	$(\alpha_A D\alpha_c) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 20 & -0{,}6 \\ 0 & 40 & 0{,}8 \end{vmatrix} = -0{,}6$ $(ED\alpha_c) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 20 & -0{,}6 \\ 0 & 40 & 0{,}8 \end{vmatrix} = 40$ $(B\alpha_A\alpha_c) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 90 & 0 & -0{,}6 \\ 50 & 1 & 0{,}8 \end{vmatrix} = 0{,}6$
$v^{r}_{C_3C_2} = -\dfrac{(BD\alpha_A)\, v_{A_1A_0} + (BDE)\, \omega_{04}}{(BD\alpha_c)} =$ $= -\dfrac{-70 \times 50 + 2\,600 \times 20}{-62} = 782{,}26\ \dfrac{\text{cm}}{\text{s}}$	$(BE\alpha_c) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 90 & 0 & -0{,}6 \\ 50 & 0 & 0{,}8 \end{vmatrix} = -102$ $(BD\alpha_A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 90 & 20 & 0 \\ 50 & 40 & 1 \end{vmatrix} = -70$ $(BDE) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 90 & 20 & 0 \\ 50 & 40 & 0 \end{vmatrix} = 2\,600$

Tabela 1b

Determinarea vitezelor absolute la mecanismul din fig. 3a

Elementul	Cupla	Punctul	Coordonatele cuplelor				Viteze unghiulare		Viteze liniare (cm/s)					
			absolute		relative		absolute	relative	relative		de transport		absolute	
			x_i	y_i	Δx_i	Δy_i	ω_{ij}	ω_{i0}	$(v^r_{A_iA_j})_x$	$(v^r_{A_iA_j})_y$	$(v^t_{B_iA_i})_x$	$(v^t_{B_iA_i})_y$	$(v_{B_iB_0})_x$	$(v_{B_iB_0})_y$
0	A	A_0	90	45	—	—	0	—	50	0	—	—	0	0
1		A_1			0	5		0			0	0	50	0
	B	B_1	90	50			12,42		0	0			50	0
2		B_2			−30	20		12,42			−248,4	−372,6	50	0
	C	C_2	60	70			0		625,8	469,4			−198,4	−372,6
3		C_3			−40	−30		12,42			372,6	−496,8	427,4	96,8
	D	D_3	20	40			−32,42		0	0			800	−400
4		D_4			−20	−40		−20			−800	400	800	−400
	E	E_4	0	0			20		0	0			0	0
0		E_0			—	—		—			—	—	0	0

Tabela 1c

Determinarea accelerațiilor relative necunoscute la mecanismul din fig. 3a

Determinarea accelerațiilor relative	Calculul determinanților
$\varepsilon_{21} = -\dfrac{(ED\alpha_c)\,\varepsilon_{04} + (\Gamma D\alpha_c)}{(BD\alpha_c)} = -\dfrac{40 \times 5 + 22188}{-62} = 361\dfrac{\text{rad}}{\text{s}^2}$	$(BD\alpha_c) = -\ 62\,;\quad (ED\alpha_c) = 40$ $(BE\alpha_c) = -\ 102\,;\quad (BDE) = 2\,600$ $(\Gamma D\alpha_c) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -33088 & 20 & -0{,}6 \\ 7138 & 40 & 0{,}8 \end{vmatrix} = 22188$
$\varepsilon_{43} = -\dfrac{(BE\alpha_c)\,\varepsilon_{04} + (B\Gamma\alpha_c)}{(BD\alpha_c)} = -\dfrac{-102\times 5 - 22188}{-62} = -\ 366\,\dfrac{\text{rad}}{\text{s}^2}$	$(B\Gamma\alpha_c) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 90 & -33088 & -0{;}6 \\ 50 & 7138 & 0{,}8 \end{vmatrix} = -\ 22188$
$a^r_{C_3C_4} = -\dfrac{(BDE)\,\varepsilon_{04} + (BD\Gamma)}{(BD\alpha_c)} = -\dfrac{2600\times 5 - 830540}{-62} = -13186\dfrac{\text{cm}}{\text{s}^2}$	$(BD\Gamma) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 90 & 20 & -33088 \\ 50 & 40 & 7138 \end{vmatrix} = -830540$ $18798 - 11660 = 7138\,;\quad 17543 + 15545 = 33088$ $\Gamma\,(0\,;\ -\ 33088\,;\ 7138)$

Tabela 1d

Determinarea accelerațiilor absolute la mecanismul din fig. 3a

Elementul	Cupla	Punctul	Coordonate				Viteze relative		Vit. ungh. abs.	ω_{i0}^2	Accel. ungh.		Accelerații liniare									
			Absolute		Relative						Rel.	Abs.	Relative		Transport normale		Transport tangențiale		Complementare		Absolute	
			x_i	y_i	Δx_i	Δy_i	$(v^r_{A_iA_j})_x$	$(v^r_{A_iA_j})_y$	ω_{i0}		ε_{ij}	ε_{i0}	$(a^r_{A_iA_j})_x$	$(a^r_{A_iA_j})_y$	$(a^{tn}_{B_iA_i})_x$	$(a^{tn}_{B_iA_i})_y$	$(a^{tt}_{B_iA_i})_x$	$(a^{tt}_{B_iA_i})_y$	$(a^C_{A_iA_j})_x$	$(a^C_{A_iA_j})_y$	$(a_{B_iB_0})_x$	$(a_{B_iB_0})_y$
0		A_0			—	—			—	—		—			—	—	—	—			0	0
—	A	—	90	45			50	0			0		0	0					0	0		
		A_1																			0	0
1	—	—	—	—	0	5			0	0		0			0	0	0	0				
		B_1																			0	0
—	B	—	90	50			0	0			361		0	0					0	0		
		B_2																			0	0
2	—	—	—	—	−30	20			12,42	154,26		361			4628	−3085	−7220	10830				
		C_2																			−2592	−13915
—	C	—	60	70			625,8	469,4			0		−10549	−7912					−11660	15545		
		C_3																			−24801	−6282
3	—	—	—	—	−40	−30			12,42	154,26		361			6170	4628	10830	−14440				
		D_3																			−7801	−16094
—	D	—	20	40			0.	0			−366		0	0					0	0		
		D_4																			−7801	−16094
4	—	—	—	—	−20	−40			−20	400		−5			8000	16000	−200	100				
		E_4																			0	0 ·
—	E	—	0	0			0	0			5		0	0					0	0		
0		E_0			0	0			—	—		—			—	—	—	—			0	0
														Total	18798	17543		Total	−11660	15545		

Aplicația 2. Să se determine vitezele unghiulare și liniare ale mecanismului din figura 4*a* știind că în articulația *D* viteza unghiulară relativă este $\omega_{32} = -1$. Să se folosească apoi rezultatele obținute pentru ca, aplicînd principiul vitezelor virtuale, să se determine momentul încovoietor M_D la sistemul static determinat din figura 4 *b*[1]).

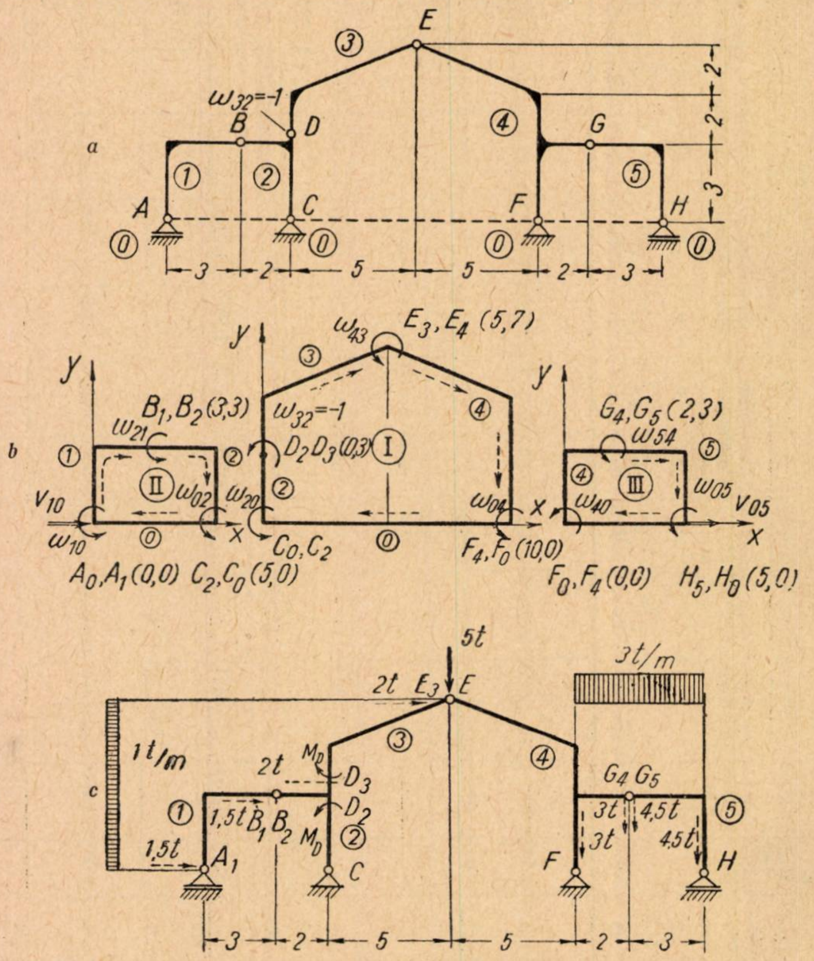

a
E
③
ω32=-1
B
D
④
G
①
②
⑤
A
C
F
H
⓪
⓪
⓪
⓪
3
2
5
5
2
3
2
2
3
b
y
ω43
E3, E4 (5,7)
③
y
y
B1, B2 (3,3)
ω21
ω32=-1
④
G4, G5 (2,3)
ω54
①
②
D2 D3 (0,3)
I
⑤
II
ω02
ω20
②
ω04
④
III
ω05
V10
ω40
V05
ω10
⓪
x
C0, C2
⓪
F4, F0 (10,0)
x
x
A0, A1 (0,0)
C2, C0 (5,0)
F0, F4 (0,0)
H5, H0 (5,0)
c
5t
3t/m
2t
E3
E
1t/m
MD
③
④
2t
D3
G4 G5
①
1,5t
B1
B2
D2
3t
4,5t
⑤
1,5t
MD
②
3t
4,5t
A1
C
F
H
3
2
5
5
2
3

Fig. 4

Rezolvare. Mecanismul are ordinul de conexiune 4, putîndu-se distinge 3 contururi independente. Sistemul conjugat este deci alcătuit din 3 rigide corespunzătoare celor 3 contururi. În figura 4*b* s-au reprezentat cele trei rigide cu încărcările corespunzătoare vitezelor. Pentru fiecare contur s-a ales alt sistem de referință. Calculele sînt sistematizate în tabelele 2 *a* și 2 *b*.

Pentru a determina momentul încovoietor în secțiunea *D* prin metoda vitezelor virtuale vom înlocui în primul rînd sarcinile distribuite din figura 4*c* prin sarcini concentrate echi-

---

[1]) Exemplul este luat din lucrarea [6], p. 113–114.

Tabela 2a

Determinarea vitezelor relative necunoscute la mecanismul din fig. 4a

Determinarea vitezelor relative	Coordonate ; unghiuri ; Calculul determinanţilor
	$C\,(0,0)\,;\; D\,(0,3)\,;\; E\,(5,7)\,;\; F\,(10,0)$
$\omega_{20} = -\dfrac{(DEF)}{(CEF)}\,\omega_{32} = -\dfrac{(-55)\,(-1)}{-70} = 0{,}786\,\dfrac{\text{rad}}{\text{s}}$	$(CEF) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 10 \\ 0 & 7 & 0 \end{vmatrix} = -70$
$\omega_{43} = -\dfrac{(CDF)}{(CEF)}\,\omega_{32} = -\dfrac{(-30)\,(-1)}{-70} = 0{,}429\,\dfrac{\text{rad}}{\text{s}}$	$(DEF) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 10 \\ 3 & 7 & 0 \end{vmatrix} = -55$
	$(CDF) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 10 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} = -30$
$\omega_{04} = -\dfrac{(CED)}{(CEF)}\,\omega_{32} = -\dfrac{15\,(-1)}{-70} = -0{,}214\,\dfrac{\text{rad}}{\text{s}}$	$(CED) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 7 & 3 \end{vmatrix} = 15$
	$A\,(0,0)\,;\; B\,(3,3)\,;\; C\,(5,0)\,;\; \alpha_A = 0$
$v_{10} = -\dfrac{(CAB)}{(\alpha_A AB)}\,(-\,\omega_{20}) = -\dfrac{(-15)\,(-0{,}786)}{3} = -\,3930\,\dfrac{\text{rad}}{\text{s}}$	$(\alpha_A AB) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 3$
$\omega_{10} = -\dfrac{(\alpha_A CB)}{(\alpha_A AB)}\,(-\,\omega_{20}) = -\dfrac{(-2)\,(-0{,}786)}{3} = -0{,}524\,\dfrac{\text{rad}}{\text{s}}$	$(CAB) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -15$
	$(\alpha_A CB) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -2$
$\omega_{21} = -\dfrac{(\alpha_A AC)}{(\alpha_A AB)}\,(-\omega_{20}) = -\dfrac{(5)\,(-\,0{,}786)}{3} = 1{,}310\,\dfrac{\text{rad}}{\text{s}}$	$(\alpha_A AC) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 5$
	$F\,(0,0)\,;\; G\,(2,3)\,;\; H\,(5,0)\,;\; \alpha_H = 0$
$\omega_{54} = -\dfrac{(FH\alpha_H)}{(GH\alpha_H)}\,(-\,\omega_{04}) = -\dfrac{(5)\,(0{,}214)}{3} = -\,0{,}357\,\dfrac{\text{rad}}{\text{s}}$	$(GH\alpha_H) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3$
	$(FH\alpha_H) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 5$
$\omega_{05} = -\dfrac{(GF\alpha_H)}{(GH\alpha_H)}\,(-\,\omega_{04}) = -\dfrac{(-2)\,(0{,}214)}{3} = 0{,}143\,\dfrac{\text{rad}}{\text{s}}$	$(GF\alpha_H) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2$
$v_{05} = -\dfrac{(GHF)}{(GH\alpha_H)}\,(-\,\omega_{04}) = -\dfrac{(-15)\,(0{,}214)}{3} = 1{,}070\,\dfrac{\text{rad}}{\text{s}}$	$(GHF) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -15$

Tabela 2b

Determinarea vitezelor la mecanismul din fig. 4a

Elementul	Punctul	Coordonate				Viteze unghiulare		Viteze liniare					
		Absolute		Relative		Relative	Absolute	Relative		De transport		Absolute	
		x_i	y_i	Δx_i	Δy_i	ω_{ij}	ω_{i0}	$(v^r_{A_iA_j})_x$	$(v^r_{A_iA_j})_y$	$(v^t_{B_iA_i})_x$	$(v^t_{B_iA_i})_y$	$(v_{B_iB_0})_x$	$(v_{B_iB_0})_y$

CONTURUL I

Elementul	Punctul	x_i	y_i	Δx_i	Δy_i	ω_{ij}	ω_{i0}	$(v^r_{A_iA_j})_x$	$(v^r_{A_iA_j})_y$	$(v^t_{B_iA_i})_x$	$(v^t_{B_iA_i})_y$	$(v_{B_iB_0})_x$	$(v_{B_iB_0})_y$
0	C_0			—	—		0		0	—	—	0	0
		0	0			0,786		0					
	C_2											0	0
2				0	3		0,786			−2,358	0		
	D_2											−2,358	0
		0	3			−1,000		0	0				
	D_3											−2,358	0
3				5	4		−0,214			0,856	−1,070		
	E_3											−1,502	−1,070
		5	7			0,429		0	0				
	E_4											−1,502	−1,070
4				5	−7		0,215			1,505	1,075		
	F_4											0	0
		10	0			−0,214		0	0				
0	F_0			—	—		0			—	—	0	0

CONTURUL II

Elementul	Punctul	x_i	y_i	Δx_i	Δy_i	ω_{ij}	ω_{i0}	$(v^r_{A_iA_j})_x$	$(v^r_{A_iA_j})_y$	$(v^t_{B_iA_i})_x$	$(v^t_{B_iA_i})_y$	$(v_{B_iB_0})_x$	$(v_{B_iB_0})_y$
0	A_0			—	—		0	−3,930	0	—	—	0	0
		0	0			−0,524							
	A_1											−3,393	0
1				3	3		−0,524			1,572	−1,572		
	B_1											−2,358	−1,572
		3	3			1,310		0	0				
	B_2											−2,358	−1,572
2				2	−3		0,786			2,358	1,572		
	C_2											0	0
		5	0			−0,786		0	0				
0	C_0			—	—		0			—	—	0	0

CONTURUL III

Elementul	Punctul	x_i	y_i	Δx_i	Δy_i	ω_{ij}	ω_{i0}	$(v^r_{A_iA_j})_x$	$(v^r_{A_iA_j})_y$	$(v^t_{B_iA_i})_x$	$(v^t_{B_iA_i})_y$	$(v_{B_iB_0})_x$	$(v_{B_iB_0})_y$
0	F_0			—	—		0		0	—	—	0	0
		0	0			0,214		0					
	F_4											0	0
4				2	3		0,214			−0,642	0,428		
	G_4											−0,642	−0,428
		2	3			−0,357		0	0				
	G_5											−0,642	0,428
5				3	−3		0,143			−0,429	−0,429		
	H_5											−1,071	0
		5	0			0,143		1,070	0				
0	H_0			—	—		0			—	—	0	0

Tabela 3a

Determinarea vitezelor relative necunoscute la mecanismul din fig. 5a

Determinarea vitezelor relative	Coordonate ; calculul determinanților
$\omega_{21} = -\frac{(ACD)}{(BCD)}\omega_{10} - \frac{(ECD)}{(BCD)}\omega_{04} = -\frac{2\,600}{1\,700}\cdot 1 - \frac{-1\,900}{1\,700}(-0{,}483) = -2{,}069\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}$	$A(0,0)$, $B(30,0)$, $C(100,20)$, $D(120,50)$ $E\,(150,0)$, $F\,(80,40)$, $G\,(30,30)$. $(BCD) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 30 & 100 & 120 \\ 0 & 20 & 50 \end{vmatrix} = 1\,700$
$\omega_{32} = -\frac{(BAD)}{(BCD)}\omega_{10} - \frac{(BED)}{(BCD)}\omega_{04} = -\frac{-1\,500}{1\,700}\cdot 1 - \frac{6\,000}{1\,700}(-0{,}483) = 2{,}588\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}$	$(ACD) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 100 & 120 \\ 0 & 20 & 50 \end{vmatrix} = 2\,600$ $(BAD) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 30 & 0 & 120 \\ 0 & 0 & 50 \end{vmatrix} = -1\,500$
$\omega_{43} = -\frac{(BCA)}{(BCD)}\omega_{10} - \frac{(BCE)}{(BCD)}\omega_{04} = -\frac{600}{1\,700}\cdot 1 - \frac{-2\,400}{1\,700}(-0{,}483) = -1{,}034\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}$	$(BCA) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 30 & 100 & 0 \\ 0 & 20 & 0 \end{vmatrix} = 600$
$\omega_{34} = -\frac{(AFG)}{(DFG)}\omega_{01} - \frac{(EFG)}{(DFG)}\omega_{40} = -\frac{1\,200}{-100}(-1) - \frac{2\,700}{-100}(0{,}483) = 1{,}030\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}$	$(ECD) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 150 & 100 & 120 \\ 0 & 20 & 50 \end{vmatrix} = -1\,900$ $(BED) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 30 & 150 & 120 \\ 0 & 0 & 50 \end{vmatrix} = 6\,000$
$\omega_{53} = -\frac{(DAG)}{(DFG)}\omega_{01} - \frac{(DEG)}{(DFG)}\omega_{40} = -\frac{-2\,100}{-100}(-1) - \frac{-5\,100}{-100}(0{,}483) = -3{,}610\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}$	$(BCE) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 30 & 100 & 150 \\ 0 & 20 & 0 \end{vmatrix} = -2\,400$
$\omega_{15} = -\frac{(DFA)}{(DFG)}\omega_{01} - \frac{(DFE)}{(DFG)}\omega_{40} = -\frac{800}{-100}(-1) - \frac{2\,300}{-100}(0{,}483) = 3{,}100\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}$	$(DFG) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 120 & 80 & 30 \\ 50 & 40 & 30 \end{vmatrix} = -100$ $(AFG) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 80 & 30 \\ 0 & 40 & 30 \end{vmatrix} = 1\,200$
Ecuația de condiție $0 = \left[\frac{(BCA)}{(BCD)} - \frac{(AFG)}{(DFG)}\right]\omega_{10} + \left[\frac{(BCE)}{(BCD)} - \frac{(EFG)}{(DFG)}\right]\omega_{04} = 0$ $\omega_{04} = -\frac{\frac{(BCA)}{(BCD)} - \frac{(AFG)}{(DFG)}}{\frac{(BCE)}{(BCD)} - \frac{(EFG)}{(DFG)}}\omega_{01} =$ $= -\frac{\frac{600}{1\,700} - \frac{1\,200}{-100}}{\frac{-2\,400}{1\,700} - \frac{2\,700}{-100}}\cdot 1 = -0{,}483\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}$	$(DAG) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 120 & 0 & 30 \\ 50 & 0 & 30 \end{vmatrix} = -2\,100$ $(DFA) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 120 & 80 & 0 \\ 50 & 40 & 0 \end{vmatrix} = 800$ $(EFG) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 150 & 80 & 30 \\ 0 & 40 & 30 \end{vmatrix} = 2\,700$ $(DEG) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 120 & 150 & 30 \\ 50 & 0 & 30 \end{vmatrix} = -5\,100$ $(DFE) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 120 & 80 & 150 \\ 50 & 40 & 0 \end{vmatrix} = 2\,300$

Tabela 3b

Determinarea vitezelor absolute la mecanismul din fig. 5a

Conturul	Elementul	Cupla	Punctul	Coordonate				Viteze unghiulare		Viteze liniare			
				Absolute		Relative		Relative	Absolute	De transport		Absolute	
				x_i	y_i	Δx_i	Δy_i	ω_{ij}	ω_{i0}	$(v^t_{B_iA_i})^x$	$(v^t_{B_iA_i})^y$	$(v_{B_iB_0})^x$	$(v_{B_iB_0})^y$
I	0	A	A_0	0	0	—	—	1,000	—	—	—	0	0
	1		A_1			30	0		1,000	0	30,00	0	0
		B	B_1	30	0			−2,069				0	30,00
	2		B_2			70	20		−1,069	21,38	−74,83	0	30,00
		C	C_2	100	20			2,588				21,38	−44,83
	3		C_3			20	30		1,519	−45,57	30,38	21,38	−44,83
		D	D_3	120	50			−1,034				−24,15	−14,55
	4		D_4			30	−50		0,483	24,15	14,55	−24,15	−14,55
		E	E_4	150	0			−0,483				0	0
	0		E_0			—	—		0	—	—	0	0
II		E	E_0	150	0			0,483				0	0
	4		E_4			−30	50		0,483	−24,15	−14,55	0	0
		D	D_4	120	50			1,030				−24,15	−14,55
	3		D_3			−40	−10		1,519	15,13	−60,52	−24,15	−14,55
		F	F_3	80	40			−3,610				−9,02	−74,97
	5		F_5			−50	−10		−2,097	−20,97	104,85	−9,02	−74,97
		G	G_5	30	30			3,100				−30,00	30,00
	1		G_1			−30	−30		1,000	30,00	−30,00	−30,00	30,00
		A	A_1	0	0			−1,000				0	0
	0		A_0			—	—		—	—	—	0	0

Tabela 3c

Determinarea accelerațiilor relative necunoscute la mecanismul din fig. 5a

	Determinarea accelerațiilor relative	Coordonate ; calculul determinanților
Conturul I	$\varepsilon_{21} = -\frac{(ECD)}{(BCD)}\varepsilon_{04} - \frac{(\Gamma CD)}{(BCD)} = -\frac{-1900}{1700}(-6{,}83) -$ $- \frac{-5663}{1700} = -4{,}30\frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$ $\varepsilon_{32} = -\frac{(BED)}{(BCD)}\varepsilon_{04} - \frac{(B\Gamma D)}{(BCD)} = -\frac{6000}{1700}(-6{,}83) -$ $- \frac{18658}{1700} = 13{,}13\frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$ $\varepsilon_{43} = -\frac{(BCE)}{(BCD)}\varepsilon_{04} - \frac{(BC\Gamma)}{(BCD)} = -\frac{-2400}{1700}(-6{,}83) -$ $- \frac{-12995}{1700} = -1{,}97\frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$	Calculul lui Γ pe conturul I $-(-22{,}8 - 69 + 11{,}5) = 80{,}3$ $(-30 - 79{,}8 - 46 - 6{,}9) = -162{,}7$ Calculul lui Γ pe conturul II $-(-11{,}5 + 23 +$ $+ 43{,}8 + 30) = -85{,}3$ $(+6{,}9 + 92 + 219 + 30) = 347{,}9$
Conturul II	$\varepsilon_{34} = -\frac{(EFG)}{(DFG)}\varepsilon_{40} - \frac{(\Gamma FG)}{(DFG)} = -\frac{2700}{-100}(6{,}83) -$ $- \frac{-18248}{-100} = 1{,}97\frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$ $\varepsilon_{53} = -\frac{(DEG)}{(DFG)}\varepsilon_{40} - \frac{(D\Gamma G)}{(DFG)} = -\frac{-5100}{-100}(6{,}83) -$ $- \frac{33017}{-100} = -18{,}16\frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$ $\varepsilon_{15} = -\frac{(DEF)}{(DFG)}\varepsilon_{40} - \frac{(DF\Gamma)}{(DFG)} = -\frac{2300}{-100}(6{,}83) -$ $- \frac{-14769}{-100} = 9{,}40\frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$	$(\Gamma CD) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 80{,}3 & 100 & 120 \\ -162{,}7 & 20 & 50 \end{vmatrix} = -5663$ $(B\Gamma D) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 30 & 80{,}3 & 120 \\ 0 & -162{,}7 & 50 \end{vmatrix} = 18658$ $(BC\Gamma) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 30 & 100 & 80{,}3 \\ 0 & 20 & -162{,}7 \end{vmatrix} = -12995$ $(\Gamma FG) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -85{,}3 & 80 & 30 \\ 347{,}9 & 40 & 30 \end{vmatrix} = -18248$
Ecuația de condiție	$\left[\frac{(EFG)}{(DFG)} - \frac{(BCE)}{(BCD)}\right]\varepsilon_{04} - \left[\frac{(BC\Gamma)}{(BCD)} + \frac{(\Gamma FG)}{(DFG)}\right] = 0$ $\varepsilon_{04} = \dfrac{\frac{(BC\Gamma)}{(BCD)} + \frac{(\Gamma FG)}{(DFG)}}{\frac{(EFG)}{(DFG)} - \frac{(BCE)}{(BCD)}} = \dfrac{\frac{-12995}{1700} + \frac{-18248}{-100}}{\frac{2700}{-100} - \frac{-2400}{1700}} =$ $= -6{,}83\frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$	$(D\Gamma G) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 120 & -85{,}3 & 30 \\ 50 & 347{,}9 & 30 \end{vmatrix} = 33017$ $(DF\Gamma) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 120 & 80 & -85{,}3 \\ 50 & 40 & 347{,}9 \end{vmatrix} = -14769$

Tabela 3d

Determinarea accelerațiilor absolute la mecanismul din fig. 5a

Conturul	Elementul	Cupla	Punctul	Coordonate				Vit. ungh. abs.	ω^2_{i0}	Accel. unghiulare		Accelerații liniare					
				Absolute		Relative				Rel.	Abs.	Transport normale		Transport tangențiale		Absolute	
				x_i	y_i	Δx_i	Δy_i	ω_{i0}		ε_{ij}	ε_{i0}	$(a^{tn}_{B_iA_i})^x$	$(a^{tn}_{B_iA_i})^y$	$(a^{tt}_{B_iA_i})^x$	$(a^{tt}_{B_iA_i})^y$	$(a_{B_iB_0})^x$	$(a_{B_iB_0})^y$
	0	A	A_0	0	0	—	—	0	0	0	—	—	—	—	—	0	0
	1	—	A_1	—	—	30	0	1,000	1,000	—	0	−30	0	0	0	0	0
	—	B	B_1	30	0	—	—	—	—	−4,30	—	—	—	—	—	−30	0
	2	—	B_2	—	—	70	20	−1,069	1,140	—	−4,30	−79,8	−22,8	86	−301	−30	0
I	—	C	C_2	100	20	—	—	—	—	13,13	—	—	—	—	—	−23,8	−32,38
	3	—	C_3	—	—	20	30	1,519	2,300	—	8,83	−46	−69	−264,9	176,6	−23,8	−32,38
	—	D	D_3	120	50	—	—	—	—	−1,97	—	—	—	—	—	−334,7	−216,2
	4	—	D_4	—	—	30	−50	0,483	0,230	—	6,83	−6,9	11,5	341,5	−204,9	−334,7	−216,2
	—	E	E_4	150	0	—	—	—	—	−6,83	—	—	—	—	—	0	0
—	0	—	E_0	—	—	—	—	0	0	—	0	0	0	0	0	0	0
	—	E	E_0	150	0	—	—	—	—	6,83	—	—	—	—	—	0	0
	4	—	E_4	—	—	−30	50	0,483	0,230	—	6,83	6,9	−11,5	341,5	−204,9	0	0
	—	D	D_4	120	50	—	—	—	—	1,97	—	—	—	—	—	−334,6	−216,2
	3	—	D_3	—	—	−40	−10	1,519	2,300	—	8,80	92	23	88	−352	−334,6	−216,2
II	—	F	F_3	80	40	—	—	—	—	−18,16	—	—	—	—	—	−154,6	−545,2
	5	—	F_5	—	—	−50	−10	2,004	4,380	—	−9,46	219,0	43,8	−94	470	−154,6	−545,2
	—	G	G_5	30	30	—	—	—	—	9,40	—	—	—	—	—	−30	30
	1	—	G_1	—	—	−30	−30	1,000	1,000	—	0	30	30	0	0	−30	30
	—	A	A_1	0	0	—	—	—	—	0	—	—	—	—	—	0	0
	0		A_0			—	—	0	0		—	0	0	—	—	0	0

valente. Astfel sarcina orizontală de pe elementul *1* a fost înlocuită cu două forțe egale cu 1,5 t, aplicate în A_1 și B_1; cea aferentă elementului *3* prin două forțe de 2 t aplicate în D_3 și E_3. Sarcina verticală aferentă elementului 4 a fost înlocuită prin două forțe de 3 t aplicate în F_4 și G_4, iar cea aferentă elementului *5*, în două forțe de 4,5 t aplicate în G_5 și H_5.

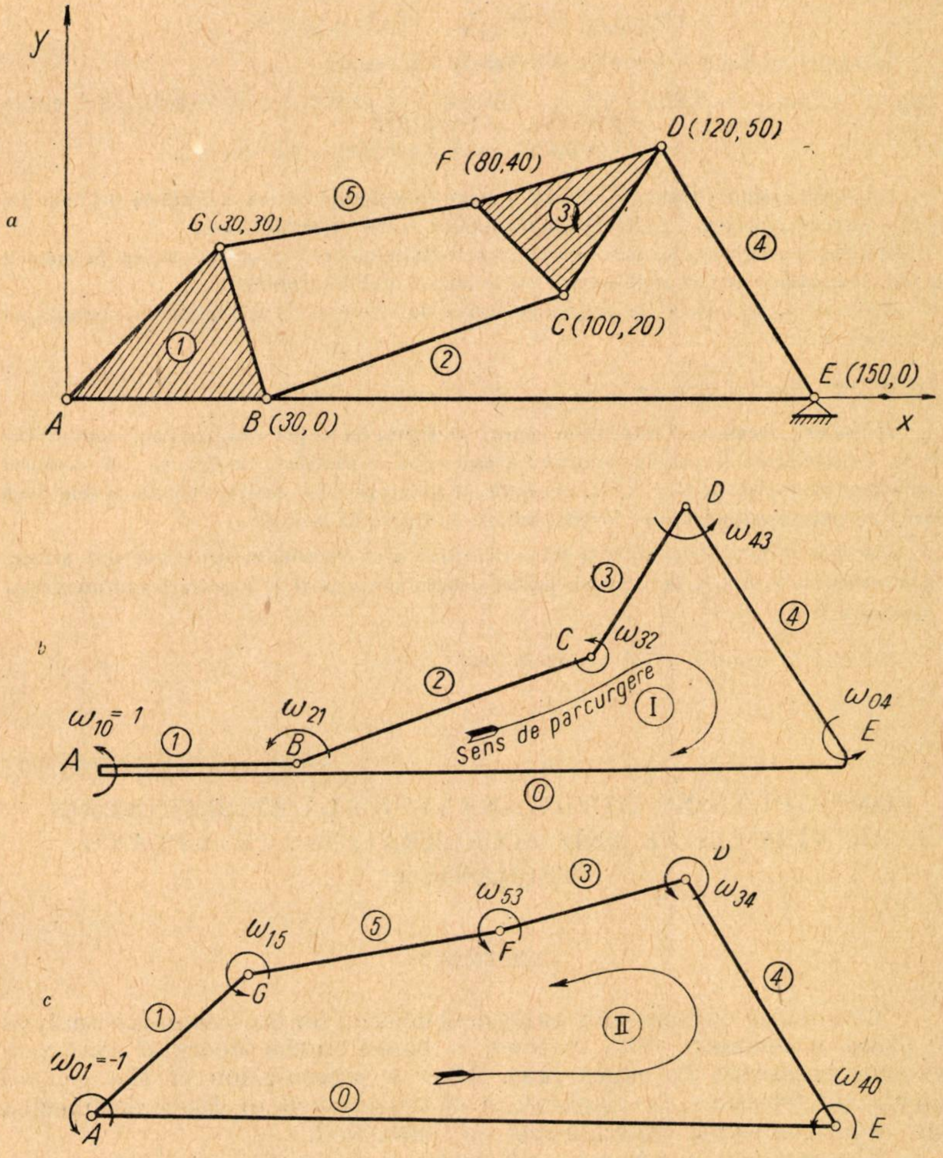

a
y
D(120,50)
F (80,40)
⑤
G (30,30)
③
④
①
C(100,20)
②
E (150,0)
A
B (30,0)
x
b
D
ω43
③
④
C
ω32
②
Sens de parcurgere
Ⅰ
ω10= 1
①
ω21
B
A
⓪
ω04
E
c
D
③
ω53
ω34
ω15
⑤
F
G
④
①
Ⅱ
ω01=-1
⓪
ω40
A
E

Fig. 5

Principiul vitezelor virtuale conduce la relaţia

$$(-M_D)\,\omega_{32} + 1{,}5\,(v_{A_1A_0})_x + 1{,}5\,(v_{B_1B_0})_x + 2\,(v_{D_3D_0})_x + 2\,(v_{E_3E_0})_x - 5\,(v_{EE_0})_y - 3\,(v_{F_4F_0})_y -$$
$$- 3\,(v_{G_4G_0})_y - 4{,}5\,(v_{G_5G_0})_y - 4{,}5\,(v_{H_5H_0})_y = 0.$$

Înlocuind cu valorile numerice din Tabela 2 b rezultă

$$(-M_D)\cdot(-1) + 1{,}5\cdot(-3{,}930) + 1{,}5\cdot(-2{,}358) + 2\cdot(-2{,}358) + 2\cdot(-1{,}502) - 5\,(-1{,}070)$$
$$- 3\cdot(0) - 3\cdot(+0{,}428) - 4{,}5\cdot(+0{,}428) - 4{,}5\cdot(0) = 0.$$

Efectuînd calculele găsim $M_D \approx 15$t. valoare ce concordă cu cea indicată în [6] unde s-a folosit o metodă geometrică bazată pe determinarea centrelor instantanee.

Metoda analitică expusă mai sus evită unele dificultăţi ce pot apărea uneori în metoda centrelor instantanee atunci cînd acestea nu se află în cadrul desenului.

Aplicaţia 3. Se cere să se determine starea de viteze şi de acceleraţii la mecanismul din figura 5 *a*.

Se dau $\omega_{10} = 1\,\dfrac{\text{rad}}{\text{s}}$, $\varepsilon_{10} = 0$

Rezolvare. Mecanismul este triplu conex; pe figura 5*a* se pot distinge două conture topologic independente şi anume conturul I care conţine cuplele A B C D E şi conturul II care conţine cuplele A G F D E. Sensurile de parcurgere ale acestor conture şi cele două grinzi conjugate corespunzătoare lor sînt arătate în figura 5*b* şi 5 *c*.

Calculele privind determinarea stării de viteze a mecanismului considerat sînt prezentate în tabelele 3 *a* şi 3 *b*, iar calculele pentru determinarea stării de acceleraţii sînt prezentate în tabelele 3 *c* şi 3 *d*.

Primită la redacţie la 26 noiembrie 1962

CONTRIBUTIONS TO THE ANALYTICAL DETERMINATION OF VELOCITIES AND ACCELERATIONS IN A PLANE MECHANISM

ABSTRACT

This paper discusses an analytical method for the kinematic analysis of plane mechanism. The method is based on the theory of conjugate systems presented in paper [15]. After a presentation of the general calculation formulas, the application of the method to doubly-connected and multiconnected mechanisms is examined.

The method is general and permits the avoiding of the errors introduced by the graphical methods currently used in the kinematic analysis of plane mechanisms.

Finally, several examples of application are given. The calculations are systematically presented in tables.

BIBLIOGRAFIE

1. И. И. АРТОБОЛЕВСКИЙ, *Теория механизмов и машин*. ГИТТЛ, Москва, 1953.
2. Е. С. БЕЗВЕСЕЛЬНЫЙ, *Лекции по курсу теории механизмов и машин, структура плоских механизмов*, Харьков, 1962.
3. Е. С. БЕЗВЕСЕЛЬНЫЙ, *Кинематика плоских зубчатых механизмов*, Харьков, 1962.
4. Г. А. БЛОХ, *Новый метод построения структурных схем механизмов и их классификация*. Труды Всесоюзного научно-исследовательского института торфяной промышленности, **XVIII**, 1961.
5. M. Damasiewicz, *Analiza i synteza mehanismów mlbtków gorniczych o inercyjnym napedzie bijaka*. Archiwum Górnictwa, **II**, seszyt z (1957).
6. Al. Gheorghiu, *Sisteme conjugate în calculul structurilor*. Ed. tehnică, Bucureşti, 1959.
7. П. А. ЛЕБЕДЕВ, *Определение положений пространственных механизмов, образованных из двухповодковых групп*. Труды Института машиноведения, семинар по теории механизмов и машин, **XXI**, *84*, 1961.
8. D. Mangeron, C. Drăgan, *Studiul cinematic al mecanismelor spaţiale cu patru organe prin metoda matricială-tensorială*. St. cerc. mec. apl., **XII**, *6* (1961).
9. N. I. Manolescu, I. Erceanu, P. Antonescu, *Domeniul de aplicabilitate al metodelor de cercetare cinematică a mecanismelor plane articulate*. St. cerc. mec. apl., *6* (1962).
10. А. И. СОЛОВЬЕВ, Е. В. КОВАЛЕНОК, И. А. БЕРЗИН, Н. А. КОВАЛЕВ, *Расчеты механизмов автоматики измерительной и счетно-решающей* техники, Таганрог, 1961.
11. А. И. ТАЙНОВ, *Кинетостатика шарнирно-стержневых механизмов плоской системы по методу приведения*, Минск, 1960.
12. А. И. ТАЙНОВ, *Механизмы плоской системы с одними поступательными парами*, Минск, 1960.
13. Д. С. ТАВХЕЛИДЗЕ, *К вопросу синтеза и кинематики пространственных четырехзвенных механизмов*, Тбилиси, 1960.
14. Я. С. ЗИЛЬБЕРМАН, *Исследование механизмов методом приведенных ускорений*. Труды Ростовского на Дону Института инженеров железнодорожного транспорта, **XXIX** (1961).
15. R. Voinea, M. Atanasiu, *Contribuţii la determinarea stării cinematice a unui mecanism prin metoda sistemelor conjugate*. St. cerc. mec. apl., *1* (1963).

STUDII

ASUPRA MECANISMELOR UTILIZATE PENTRU CONTROLUL AUTOMAT AL SUPRAFEȚELOR PIESELOR SFERICE

DE

CHR. PELECUDI

621.52 : 621.01

Pentru cercetarea calității suprafețelor bilelor de rulmenți, în scopul eliminării acelora cu zgîrieturi sau cu orice alt defect vizibil, înlocuirea sistemului de cercetare vizuală cu un sistem mecanic automatizat, pe lîngă că mărește productivitatea, constituie o îmbunătățire a acestei operații din tehnologia de fabricație a rulmenților.

Procedeul automat cercetat constă din trimiterea unei raze luminoase pe suprafața bilei, care apoi reflectată cu intensitate variabilă în funcție de starea suprafeței, cade pe placa impresionabilă a unei celule fotoelectrice, producînd un curent de intensitate variabilă, care amplificat pune în funcțiune clapete pentru sortarea ,,bun-rău''.

Partea mecanică a instalației cuprinde mecanismul de producere a rotației sferei cu centru fix, astfel că spotul luminos să descrie pe sferă o curbă de grosime practică a, care să acopere întreaga suprafață. În lucrările [1], [2], [3], [4] se constată că utilizarea spiralei sferice — sub două forme (fig. 1 și 2) corespunde cel mai bine scopului propus, întrucît pe lîngă simplitatea mecanismului de producerea rotației sînt realizate și condițiunile optime pentru o productivitate mărită. În sistemul mecanic utilizat sfera are o rotație în jurul unei axe orizontale mobile ox_m cu viteza unghiulară $\omega_n = \dot{\theta}$ (nutație) și o rotație în jurul axei verticale fixe oz_f cu viteza unghiulară $\omega_p = \dot{\psi}$ (precesie) ambele constante, iar spirala este descrisă de punctul P_{xf}, situat pe cercul mare orizontal la intersecția cu axa fixă ox_f (fig. 3). Deoarece raportul vitezelor unghiulare $\frac{\omega_{xn}}{\omega_{zp}} = m = \frac{1}{n} =$ const. obținerea celor două spirale ($m \gg 1$ sau $n \gg 1$) se poate face prin simpla inversare a valorilor vitezelor unghiulare, ceea ce atrage și un timp de expunere sensibil același [1].

Unele sisteme sînt preconizate pe separarea mişcărilor [3], [4] astfel ca bila de rulment să execute o singură mişcare de rotaţie, cealaltă fiind dată la deplasarea relativă a spotului luminos. Se utilizează în acest scop un suport mobil care conţine sursa de lumină şi celula foto-electrică recepţionară. După felul spiralei sferice, această mişcare se poate face cu viteză redusă, eventual numai pe un arc de cerc, pentru siguranţă, ceva mai mare de 180°, sau contrar cu o viteză ridicată.

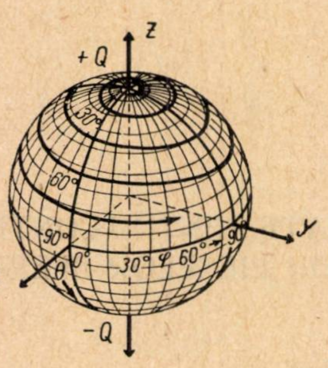


Fig. 1

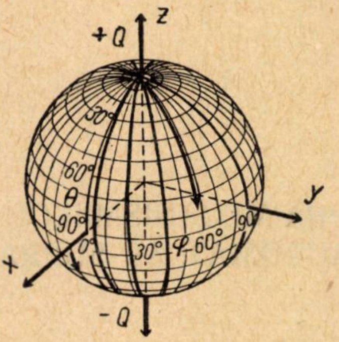


Fig. 2

La orice sistem mecanic însă gradul de precizie al construcţiei trebuie să fie suficient de ridicat pentru a nu se influenţa defavorabil sistemul optic al instalaţiei. În acest sens influenţele deplasării centrului sferei faţă de cel teoretic trebuie să fie neglijabile. Aceste influenţe se manifestă în :

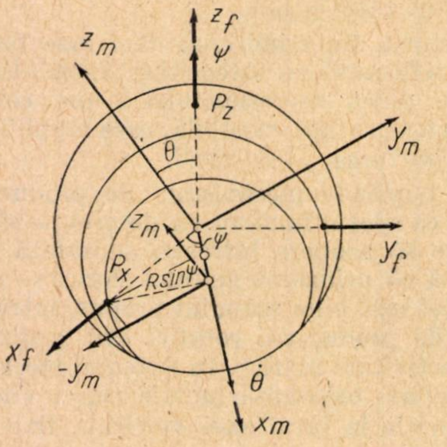


Fig. 3

— posibilitatea ca linia descrisă de spotul luminos pe sferă să nu corespundă spiralei calculate şi deci să rămînă suprafeţe neexplorate ;

— posibilitatea expulzării bilei din locaşul ei din cauza forţei centrifuge produse de descentricitate, pentru rotaţia în jurul axei verticale fixe ;

— posibilitatea ca spotul luminos reflectat să urmeze drumuri diferite de poziţia sa iniţială centrală, atingînd suprafaţa impresionabilă a celulei fotoelectrice în diverse puncte, care pot fi prea distanţate.

Ultima posibilitate este amplificată cînd pe lîngă considerarea deplasării centrului sferei se ține seama și de ovalitatea admisibilă a bilelor de rulment, iar influențele acestora sînt cu atît mai importante, cu cît suprafața recepționară este mai depărtată de bila de rulment. Din acest punct de vedere problema tratată mai jos scoate în evidență influența deplasării centrului sferei și răspunde condiției optime care corespunde situației cînd raza incidentă și cea reflectată se suprapun.

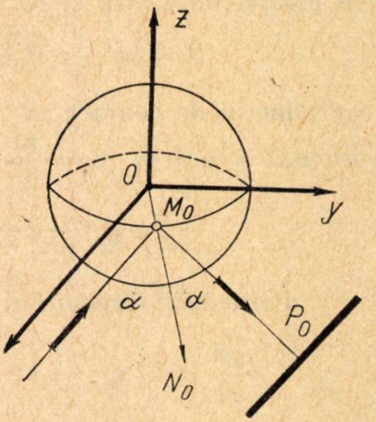


Fig. 4

Pentru rezolvarea problemei se va considera o dată cu figura 4, deplasările foarte mici ε_x, ε_y, ε_z ale centrului sferei în direcția axelor de coordonate și se va presupune că raza de lumină are direcția axei O_x, în planul orizontal xoy, atingînd sfera în poziția sa inițială în punctul $M_0(x_0, y_0, z_0 = 0)$ și în poziția sa deplasată în punctul $M_1(x_1, y_1 = y_0, z_1 = 0)$.

Planul recepționar este considerat la distanța d de origine și perpendicular pe direcția razei reflectate inițiale. Considerații de geometrie analitică conduc la determinarea lungimii segmentului determinat de punctele de intersecție P_0 și P_1 dintre planul recepționar și cele două raze reflectate, corespunzătoare poziției inițiale și deplasate a centrului sferei cu cantitățile ε_x, ε_y, ε_z, pentru o aceeași rază luminoasă incidentă.

Astfel normala la sferă în punctul de contact M_0 are cosinusurile directoare

$$\cos \alpha_0 = \frac{x_0}{R}, \quad \cos \beta_0 = \frac{y_0}{R} = \sin \alpha_0, \quad \cos \gamma_0 = 0, \quad \gamma_0 = \frac{\pi}{2} \tag{1}$$

și în consecință raza reflectată va avea direcția dată de

$$\bar{\alpha}_0 = 2\alpha_0 \quad \bar{\beta}_0 = \frac{\pi}{2} - 2\alpha_0 \quad \bar{\gamma}_0 = \frac{\pi}{2} \tag{2}$$

și ecuațiile

$$x = x_0 + \lambda \cos \bar{\alpha}_0, \quad y = y_0 + \lambda \sin \alpha_0, \quad z = 0. \tag{3}$$

Planul recepționar perpendicular pe această direcție la distanța d de origine, are ecuația normală

$$\cos \bar{\alpha}_0 x + \sin \bar{\alpha}_0 y - d = 0, \tag{4}$$

iar intersecția sa cu raza reflectată se face pentru

$$\lambda_0 = d - x_0 \cos \bar{\alpha}_0 - y_0 \sin \bar{\alpha}_0, \tag{5}$$

adică în punctul de coordonate

$$P_0\begin{cases}\bar{x}_0 = d\cos\bar{\alpha}_0 + (x_0\sin\bar{\alpha}_0 - y_0\cos\bar{\alpha}_0)\sin\bar{\alpha}_0,\\ \bar{y}_0 = d\sin\bar{\alpha}_0 + (y_0\cos\bar{\alpha}_0 - x_0\sin\bar{\alpha}_0)\cos\bar{\alpha}_0,\\ \bar{z}_0 = 0.\end{cases}\tag{6}$$

În poziția deplasată sfera va căpăta ecuația

$$S = (x-\varepsilon_x)^2 + (y-\varepsilon_y)^2 + (z-\varepsilon_z)^2 - R^2 = 0,\tag{7}$$

iar punctul de contact cu raza incidentă de ecuația $z = 0$ și $y = y_0$ cu orientarea $\alpha = 0$, $\beta = \frac{\pi}{2}$, $\gamma = \frac{\pi}{2}$ va fi M_1 de coordonate

$$x_1 = \sqrt{R^2 - \varepsilon_z^2 - (y_0-\varepsilon_y)^2} + \varepsilon_x,\ y_1 = y_0,\ z_1 = 0.\tag{8}$$

Parametrii directori ai normalei la sferă în punctul considerat sînt

$$\frac{\partial S}{\partial x} = 2(x_1-\varepsilon_x);\quad \frac{\partial S}{\partial y} = 2(y_1-\varepsilon_y);\quad \frac{\partial S}{\partial z} = 2(z_1-\varepsilon_z)\tag{9}$$

și cosinusurile directoare devin

$$\cos\alpha_1 = \frac{x_1-\varepsilon_x}{R};\quad \cos\beta_1 = \frac{y_1-\varepsilon_y}{R};\quad \cos\gamma_1 = \frac{z_1-\varepsilon_z}{R}.\tag{10}$$

Ecuația planului, cuprinzînd raza incidentă, normala și raza reflectată, este determinată de orientările $\bar{\delta}(\alpha,\beta,\gamma)$ și $\bar{\delta}_1(\alpha_1,\beta_1,\gamma_1)$ și de punctul $M_1(x_1\ y_1\ z_1)$ adică

$$\begin{aligned}&(\bar{r}-\bar{r}_1)\cdot(\bar{\delta}\times\bar{\delta}_1) = 0,\\ &(x-x_1)(\cos\beta\cos\gamma_1 - \cos\beta_1\cos\gamma) +\\ &(y-y_1)(\cos\gamma\cos\alpha_1 - \cos\gamma_1\cos\alpha) +\\ &(z-z_1)(\cos\alpha\cos\beta_1 - \cos\alpha_1\cos\beta) = 0,\end{aligned}\tag{11}$$

și deci, cu valorile respective, avem

$$(y-y_0)\,\varepsilon_z + z\,(y_0-\varepsilon_y) = 0.\tag{12}$$

Normala la sferă face cu raza incidentă unghiul α_1 și în consecință raza reflectată va face în planul determinat mai sus, cu axa Ox, unghiul $\bar{\alpha}_1 = 2\alpha_1$ iar pe altă parte raza reflectată a cărei ecuație este în general

$$x = x_1 + \lambda\cos\bar{\alpha}_1;\quad y = y_1 + \lambda\cos\bar{\beta}_1;\quad z = z_1 + \lambda\cos\bar{\gamma}_1,\tag{13}$$

verifică ecuaţia planului amintit, adică

$$\cos \bar{\beta}_1 = -\frac{(y_0 - \varepsilon_y)}{\varepsilon_z} \cos \bar{\gamma}_1. \tag{14}$$

Dacă se adaugă şi relaţia

$$\cos^2 \bar{\alpha}_1 + \cos^2 \bar{\beta}_1 + \cos^2 \bar{\gamma}_1 = 1, \tag{15}$$

se pot determina valorile unghiurilor $\bar{\alpha}_1$; $\bar{\beta}_1$; $\bar{\gamma}_1$ astfel:

$$\cos \bar{\alpha}_1 = 2\left(\frac{x_1 - \varepsilon_x}{R}\right)^2 - 1, \tag{16}$$

$$\cos \bar{\beta}_1 = -2\,\frac{y_0 - \varepsilon_y}{\varepsilon_z} \cdot \frac{x_1 - \varepsilon_x}{R} \sqrt{\frac{1 - \left(\frac{x_1 - \varepsilon_x}{R}\right)^2}{1 + \left(\frac{y_0 - \varepsilon_y}{\varepsilon_z}\right)^2}}, \tag{17}$$

$$\cos \bar{\gamma}_1 = 2\,\frac{x_1 - \varepsilon_x}{R} \sqrt{\frac{1 - \left(\frac{x_1 - \varepsilon_x}{R}\right)^2}{1 + \left(\frac{y_0 - \varepsilon_y}{\varepsilon_z}\right)^2}}. \tag{18}$$

Intersecţia dreptei razei reflectate cu acelaşi plan de recepţie conduce la

$$\lambda_1 = \frac{d - x_1 \cos \bar{\alpha}_0 - y_1 \sin \bar{\alpha}_0}{\cos \bar{\alpha}_0 \cos \bar{\alpha}_1 + \sin \bar{\alpha}_0 \cos \bar{\beta}_1}, \tag{19}$$

iar coordonatele punctului de intersecţie P_1 vor fi

$$P_1 \left\{ \begin{aligned} \bar{x}_1 &= \frac{d \cos \bar{\alpha}_1 + (x_1 \cos \bar{\beta}_1 - y_1 \cos \bar{\alpha}_1) \sin \bar{\alpha}_0}{\cos \bar{\alpha}_0 \cos \bar{\alpha}_1 + \sin \bar{\alpha}_0 \cos \bar{\beta}_1}, \\ \bar{y}_1 &= \frac{d \cos \bar{\beta}_1 + (y_1 \cos \bar{\alpha}_1 - x_1 \cos \bar{\beta}_1) \cos \bar{\alpha}_0}{\cos \bar{\alpha}_0 \cos \bar{\alpha}_1 + \sin \bar{\alpha}_0 \cos \bar{\beta}_1}, \\ \bar{z}_1 &= \frac{d \cos \bar{\gamma}_1 - (x_1 \cos \bar{\alpha}_0 - y_1 \sin \bar{\alpha}_0) \cos \bar{\gamma}_1}{\cos \bar{\alpha}_0 \cos \bar{\alpha}_1 + \sin \bar{\alpha}_0 \cos \bar{\beta}_1}. \end{aligned} \right. \tag{20}$$

Distanţa dintre punctele P_0 şi P_1 din planul de recepţie precum şi direcţia segmentului P_0P_1 sînt date de

$$D = \sqrt{(\bar{x}_1 - \bar{x}_0)^2 + (\bar{y}_1 - \bar{y}_0)^2 + (\bar{z}_1 - \bar{z}_0)^2}, \tag{21}$$

$$\cos \bar{\alpha} = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_0}{D}, \quad \cos \bar{\beta} = \frac{\bar{y}_1 - \bar{y}_0}{D}, \quad \cos \bar{\gamma} = \frac{\bar{z}_1 - \bar{z}_0}{D}. \tag{22}$$

Formulele obținute conțin toate caracteristicile problemei propuse dar apărînd sub formă complexă, nu permit o vedere clară asupra influenței deplasărilor ε_x ; ε_y ; ε_z, în legătură cu poziția razei incidente. Vom considera cazurile particulare care pot interveni în practică și pe care se pot urmări aceste influențe.

Cazul $\varepsilon_z = 0$, în care după schimbarea poziției sferei cu cantitățile ε_x și ε_y, planul razei incidente și reflectate rămîne orizontal $z = 0$.

a) Pentru $y_0 = 0$ se obține :

— coordonatele punctului M_0

$$x_0 = R, \quad y_0 = 0, \quad z_0 = 0\,;$$

— coordonatele punctului M_1

$$x_1 = \sqrt{R^2 - \varepsilon_y^2} + \varepsilon_x, \quad y_1 = 0, \quad z_1 = 0\,;$$

— direcția razei reflectate R_0

$$\bar{\alpha}_0 = 0, \quad \bar{\beta}_0 = \frac{\pi}{2}, \quad \bar{\gamma}_0 = \frac{\pi}{2}\,;$$

— direcția razei reflectate R_1

$$\cos\bar{\alpha}_1 = 1 - 2\left(\frac{\varepsilon_y}{R}\right)^2, \quad \cos\bar{\beta}_1 = 2\frac{\varepsilon_y}{R}\sqrt{1 - \left(\frac{\varepsilon_y}{R}\right)^2}\,; \quad \bar{\gamma}_1 = \frac{\pi}{2}\,;$$

— coordonatele punctului P_0

$$\bar{x}_0 = d, \quad \bar{y}_0 = 0, \quad \bar{z}_0 = 0\,;$$

— coordonatele punctului P_1

$$\bar{x}_1 = d, \quad \bar{y}_1 = (d - x_1)\operatorname{tg}\bar{\alpha}_1, \quad \bar{z}_1 = 0.$$

Distanța între punctele P_0 și P_1

$$D = \bar{y}_1 - \bar{y}_0 \simeq 2(d - R)\frac{\varepsilon_y}{R}\cdot$$

Segmentul P_0P_1 aflat în planul orizontal este paralel cu axa *oy*.

b) Pentru $y_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}R$ se obține :

— coordonatele punctului M_0

$$x_0 = R\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad y_0 = R\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad z_0 = 0\,;$$

— coordonatele punctului M_1

$$x_1 = \sqrt{\frac{R^2}{2} + \sqrt{2}\,R\varepsilon_y - \varepsilon_y^2} + \varepsilon_x, \quad y_1 = \frac{R\sqrt{2}}{2}, \quad z_1 = 0\,;$$

— direcția razei reflectate R_0

$$\bar{\alpha}_0 = \frac{\pi}{2}, \quad \bar{\beta}_0 = 0, \quad \bar{\gamma}_0 = \frac{\pi}{2};$$

— direcția razei reflectate R_1

$$\cos \bar{\alpha}_1 = 2\sqrt{2}\,\frac{\varepsilon_y}{R} - 2\left(\frac{\varepsilon_y}{R}\right)^2,$$

$$\cos \bar{\beta}_1 = \sqrt{1-\cos^2 \bar{\alpha}_1},$$

$$\bar{\gamma}_1 = \frac{\pi}{2};$$

— coordonatele punctului P_0

$$\bar{x}_0 = x_1, \quad \bar{y}_0 = d, \quad \bar{z}_0 = 0;$$

— coordonatele punctului P_1

$$\bar{x}_1 = \frac{d - y_1}{\operatorname{tg} \bar{\alpha}_1} + x_1; \quad \bar{y}_1 = d; \quad \bar{z}_1 = 0;$$

— distanța între punctele P_0 și P_1

$$D = \bar{x}_1 - \bar{x}_0 = \frac{d - y_1}{\operatorname{tg} \bar{\alpha}_1}.$$

Segmentul P_0P_1 aflat în planul orizontal este paralel cu axa Ox.

c) Pentru $y_0 = R$ se obține:

— coordonatele punctului M_0

$$x_0 = 0, \quad y_0 = R, \quad z_0 = 0;$$

— coordonatele punctului M_1

$$x_1 = \sqrt{2R\varepsilon_y - \varepsilon_y^2} + \varepsilon_x, \quad y_1 = R, \quad z_1 = 0;$$

— direcția razei reflectate R_0

$$\bar{\alpha}_0 = \pi, \quad \bar{\beta}_0 = -\frac{\pi}{2}, \quad \bar{\gamma}_0 = \frac{\pi}{2};$$

— direcția razei reflectate R_1

$$\cos \bar{\alpha}_1 = -1 + 4\frac{\varepsilon_y}{R} - 2\left(\frac{\varepsilon_y}{R}\right)^2,$$

$$\cos \bar{\beta}_1 = \sqrt{1 - \cos^2 \bar{\alpha}_1},$$

$$\bar{\gamma}_1 = \frac{\pi}{2};$$

— coordonatele punctului P_0

$$\bar{x}_0 = -d, \quad \bar{y}_0 = R, \quad \bar{z}_0 = 0\,;$$

— coordonatele punctului P_1

$$\bar{x}_1 = -d, \quad \bar{y}_1 = R - (d + x_1)\,\mathrm{tg}\,\bar{\alpha}_1, \quad \bar{z}_1 = 0\,;$$

— distanța între punctele P_0 și P_1

$$D = \bar{y}_1 - \bar{y}_0 \simeq -d\,\mathrm{tg}\,\bar{\alpha}_1.$$

Segmentul P_0P_1 aflat în planul orizontal este paralel cu axa Oy.

Cu valorile, raza sferei $R = 9\,\mathrm{mm}$, excentricitatea $\varepsilon_y = \pm\,0{,}05\,\mathrm{mm}$ și planul de recepție considerat la distanța $d = 45\,\mathrm{mm}$ rezultă deplasarea spotului luminos, în cele trei cazuri :

$$D_a = 0{,}72\ \mathrm{mm},\ D_b = 1{,}2\ \mathrm{mm},\ D_c = 13\ \mathrm{mm}.$$

Urmează că situațiile avantajoase se obțin cînd raza incidentă și raza reflectată fac între ele un unghi mai mic de $\frac{\pi}{2}$, situația optimă corespunzînd suprapunerii dintre raza incidentă și cea reflectată.

Considerarea cazului $\varepsilon_x = \varepsilon_y = 0$ și $\varepsilon_z \neq 0$ conduce la concluzii asemănătoare.

Construcția practică a mecanismului trebuie să permită utilizarea rezultatelor de mai sus, astfel ca unghiul între raza incidentă și raza reflectată să fie cît mai mic, eventual zero.

Primită la redacție la 19 decembrie 1962

ÜBER DIE ZUR AUTOMATISCHEN PRÜFUNG DER OBERFLÄCHEN SPHÄRISCHER KÖRPER ANGEWANDTEN GETRIEBE

ZUSAMMENFASSUNG

Zur Prüfung der Oberfläche der Kugeln von Kugellagern werden mit einer automatischen Einrichtung Getriebe zur Erzeugung der Drehung der Kugel mit festgehaltenem Zentrum benutzt, in der Weise, daß ein fester Punkt auf der Kugel eine sphärische Spirale der praktischen Dicke *a* beschränkt, welche die gesamte Oberfläche deckt. Es werden die Wirkungen etwaiger Verschiebungen des Zentrums, bedingt durch Ungenauigkeiten bei der praktischen Herstellung des Gestriebes, auf das optische System der Anlage gezeigt und Möglichkeiten für die optimale Stellung desselben empfohlen.

BIBLIOGRAFIE

1. R. C. BOGDAN, CHR. PELECUDI, L. CALMACIUC, *Asupra unor curbe sferice şi a mecanismelor necesare producerii lor.* St. cerc. mec. apl., *1* (1962).
2. CHR. PELECUDI, R. C. BOGDAN, L. CALMACIUC, *Consideraţii asupra mişcării sferei cu centru fix pentru controlul automat al suprafeţei.* St. cerc. mec. apl., *3* (1962).
3. IVAN STONKAL, *Machines automatiques pour le contrôle visuel des billes pour roulements.* L'industrie lourde tchécoslovaque, *11* (1962).
4. HENRYK BIELICKI, *Kontrola wad powierzchniwoych kulek w przemyśle tożysk tocwnych i jej automatyzacja.* Pnzeglad Mechaniczny, *21* (1962).

STUDII

UTILIZAREA ANALIZEI ARMONICE ÎN STUDIUL GRUPELOR ASSURICE PLANE DE ASPECTUL II ȘI III

DE

RADU C. BOGDAN

531.1 : 621.01

În lucrarea noastră [1] am studiat diada Cebîșev — grupă assurică de aspectul I, cu două elemente și trei cuple de rotație — obținînd funcțiile parametrilor cinematici sub formă explicită, în cazul general al mișcării; prin particularizarea stării de mișcare a cuplelor de rotație exterioare, am tratat cazul mecanismului patrulater articulat [2] în diferite condiții constructive.

Ne propunem continuarea studiilor asupra grupelor assurice cu două elemente, în care am înlocuit una din cuplele de rotație cu o cuplă de translație; prin utilizarea analizei armonice la studiul acestor grupe assurice de aspectul II și III, se extinde domeniul de aplicații al metodei la o clasă mai largă de mecanisme utilizate în construcția de mașini.

*

Fie diada Cebîșev A_1BA_2 și opusa ei A_1CA_2, la care se cunoaște starea de mișcare a cuplelor de rotație exterioare A_1 și A_2 (fig. 1); în acest caz traiectoria unuia din punctele A ale diadei de aspectul I este dată prin hodograful vectorului de poziție complex

$$Z_A = \sum_{-\infty}^{+\infty} \alpha_k e^{ik\varphi}, \tag{1}$$

unde φ este parametrul lagrangean al mecanismului.

Dacă înlocuim una din cuplele de rotație printr-o cuplă de translație (fig. 2), putem presupune cunoscută mișcarea suportului de-a lungul căruia se produce translația, considerînd ecuația suportului sub formă normală

$$x \cos \mu + y \sin \mu - p = 0, \tag{2}$$

se dau parametrii p și μ

$$p = \sum_{-\infty}^{+\infty} p_k e^{ik\varphi}, \tag{3}$$

$$e^{i\mu} = \sum_{-\infty}^{+\infty} \mu_k e^{ik\varphi} = \cos\mu + i\sin\mu. \tag{4}$$

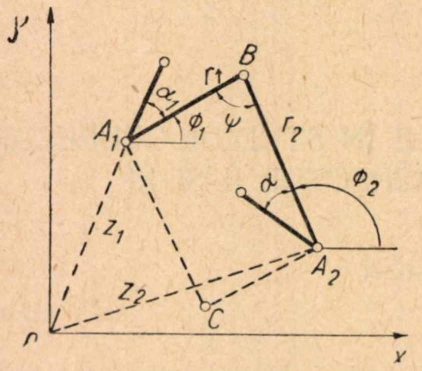


Fig. 1

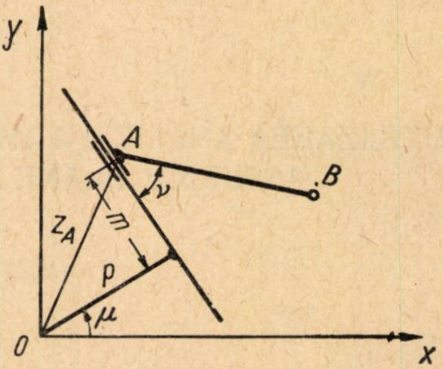


Fig. 2

Asupra acestor relații observăm următoarele :

— p este o mărime reală și deci

$$p_k = \bar{p}_{-k}; \tag{5}$$

— funcțiile cos μ și sin μ au dezvoltările

$$\cos\mu = \sum \frac{\mu_k + \bar{\mu}_{-k}}{2} e^{ik\varphi}, \tag{6}$$

$$\sin\mu = \sum \frac{\mu_k - \bar{\mu}_{-k}}{2} e^{ik\varphi}. \tag{7}$$

Datorită relației, $\cos^2\mu + \sin^2\mu = 1$, avem

$$\left.\begin{aligned} &\sum_k \mu_{k+s}\cdot\bar{\mu}_k = 0, \quad \text{pt. } s \neq 0,\\ &\sum_k \mu_k\cdot\bar{\mu}_k \;\;= 1, \quad \text{pt. } s = 0. \end{aligned}\right. \tag{8}$$

În această situație vectorul de poziție complex al punctului A devine (fig. 2)

$$Z_A = p\,e^{i\mu} + m\,e^{i\left(\mu + \frac{\pi}{2}\right)} = (p + mi)\,e^{i\mu}, \tag{9}$$

în care m-real are dezvoltarea necunoscută

$$m = \sum m_k e^{ik\varphi}; \quad m_k = \overline{m}_{-k}. \tag{10}$$

În general se urmăreşte să se determine unghiurile Φ_1 şi Φ_2, unghiul ψ de transmitere, eventual mărimile reale r_1 sau r_2, dacă în B există cuplă de translaţie şi vectorii de poziţie ai cuplelor exterioare, dacă de asemenea există cuple de translaţie; se păstrează unghiul constant ν (fig. 2) între elementul AB şi direcţia de translaţie.

Între unghiurile Φ_1, Φ_2 şi ψ există relaţia

$$\Phi_2 = \Phi_1 + \psi \tag{11}$$

şi

$$\begin{aligned} e^{i\Phi_1} &= \sum A_k^{(1)} e^{ik\varphi}, \\ e^{i\Phi_2} &= \sum A_k^{(2)} e^{ik\varphi}, \\ e^{i\psi} &= \sum B_k e^{ik\varphi}. \end{aligned} \tag{12}$$

CAZUL DIADEI DE ASPECTUL II

Conform figurii 3 unghiul Φ_2 este determinat de relaţia

$$\Phi_2 = \mu + \nu - \frac{\pi}{2}, \tag{13}$$

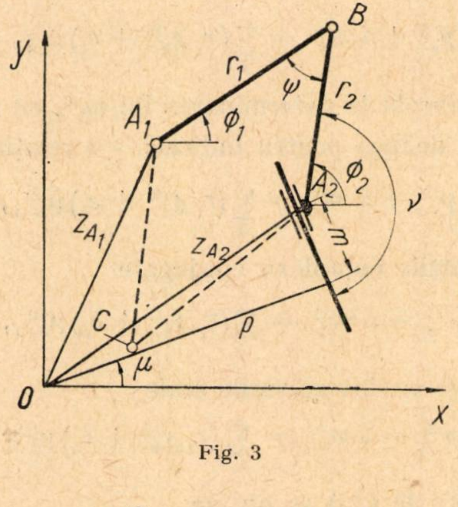


Fig. 3

şi deci

$$A_k^{(2)} = -i\, e^{i\nu} \mu_k. \tag{14}$$

Vectorul complex al punctului C este determinat astfel

$$\overline{OC} = \overline{OA_1} - \overline{A_2B} = \overline{OA_2} - \overline{A_1B} \tag{15}$$

şi deci

$$Z_1 - r_2\, e^{i\Phi_2} = Z_2 - r_1\, e^{i\Phi_1} = \sum c_k\, e^{ik\varphi}, \tag{16}$$

unde

$$c_k = \alpha_k^{(1)} - r_2\, A_k^{(2)}. \tag{17}$$

Considerînd vectorul Z_2 de forma (9) avem

$$Z_2 = (p^{(2)} + m^{(2)} i)\, e^{i\mu^{(2)}} = \left(\sum p_r^{(2)}\, e^{ir\varphi} + i \sum m_r^{(2)}\, e^{ir\varphi}\right) \times \tag{18}$$

$$\times \left(\sum \mu_r\, e^{ir\varphi}\right) = \sum_k \left[\sum \mu_{r+k}^{(2)} (p_r^{(2)} + i m_r^{(2)})\right] e^{ir\varphi}, \tag{19}$$

iar din (16) rezultă

$$r_1\, A_k^{(1)} = \sum_r \mu_{r+k}^{(2)} (p_r^{(2)} + i m_r^{(2)}) - c_k. \tag{20}$$

Dacă se înmulţeşte această expresie cu $\overline{\mu}_{k+s}^{(2)}$ şi se însumează în raport cu indicele k avem

$$\sum_k r_1\, A_k^{(1)}\, \overline{\mu}_{k+s}^{(2)} = \sum_k \overline{\mu}_{k+s}^{(2)} \left[\sum_r \mu_{r+k}^{(2)} (p_r^{(2)} + i m_r^{(2)})\right] - \sum_k c_k\, \overline{\mu}_{r+s}^{(2)},$$

iar prin inversarea însumărilor din partea doua în raport cu r şi k şi ţinînd seama de (8) avem

$$\sum_k r_1\, A_k^{(1)}\, \overline{\mu}_{k+s}^{(2)} = p_s^{(2)} + i m_s^{(2)} - \sum_k c_k\, \overline{\mu}_{k+s}^{(2)}, \tag{21}$$

sau

$$p_s^{(2)} + i\, m_s^{(2)} = \sum_k (r_1 A_k^{(1)} + c_k)\, \overline{\mu}_{k+s}^{(2)} \tag{22}$$

care duce în mod simplu la determinarea lui $m_s^{(2)}$, cu condiţia cunoaşterii lui $A_k^{(1)}$. Similar se deduce pentru indicele $-\, s$ relaţia

$$p_{-s}^{(2)} + i\, m_{-s}^{(2)} = \sum_k (r_1 A_k^{(1)} + c_k)\, \overline{\mu}_{k-s}^{(2)}, \tag{23}$$

şi trecînd la cantităţile complexe conjugate

$$\overline{p}_{-s}^{(2)} - i\, \overline{m}_{-s}^{(2)} = \sum_k (r_1 \overline{A}_k^{(1)} + \overline{c}_k)\, \mu_{k-s}^{(2)}, \tag{24}$$

ţinem seama că p şi m sînt măsurile reale :

$$p_{-s}^{(2)} - i\, m_{-s}^{(2)} = \sum_k (r_1 \overline{A}_k^{(1)} + \overline{c}_k)\, \mu_{k-s}^{(2)}. \tag{25}$$

Apropiind (22) de (25) se obţine

$$2p_s^{(2)} = \sum_k \left[r_1 (A_k^{(1)}\, \overline{\mu}_{k+s}^{(2)} + \overline{A}_k^{(1)}\, \mu_{k-s}^{(2)}) + (c_k\, \overline{\mu}_{k+s}^{(2)} + \overline{c}_k\, \mu_{k-s}^{(2)})\right], \tag{26}$$

$$2i\; m_s^{(2)} = \sum_k \left[r_1 (A_k^{(1)}\, \overline{\mu}_{k+s}^{(2)} - \overline{A}_k^{(1)}\, \mu_{k-s}^{(2)}) + (c_k\, \overline{\mu}_{k+s}^{(2)} + \overline{c}_k\, \mu_{k-s}^{(2)})\right]. \tag{27}$$

Din (26) se deduc necunoscutele $A_k^{(1)}$ ţinînd seama că între acestea intervin şi relaţii de forma (8); din (27) se deduc mărimile $m_s^{(2)}$.

$$r_1 \sum_k \left(A_k^{(1)} \overline{\mu}_{k+s}^{(2)} + \overline{A}_k^{(1)} \mu_{k-s}^{(2)}\right) = 2p_s^{(2)} - \sum_k \left(c_k \overline{\mu}_{k+s}^{(2)} + \overline{c}_k \mu_{k-s}^{(2)}\right), \tag{28}$$

sau

$$r_1 \sum_k \left(A_{k-s}^{(1)} \overline{\mu}_k^{(2)} + \overline{A}_{k+s}^{(1)} \mu_k^{(2)}\right) = 2\, p_s^{(2)} - \sum_k \left(c_{k-s} \overline{\mu}_k^{(2)} + \overline{c}_{k+s} \mu_k^{(2)}\right) \tag{29}$$

şi

$$\sum_k A_{k-s}^{(1)} A_{k+s}^{(1)} = 0 \text{ (sau 1)}, \quad \begin{array}{l} \text{pt. } s \neq 0, \\ \phantom{\text{pt. }} s = 0. \end{array}$$

Se obţine un sistem infinit de ecuaţii s aparţinînd mulţimii numerelor întregi pozitive, cu un număr infinit de necunoscute.

Conform relaţiei (11) obţinem şi

$$B_{k'} = \sum_k A_{k+k'}^{(2)} \overline{A}_k^{(1)}. \tag{30}$$

CAZUL DIADEI DE ASPECTUL III

Pentru această diadă cupla interioară este de translaţie; unghiul ψ de transmitere este dat fix (fig. 4).

Vectorul complex $\overline{A_1A_2}$ este cunoscut şi dat de relaţia

$$\overline{A_1A_2} = \overline{OA_2} - \overline{OA_1} = \overline{A_1B} - \overline{A_2B} \tag{31}$$

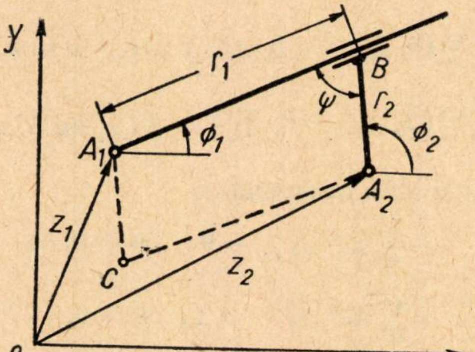


Fig. 4

deci

$$Z_1 - Z_2 = r_1\, e^{i\Phi_1} - r_2\, e^{i\Phi_2} = \sum \beta_k\, e^{ik\varphi}, \tag{32}$$

în care

$$\beta_k = \alpha_k^{(2)} - \alpha_k^{(1)}.$$

Considerînd relațiile

$$r_1 = \sum r_k^{(1)} \mathrm{e}^{ik\varphi}; \quad \Phi_2 = \Phi_1 + \psi, \tag{33}$$

$$A_k^{(2)} = \mathrm{e}^{i\psi} A_k^{(1)}, \tag{34}$$

rezultă

$$(r_1 - r_2 \mathrm{e}^{i\psi}) \mathrm{e}^{i\Phi_1} = \sum \beta_k \mathrm{e}^{ik\varphi}, \tag{35}$$

respectiv

$$\sum_s r_s^{(1)} A_{k+s}^{(1)} - r_2 \mathrm{e}^{i\psi} A_k^{(1)} = \beta_k. \tag{36}$$

Dacă se înmulțește cu $\overline{A}_{k+u}^{(1)}$ și se însumează în raport cu k avem

$$\sum_k \overline{A}_{k+u}^{(1)} \Big(\sum_s r_s^{(1)} A_{k+s}^{(1)} \Big) - r_2 \mathrm{e}^{i\psi} \sum_k A_k^{(1)} \overline{A}_{k+u}^{(1)} = \sum_k \beta_k \overline{A}_{k+u}^{(1)}. \tag{37}$$

Prin inversarea însumărilor și ținînd seama de relațiile de forma (8) pentru coeficienții $A_k^{(1)}$, avem

$$r_0^{(1)} = r_2 \mathrm{e}^{i\psi} + \sum_k \beta_k \overline{A}_k^{(1)}, \quad \text{pt. } u = 0, \tag{38}$$

$$r_u^{(1)} = \sum_k \beta_k \overline{A}_{k+u}^{(1)}, \quad \text{pt. } u \neq 0. \tag{39}$$

Pe de altă parte

$$r_u^{(1)} = \overline{r}_{-u}^{(1)} = \sum_k \overline{\beta}_k A_{k-u}^{(1)}, \quad \text{pt. } u \neq 0; \tag{40}$$

deci

$$\sum_k (\beta_k \overline{A}_{k+u}^{(1)} - \overline{\beta}_k A_{k+u}^{(1)}) = 0, \quad u \neq 0, \tag{41}$$

$$\sum_k (\overline{\beta}_k A_k^{(1)} - \beta_k \overline{A}_k^{(1)}) = 2\, i\, r_2 \sin \psi, \; u = 0. \tag{42}$$

Ecuațiile (41) și (42), împreună cu

$$\sum_k A_k^{(1)} \overline{A}_{k+u}^{(1)} = 0; \quad u \neq 0, \tag{43}$$

$$\sum_k A_k^{(1)} \overline{A}_k^{(1)} = 1; \quad u = 0, \tag{44}$$

formează un sistem infinit de ecuații cu infinite necunoscute, care se poate rezolva prin metode cunoscute.

Desigur, prin particularizarea stării de mișcare a cuplelor exterioare a diadelor de aspectul II și aspectul III, se pot deduce cazurile particulare ale soluțiilor generale, corespunzătoare tipurilor concrete de mecanisme ce se studiază.

Primită la redacție la 28 decembrie 1962

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ГАРМОНИЧЕСКОГО АНАЛИЗА В ИССЛЕДОВАНИИ ПЛОСКИХ ГРУПП АССУРЫ II И III ВИДА

РЕЗЮМЕ

Применяется гармонический анализ двухзвеньевых групп Ассура, имеющих или внешнюю поступательную пару — II вид или внутреннюю поступательную пару — III вид.

Рассматривая уравнение стойки поступательной пары, пишется выражение комплексного вектора положения Z_A точки A; углы Φ_1, Φ_2, ψ и вещественные величины r_1 и r_2 определяются в зависимости от лагранжевого параметра φ механизма, для общего случая движения внешних пар.

В зависимости от частных случаев движения выводятся конкретные случаи различных типов механизмов.

BIBLIOGRAFIE

1. R. C. BOGDAN, CHR. PELECUDI, *Contribuţii la cinematica diadei Cebîşev.* St. cerc. mec. apl.. *4* (1959).
2. CHR. PELECUDI, R. C. BOGDAN, L. CALMACIUC, *Contribuţii la cinematica mecanismului cu patru elemente articulate.* St. cerc. mec. apl., *2* (1960).
3. MEYER zur CHAPELLEN, *Die zweidimensionale Fourieranalyse spezieller Koppelkurven.* Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik, *1/2*, Januar/Februar (1959), Berlin.
4. MEYER zur CHAPELLEN, *Die harmonische Analyse bei elliptischen Kurbelschleifen.* Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik, *1/2* Januar/Februar (1958), Berlin.
5. И. И. АРТОБОЛЕВСКИЙ, Н. И. ЛЕВИЦКИЙ, С. А. ЧЕРКУДИНОВ, *Синтез плоских механизмов.* Физматгиз, 1959, Москва.
6. F. FREUDENSTEIN, *Harmonic Analysis of Crank-and-Rocker Mechanisms With Application,* Journal of Applied Mechanics, vol. 26, Trans. ASME, **81**, Series E, 673–675 (1959).
7. H. RANKERS, *Harmonische Analyse und Mass-Synthese,* Konstruktion (Berlin), *1*, 8–10, (1960).
8. A. T. YANG, *Harmonic Analysis of Spherical Four-Bar Mechanisms,* Journal of Applied Mechanics, **29**, Trans. ASME, Series E, *4*, December (1962).

STUDIUL MIŞCĂRII GIROSCOPULUI ASTATIC RAPID, ÎN REGIM TRANZITORIU

DE

IOAN I. ARON [1]

531.1

1. MODUL DE ABORDARE A PROBLEMEI

În literatura de specialitate, problemele teoriei giroscopului sînt amplu tratate datorită multiplelor aplicaţii practice ale acestuia. De regulă, studiul giroscopului se face considerînd momentul cinetic constant.

Cu toate că acest considerent satisface şi conduce la rezultate teoretice foarte utile, în calculele tehnico-inginereşti este necesar totuşi să se aibă în vedere şi ipoteza variaţiei momentului cinetic. În practică momentul cinetic suferă anumite variaţii datorită modificării turaţiei giroscopului.

Se pot prezenta unele cauze care provoacă variaţia turaţiei giroscoapelor utilizate în diverse aparate. Astfel, se cunoaşte că [1] rotoarele dispozitivelor giroscopice sînt acţionate de regulă electric cu electromotoare de curent continuu sau alternativ. Dar tensiunea de alimentare variază în anumite limite, ceea ce provoacă implicit variaţia turaţiei, deci a momentului cinetic. De asemenea, la schimbarea condiţiilor atmosferice — presiune, umiditate, temperatură, viscozitate etc. — are loc variaţia cuplului rezistent ; aceasta constituie o altă cauză a variaţiei vitezei unghiulare de rotaţie proprie a giroscopului.

În afară de aceste cauze care se manifestă în condiţii normale de exploatare, mai pot apare şi unele fluctuaţii accidentale în regimul de funcţionare a giroscoapelor care presupun, sub o formă sau alta, variaţia momentului cinetic.

În lucrarea de faţă ne propunem să studiem mişcarea giroscopului în ipoteza că, viteza unghiulară de rotaţie proprie Ω este variabilă, după o anumită lege. Se pune acum problema stabilirii concrete a acestei legi de variație. Din teoria acționărilor electrice se cunoaște că, în general, rezultă o variație exponențială [5]. Fără a intra în detalii, privind regimul tranzitoriu al acționării giroscopului vom presupune rezolvată această problemă, iar legile de variație ale turației le vom aproxima analitic.

---

[1] Academia militară generală.

2. STABILIREA ECUAȚIILOR DE MIȘCARE A GIROSCOPULUI ASTATIC RAPID

Se consideră giroscopul suspendat în centrul său de greutate (fig. 1). Fie $Ox_1y_1z_1$ un sistem de axe ortogonal fix și $Oxyz$ un sistem de axe ortogonal mobil, legat de giroscop. Fie și sistemul de axe $Ox'\,y'z$ mobil care nu participă la mișcarea de rotație proprie $\dot{\varphi}$ a giroscopului. Axa Oz este orientată după axul giroscopului, iar axele Ox, Ox', Oy și Oy' sînt situate în planul ecuatorial al rotorului. Poziția axei principale a giroscopului este determinată de unghiurile α și β ca funcții de timp.

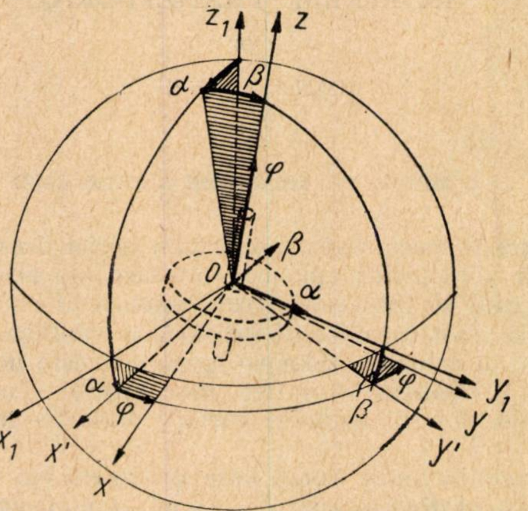


Fig. 1

Pentru stabilirea ecuațiilor de mișcare se utilizează ecuațiile dinamice ale lui Euler [3], [4], adică

$$\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}H_{x'}}{\mathrm{d}t} + q'\,H_z - r'H_{y'} = M_{x'}, \\ &\frac{\mathrm{d}H_{y'}}{\mathrm{d}t} + r'\,H_{x'} - p'H_z = M_{y'}, \qquad (1) \\ &\frac{\mathrm{d}H_z}{\mathrm{d}t} + p'H_{y'} - q'H_{x'} = M_z, \end{aligned}$$

unde — p', q', r', sînt proiecţiile pe axele Ox', Oy', Oz a vitezei unghiulare de rotaţie a sistemului de axe $Ox'y'z$,

— $H_{x'}$, $H_{y'}$, $H_{z'}$ sînt proiecţiile vectorului momentului cinetic $\overline{H}$ pe axele $Ox'y'z$,

— $M_{x'}$, $M_{y'}$, M_z sînt proiecţiile pe axele Ox', Oy', Oz a vectorului $\overline{M}$ a cuplului forţelor exterioare care acţionează asupra giroscopului.

Proiecţiile momentului cinetic al rotorului sînt

$$H_{x'}, = J_e p\,;\; H_{y'} = J_e q\,;\;\; H_z = H = Jr, \tag{2}$$

unde J_e este momentul de inerţie ecuatorial iar J este momentul de inerţie polar al rotorului.

Proiecţiile p, q şi r ale vitezei unghiulare instantanee de rotaţie a giroscopului sînt

$$p = -\dot{\beta}\,;\quad q = \dot{\alpha}\cos\beta\,;\quad r = \dot{\varphi} + \dot{\alpha}\sin\beta, \tag{3}$$

iar proiecţiile p', q' şi r' ale vitezei de transport $\overline{\omega}'$ a axelor $Ox'\,y'\,z$ sînt

$$p' = p = -\dot{\beta}\,;\quad q' = q = \dot{\alpha}\cos\beta\,;\quad r' = \dot{\alpha}\sin\beta. \tag{4}$$

Substituind în (1) relaţiile (2), (3) şi (4) se obţine

$$\begin{aligned} &J_e(\ddot{\beta} + \dot{\alpha}^2 \sin\beta\cos\beta) - J(\dot{\varphi} + \dot{\alpha}\sin\beta)\,\dot{\alpha}\cos\beta = -M_{x'} \\ &J_e(\ddot{\alpha}\cos\beta - 2\dot{\alpha}\,\dot{\beta}\sin\beta) + J(\dot{\varphi} + \dot{\alpha}\sin\beta)\,\dot{\beta} = M_{y'} \\ &J\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\dot{\varphi} + \dot{\alpha}\sin\beta) = M_z. \end{aligned} \tag{5}$$

În cazul giroscopului rapid se are în vedere că $\dot{\varphi}$ este de ordinul miilor de radiani pe secundă în timp ce $\dot{\alpha}$ şi $\dot{\beta}$ au valori de ordinul miimilor de radiani pe secundă. De aceea, în sistemul (5), $\dot{\alpha}$ în suma $\dot{\varphi}$ se neglijează iar termenii care conţin pe $\dot{\alpha}^2$ şi produsul $\dot{\alpha}\dot{\beta}$, de asemenea, se consideră neglijabili. Cu aceasta, sistemul (5) devine

$$\begin{aligned} J_e\ddot{\beta} - J\dot{\varphi}\dot{\alpha}\cos\beta &= -M_{x'}, \\ J_e\ddot{\alpha}\cos\beta + J\,\dot{\varphi}\dot{\beta} &= M_{y'}, \\ J\ddot{\varphi} &= M_z. \end{aligned} \tag{6}$$

Deviaţiile β ale giroscopului rapid sînt mici şi de aceea se poate lua $\cos\beta \cong 1$, iar (6) se poate scrie sub forma [1], [2]:

$$\begin{aligned} J_e\ddot{\beta} - J\dot{\varphi}\dot{\alpha} &= -M_{x'}, \\ J_e\ddot{\alpha} + J\,\dot{\varphi}\dot{\beta} &= M_{y'}, \\ J\ddot{\varphi} &= M_z. \end{aligned} \tag{6'}$$

Se observă că pentru $M_z=0$, $\ddot{\varphi} = 0$ iar $\dot{\varphi} = \Omega = \text{const}$. Rezolvarea sistemului (6′) în această ipoteză este bine cunoscută [1], [2], [4].

Noi vom examina cazul cînd $M_z \neq 0$, deci $\dot{\varphi} \equiv \Omega = f(t)$.

Ultima ecuație din sistemul (6′) permite să se stabilească legea de variație a vitezei de rotație proprie $\varphi \equiv \Omega$ pentru diverse cazuri în care este dat M_z. Nu ne propunem să discutăm această problemă ea fiind în general cunoscută [5]. Vom lua, prin aproximație, cîteva legi de variație a vitezei de rotație.

Fie

$$\dot{\varphi} \equiv \Omega = \Omega_0 (1 \pm mt). \tag{7}$$

Momentul cinetic H în acest caz are expresia

$$H = J\, \dot{\varphi} = J\, \Omega_0 (1 \pm mt) = H_0 (1 \pm mt), \tag{8}$$

unde H_0 este momentul cinetic la viteza unghiulară de regim Ω_0 iar m este o mărime pozitivă subunitară. Semnul plus se ia la creșterea, iar semnul minus la scăderea momentului cinetic cu timpul.

Un caz particular al legii de variație (8) este

$$J\dot{\varphi} = H = H_0 mt. \tag{9}$$

După cum s-a mai amintit, în realitate, variația momentului cinetic nu este liniară. De aceea, vom examina și cazurile cînd momentul cinetic variază după legile

$$J\dot{\varphi} = H = \frac{H_0}{1 + mt} \tag{10}$$

$$J\dot{\varphi} = H = H_0 (1 \pm \gamma\, e^{-bt}), \tag{11}$$

unde $\gamma \leqslant 1$ iar b este inversul constantei de timp a giromotorului.

Urmează să integrăm sistemul de ecuații (6′) considerînd succesiv pentru momentul cinetic, una din expresiile (8) — (11). Trebuie avut în vedere o restricție : ecuațiile (6′) își mențin valabilitatea numai dacă $\dot{\varphi} \gg \dot{\alpha}$ și $\dot{\varphi} \gg \dot{\beta}$; cu alte cuvinte aceste ecuații nu ne permit să studiem mișcarea giroscopului imediat după pornire, cînd turația este foarte mică, ci numai de la o anumită valoare a acesteia, pentru care giroscopul se poate considera rapid.

3. INTEGRAREA ECUAȚIILOR DE MIȘCARE A GIROSCOPULUI ASTATIC RAPID

Conform celor arătate la punctul 2 datorită acțiunii cuplului M_z după axa Oz, momentul cinetic H este variabil. Faptul că M_z este diferit de zero provoacă desigur apariția unei viteze unghiulare $\bar{\omega}$ orientată după aceeași axă Oz ca și H. Dar în această situație viteza unghiulară $\bar{\omega}$ este coliniară cu momentul cinetic H și deci momentul giroscopic $\overline{M}_g = \overline{H}_z \times \times \bar{\omega}$ este nul ; aceasta înseamnă că existența unui cuplu $M_z \neq 0$ nu provoacă precesia giroscopului.

Printre cauzele cele mai frecvente care provoacă perturbația poziției giroscopului se numără șocurile ; asupra giroscopului acționează instantaneu forțe care provoacă cupluri instantanee după axele Ox' și Oy'. Deși există și alte tipuri de perturbații, ne limităm la studiul mișcării giroscopului sub influența cuplului instantaneu.

Pentru acest caz se pot preciza următoarele condiţii iniţiale:

$$\alpha(0) = \alpha_0; \quad \beta(0) = \beta_0; \quad \dot\alpha(0) = \dot\alpha_0; \quad \dot\beta(0) = \dot\beta_0;$$
$$M_{x'}(0) = 0; \quad M_{y'}(0) = 0. \tag{12}$$

3.1. *Cazul variaţiei liniare a momentului cinetic.* Ţinînd seama în (6′) de (8) şi (12) se obţine

$$\begin{aligned} J_e\ddot\beta - H_0(1 \pm mt)\,\dot\alpha &= 0,\\ J_e\ddot\alpha + H_0(1 \pm mt)\,\dot\beta &= 0. \end{aligned} \tag{13}$$

Introducînd funcţia complexă $\underline{Z} = \alpha + j\,\beta$, din (13) rezultă

$$J_e\ddot{\underline{Z}} - j\,H_0(1 \pm mt)\,\dot{\underline{Z}} = 0. \tag{14}$$

Dacă se notează $\dot{\underline{Z}} = u$, ecuaţia (14) devine

$$J_e\dot{\underline{u}} - j\,H_0(1 \pm mt)\,\underline{u} = 0, \tag{15}$$

a cărei soluţie este

$$\underline{u} = \underline{D}\exp\left[\pm j\,\frac{n_0}{2m}(1 \pm mt)^2\right], \tag{16}$$

unde $n_0 = \dfrac{H_0}{J_e}$ iar $\underline{D}$ este o constantă de integrare complexă a cărei expresie se determină din condiţiile iniţiale (12):

$$\underline{u}(0) = \dot{\underline{Z}}(0) = \dot\alpha_0 + j\,\dot\beta_0 = \underline{D}\exp\left(\pm j\,\frac{n_0}{2m}\right). \tag{17}$$

Din (17) rezultă:

$$\underline{D} = (\dot\alpha_0 + j\,\dot\beta_0)\exp\left(\mp j\,\frac{n_0}{2m}\right). \tag{17.a}$$

Substituind în (16) pe $\underline{D}$ din (17.a) se obţine

$$\underline{u}(t) = \dot{\underline{Z}}(t) = (\dot\alpha_0 + j\,\dot\beta_0)\exp\left[\pm j\,\frac{n_0 t}{2}(\pm 2 + mt)\right]. \tag{18}$$

Soluţia (18) a ecuaţiei (15) se mai poate pune sub forma

$$\dot{\underline{Z}}(t) = (\dot\alpha_0 + j\,\dot\beta_0)\left\{\cos\left[\frac{n_0 t}{2}(\pm 2 + mt)\right] \pm j\sin\left[\frac{n_0 t}{2}(\pm 2 + mt\right]\right\}. \tag{18.a}$$

Separînd partea reală şi partea imaginară din (18.a) se obţin vitezele unghiulare $\dot\alpha(t)$ şi $\dot\beta(t)$, adică

$$\dot\alpha(t) = \dot\alpha_0\cos\left[\frac{n_0 t}{2}(\pm 2 + mt)\right] \mp \dot\beta_0\sin\left[\frac{n_0 t}{2}(\pm 2 + mt)\right], \tag{19.a}$$

$$\dot\beta(t) = \dot\beta_0\cos\left[\frac{n_0 t}{2}(\pm 2 + mt)\right] \pm \dot\alpha_0\sin\left[\frac{n_0 t}{2}(\pm 2 + mt)\right]. \tag{19.b}$$

Pentru determinarea variației în timp a unghiurilor α și β se integrează expresiile (19.a) și (19.b). Se obține

$$\alpha(t) = \int \dot{\alpha}(t)\,\mathrm{d}t + D_1, \tag{20.a}$$

$$\beta(t) = \int \dot{\beta}(t)\,\mathrm{d}t + D_2, \tag{20.b}$$

unde D_1 și D_2 sînt constante de integrare care se calculează din condițiile inițiale (12).

Efectuînd calcule similare și pentru variația momentului cinetic după expresia (9) rezultă ecuația

$$J_e\,\dot{\underline{u}} - j\,H_0\,mt\,\underline{u} = 0, \tag{21}$$

a cărei soluție este :

$$\underline{u} = \underline{C}\exp\left(j\,\frac{n_0 m}{2}\,t^2\right), \tag{22}$$

unde $\underline{C}$ este o constantă de integrare complexă care se determină din condițiile inițiale (12).

Vitezele unghiulare $\dot{\alpha}(t)$ și $\dot{\beta}(t)$ sînt

$$\begin{aligned}\dot{\alpha}(t) &= \dot{\alpha}_0\cos kt^2 - \dot{\beta}_0\sin kt^2,\\ \dot{\beta}(t) &= \dot{\beta}_0\cos kt^2 + \dot{\alpha}_0\sin kt^2,\end{aligned} \tag{23}$$

unde $k = \dfrac{n_0 m}{2}\cdot$ Unghiurile α și β ca funcții de timp au forma

$$\begin{aligned}\alpha(t) &= \int \dot{\alpha}(t)\,\mathrm{d}t + C_1,\\ \beta(t) &= \int \dot{\beta}(t)\,\mathrm{d}t + C_2,\end{aligned} \tag{24}$$

unde C_1 și C_2 sînt constante de integrare.

3.2. *Cazul variației neliniare a momentului cinetic.* Substituind în (6′) expresia momentului cinetic din (10) și avînd în vedere condițiile inițiale rezultă

$$\begin{aligned}J_e\,\ddot{\beta} - \frac{H_0}{1+mt}\,\dot{\alpha} &= 0,\\ J_e\,\ddot{\alpha} + \frac{H_0}{1+mt}\,\dot{\beta} &= 0.\end{aligned} \tag{25}$$

Procedînd ca la punctul 3.1. se obține ecuația diferențială

$$\dot{\underline{u}} - j\,\frac{n_0}{1+mt}\,\underline{u} = 0, \tag{26}$$

a cărei soluție este :

$$\underline{u} = \underline{B}\exp\left[j\,\frac{n_0}{m}\ln(1+mt)\right], \tag{27}$$

unde $\underline{B}$ este o constantă de integrare complexă, care are valoarea

$$\underline{B} = \underline{u}\,(0) = \dot{\alpha}_0 + j\,\dot{\beta}_0. \tag{28}$$

Vitezele unghiulare $\dot{\alpha}(t)$ şi $\dot{\beta}(t)$ se obţin separînd partea reală şi şi partea imaginară din (27)

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}\,(t) &= \dot{\alpha}_0 \cos\,[n \ln\,(1 + mt) - \dot{\beta}_0 \sin\,[n \ln\,(1 + mt\,)], \\ \dot{\beta}\,(t) &= \dot{\beta}_0 \cos\,[n \ln\,(1 + mt)] + \dot{\alpha}_0 \sin\,[n \ln\,(1 + mt)], \end{aligned} \tag{29}$$

unde $n = \frac{n_0}{m}\cdot$

Integrînd relaţiile (29) se obţin expresiile unghiurilor α şi β ca funcţii de timp, adică

$$\begin{aligned} \alpha\,(t) &= \int \dot{\alpha}\,(t)\,\mathrm{d}t + B_1, \\ \beta\,(t) &= \int \dot{\beta}\,(t)\,\mathrm{d}t + B_2, \end{aligned} \tag{30}$$

unde B_1 şi B_2 sînt constante de integrare.

În sfîrşit, substituind în (6)′ pe (11), ţinînd seama de (12) şi aplicînd aceeaşi metodă de calcul, se obţine ecuaţia

$$\underline{\dot{u}} - jn_0\,(1 \pm \gamma\,e^{-bt})\,\underline{u} = 0, \tag{31}$$

a cărei soluţie este

$$\underline{u} = \underline{K} \exp\left[j\,\frac{n_0}{b}\,(bt \mp \gamma\,e^{-bt})\right], \tag{32}$$

unde $\underline{K}$ este o constantă de integrare complexă. Notînd $\frac{n_0}{b} = n_1$ şi punînd condiţiile iniţiale rezultă

$$\underline{u}\,(0) = \underline{\dot{Z}}\,(0) = \dot{\alpha}_0 + j\,\dot{\beta}_0 = \underline{K} \exp\,(\mp\, j\, n_1\,\gamma). \tag{33}$$

Deci

$$\underline{K} = (\dot{\alpha}_0 + j\,\dot{\beta}_0) \exp\,(\pm\, jn_1\,\gamma). \tag{33.a}$$

Constanta de integrare $\underline{K}$ se mai poate pune sub forma

$$\underline{K} = P + j\,Q, \tag{34}$$

unde

$$\begin{aligned} P &= \dot{\alpha}_0 \cos n_1\gamma \mp \dot{\beta}_0 \sin n_1\gamma, \\ Q &= \dot{\beta}_0 \cos n_1\gamma \pm \dot{\alpha}_0 \sin n_1\gamma. \end{aligned} \tag{35}$$

Introducînd pe (35) în (32) şi separînd partea reală şi partea imaginară se obţine :

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}\,(t) &= P \cos\,[n_1\,(bt \pm \gamma\,e^{-bt})] - Q \sin\,[n_1\,(bt \mp \gamma\,e^{-bt})], \\ \dot{\beta}\,(t) &= Q \cos\,[n_1\,(bt \mp \gamma\,e^{-bt})] + P \sin\,[n_1\,(bt \mp \gamma\,e^{-bt})]. \end{aligned} \tag{36}$$

Unghiurile de deviație α și β ca funcții de timp rezultă din integrarea expresiilor (36), adică

$$\begin{aligned} \alpha(t) &= \int \dot{\alpha}(t)\,\mathrm{d}t + K_1, \\ \beta(t) &= \int \dot{\beta}(t)\,\mathrm{d}t + K_2, \end{aligned} \tag{37}$$

unde K_1 și K_2 sînt constante de integrare.

Metoda de calcul folosită aici se poate extinde pentru o lege de variație oarecare $H = H(t)$ a momentului cinetic.

Această observație este desigur valabilă și pentru cazul cel mai simplu cînd $H = \text{const.}$ Evident, în acest caz se vor obține rezultatele cunoscute în literatură [1], [2], [3], [4] ca aspecte particulare ale relațiilor stabilite aici.

4. ANALIZA REZULTATELOR OBȚINUTE

Caracterul mișcării giroscopului datorită acțiunii unui cuplu instantaneu este determinat de vitezele unghiulare $\dot{\alpha}$, $\dot{\beta}$, și de unghiurile α, β, ca funcții de timp. De aceea vom analiza variația acestor mărimi pe baza relațiilor corespunzătoare stabilite la punctul 3.

4.1. *Mișcarea giroscopului în cazul variației liniare a momentului cinetic.* Din expresiile (19.a) și (19.b) se constată că datorită acțiunii unui cuplu instantaneu, giroscopul efectuează o mișcare oscilatorie. Caracterul acestor oscilații se poate stabili calculînd zerourile lui $\dot{\alpha}(t)$ și $\dot{\beta}(t)$. În fond, este suficient să examinăm zerourile funcției

$$\dot{\alpha}(t) = \dot{\alpha}_0 \sin\left[\frac{n_0 t}{2}(\pm 2 + mt)\right]\cdot \tag{38}$$

Funcția (38) trece prin zero pentru valorile argumentului date de relația

$$\frac{n_0 t}{2}(\pm 2 + mt) = i\pi, \quad (i = 1,2,3\ldots).$$

Pulsația oscilațiilor se determină derivînd argumentul în raport cu timpul. În cazul cînd momentul cinetic crește (semnul +) se poate scrie

$$\nu = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{n_0 t}{2}\;(2 + mt)\right] = n_0\,(1 + mt)$$

iar frecvența și perioada sînt

$$f = \frac{\nu}{2\pi} = \frac{n_0}{2\pi}(1 + mt), \tag{39}$$

$$T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{n_0(1 + mt)}\cdot \tag{40}$$

În concluzie, la creşterea liniară a momentului cinetic, oscilaţiile vitezelor $\dot{\alpha}$ şi $\dot{\beta}$ ale giroscopului, produse sub acţiunea unui cuplu instantaneu au o frecvenţă care creşte liniar cu timpul, amplitudinea lor fiind constantă (fig. 2).

Datorită variaţiei vitezelor unghiulare $\dot{\alpha}$ şi $\dot{\beta}$, unghiurile de abatere α şi β ale axei giroscopului au tot aspectul unor oscilaţii de frecvenţă egală cu cea a mărimilor $\dot{\alpha}$ şi $\dot{\beta}$ şi de amplitudine variabilă. Din expresiile (20.a) şi (20.b) se observă că deviaţiile α şi β se obţin prin integrarea vitezelor $\dot{\alpha}$ şi $\dot{\beta}$. Pe figura 2 constatăm că suprafeţele mărginite de curba $\dot{\alpha} = f(t)$ şi de axa absciselor se micşorează datorită creşterii frecvenţei. Aceasta înseamnă că la creşterea liniară a momentului cinetic, amplitudinea oscilaţiilor se micşorează în aceeaşi proporţie în care se micşorează suprafeţele haşurate din figura 2.

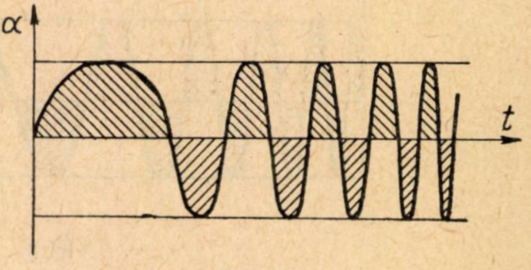


Fig. 2

La scăderea momentului cinetic (semnul —) se poate scrie

$$\nu = n_0(1 - mt),$$

$$f = \frac{\nu}{2\pi} = \frac{n_0}{2\pi}(1 - mt), \tag{41}$$

$$T = \frac{2\pi}{n_0(1 - mt)}.$$

Din relaţiile (41), prin analogie cu discuţia făcută anterior, rezultă că, la scăderea liniară a momentului cinetic giroscopul execută, sub influenţa unui cuplu instantaneu, oscilaţii de viteze $\dot{\alpha}$ şi $\dot{\beta}$ a căror frecvenţă scade cu timpul, amplitudinea rămînînd constantă. Datorită acestei variaţii a vitezelor $\dot{\alpha}$ şi $\dot{\beta}$, unghiurile de deviaţie $\dot{\alpha}$ şi β reprezintă tot mişcări oscilatorii de aceeaşi frecvenţă ca şi oscilaţiile α şi β avînd o amplitudine crescătoare cu timpul, proporţională suprafeţelor mărginite de curba $\dot{\alpha}$ cu axa absciselor (fig. 3).

În cazul variaţiei momentului cinetic după legea (9) s-au obţinut soluţiile (23) şi (24). Din (23) este uşor de văzut că vitezele $\dot{\alpha}$ şi $\dot{\beta}$ au caracter oscilator, frecvenţa oscilaţiilor fiind crescătoare. Calculul deviaţiilor α şi β după formulele (20. a) şi (20. b) se poate face prin cîteva integrale de tip Fresnel în care însă $k \neq \frac{\pi}{2}$. În acest caz iese şi mai clar în evidenţă caracterul oscilatoriu a mişcării giroscopului; unghiurile α şi β reprezintă oscilații de frecvență crescătoare și de amplitudine descrescătoare cu timpul.

4.2. *Mișcarea giroscopului în cazul variației neliniare a momentului cinetic.* La scăderea momentului cinetic după legea (10) viteza

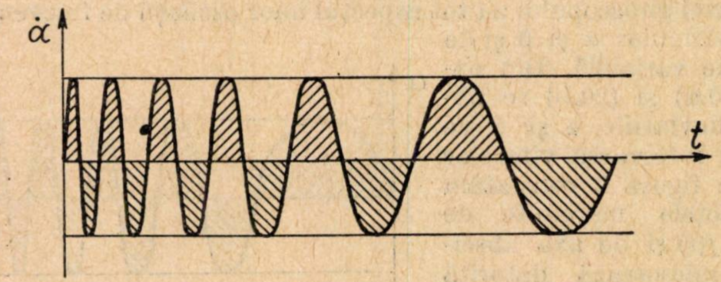


Fig. 3

de deviație a giroscopului conform relației (29) se poate studia analizînd argumentul funcțiilor sin și cos, adică expresia : $n \ln (1 + mt)$.

Pulsația, frecvența și perioada oscilațiilor sînt

$$\begin{gathered} \nu = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[n \ln (1 + mt)\right] = \frac{n_0}{1 + mt}, \\ f = \frac{n_0}{2\pi (1 + mt)}; \quad T = \frac{2\pi (1 + mt)}{n_0}. \end{gathered} \tag{42}$$

După cum se observă din (42) oscilațiile $\dot{\alpha}$ și $\dot{\beta}$, la scăderea momentului cinetic, se fac cu o frecvență care se micșorează cu timpul. De aici concluzia că, integrînd aceste oscilații conform relațiilor (30), rezultă pentru giroscop o mișcare oscilatorie a cărei frecvență scade și a cărei amplitudine crește cu timpul.

Procedînd în mod similar și cu rezultatele obținute (36) și (37) în cazul variației exponențiale (11) a momentului cinetic, rezultă concluzii analoage : giroscopul, sub acțiunea unui cuplu instantaneu, la creșterea momentului cinetic, execută oscilațiile α și β de frecvență crescătoare și de amplitudine scăzătoare cu timpul, iar la micșorarea momentului cinetic aceste oscilații au frecvență scăzătoare și amplitudinea crescătoare în timp.

CONCLUZII

1. Studiul mișcării giroscopului simetric astatic rapid, cu moment cinetic variabil se face cu ecuațiile (6′) în care momentul cinetic este o funcție de timp.

2. Sub influența perturbațiilor de forma unor cupluri instantanee aplicate după axele Ox' și Oy', giroscopul efectuează oscilații, de amplitudine foarte mică și de frecvență foarte mare, în jurul poziției inițiale.

3. Spre deosebire de oscilaţiile sinusoidale de amplitudine şi frecvenţă constante obţinute în cazul momentului cinetic constant, oscilaţiile giroscopului cu moment cinetic variabil au frecvenţa şi amplitudinea variabilă în timp.

4. Exprimarea matematică a acestor oscilaţii se face cu ajutorul unor funcţii speciale.

5. Mişcarea giroscopului astatic rapid cu moment cinetic constant se poate studia particularizînd expresiile obţinute aici, considerînd $H =$ const.

Primită la redacţie la 15 octombrie 1962

ИССЛЕДОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ БЫСТРОГО АСТАТИЧЕСКОГО ГИРОСКОПА В ПЕРЕХОДНОМ РЕЖИМЕ

РЕЗЮМЕ

В работе рассматривается движение быстрого астатического гироскопа, с переменным кинетическим моментом, под действием мгновенной пары сил. Вначале аналитически дается приближенный закон изменения угловой скорости гироскопа в переходном режиме системы электропривода в нескольких более простых выражениях, которые последовательно вводятся в технические уравнения движения, справедливые для быстрого симметричного астатического гироскопа.

Из интегрирования уравнений следует несколько выражений для изменения во времени углов, определяющих положение главной оси вращения гироскопа. Для всех случаев изменения кинетического момента обнаруживается, что гироскоп под действием мгновенной пары сил совершает колебательное движение с амплитудой и частотой переменных со временем. С возрастанием кинетического момента амплитуда колебаний уменьшается, а их частота возрастает; при уменьшении кинетического момента амплитуды колебаний возрастает, а их частота уменьшается со временем.

BIBLIOGRAFIE

1. В. А. Павлов, *Авиационные гидроскопические приборы*, Оборонгиз, Москва, 1954, 29, 43—47, 263—284.
2. С. С. Рыбкин, *Теория гироскопических устройств*. I. Судпромгиз, Ленинград, 1962, 27, 46.
3. A. Stoenescu, G. Ţiţeica, *Teoria giroscopului şi aplicaţiile sale tehnice*. Ed. tehnică, Bucureşti, 1961, 35.
4. Р. Граммель, *Гироскоп, его теория и применения*. I. Издательство иностранной литературы, Москва, 1952, 177.
5. D. Damsker, *Acţionarea electrică*. Ed. energetică de stat, 1955, 183—198.

CONTRIBUȚII ASUPRA PROIECTĂRII ȘI CONSTRUCȚIEI ECONOMICE A ROȚILOR DINȚATE

DE

N. G. POPINCEANU și M. D. GAFIȚANU[1]

621.83

1. CONSIDERAȚII GENERALE

Roțile dințate și transmisiile cu roți dințate au, la nivelul actual al tehnicii, un rol de o deosebită importanță în construcția de mașini. Cunoscute de multă vreme, literatura de specialitate s-a ocupat și se ocupă continuu de proiectarea, calculul, construcția și exploatarea acestor transmisii. Cu toate acestea, încă nu s-a ajuns la soluții general valabile care să asigure o legătură optimă între condițiile de construcție și cele de funcționare și exploatare.

Prezenta lucrare caută să aducă o contribuție spre realizarea acestei legături, cu considerarea factorilor economici.

Calculul de dimensionare sau de verificare a roților dințate se face în mod curent pe baza a două condiții de rezistență și anume[2]):

— condiția de rezistență la contact a flancului dintelui,

— condiția de rezistență la încovoiere a piciorului dintelui.

Proiectantul trebuie să îndeplinească ambele condiții de rezistență amintite; pentru a putea ajunge la o stare limită din ambele puncte de vedere sînt necesare numeroase calcule și tatonări, deoarece intervin diverse influențe dependente de felul materialului, de felul tratamentului materialului, de condițiile de funcționare și exploatare etc.

Îndeplinirea unei stări de eforturi limită a fost pusă ca o problemă de utilizare economică a materialului și de mărire a capacității portante a roților dințate[3]). V. N. Kudriavțev [8] exprimă de asemeni posibilitatea alegerii convenabile a numărului de dinți pentru un angrenaj, în așa fel încît în dinți să apară o stare limită de eforturi la încovoiere și contact. B. Horovitz [6], [7] stabilește în cazul roților dințate cilindrice cu dinți drepți, legătura dintre material și tratament și numărul de dinți — critic — care să asigure aceeași stare limită.

---

[1]) Institutul Politehnic, Iași.

[2]) În unele cazuri se pot face și calcule de rezistență la gripare, [3], [4], [6] etc.

[3]) Sub această formă a fost enunțată de autori în 1956 la consfătuirea „Promovarea noii tehnologii în construcția roților dințate" la Brașov.

Din punct de vedere economic însă se pune problema obținerii unor dimensiuni minime pentru roți, a unei prelucrări și exploatări ieftine precum și a unor condiții de funcționare avantajoase.

În vederea rezolvării problemei astfel enunțate se face mai întîi o generalizare a relațiilor de calcul pentru angrenajele cu roți cilindrice, cu roți conice și cu roți melcate ; pe această bază se determină numărul critic de dinți care va asigura o stare limită de eforturi atît la contact cît și la încovoiere pentru angrenajele amintite ; se studiază apoi sub aspect economic legătura dintre numărul de dinți și mărimea, material și tratament, prelucrarea și condițiile de funcționare și exploatare al roților angrenajului ; se arată modul de fixare a numărului optim de dinți — z_0 — care să corespundă din toate punctele de vedere specificate mai sus și în ce raport se află acest număr optim de dinți față de numărul critic z_{cr}.

2. GENERALIZAREA RELAȚIILOR DE CALCUL

Pentru generalizarea relațiilor de calcul s-a luat ca bază metodica de calcul recomandată de V. N. Kudriavțev [8] [16]. Expresiile finale ale relațiilor de calcul folosite pentru diversele tipuri de angrenaje precum și expresiile generalizate propuse sînt date în tabela 1 și anume : relația generalizată (1) pentru condiția de rezistență la încovoiere și relația generalizată (2) pentru condiția de rezistență la contact.

Pentru ca relațiile generalizate (1) și (2) să poată fi particularizate pentru diverse tipuri de roți și angrenaje se fac următoarele notații :

m — m — modulul în cm pentru roți cilindrice cu dinți drepți.
— m_n — modulul normal în cm pentru roți cilindrice cu dinți înclinați și roți melcate.
— m_{med} — modulul mediu în cm pentru roți conice cu dinți drepți.
— m_{nmed} — modulul normal mediu în cm pentru roți conice cu dinți înclinați sau curbi.
M — M_1, M_2 — cuplul în kgfcm pe arborele pinionului, respectiv al roții.
K_{inc}, K_{cont} — coeficienți de majorare a sarcinii, la încovoiere respectiv contact, putîndu-se calcula cu ajutorul metodei recomandate de V. N. Kudriavțev [8], [16].
B — lățimea în cm a coroanei dințate ; pentru transmisii melcate se consideră $B \simeq d_{r1}$ (diametrul primitiv al melcului).

β — β — unghiul de înclinare a dinților pentru roțile cilindrice și conice cu dinți înclinați precum și pentru roți melcate 1)).

β_{med} — unghiul de înclinare a dinților pentru roțile conice cu dinți curbi.

Y — Y_1, Y_2 — coeficient de formă a dintelui, respectiv pentru pinion și roată (fig. 1) [8], [16], dependent de numărul de dinți z_1 ai pinionului, respectiv z_2 ai roții; pentru roți cilindrice cu dinți înclinați și pentru roți conice cu dinți drepți și înclinați sau curbi, Y se alege în funcție de numărul fictiv de dinți z_f ai roților respective astfel:

— pentru roți cilindrice cu dinți înclinați $z_f = z/\cos^3\beta$, pentru roți conice cu dinți drepți $z_f = z/\cos\varphi$, pentru roți conice cu dinți înclinați sau curbi $z_f = z/\cos\varphi \cos^3\beta$ (φ — semiunghiul conului primitiv pentru roți conice cu dinți drepți, înclinați sau curbi).

θ_i, θ_K — coeficienți de corecție pentru solicitarea de încovoiere, respectiv contact, a căror valoare depinde de înclinarea dinților, clasa de precizie, duritatea flancurilor și tipul transmisiei [8], [16].

$i = n_1/n_2$ — raport de transmisie; n_1, n_2 — turația pinionului respectiv a roții în rot/min.

δ — unghiul dintre axe la transmisii cu roți conice.

R_i — caracteristica raportului de transmisie, determinată de următoarele expresii:

— angrenaje cu roți cilindrice: la pinion $R_i = i/(i \pm 1)$; la roată $R_i = 1/(i \pm 1)$;

— angrenaje cu roți conice: la pinion $R_i = i/\sqrt{i^2 + 2\,i\cos\delta + 1}$ la roată $R_i = 1/\sqrt{i^2 + 2i\cos\delta + 1}$.

— roțile transmisiilor cu melc $R_i = 1$,

x_1, x_2, x_3 — coeficienți caracteristici tipului transmisiei:

— transmisii cu roți cilindrice $x_1 = x_2 = x_3 = 1$.

— transmisii cu roți conice cu dinți drepți $x_1 = 1{,}18$ $x_2 = x_3 = 1$.

— transmisii cu roți conice cu dinți înclinați sau curbi $x_1 = 1{,}18$; $x_2 = 1{,}05$; $x_3 = 1$.

— transmisii cu melc-roată melcată: $x_1 = x_2 = 1$ $x_3 = 0{,}865$.

z — z_1, z_2 — numărul de dinți ai pinionului respectiv ai roții

$[\sigma]$ — $[\sigma_1]$, $[\sigma_2]$ — rezistențele admisibile la încovoiere în kgf/cm^2 pentru piciorul dintelui, la pinion respectiv la roată; se pot calcula cu relația generală de forma:

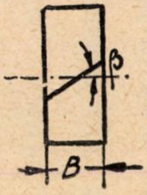
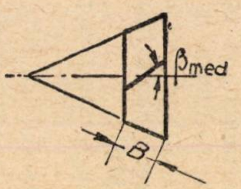
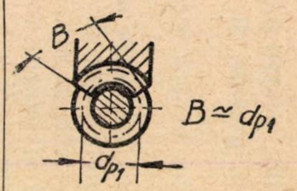
$$[\sigma] = x_4\,x_5\,\frac{\sigma_r\,K_{ti}}{n_i} = x_4\,x_5\,\frac{\sigma_r\,K_{ti}}{\lambda_i\cdot n_{i\ 7}} \qquad (3)$$

---

1) Pentru roți cilindrice și conice cu dinți drepți $\beta = 0$.

Tabela 1

Relații de calcul particulare și generalizate pentru angrenaje cu roți cilindrice, roți conice și pentru roți melcate

Tipul transmisiei dințate	Roți cilindrice	Roți conice		Melc-roată-melcată
		dinți drepți	dinți înclinați sau curbi	
				

Condiția de rezistență la încovoiere a piciorului dintelui pentru :

Pinion	$m_n^2 = \frac{2\, M_1\, K_{înc} \cos\beta}{Bz_1\, Y_1\, [\sigma_1]\, \theta_i}$	$m_{med}^2 = \frac{2{,}35\, M_1\, K_{înc} \cos\beta}{Bz_1\, Y_1\, [\sigma_1]}$	$m_{nmed}^2 = \frac{2{,}5\, M_1\, K_{înc} \cos\beta_{med}}{Bz_1\, Y_1\, [\sigma_1]\, \theta_i}$	
Roată	$m_n^2 = \frac{2\, M_2\, K_{înc} \cos\beta}{Bz_2\, Y_2\, [\sigma_2]\, \theta_i}$	$m_{med}^2 = \frac{2{,}35\, M_2\, K_{înc} \cos\beta}{Bz_2\, Y_2\, [\sigma_2]}$	$m_{nmed}^2 = \frac{2{,}5\, M_2 K_{înc} \cos\beta_{med}}{Bz_2\, Y_2\, [\sigma_2]\theta_i}$	$m_n^2 = \frac{2M_2\, K_{înc} \cos\beta}{Bz_2\, Y_2\, [\sigma_2]}$

$$m^2 = \frac{2\, x_1\, x_2\, M\, K_{înc} \cos\beta}{Bz\, Y\, [\sigma]\, \theta} \qquad (1)$$

Condiția de rezistență la contact a flancului dintelui pentru :

Pinion	$m_n^2 = \frac{2M_1\, K_{cont}\, (i \pm 1) \cos^2\beta}{Bz_1^2\, i\, [C_K]\, \theta_K}$	$m_{nmed}^2 = \frac{2{,}35\;\; M_1\, K_{cont} \sqrt{i^2 + 2\, i \cos\,\delta + 1}\, \cos^2\, \beta_{med}}{Bz_1^2\, i\, [C_K]\, \theta_K}$	
Roată	$m_n^2 = \frac{2M_2\, K_{cont}\, (i \pm 1) \cos^2\beta}{Bz_2^2\;\; [C_K[\; \theta_K}$	$m_{nmed}^2 = \frac{2{,}35\;\; M_2\, K_{cont} \sqrt{i^2 + 2\, i \cos\,\delta + 1}\;\; \cos^2\beta_{med}}{Bz_2^2 [C_K]\, \theta_K}$	$m_n^2 = \frac{1{,}7\, M_2\, K_{cont} \cos^2\beta}{Bz_2^2\;\, [C_K]}$

$$m^2 = \frac{2\, x_1\, x_2\, M\, K_{cont} \cos^2\beta}{Bz^2\, [C_K]\, \theta_K\, R_i} \qquad (2)$$

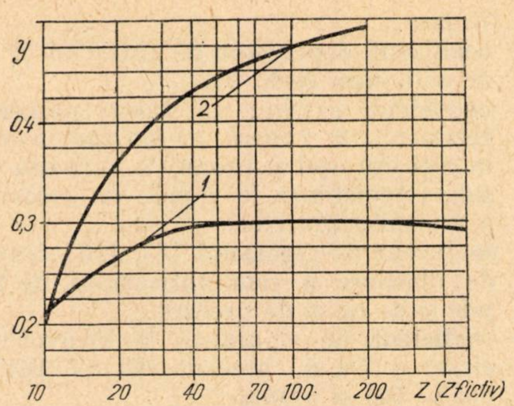


Fig. 1. — Valori pentru coeficientul de formă a dinților Y (Danturi necorijate). (Valorile coeficientului de formă Y depind de ipotezele de calcul formulate în lucrarea [8] și diferă din acest motiv de valorile recomandate în alte lucrări). 1. — roți cilindrice și conice ; 2. — roți melcate.

Tabela 2

Valori pentru coeficienții x_4 și x_5 [1])

Tipul transmisiei	Ciclul de solicitare	Material	x_4	x_5
Transmisii dințate	Pulsant	Fontă	0,75	0,48
		Oțel		1,00
	Alternant simetric	Fontă	0,50	0,60
		Oțel		1,00
Transmisii melcate	Pulsant	Fontă	0,75	0,29
		Bronz-Sn		0,54
		Bronz-Al		0,47
	Alternant simetric	Fontă	0,50	0,27
		Bronz-Sn		0,575
		Bronz-Al		0,575

---

[1]) Valorile numerice pentru coeficenții x_4 și x_5 au rezultat din prelucrarea datelor indicate de V. N. Kudriavțev [8] [16].

în care :

x_4 — coeficient dependent de material şi de tipul ciclului de solicitare (tab. 2)

x_5 — coeficient auxiliar cu valori numerice în tabela 2.

σ_r — rezistenţa la rupere în kgf/cm^2 a miezului dintelui la roţi din oţel şi bronz (la roţi din fontă se va considera rezistenţa la rupere de încovoiere în kgf/cm^2 a miezului dintelui).

$n_i = n_{i7}\,\lambda_i$ — coeficient de siguranţă [8], [16] dependent de modul de obţinere a semifabricatului, de tratamentul termic şi de clasa de precizie.

n_{i7} — coeficient de siguranţă la încovoiere corespunzător clasei a 7-a de precizie (GOST 1643—56, 1758—56, 3675—56) şi anume :

— pentru piese turnate, forjate, recoapte, normalizate, îmbunătăţite, cementate şi călite, călite superficial: $n_{i7} = 1,8$

— pentru călire totală şi călire superficială numai pe flancuri $n_{i7} = 2,7$.

λ_i — coeficient de corecţie care ţine seama de clasa de precizie (tabela 3).

K_{ti} — coeficient de durabilitate pentru solicitarea de încovoiere [8], [16].

$[C_K]$ — caracteristica rezistenţei admisibile la contact, se calculează cu relaţia :

$$[C_K] = [C_{KV}].\ \lambda_c K_{tc} K_e K_v{}^{1)} \qquad (4)$$

$[C_{KV}]$ — caracteristica rezistenţei admisibile la contact pentru materialul flancului dintelui [8] [16].

$$[C_{KV}] = 0{,}918\ \frac{[\sigma_K]^2}{\dfrac{2\,E_1E_2}{E_1 + E_2}} \qquad (5)$$

$[\sigma_K]$ — rezistenţa admisibilă la contact a materialului flancului dintelui în kgf/cm^2 [8], [12], [14], [16], [3].

E_1, E_2 — modulul de elasticitate în kgf/cm^2 pentru materialul pinionului respectiv al roţii.

λ_c — coeficient de corecţie dependent de clasa de precizie şi de calitatea suprafeţelor flancurilor dinţilor [8].

K_{tc} — coeficient de durabilitate la solicitarea de contact [8], [16]

K_e — coeficient de regim ; ($K_e \cong 1{,}05 - 0{,}01\ t$ în care t este timpul de funcţionare în ore din 24).

---

1) Dintre valorile $[C_{K1}]$ corespunzător pinionului şi $[C_{K2}]$ corespunzător roţii, în calcule se va considera valoarea cea mai mică.

K_v — coeficient dependent de viscozitatea uleiului.
— pentru ulei cu $E^\circ < 13{,}5$ $K_v = (E^\circ/13{,}5)^{1/6}$
— pentru ulei cu $E^\circ > 13{,}5$ $K_v = (E^\circ/13{,}5)^{1/4}$

3. DETERMINAREA NUMĂRULUI CRITIC DE DINŢI, z_{cr}.

Notînd cu Ω raportul dintre modulul determinat cu relația (2) și modulul determinat cu relația (1) se obține :

$$\Omega^2 = \left[\frac{x_v\,\sigma_r}{[C_{KV}]\,n_{i\,7}}\cdot\frac{K_{cont}}{K_{inc}}\right]\left[\frac{Y}{Z}\right][1/R_i]\;[\cos\beta]\left[\frac{\theta_i}{\theta_K\,\lambda_i\lambda_K}\right]\times$$

$$\times\left[\frac{K_{ti}}{K_{tc}}\right]\left[\frac{x_3}{x_2}\right][x_4]\;\left|\frac{1}{K_e K_v}\right], \tag{6}$$

sau : $\Omega^2 = R_M\cdot 1/R_z\cdot 1/R_i\cdot 1/R_\beta\cdot R_P\cdot R_D\cdot 1/R_A\cdot 1/R_C\cdot R_F.$ (7)

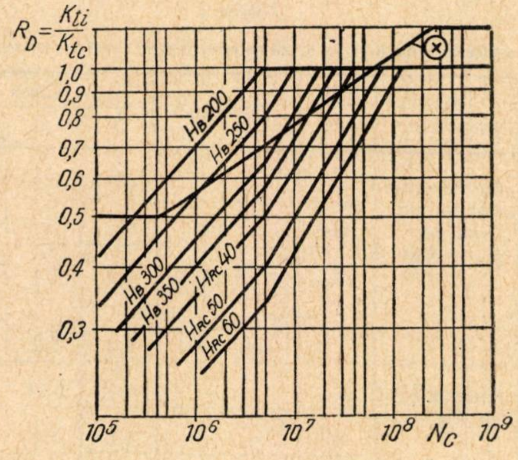


Fig. 2. — Caracteristica de durabilitate $R_D = K_{ti}/K_{tc}$, în funcție de Nc numărul de cicluri de solicitare și duritatea flancurilor dinților x — caracteristica de durabilitate pentru transmisiile cu melc-roată melcată.

Punînd condiția $\Omega = 1$ și grupînd termenii după natura și influența lor se obține

$$R_z\,R_\beta\,R_C\,R_A\,R_i = R_M\,R_D\,R_P\,R_F \tag{7'}$$

în care

$R_z = z_{cr}/Y$ — caracteristica numărului de dinți cu valori pentru Y dependente de tipul roții și al transmisiei, așa cum s-a arătat la punctul 2, figura 1.

$R_\beta = 1/\cos\beta$ — caracteristica de înclinare a dinților.

$R_C = 1/x_4$ — caracteristica ciclului de solicitare cu valori pentru x_4 din tabela 2.

$R_A = x_2/x_3$ — caracteristica tipului angrenajului cu valori pentru x_2 şi x_3 indicate la cap. 2. R_A capătă în acest fel următoarele valori: — roţi cu dinţi drepţi $R_A = 1$; roţi conice cu dinţi înclinaţi sau curbi $R_A = 1{,}05$; roţile transmisiilor cu melc $R_A = 1{,}16$.

R_i — caracteristica raportului de transmisie aşa cum se dă la cap. 2.

$R_M = \dfrac{x_5\,\sigma_r}{[C_{KV}]\,n_{i7}} \cdot \dfrac{K_{cont}}{K_{înc}}$ — caracteristica de material cu valori pentru x_5, $[C_{KV}]$, n_{i7} şi σ_r aşa cum se indică la cap. 2. Deoarece $K_{inc} \simeq K_{cont}$ se poate admite: $K_{inc}/K_{cont} \simeq 1$.

$R_D = K_{ti}/K_{tc}$ — caracteristica de durabilitate. Cu valorile recomandate în [8] [16] pentru coeficienţii K_{ti} şi K_{tc} caracteristica de durabilitate se ia din figura 2.

Tabela 3

Valori pentru coeficienţii λi, λc şi pentru caracteristica clasei de precizie R_p.

Tipul transmisiei	Duritatea flancurilor	Mări-mea	Dantura	Clasa de precizie 5	6	7	8	9
Transmisii dinţate	ambele roţi sau numai una cu $H_B < 350$	λi	—	0,94	0,94	1,0	1,10	1,30
		λc	—	1	1	1	1	0,95
		R_P	d. drepţi	1,1	1,1	1,0	0,9	0,8
			d. înclinaţi sau curbi	1,2	1,2	1,1	1,0	0,9
	Ambele roţi cu $H_B > 350$	λi	—	0,94	0,94	1,0	1,10	1,30
		λc	—	1,1	1,1	1,0	0,9	0,8
		R_P	d. drepţi	1,1	1,1	1,0	1,0	1,0
			d. înclinaţi sau curbi	1,2	1,2	1,1	1,0	0,9
Transmisii melcate	—	R_p			1	1	1	

$R_P = \dfrac{\theta_i}{\theta_K \lambda_i \lambda_c}$ — caracteristica clasei de precizie cu valori date în tabela 3.

$R_F = 1/K_e K_v$ — caracteristica de exploatare cu valori pentru K_e şi K_v indicate la cap. 2.

Pentru stabilirea numărului critic de dinţi s-a trasat în diagramele din figura 3 şi figura 4 funcţia:

$$\Phi = (z_{cr}/Y) \cdot R_\beta\, R_C\, R_A\, R_i = z_{cr}/Y \cdot {}^{1}/_{\cos\beta} \cdot {}^{1}/_{X_4} \cdot {}^{X_2}/_{X_3} \cdot R_i \qquad (8)$$

Pe de altă parte s-a reprezentat grafic în figurile 5 şi 6 caracteristica de material al R_M în funcţie de caracteristicile de rezistenţă ale miezului dintelui, tratamentul termic sau termochimic şi de duritatea flancurilor.

Factorii R_D şi R_F se pot fixa de asemeni după criteriile indicate mai sus. Deoarece clasa de precizie şi implicit factorul R_P depind limitativ de viteză, se recomandă să se facă mai întîi o predimensionare a roţilor angrenajului care să permită o determinare aproximativă a diametrului roţilor şi deci a vitezei periferice. Se recomandă de asemeni ca această predimensionare să se facă din condiţia de rezistenţă la contact [8] [16].

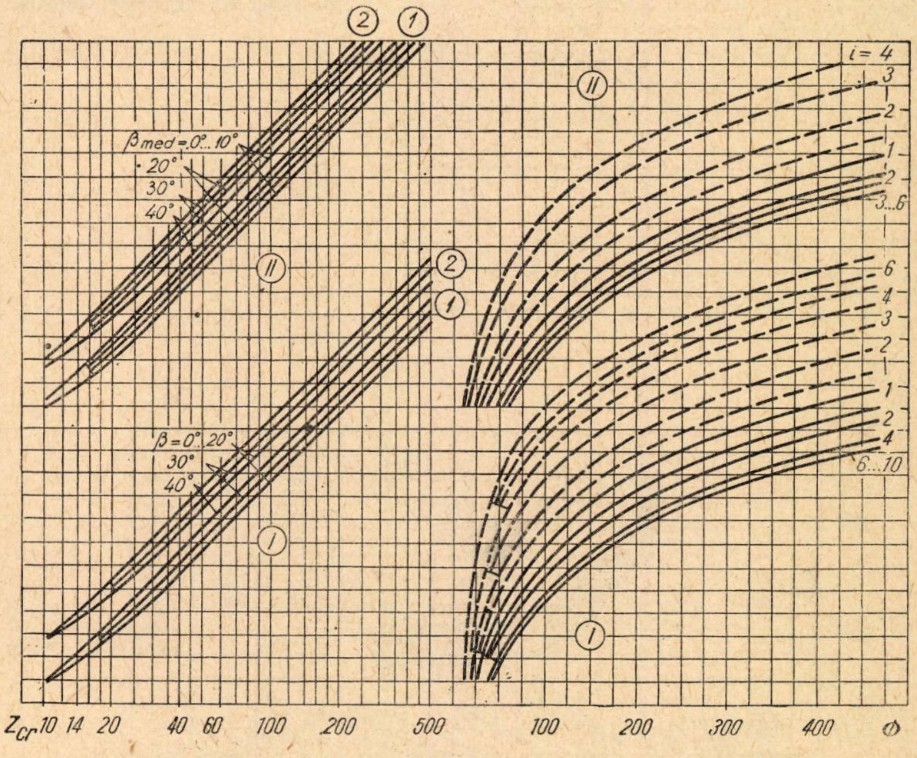


Fig. 3. — Reprezentarea grafică a mărimii Φ din relaţia (8) în funcţie de numărul critic de dinţi, unghiul de înclinare a dinţilor, caracterul ciclului de solicitare şi tipul angrenajului, pentru transmisii cu roţi dinţate cilindrice sau cu roţi conice ($\delta = 90°$) în cazul danturilor exterioare necorijate. I — roţi dinţate cilindrice ; II — roţi dinţate conice ($\delta = 90°$) ; 1 — ciclu de solicitare pulsant ; 2 — ciclu de solicitare alternant simetric ; ▬ determinarea numărului critic de dinţi pentru roată pentru pinion. La roţi conice cu dinţi curbi $\beta = \beta$med.

Astfel, dacă în relaţiile (2) din tabela 1 se scrie $z^2 . m^2 = d_p^2$, rezultă o expresie de predimensionare, de fixare a diametrului primitiv d_P, expresie care nu depinde de numărul de dinţi.

Se poate calcula deci valoarea funcţiei Φ din relaţia :

$$\Phi = R_M \, R_D \, R_P \, R_F \qquad (8')$$

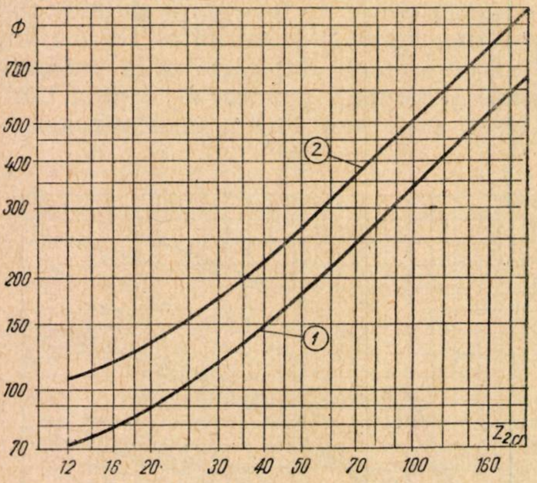


Fig. 4. — Reprezentarea grafică a mărimii ∅ din relaţia (8) în funcţie de numărul critic de dinţi şi caracterul ciclului de solicitare pentru transmisiile cu roată melcată. 1 — ciclu de solicitare pulsant ; 2 — ciclu de solicitare alternant simetric.

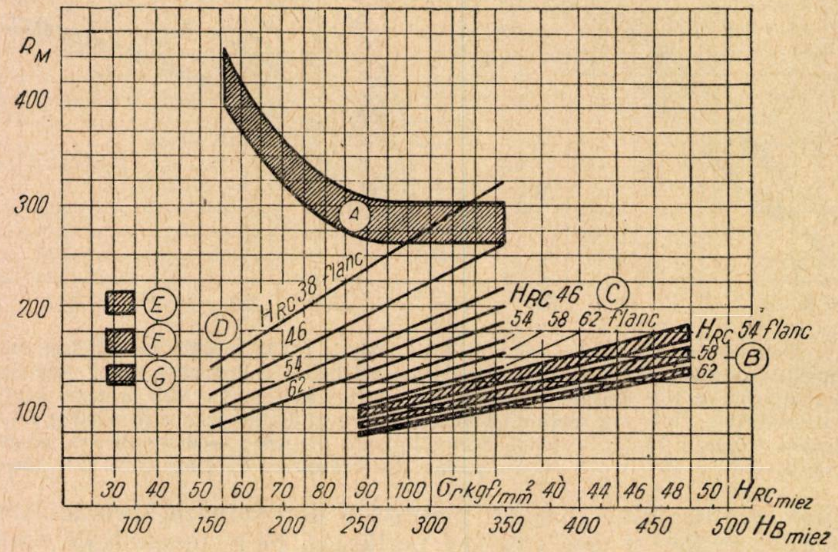


Fig. 5. — Caracteristica de material R_M, în funcţie de caracteristicile de rezistenţă ale miezului dintelui, material tratamentul termic sau termo-chimic şi de duritatea flancurilor, pentru roţi cilindrice şi conice. A.— oţeluri recoapte, normalizate, îmbunătăţite ; B — oţeluri înalt aliate (13CN35 etc.) cementate, oţeluri aliate cementate cu duritatea miezului $H_{RC} > 35$; C — oţeluri aliate cementate cu duritatea miezului $H_{RC} = 26...35$; D — oţeluri carbon cementate sau călite superficial ; E — oţel/Fc 28, oţel/Fc32, solicitare alternant simetrică ; F — oţel/Fc28, oţel/Fc32, solicitare pulsantă, fontă Fc28/Fc28, Fc32/Fc32, solicitare alternant simetrică ; G — Fc28/Fc28, Fc32/Fc32 solicitare pulsantă.

Diagramele trasate pentru caracteristica de material corespund semifabricatelor obţinute prin forjare sau turnare.

În cazul în care necesităţile producţiei pretind prelucrarea roţilor dinţate prin deformare plastică la cald, deşi deocamdată un asemenea procedeu se pare că nu prezintă avantaje economice evidente, [13] caracteristica de material R_M determinată din diagrame se va mări cu

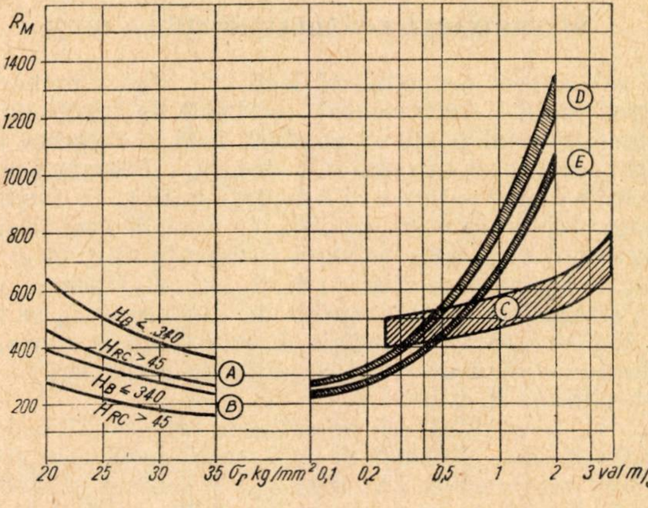


Fig. 6. — Caracteristica de material R_M, în funcţie de caracteristicile mecanice ale miezului dintelui, duritatea flancurilor, material şi viteza de alunecare relativă pentru transmisiile cu roată melcată. ; A — Bronz fără Sn. (H_B, H_{RC}) duritatea flancurilor dinţilor melcului. ; B — bronz cu Sn ; C-Bronz cu Al ; D-roată Fc 12, sau Fc15, cu melc din OL 60 ; F-roată Fc15 sau Fc 18 cu melc din OLC 16.

20% ca urmare a creşterii rezistenţei admisibile la încovoiere a piciorului dintelui.

În funcţie de necesităţi proiectantul poate de asemenea folosi corijarea danturii. Astfel la danturile corijate în înălţime, în raport cu cele necorijate, ca urmare a modificării coeficientului de formă Y [8], numărul critic de dinţi va căpăta valori mai mari pentru deplasări specifice ale profilului pozitive şi mai mici pentru deplasări specifice negative. La corijările unghiulare se manifestă pe de o parte tendinţa de mai sus, ca urmare a modificării coeficientului de formă Y ; pe de altă parte, ca urmare a modificării unghiului de angrenare care afectează rezistenţa la contact a flancurilor dinţilor, în raport cu danturile necorijate, deplasările specifice ale profilului pozitive vor duce la numere critice de dinţi mai mici, iar deplasările negative la numere critice de dinţi mai mari [8].

În legătură cu folosirea diagramelor din figurile 3, 4, 5, 6 pentru determinarea numărului critic de dinţi pentru roţile dinţate cilindrice şi roţile conice ($\delta = 90°$) cu dantură exterioară necorijată se recomandă următoarele :

— dacă $H_{B2} < H_{B1} < 350$ şi $H_{B1} - H_{B2} \simeq 20...40$ se va determina numărul critic de dinţi pentru roată ;

— dacă $H_{B1} \geqslant H_{B2} > 350$ se va determina numărul critic de dinţi pentru pinion (prin H_{B1} şi H_{B2} înţelegîndu-se duritatea flancurilor pentru dinţii pinionului respectiv ai roţii).

4. DETERMINAREA NUMĂRULUI OPTIM DE DINŢI

Studiul sub aspect economic al legăturii dintre numărul de dinţi şi mărimea, materialul şi tratamentul, condiţiile de funcţionare şi de exploatare ale angrenajului poate să conducă însă la alegerea unui număr optim de dinţi z_0 mai mare sau mai mic decît z_{cr}. Aceasta poate pretinde modificarea unora dintre parametrii adoptaţi iniţial. Se impune astfel o verificare a angrenajului în noile condiţii, cu relaţiile specificate în tabela 1, separînd termenul care caracterizează rezistenţa dinţilor şi îndeplinind condiţiile $\sigma_{ef} \leqslant [\sigma]$ pentru relaţia (1) şi $C_{Kef} \leqslant [C_K]$ pentru relaţiile (2). Dacă se fixează un număr optim de dinţi $z_0 < z_{cr}$ se constată la verificare, că hotărîtoare este condiţia de rezistenţă la contact şi că angrenajul se dimensionează deci din condiţia de rezistenţă la contact cu relaţiile (2) specificate în tabela 1.

Dacă $z_0 > z_{cr}$ se constată că hotărîtoare este condiţia de rezistenţă la încovoiere, care cere dimensiuni mai mari decît cele rezultate din predimensionarea din condiţia de rezistenţă la contact şi că dimensiunile determinate din predimensionare trebuie modificate deci în legătură cu condiţia de rezistenţă la încovoiere ; cu alte cuvinte angrenajul se dimensionează din condiţia de rezistenţă la încovoiere cu relaţiile (1) din tabela 1.

La fixarea numărului optim de dinţi trebuie avute în vedere următoarele considerente :

4. 1. Influenţa numărului de dinţi asupra mărimii angrenajului.

Volumul unei roţi dinţate poate fi considerat :

$$V \sim d_p^2 \cdot B$$

însă : $d_p \sim m_n z/\cos\beta$ şi deci :

$$V \sim B\,(m_n z/\cos\beta)^2 \tag{9}$$

Pentru particularizarea relaţiei (9) pe diverse tipuri de angrenaje şi roţi trebuie să se ţină seama de observaţiile de la cap. 2 asupra lui m_n şi β.

Considerînd relaţia (1) şi amplificînd ambii termeni cu $Bz^2/\cos^2\beta$, neglijînd influenţa factorului de formă Y, menţinînd toate celelalte elemente constante şi păstrînd ca variabilă numai numărul de dinţi z, rezultă :

$$V(z) \sim z \tag{10}$$

Deci, dacă dimensionarea se face din condiţia de rezistenţă la încovoiere ($z > z_{cr}$) volumul angrenajului este direct proporţional cu numărul de dinţi.

Considerînd relaţia (2) şi cu aceleaşi observaţii ca la relaţia (1) se obţine :

$$V(z) \sim \text{constant} \tag{11}$$

Cu alte cuvinte dacă dimensionarea se face din condiţia de rezistenţă la contact ($z \leqslant z_{cr}$), volumul roţilor nu depinde de numărul de dinţi.

În figura 7 se arată modul în care variază volumul angrenajului în funcţie de numărul de dinţi; se constată că volumul creşte dacă $z > z_{cr}$; pentru $z \leqslant z_{cr}$ volumul angrenajului este minim şi nu este influenţat de numărul de dinţi.

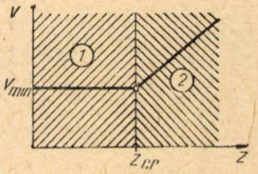


Fig. 7. — Influenţa numărului de dinţi asupra volumului angrenajului. 1. — dimensionarea roţilor din condiţia de rezistenţă la contact: 2 — dimensionarea roţilor din condiţia de rezistenţă la încovoiere.

Întrucît preţul de cost al angrenajului depinde într-o măsură însemnată de volumul respectiv rezultă influenţa evidentă a numărului de dinţi asupra preţului de cost.

4.2. Influenţa numărului de dinţi asupra procesului de prelucrare.

Această influenţă este privită sub următorul aspect : pentru un diametru şi o lăţime de roată date, este mai avantajoasă tăierea unui număr mare de dinţi (modul mic), sau a unui număr mic de dinţi (modul mare)?

Pentru intervalul m = 2,5 . . . 8 mm., la tăierea roţilor dinţate cilindrice cu cuţit roată şi freză melc, prin prelucrarea relaţiilor care determină regimul de aşchiere [1] s-au obţinut următoarele rezultate (fig. 8, 9) :

— cu creşterea modulului (scăderea numărului de dinţi) :

— creşte puterea necesară pe maşina unealtă,

— creşte preţul de cost/piesă al sculei,

— creşte timpul de bază.

— la tăierea roţilor dinţate cilindrice cu freza disc modul, în intervalul m = 3...4 mm se constată o creştere a preţului de cost/piesă al

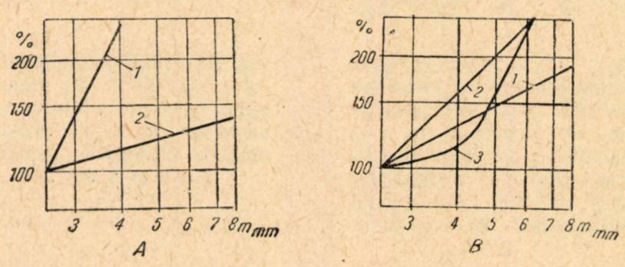


Fig. 8. — Dependenţa dintre puterea necesară pe maşina-uneltă în %, timpul de bază relativ în % şi preţul de cost sculă/piesă în % şi mărimea modulului în mm, la prelucrarea roţilor dinţate cilindrice cu cuţitul roată şi cu freza melc. A — prelucrarea cu cuţit-roată; B — prelucrarea cu freza melc; 1 — puterea necesară pe maşina unealtă în %; 2 — timpul de bază relativ în %; 3 — preţul de cost al sculei pe piesă în %.

sculei cu creșterea modulului, și în același timp o scădere a timpului de bază relativ[1]).

4.3. Influența numărului de dinți asupra funcționării și exploatării angrenajului.

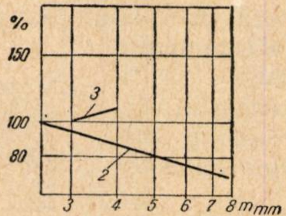


Fig. 9. — Dependența dintre timpul de bază relativ în % și prețul de cost al sculei pe piesă în % și mărimea modulului în mm, la prelucrarea roților dințate cilindrice cu freza disc-modul. 2 — timpul de bază relativ în % ; 3 — prețul de cost al sculei pe piesă în %.

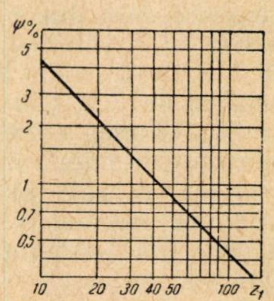


Fig. 10. — Micșorarea pierderilor prin frecare în angrenare ψ în % pentru un raport de transmisie $i = 3$, în funcție de numărul de dinți al pinionului pentru roți cilindrice cu dantură exterioară.

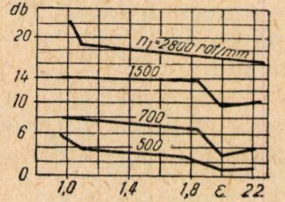


Fig. 11. — Influența gradului teoretic de acoperire asupra zgomotului produs de un angrenaj cu roți cilindrice, cu dinți rectificați, pentru o forță periferică de 240 kgf. (Nivelul zgomotului în decibeli).

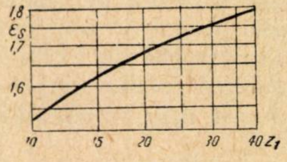


Fig. 12. — Influența numărului de dinți ai pinionului z_1 asupra gradului de acoperire în cazul roților dințate cilindrice pentru $i = 3$ și $\beta = 0°$.

4.3.1. Randamentul.

Este cunoscut faptul că pierderile prin frecare N_f în timpul angrenării sînt invers proporționale cu numărul de dinți ai roților : $N_f \sim (1/z_1 \pm 1/z_2)$ [8].

---

[1]) În aceste considerații nu s-a ținut seama de influența prelucrării de rectificare, care de altfel se recomandă numai la anumite clase de precizie, asupra parametrilor discutați.

Cu alte cuvinte creşterea numărului de dinţi, sau micşorarea modulului pentru un angrenaj cu dimensiuni date atrage o mărire a randamentului (fig. 10).

Aceeaşi tendinţă se manifestă şi în cazul transmisiilor cu melc-roată melcată. La acest fel de transmisii se va avea în vedere însă posibilitatea înlăturării autofrînării transmisiei ca urmare a creşterii numărului de dinţi ai roţii melcate şi deci a numărului de începuturi pentru şurubul melc, pentru un raport de transmisie dat. (Literatura de specialitate recomandă ca numărul de începuturi pentru şurubul melc să fie $\leqslant 4$).

4.3.2. Zgomot.

Cercetările întreprinse de G. Niemann [10] şi colaboratorii au arătat că zgomotul produs de un angrenaj scade cu creşterea gradului de acoperire (fig. 11). Gradul de acoperire creşte în general cu creşterea numărului de dinţi ai angrenajului (fig. 12), de unde rezultă că cu cît numărul de dinţi al unui angrenaj va fi mai mare cu atît zgomotul produs în timpul funcţionării va fi mai mic.

4.3.3. Griparea.

Prelucrarea relaţiei lui Blok [8] arată că pentru dimensiuni date (B, d_p) tendinţa de gripare a angrenajului este cu atît mai mică cu cît numărul de dinţi creşte.

4.3.4. Uzura.

Recomandări din literatură [12] arată că pentru transmisiile de forţă nu se recomandă adoptarea unor module mai mici de 1,5 . . . 2 mm, întrucît uzura — care se manifestă în mod absolut — poate afecta comportarea angrenajului prin subţierea dinţilor; de asemenea la module $m \leqslant 1{,}5 \ldots 2$ mm poate apărea pericolul ruperii dinţilor la suprasarcini.

4.3.5. Interferenţa.

Pentru un angrenaj dat, adoptarea numărului de dinţi se va face în aşa fel încît în angrenare să fie evitată interferenţa. În caz contrar se va alege un număr de dinţi mai mare decît cel critic — care provoacă interferenţa — sau se va preconiza o corijare corespunzătoare.

CONCLUZII

Din cauza numărului mare şi a complexităţii parametrilor şi fenomenelor care intervin în funcţionarea roţilor dinţate, în calculul şi proiectarea lor sînt necesare numeroase tatonări pentru a se putea constata dacă s-au preconizat soluţii avantajoase atît din punct de vedere constructiv cît şi funcţional şi de exploatare.

În prezenta lucrare se caută să se aducă o contribuţie în această problemă complexă, adoptîndu-se metoda de calcul indicată de V. N. Kudriavţev [8] [16]; problema se poate aborda la fel şi prin alte metode existente în literatură [3] [4] [12] [14].

Se impune mai întîi o predimensionare a roţilor angrenajului pentru a se putea determina diametrul roţilor şi a se deduce astfel viteza periferică şi împreună cu ea alţi parametri, în special clasa de precizie; predimensionarea se va face din condiția de rezistență la contact așa cum de altfel recomandă tratatele moderne de specialitate [3] [4] [8] etc.

Se determină apoi numărul critic de dinți după metodica arătată la cap. 3.

Dacă la diametrul rezultat din predimensionare și numărul critic de dinți determinat ca mai sus, modulul rezultat nu satisface condiția indicată la paragraful 4.3.4 se poate alege un număr de dinți mai mic decît cel critic $z_0 < z_{cr}$.

Dacă numărul critic de dinți nu permite angrenarea fără interferență se va adopta un număr de dinți mai mare decît cel critic corespunzător îndeplinirii condiției de evitare a interferenței; se constată însă că potrivit celor spuse la cap. 3, dacă $z_0 > z_{cr}$ trebuie adoptat un modul mai mare și deci roata trebuie redimensionată din condiția de rezistență la încovoiere, întrucît diametrul determinat inițial din condiția de rezistență la contact nu asigură pentru numărul de dinți $z_0 > z_{cr}$ o rezistență suficientă pentru încovoiere.

Cum volumul roții este minim pentru orice $z \leqslant z_{cr}$ (v. fig. 7) și cum condițiile de funcționare și exploatare așa cum rezultă din paragrafele 4.1.1., 4.1.2., 4.1.3 (zgomot, randament, prelucrare cu cuțit roată și freză melc) se îmbunătățesc cu creșterea numărului de dinți reiese că la un diametru de roată dat numărul de dinți trebuie să fie ales cît mai aproape de cel critic, care este totodată maxim pentru volum minim, fiind îndeplinite în același timp condițiile de la 4.1.4., 4.1.5.

La fixarea numărului optim de dinți, diferit de cel critic trebuie să se analizeze temeinic toate influențele enumerate mai sus și să se vadă care din ele este cea mai importantă: economia de material, prelucrarea ieftină, exploatarea ieftină, funcționarea silențioasă etc.

Metodica expusă în lucrare permite cu ușurință alegerea unor soluții optime de proiectare la angrenajele cu roți cilindrice, cu roți conice sau cu roți melcate.

Primită la redacție la 20 iunie 1962

ЭКОНОМИЧЕСКОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ ЗУБЧАТЫХ И ЧЕРВЯЧНЫХ ПЕРЕДАЧ

РЕЗЮМЕ

Рассматривается возможность экономического проектирования зубчатых и червячных передач, учитывая материал и термическую обработку, способ обработки и условия работы и эксплуатации. Для решения этой задачи обобщаются уравнения расчета на основании одного из новых методов расчета для указанных передач.

BIBLIOGRAFIE

1. Baranov B. A., Normarea tehnică în construcţia de maşini. Trad. l. rusă, Bucureşti, Ed. Tehnică, 1960.
2. Bergmann H., Werkstatt und Betrieb 1/1960.
3. Дашкевич Б. П. и др., *Детали машин*, Киев 1959.
4. Dudley Winter, Zahnräder, Springer Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1961.
5. Glaubitz H., VDI 6/1958, 216...226.
6. Horovitz B., Studii şi cercetări ştiinţifice. Acad. R.P.R., Baza Timişoara. IV. 1957.
7. Horovitz B., Angrenaje cilindrice, Ed. tehnică Bucureşti, 1959.
8. Кудрявцев В. Н., *Зубчатые передачи*, Машгиз, Москва, 1957.
9. Miagkov, V. D., Dopuski i posadki, Maşghiz, Moskva, 1957.
10. Niemann G., Maschinenelemente. **2**, Springer Verlag Berlin-Göttigen Heidelberg, 1960.
11. Niemann G., Konstruktion 2/1961. 41...42.
12. Решетов Д. Н., *Детали машин*, Москва. 1961.
13. Schorp G., Konstruktion 2/1961. 44...46.
14. Cernabski S. A., i dr., Proektirovanie mehaniceskih peredaci, Maşghiz, Moskva, 1959.
15. * * * *Справочник машиностроителя*. **4**, Машгиз, Москва, 1956.
16. * * * *Справочник металиста*, **2**, Машгиз, Москва, 1958.

CONSIDERAȚII ÎN LEGĂTURĂ CU PROBLEMA PLANĂ A TEORIEI ELASTICITĂȚII ÎN COORDONATE RECTILINII OARECARE

DE

P. P. TEODORESCU [1]

539.3 : 539.5

În problema plană a teoriei elasticității — ca și în orice altă problemă de fizică matematică, de altfel — alegerea unui sistem de coordonate convenabil poate conduce la simplificări importante din punctul de vedere al calculului. Astfel, în cazul unui domeniu mărginit de linii drepte este convenabil să se folosească un sistem de coordonate rectilinii, una din coordonate fiind constantă de-a lungul conturului.

În cazul dreptunghiului elastic și în cazul domeniilor infinite ce se obțin din acesta se folosesc, după cum se știe, coordonate carteziene rectangulare (x, y) [2]. Analog, în cazul paralelogramului elastic și în cazul domeniilor infinite corespunzătoare am utilizat [1] coordonate oblice (ξ, η), astfel încît pe contur a rezultat $\xi = \text{const.}$ sau $\eta = \text{const.}$ Grinda perete triunghiulară ne-a condus [3] la sistemul de coordonate triungiulare (x, θ), care este tot un sistem de coordonate rectilinii; condițiile la limită s-au pus astfel pentru $x = \text{const.}$ sau pentru $\theta = \text{const.}$ Aceste idei se pot extinde și pentru cazul trapezului elastic, al patrulaterului elastic oarecare sau pentru cazul unui domeniu poligonal oarecare.

În felul acesta, vom face, în cele ce urmează, cîteva considerații în legătura cu problema plană a teoriei elasticității în coordonate rectilinii oarecare; pentru aceasta vom folosi rezultatele generale pe care le-am obținut [4], [5], [6] pentru aceeași problemă în coordonate curbilinii oarecare.

---

[1] Facultatea de matematică și mecanică, Universitatea-București.

§ 1. REZULTATE PRELIMINARE

Un sistem de coordonate rectilinii oarecare va fi determinat prin relații de transformare de forma

$$x = x\,(\xi, \eta), \qquad y = y\,(\xi, \eta), \tag{1}$$

care trebuie să verifice anumite condiții.

Vom căuta cele mai generale relații de transformare care ne conduc la coordonate rectilinii.

1.1. *Cazul coordonatelor curbilinii oarecare.* Făcînd $\xi = \text{const.}$ sau $\eta = \text{const.}$ în relațiile (1) obținem două familii de linii de coordonate, care ne precizează poziția unui punct oarecare $M(\xi, \eta)$. Tangentele în M la cele două linii de coordonate corespunzătoare $\eta = \text{const.}$ și $\xi = \text{const.}$ fac cu axa Ox unghiul α, respectiv β; vom avea

$$\omega = \beta - \alpha, \tag{2}$$

unde ω este unghiul format din cele două linii de coordonate.

Aceste unghiuri vor fi date de relații de forma

$$\alpha = \alpha\,(s_\xi, s_\eta), \qquad \beta = \beta\,(s_\xi, s_\eta), \tag{3}$$

unde s_ξ, s_η sînt coordonate curbilinii de-a lungul liniilor $\eta = \text{const.}$, respectiv $\xi = \text{const.}$ Studiul variației acestor unghiuri ne conduce la razele de curbură

$$\frac{\partial \alpha}{\partial s_\xi} = -\frac{1}{\rho_\xi}, \qquad \frac{\partial \beta}{\partial s_\eta} = \frac{1}{\rho_\eta}, \tag{4}$$

date de formulele

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho_\xi} &= -h_x^3 \left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} - \frac{\partial y}{\partial \xi}\frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2}\right), \\ \frac{1}{\rho_\eta} &= h_y^3 \left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} - \frac{\partial y}{\partial \eta}\frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2}\right) \end{aligned} \tag{5}$$

și la razele

$$\frac{\partial \alpha}{\partial s_\eta} = \frac{1}{\rho'_\eta}, \qquad \frac{\partial \beta}{\partial s_\xi} = -\frac{1}{\rho'_\xi}, \tag{6}$$

date de formulele

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho'_\xi} &= -h_x h_y^2 \left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{\partial y}{\partial \eta}\frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta}\right), \\ \frac{1}{\rho'_\eta} &= h_x^2 h_y \left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{\partial y}{\partial \xi}\frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta}\right), \end{aligned} \tag{7}$$

care se reduc la raze de curbură numai în cazul coordonatelor curbilinii izogonale (pentru care $\omega = \text{const.}$).

Parametrii diferențiali de ordinul întîi ai lui Lamé, introduși mai sus, sînt dați de

$$h_x = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2}}, \quad h_y = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)^2}}, \tag{8}$$

iar unghiul ω se exprimă, cu ajutorul acestor parametri, prin

$$\cos \omega = h_x h_y \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta}\right). \tag{9}$$

De asemenea, parametrul diferențial de ordinul al doilea al lui Lamé (operatorul lui Laplace) se scrie sub forma

$$\begin{aligned} \frac{1}{D^2} \Delta = {} & \frac{1}{h_y^2} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \frac{2 \cos \omega}{h_x h_y} \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{1}{h_x^2} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \\ & + \frac{1}{D}\left[\frac{1}{2D} \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{D}{h_y}\right)^2 - \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \eta}\left(D \frac{\partial x}{\partial \eta}\right) - \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \eta}\left(D \frac{\partial y}{\partial \eta}\right)\right] \frac{\partial}{\partial \xi} + \\ & + \frac{1}{D}\left[\frac{1}{2D} \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{D}{h_x}\right)^2 - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial \xi}\left(D \frac{\partial x}{\partial \xi}\right) - \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial \xi}\left(D \frac{\partial y}{\partial \xi}\right)\right] \frac{\partial}{\partial \eta}, \end{aligned} \tag{10}$$

unde am introdus determinantul funcțional

$$\frac{1}{D} = \frac{\partial(x, y)}{\partial(\xi, \eta)} = \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi}. \tag{11}$$

1.2. *Cazul coordonatelor rectilinii oarecare.* Coordonatele rectilinii oarecare se caracterizează prin faptul că liniile de coordonate sînt de curbură nulă

$$\frac{1}{\rho_\xi} = \frac{1}{\rho_\eta} = 0. \tag{12}$$

Menționăm că, în acest caz, razele ρ'_ξ și ρ'_η pot fi finite.

Ținînd seama de relațiile (4), condițiile (12) ne conduc la

$$\begin{aligned} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} - \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} = 0, \\ & \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} - \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} = 0. \end{aligned} \tag{12'}$$

Prima din relațiile (12′) se poate scrie sub forma

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \ln \left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right) = \frac{\partial}{\partial \xi} \ln \left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)$$

şi procedînd analog cu cea de-a doua relaţie, obţinem în definitiv

$$\frac{\dfrac{\partial x}{\partial \xi}}{\dfrac{\partial y}{\partial \xi}} = f(\eta), \quad \frac{\dfrac{\partial x}{\partial \eta}}{\dfrac{\partial y}{\partial \eta}} = g(\xi). \tag{13}$$

De aici rezultă

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial \xi} &= \frac{\partial \varphi(\xi, \eta)}{\partial \xi} f_1(\eta), & \frac{\partial x}{\partial \eta} &= \frac{\partial \psi(\xi, \eta)}{\partial \eta} g_1(\xi), \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} &= \frac{\partial \varphi(\xi, \eta)}{\partial \xi} f_2(\eta), & \frac{\partial y}{\partial \eta} &= \frac{\partial \psi(\xi, \eta)}{\partial \eta} g_2(\xi). \end{aligned} \tag{14}$$

Condiţiile de diferenţială totală exactă pentru funcţiile $x = x(\xi, \eta)$ şi $y = y(\xi, \eta)$ şi teoria factorului integrant ne determină funcţiile $\varphi(\xi, \eta)$, $\psi(\xi, \eta)$, $f_1(\eta)$, $f_2(\eta)$ $g_1(\xi)$ şi $g_2(\xi)$. În particular, dacă alegem funcţiile de mai sus ca funcţii de o singură variabilă şi anume $\varphi = \varphi(\xi)$ şi $\psi = \psi(\eta)$, obţinem condiţiile de diferenţială totală exactă sub forma

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\varphi(\xi)}{\mathrm{d}\xi} \frac{\mathrm{d}f_1(\eta)}{\mathrm{d}\eta} &= \frac{\mathrm{d}\psi(\eta)}{\mathrm{d}\eta} \frac{\mathrm{d}g_1(\xi)}{\mathrm{d}\xi}, \\ \frac{\mathrm{d}\varphi(\xi)}{\mathrm{d}\xi} \frac{\mathrm{d}f_2(\eta)}{\mathrm{d}\eta} &= \frac{\mathrm{d}\psi(\eta)}{\mathrm{d}\eta} \frac{\mathrm{d}g_2(\xi)}{\mathrm{d}\xi}. \end{aligned} \tag{14'}$$

Aceste ecuaţii cu variabile separate ne conduc la

$$\begin{aligned} f_1(\eta) &= C_1\psi(\eta) + C_2, & f_2(\eta) &= K_1\psi(\eta) + K_2, \\ g_1(\xi) &= C_1\varphi(\xi) + C_3, & g_2(\xi) &= K_1\varphi(\xi) + K_3, \end{aligned} \tag{15}$$

unde C_1, C_2, C_3, K_1, K_2, K_3 sînt constante numerice. În felul acesta cunoaştem derivatele parţiale de ordinul întîi ale funcţiilor $x(\xi, \eta)$ şi $y(\xi, \eta)$; căpătăm

$$\begin{aligned} x &= C_1\varphi(\xi)\psi(\eta) + C_2\varphi(\xi) + C_3\psi(\eta) + C_4, \\ y &= K_1\varphi(\xi)\psi(\eta) + K_2\varphi(\xi) + K_3\psi(\eta) + K_4, \end{aligned} \tag{16}$$

care constituie relaţiile cele mai generale, biliniare în raport cu funcţiile $\varphi(\xi)$ şi $\psi(\eta)$, ce ne pot conduce la coordonate rectilinii.

Observăm, de asemenea, că — fără a pierde generalitatea — putem lua

$$\varphi(\xi) = \xi, \quad \psi(\eta) = \eta, \tag{17}$$

aceasta fiind echivalent cu o nouă schimbare de variabilă, deci cu o nouă transformare de coordonate.

Relațiile de transformare (16) devin

$$\begin{aligned} x &= C_1\xi\eta + C_2\xi + C_3\eta + C_4, \\ y &= K_1\xi\eta + K_2\xi + K_3\eta + K_4, \end{aligned} \tag{16'}$$

fiind cele pe care le vom folosi în cele ce urmează

În acest caz putem calcula diferiți operatori diferențiali, care pot căpăta forme remarcabile.

1.3. *Cazul în care liniile de coordonate formează două fascicule de drepte concurente.* Un caz particular, important în aplicații practice, este cel în care cele două familii de linii de coordonate formează două fascicule de drepte concurente, deci în cazul în care liniile acestor familii sînt concurente în două puncte la distanță finită.

Să alegem o transformare omografică de forma

$$\begin{aligned} x &= \frac{C_1\xi + C_2\eta + C_3}{a\xi + b\eta + c}, \\ y &= \frac{K_1\xi + K_2\eta + K_3}{a\xi + b\eta + c} \end{aligned} \tag{18}$$

și să considerăm, de exemplu, liniile $\eta = \text{const.}$ Eliminînd pe ξ între relațiile (18), obținem ecuația

$$\begin{aligned} &\eta[(bK_1 - aK_2)x - (bC_1 - aC_2)y + C_1K_2 - C_2K_1] + \\ &+ (cK_1 - aK_3)x - (cC_1 - aC_3)y + C_1K_3 - C_3K_1 = 0\,; \end{aligned} \tag{19}$$

de aici se observă cu ușurință că dreptele $\eta = \text{const.}$ trec prin punctul fix de coordonate

$$x = \frac{C_1}{a}, \qquad y = \frac{K_1}{a}. \tag{20}$$

Se poate arăta analog că fasciculul de drepte $\xi = \text{const.}$ trece prin punctul fix de coordonate

$$x = \frac{C_2}{b}, \qquad y = \frac{K_2}{b}. \tag{20'}$$

Evident, putem impune ca cele două fascicule de drepte să treacă prin punctele (a_1, b_1), (a_2, b_2). Transformarea (18) poate fi aleasă sub forma

$$\begin{aligned} x &= \frac{a_1\xi + a_2\eta + a_3}{\xi + \eta + c}, \\ y &= \frac{b_1\xi + b_2\eta + b_3}{\xi + \eta + c,}, \end{aligned} \tag{18'}$$

fără a pierde nimic din generalitatea ei.

1.4. *Cazul în care liniile de coordonate formează un fascicul de drepte concurente şi un fascicul de drepte paralele.* Vom considera cazul în care unul din cele două poluri ale fasciculelor de drepte este aruncat la infinit, celălalt rămînînd la distanţă finită. În acest caz vom folosi reprezentarea (16').

Să considerăm, de exemplu, liniile $\eta = \text{const.}$ Eliminînd pe ξ între relaţiile (16'), obţinem ecuaţia

$$(C_1K_3 - C_3K_1)\eta^2 + [C_2K_3 - C_3K_2 - C_1(y - K_4) + K_1(x - C_4)]\,\eta + \\ + K_2(x - C_4) - C_2(y - K_4) = 0. \qquad (21)$$

Se observă că dacă avem îndeplinită condiţia de proporţionalitate

$$\frac{K_1}{C_1} = \frac{K_3}{C_3} = m, \qquad (22)$$

dreptele $\eta = \text{const.}$ trec prin punctul fix de coordonate

$$x = \frac{C_1C_4 - C_2C_3}{C_1}, \qquad y = \frac{K_1K_4 - K_2K_3}{K_1}. \qquad (23)$$

Evident, putem impune ca fasciculul de drepte să treacă prin punctul dat (a, b).

Liniile $\xi = \text{const.}$ se obţin eliminînd pe η între relaţiile (16'). Căpătăm astfel, ţinînd seama de (22), ecuaţia

$$K_1(x - C_2\xi - C_4) = C_1(y - K_2\xi - K_4), \qquad (24)$$

care reprezintă un fascicul de drepte paralele. Punînd condiţia ca dreptele fasciculului să fie paralele cu dreapta

$$y = mx, \qquad (25)$$

găsim o reprezentare de forma

$$\begin{aligned} x &= C_1\xi\eta + C_2\xi + C_3\eta + a + C_2\frac{C_3}{C_1}, \\ y &= mC_1\xi\eta + K_2\xi + mC_3\eta + b + K_2\frac{C_3}{C_1}, \end{aligned} \qquad (26)$$

care corespunde datelor problemei.

Plecînd de la transformarea (18) şi făcînd $a = 0$, se poate arăta de asemenea că la reprezentarea omografică corespunde pentru $\xi = \text{const.}$ un fascicul de drepte concurente în punctul (20') şi pentru $\eta = \text{const.}$ un fascicul de drepte paralele, de coeficient unghiular $m = \dfrac{K_1}{C_1}$

$$\begin{aligned} x &= \frac{C_1\xi + C_2\eta + C_3}{b\eta + c}, \\ y &= \frac{K_1\xi + K_2\eta + K_3}{b\eta + c}. \end{aligned} \qquad (18'')$$

1.5. *Cazul în care liniile de coordonate formează două fascicule de drepte paralele.* Fie acum cazul în care ambele poluri ale celor două fascicule sînt aruncate la infinit. Folosim tot o reprezentare de forma (16'); eliminînd pe ξ, putem scrie liniile $\eta = \text{const.}$ sub forma

$$\begin{aligned}(K_1\eta + K_2)x - (C_1\eta + C_2)y + (C_1K_3 - C_3K_1)\eta^2 + \\ + (C_2K_3 - C_3K_2 + C_1K_4 - C_4K_1)\eta + C_2K_4 - C_4K_2 = 0.\end{aligned} \tag{27}$$

Se observă că ecuația (27) reprezintă un fascicul de drepte paralele dacă avem îndeplinită condiția

$$\frac{K_1}{C_1} = \frac{K_2}{C_2} = m. \tag{28}$$

În acest caz însă, cealaltă familie de linii de coordonate va forma un fascicul de linii concurente, după cum am văzut la subpunctul precedent.

Observăm că ecuația (27) reprezintă un fascicul de drepte paralele și în cazul în care avem îndeplinite condițiile

$$C_1 = K_1 = 0. \tag{28'}$$

În acest caz se observă că și liniile $\xi = \text{const.}$ alcătuiesc un fascicul de drepte paralele. Impunînd condiția ca coeficienții unghiulari ai celor două fascicule să fie m_1 și m_2, găsim condițiile

$$\frac{K_2}{C_2} = m_1, \qquad \frac{K_3}{C_3} = m_2, \tag{28''}$$

ceea ce ne conduce la o reprezentare de forma

$$\begin{aligned}x &= a\xi + b\eta + c,\\ y &= m_1a\xi + m_2b\eta + d.\end{aligned} \tag{29}$$

Plecînd de la transformarea omografică (18) și făcînd $a = b = 0$, obținem o transformare de aceeași formă, cele două fascicule de drepte paralele avînd coeficienții unghiulari

$$m_1 = \frac{K_1}{C_1}, \qquad m_2 = \frac{K_2}{C_2}. \tag{28'''}$$

1.6. *Alte cazuri de coordonate rectilinii.* Cazul în care cele două poluri ale fasciculelor de drepte sînt aruncate la infinit ne permite să studiem problema paralelogramului elastic (conturul acestui domeniu este format de linii de coordonate). Cazul în care numai unul din poluri este aruncat la infinit, celălalt fiind situat la distanță finită, corespunde problemei triunghiului elastic și problemei trapezului elastic. De asemenea, cazul în care ambele poluri sînt la distanță finită corespunde cazului unui patrulater oarecare.

Se pot însă construi, pe baza celor arătate la punctul 1.2, și alte sisteme de coordonate rectilinii, pentru care una din familii să fie un fascicul de drepte concurente, cealaltă familie de drepte nefiind obligată să treacă printr-un punct fix, sau pentru care niciuna din cele două familii de drepte nu trece printr-un punct fix. Asemenea sisteme de coordonate pot fi utile în cazul unor poligoane (regulate sau nu) elastice cu mai mult de patru laturi — impunînd condiția ca laturile poligonului să fie linii de coordonate.

În concluzie, problema plană a teoriei elasticității pentru un domeniu a cărui frontieră este formată din segmente de dreaptă poate fi studiată, în general, cu ajutorul coordonatelor rectilinii.

§ 2. OPERATORI DIFERENȚIALI

În cele ce urmează ne vom limita la cazul în care cele două familii de linii de coordonate formează două fascicule de drepte, caz care corespunde problemei patrulaterului elastic. Vom folosi reprezentarea omografică (18), particularizînd apoi rezultatele pentru diferite cazuri remarcabile.

2.1. *Cazul în care liniile de coordonate formează două fascicule de drepte concurente.* Vom calcula întîi diferiți operatori care intervin în calcul. Obținem cu ușurință

$$\begin{aligned}
\frac{\partial x}{\partial \xi} &= \frac{(bC_1 - aC_2)\eta + cC_1 - aC_3}{(a\xi + b\eta + c)^2}, & \frac{\partial x}{\partial \eta} &= \frac{(aC_2 - bC_1)\xi + cC_2 - bC_3}{(a\xi + b\eta + c)^2}, \\
\frac{\partial y}{\partial \xi} &= \frac{(bK_1 - aK_2)\eta + cK_1 - aK_3}{(a\xi + b\eta + c)^2}, & \frac{\partial y}{\partial \eta} &= \frac{(aK_2 - bK_1)\xi + cK_2 - bK_3}{(a\xi + b\eta + c)^2}.
\end{aligned} \tag{30}$$

Parametrii diferențiali de ordinul întîi ai lui Lamé vor fi dați de

$$\begin{aligned}
\frac{1}{h_x^2} = {} & \frac{1}{(a\xi+b\eta+c)^4}\{[a^2(C_2^2+K_2^2)-2ab(C_1C_2+K_1K_2)+b^2(C_1^2+K_1^2)]\eta^2+ \\
& + 2\,[a^2(C_2C_3 + K_2K_3) - ab(C_1C_3 + K_1K_3) - ac(C_1C_2 + K_1K_2) + \\
& + bc(C_1^2 + K_1^2)]\eta + a^2(C_3^2 + K_3^2) - 2ac(C_1C_3 + K_1K_3) + c^2(C_1^2 + K_1^2)\}\,, \\
\frac{1}{h_y^2} = {} & \frac{1}{(a\xi+b\eta+c)^4}\{[a^2(C_2^2+K_2^2)-2ab(C_1C_2+K_1K_2)+b^2(C_1^2+K_1^2)]\xi^2+ \\
& + 2\,[b^2(C_1C_3 + K_1K_3) - ab(C_2C_3 + K_2K_3) - bc(C_1C_2 + K_1K_2) + \\
& + ac(C_2^2 + K_2^2)]\xi + b^2(C_3^2 + K_3^2) - 2bc(C_2C_3 + K_2K_3) + c^2(C_2^2 + K_2^2)\}\,.
\end{aligned} \tag{31}$$

Unghiul ω al celor două fascicule de linii de coordonate într-un punct curent este dat de

$$\begin{aligned}\cos\omega = \frac{h_x h_y}{(a\xi + b\eta + c)^4}\{&-[a^2(C_2^2 + K_2^2) - 2ab(C_1C_2 + K_1K_2) + b^2(C_1^2 + \\ &+ K_1^2)]\xi\eta - [a^2(C_2C_3 + K_2K_3) - ab(C_1C_3 + K_1K_3) - ac(C_1C_2 + K_1K_2) + \\ &+ bc(C_1^2 + K_1^2)]\xi - [b^2(C_1C_3 + K_1K_3) - ab(C_2C_3 + K_2K_3) - bc(C_1C_2 + \\ &+ K_1K_2) + ac(C_2^2 + K_2^2)]\eta + c^2(C_1C_2 + K_1K_2) + ab(C_3^2 + K_3^2) - \\ &- ac(C_2C_3 + K_2K_3) - bc(C_1C_3 - K_1K_3)\}.\end{aligned} \tag{32}$$

Determinantul funcțional D va fi exprimat prin

$$\frac{1}{D} = \frac{1}{(a\xi + b\eta + c)^3}[a(C_2K_3 - C_3K_2) + b(C_3K_1 - C_1K_3) + c(C_1K_2 - C_2K_1)]. \tag{33}$$

Operatorul lui Laplace capătă forma

$$\begin{aligned}\Delta = D^2\left(\frac{1}{h_y^2}\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} - \frac{2\cos\omega}{h_x h_y}\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta} + \frac{1}{h_x^2}\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}\right) + \left[\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{D}{h_y}\right)^2 - \right. \\ \left. - \frac{b}{a\xi + b\eta + c}D^2\frac{\cos\omega}{h_x h_y}\right]\frac{\partial}{\partial\xi} + \left[\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{D}{h_x}\right)^2 - \frac{a}{a\xi + b\eta + c}D^2\frac{\cos\omega}{h_x h_y}\right]\frac{\partial}{\partial\eta},\end{aligned} \tag{34}$$

cu ajutorul lui putînd scrie cu ușurință ecuația biarmonică.

După cum se observă, coeficienții care intervin în această expresie și pe care — pentru simplificare — nu i-am mai scris explicit, sînt polinoame de gradul patru în raport cu ξ și η, divizibile prin $(a\xi + b\eta + c)$.

2.2. *Cazul în care liniile de coordonate formează un fascicul de drepte concurente și un fascicul de drepte paralele.* Făcînd $a = 0$ în formulele de la punctul precedent, corespunzător reprezentării (18″), obținem pentru parametrii diferențiali de ordinul întîi

$$\begin{aligned}\frac{1}{h_x^2} &= \frac{C_1^2 + K_1^2}{(b\eta + c)^2}, \\ \frac{1}{h_y^2} &= \frac{1}{(b\eta + c)^4}\{b^2(C_1^2 + K_1^2)\xi^2 + 2b[b(C_1C_3 + K_1K_3) - c(C_1C_2 + K_1K_2)]\xi + \\ &\quad + b^2(C_3^2 + K_3^2) - 2bc(C_2C_3 + K_2K_3) + c^2(C_2^2 + K_2^2)\}.\end{aligned} \tag{35}$$

Unghiul ω al liniilor de coordonate va fi dat de

$$\cos\omega = -\frac{h_x h_y}{(b\eta + c)^3}[b(C_1^2 + K_1^2)\xi + b(C_1C_3 + K_1K_3) - c(C_1C_2 + K_1K_2)]. \tag{36}$$

Determinantul funcțional D se exprimă prin

$$\frac{1}{D} = \frac{b(C_3K_1 - C_1K_3) + c(C_1K_2 - C_2K_1)}{(b\eta + c)^3}, \tag{37}$$

iar parametrul diferențial de ordinul al doilea devine

$$\begin{aligned}\frac{1}{D^2}\Delta = \frac{1}{h_y^2}\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} - 2\frac{\cos\omega}{h_x h_y}\frac{\partial^2}{\partial\xi\,\partial\eta} + \frac{1}{h_x^2}\frac{\partial^2}{\partial\eta^2} - \\ - \frac{2b}{b\eta + c}\frac{\cos\omega}{h_x h_y}\frac{\partial}{\partial\xi} + \frac{2b}{b\eta + c}\frac{1}{h_x^2}\frac{\partial}{\partial\eta}.\end{aligned} \tag{38}$$

2.3. *Cazul în care liniile de coordonate formează două fascicule de drepte paralele.* Observăm că, în acest caz și numai în acest caz, toate derivatele parțiale de ordinul întîi ale funcțiilor $x = x(\xi, \eta)$ și $y = y(\xi, \eta)$ sînt constante, deci ecuația armonică și toate relațiile care intervin sînt cu coeficienți constanți. Remarcăm de asemenea că $\cos\omega = \text{const.}$, prin urmare sistemul de coordonate respectiv este sistemul de coordonate carteziene oblice, pe care l-am considerat în [1].

Folosind transformarea omografică (18), în care facem $a = b = 0$, obținem pentru parametrii diferențiali de ordinul întîi

$$h_x = \frac{c}{\sqrt{C_1^2 + K_1^2}}, \qquad h_y = \frac{c}{\sqrt{C_2^2 + K_2^2}} \tag{39}$$

iar pentru determinantul funcțional

$$D = \frac{c^2}{C_1K_2 - C_2K_1}. \tag{40}$$

Unghiul constant dintre fasciculele de drepte paralele este dat de

$$\cos\omega = \frac{C_1C_2 + K_1K_2}{\sqrt{(C_1^2 + K_1^2)(C_2^2 + K_2^2)}}. \tag{41}$$

Parametrul diferențial de ordinul al doilea se exprimă prin

$$\frac{1}{c^2}(C_1K_2 - C_2K_1)^2\Delta = (C_2^2 + K_2^2)\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} - 2(C_1C_2 + K_1K_2)\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta} + (C_1^2 + K_1^2)\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}. \tag{42}$$

În particular, pentru

$$C_1C_2 + K_1K_2 = 0, \tag{43}$$

obținem un sistem de coordonate carteziene ortogonale ($\omega = \pi/2$).

Luînd 1)

$$C_1 = K_2, \qquad C_2 = -K_1, \tag{44}$$

observăm că condiția de ortogonalitate (43) este satisfăcută. În acest caz determinantul funcțional va fi dat de

$$D = \frac{c^2}{C_1^2 + K_1^2} = \frac{c^2}{C_2^2 + K_2^2}. \tag{40'}$$

---

1) Aceasta corespunde cazului coordonatelor curbilinii armonice; se poate vedea, de exemplu [4].

§ 3. FORMULAREA PROBLEMEI PLANE A TEORIEI ELASTICITĂȚII ÎN COORDONATE RECTILINII

În cele ce urmează vom particulariza rezultatele obținute în cazul coordonatelor curbilinii oarecare.

3.1. *Cazul coordonatelor curbilinii oarecare.* În coordonate curbilinii oarecare (s_ξ, s_η) starea de tensiune se exprimă sub forma

$$\begin{aligned} \sigma_\xi &= \frac{\partial^2 F}{\partial s_\eta^2} + \frac{\operatorname{cosec}\omega}{\rho_\eta}\left(\frac{\partial F}{\partial s_\xi} - \cos\omega\frac{\partial F}{\partial s_\eta}\right), \\ \sigma_\eta &= \frac{\partial^2 F}{\partial s_\xi^2} + \frac{\operatorname{cosec}\omega}{\rho_\xi}\left(\frac{\partial F}{\partial s_\eta} - \cos\omega\frac{\partial F}{\partial s_\xi}\right), \end{aligned} \tag{45}$$

$$\begin{aligned} \tau_{\xi\eta} = &-\operatorname{cosec}\omega\left(\frac{\partial}{\partial s_\xi} - \cos\omega\frac{\partial}{\partial s_\eta}\right)\frac{\partial F}{\partial s_\eta} + \\ &+ \operatorname{cosec}^2\omega\left(\frac{\cos\omega}{\rho_\eta} + \frac{1}{\rho'_\xi}\right)\left(\frac{\partial F}{\partial s_\xi} - \cos\omega\frac{\partial F}{\partial s_\eta}\right), \\ \tau_{\eta\xi} = &-\operatorname{cosec}\omega\left(\frac{\partial}{\partial s_\eta} - \cos\omega\frac{\partial}{\partial s_\xi}\right)\frac{\partial F}{\partial s_\xi} + \\ &+ \operatorname{cosec}^2\omega\left(\frac{\cos\omega}{\rho_\xi} + \frac{1}{\rho'_\eta}\right)\left(\frac{\partial F}{\partial s_\eta} - \cos\omega\frac{\partial F}{\partial s_\xi}\right), \end{aligned} \tag{45'}$$

funcția de tip Airy $F = F(s_\xi, s_\eta)$ verificînd ecuația biarmonică

$$\Delta\Delta F = 0, \tag{46}$$

unde operatorul lui Laplace este dat de

$$\begin{aligned} \Delta = \operatorname{cosec}^2\omega\Bigg\{&\frac{\partial^2}{\partial s_\xi^2} - \cos\omega\left(\frac{\partial^2}{\partial s_\xi\,\partial s_\eta} + \frac{\partial^2}{\partial s_\eta\,\partial s_\xi}\right) + \frac{\partial^2}{\partial s_\eta^2} - \\ &- \operatorname{cosec}\omega\left[\left(\frac{1}{\rho_\xi} - \frac{1}{\rho'_\xi}\right)\cos\omega + \frac{\cos^2\omega}{\rho'_\eta} - \frac{1}{\rho_\eta}\right]\frac{\partial}{\partial s_\xi} - \\ &- \operatorname{cosec}\omega\left[\left(\frac{1}{\rho_\eta} - \frac{1}{\rho'_\eta}\right)\cos\omega + \frac{\cos^2\omega}{\rho'_\xi} - \frac{1}{\rho_\xi}\right]\frac{\partial}{\partial s_\eta}\Bigg\}. \end{aligned} \tag{47}$$

Condițiile de limită ne conduc la cunoașterea pe contur a valorilor funcției și derivatei normale.

În coordonate (ξ, η) starea de tensiune se exprimă sub forma

$$\begin{aligned}\frac{\sigma_\xi}{h_y^2} &= \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} + D\left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} - \frac{\partial y}{\partial \eta}\frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2}\right)\frac{\partial F}{\partial \xi} - D\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} - \frac{\partial y}{\partial \xi}\frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2}\right)\frac{\partial F}{\partial \eta},\\ \frac{\sigma_\eta}{h_x^2} &= \frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2} - D\left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} - \frac{\partial x}{\partial \eta}\frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2}\right)\frac{\partial F}{\partial \xi} + D\left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} - \frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2}\right)\frac{\partial F}{\partial \eta},\end{aligned} \tag{48}$$

$$\begin{aligned}\frac{\tau_{\xi\eta}}{h_y^2} = {} & -\frac{D}{h_y^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \xi \partial \eta} + D\frac{\cos\omega}{h_x h_y}\frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} + \frac{D^2}{2}\biggl[\frac{1}{h_y^2}\left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta}\frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta}\right) -\\ & - \frac{\cos\omega}{h_x h_y}\left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} - \frac{\partial x}{\partial \eta}\frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2}\right) - \frac{1}{2D^3}\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{D^2}{h_y^2}\right)\biggr]\frac{\partial F}{\partial \xi} -\\ & - \frac{D^2}{2}\biggl\{\frac{1}{h_y^2}\biggl[\frac{\partial y}{\partial \eta}\frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} - \frac{\partial x}{\partial \eta}\frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} - 2\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{D}\right)\biggr] - \frac{\cos\omega}{h_x h_y}\biggl[\frac{\partial y}{\partial \eta}\frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} -\\ & - \frac{\partial x}{\partial \eta}\frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} - 2\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{1}{D}\right)\biggr| - \frac{1}{2D^3}\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{D^2}{h_y^2}\right)\biggr\}\frac{\partial F}{\partial \eta},\\ \frac{\tau_{\eta\xi}}{h_x^2} = {} & D\frac{\cos\omega}{h_x h_y}\frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2} - \frac{D}{h_x^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{D^2}{2}\biggl\{\frac{1}{h_x^2}\biggl[\frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} - \frac{\partial y}{\partial \xi}\frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} - 2\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{1}{D}\right)\biggr] -\\ & - \frac{\cos\omega}{h_x h_y}\biggl[\frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{\partial y}{\partial \xi}\frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} - 2\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{D}\right)\biggr] - \frac{1}{2D^3}\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{D^2}{h_x^2}\right)\biggr\}\frac{\partial F}{\partial \xi} +\\ & + \frac{D^2}{2}\biggl[\frac{1}{h_x^2}\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{\partial y}{\partial \xi}\frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta}\right) - \frac{\cos\omega}{h_x h_y}\biggl(\frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} -\\ & - \frac{\partial y}{\partial \xi}\frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2}\biggr) - \frac{1}{2D^3}\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{D^2}{h_x^2}\right)\biggr]\frac{\partial F}{\partial \eta},\end{aligned} \tag{48'}$$

unde funcția de tip Airy $F = F(\xi, \eta)$ verifică ecuația biarmonică (46), operatorul lui Laplace fiind dat de (10).

Putem exprima starea de deformație analog cu ajutorul unei funcții de deplasare $\mathcal{F} = \mathcal{F}(s_\xi, s_\eta) = \mathcal{F}(\xi, \eta)$, de tip Marguerre.

3.2. *Cazul coordonatelor rectilinii oarecare.* Într-un sistem de coordonate rectilinii oarecare (pentru care curburile sînt nule) starea de tensiune se va exprima sub forma

$$\begin{aligned}\sigma_\xi &= \frac{\partial^2 F}{\partial s_\eta^2},\\ \sigma_\eta &= \frac{\partial^2 F}{\partial s_\xi^2},\end{aligned} \tag{49}$$

$$\begin{aligned}\tau_{\xi\eta} &= -\frac{\partial}{\partial s_\eta}\left[\operatorname{cosec}\omega\left(\frac{\partial F}{\partial s_\xi} - \cos\omega\,\frac{\partial F}{\partial s_\eta}\right)\right],\\ \tau_{\eta\xi} &= -\frac{\partial}{\partial s_\xi}\left[\operatorname{cosec}\omega\left(\frac{\partial F}{\partial s_\eta} - \cos\omega\,\frac{\partial F}{\partial s_\xi}\right)\right],\end{aligned} \tag{49'}$$

operatorul lui Laplace fiind dat de

$$\begin{aligned}\Delta = \operatorname{cosec}^2 \omega \left\{ \frac{\partial^2}{\partial s_\xi^2} - \cos \omega \left(\frac{\partial^2}{\partial s_\xi \, \partial s_\eta} + \frac{\partial^2}{\partial s_\eta \, \partial s_\xi} \right) + \frac{\partial^2}{\partial s_\eta^2} + \right. \\ \left. + \operatorname{cotg} \omega \left[\left(\frac{1}{\rho'_\xi} - \frac{\cos \omega}{\rho'_\eta} \right) \frac{\partial}{\partial s_\xi} + \left(\frac{1}{\rho'_\eta} - \frac{\cos \omega}{\rho'_\xi} \right) \frac{\partial}{\partial s_\eta} \right] \right\}.\end{aligned} \tag{50}$$

Pentru starea de deformație se pot obține simplificări analoge de calcul.

3.3. *Cazul în care liniile de coordonate formează două fascicule de drepte concurente.* În acest caz reprezentarea (48), (48′) capătă forma

$$\begin{aligned}\frac{\sigma_\xi}{h_y^2} &= \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} + \frac{2b}{a\xi + b\eta + c} \frac{\partial F}{\partial \eta}, \\ \frac{\sigma_\eta}{h_x^2} &= \frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2} + \frac{2a}{a\xi + b\eta + c} \frac{\partial F}{\partial \xi},\end{aligned} \tag{51}$$

$$\begin{aligned}\frac{\tau_{\xi\eta}}{D} = &- \frac{\partial^2 F}{\partial \xi \partial \eta} + \cos \omega \frac{h_y}{h_x} \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} - \frac{b}{a\xi + b\eta + c} \frac{\partial F}{\partial \xi} + \\ &+ \frac{1}{2} \left[\frac{5b}{a\xi + b\eta + c} \frac{h_y}{h_x} \cos \omega - \frac{1}{h_y^2} \frac{\partial}{\partial \xi} (h_y^2) - \frac{a}{a\xi + b\eta + c} \right] \frac{\partial F}{\partial \eta},\end{aligned} \tag{51'}$$

$$\begin{aligned}\frac{\tau_{\eta\xi}}{D} = \cos \omega \frac{h_x}{h_y} \frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{1}{2} \left[\frac{5a}{a\xi + b\eta + c} \frac{h_x}{h_y} \cos \omega - \frac{1}{h_x^2} \frac{\partial}{\partial \eta} (h_x^2) - \right. \\ \left. - \frac{b}{a\xi + b\eta + c} \right] \frac{\partial F}{\partial \xi} - \frac{a}{a\xi + b\eta + c} \frac{\partial F}{\partial \eta},\end{aligned}$$

unde funcția biarmonică se obține folosind operatorul lui Laplace (34).

3.4. *Cazul în care liniile de coordonate formează un fascicul de drepte concurente și un fascicul de drepte paralele.* Folosind rezultatele de la punctul 2.2, putem exprima starea de tensiune pentru acest caz particular de coordonate rectilinii sub forma

$$\begin{aligned}\frac{\sigma_\xi}{h_y^2} &= \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} + \frac{2b}{b\eta + c} \frac{\partial F}{\partial \eta}, \\ \frac{\sigma_\eta}{h_x^2} &= \frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2},\end{aligned} \tag{52}$$

$$\begin{aligned}\frac{\tau_{\xi\eta}}{D} &= - \frac{\partial^2 F}{\partial \xi \partial \eta} + \cos \omega \frac{h_y}{h_x} \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} - \frac{b}{b\eta + c} \frac{\partial F}{\partial \xi} + \frac{1}{2} \frac{3b}{b\eta + c} \frac{h_y}{h_x} \cos \omega \frac{\partial F}{\partial \eta}, \\ \frac{\tau_{\eta\xi}}{D} &= \cos \omega \frac{h_x}{h_y} \frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{1}{2} \frac{3b}{b\eta + c} \frac{\partial F}{\partial \xi}.\end{aligned} \tag{52'}$$

Ținînd seama de faptul că operatorul armonic se exprimă sub forma (38), putem formula cu ușurință problema plană a teoriei elasticității și în acest caz.

Observăm că, dacă în acest sistem de coordonate facem $C_1 = 0$ și schimbarea de variabilă

$$\delta = \frac{C_3}{b\eta + c}, \quad \theta = \operatorname{arc\,tg} \frac{K_1\xi + K_3}{C_3}, \tag{53}$$

obținem sistemul de coordonate triunghiulare considerat în [3] și regăsim toate rezultatele care au fost obținute în acest caz pe cale directă pentru problema plană a teoriei elasticității.

3.5. *Cazul în care liniile de coordonate formează două fascicule de drepte paralele.* În cazul în care cele două poluri ale fasciculelor de drepte sînt aruncate la infinit, starea de tensiune se exprimă sub forma

$$\begin{aligned} \sigma_\xi &= \frac{c^2}{C_2^2 + K_2^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2}, \\ \sigma_\eta &= \frac{c^2}{C_1^2 + K_1^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2}, \end{aligned} \tag{54}$$

$$\begin{aligned} \tau_{\xi\eta} &= \frac{c^2}{C_1K_2 - C_2K_1} \left(\frac{C_1C_2 + K_1K_2}{C_2^2 + K_2^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial \xi \partial \eta} \right), \\ \tau_{\eta\xi} &= \frac{c^2}{C_1K_2 - C_2K_1} \left(\frac{C_1C_2 + K_1K_2}{C_1^2 + K_1^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial \xi \partial \eta} \right). \end{aligned} \tag{54'}$$

Pentru (44) determinantul funcțional D capătă forma (40′) iar reprezentarea (54), (54′) va coincide cu cea cunoscută din cazul coordonatelor carteziene ortogonale pentru funcția de tensiune *DF*.

În felul acesta problema plană a teoriei elasticității pentru aceste sisteme de coordonate este pe deplin precizată. În ceea ce privește metodele de calcul, se pot folosi ideile expuse în [6].

Primită la redacție la 14 iulie 1962

CONSIDÉRATIONS SUR LE PROBLÈME PLAN DE LA THÉORIE DE L'ÉLASTICITÉ EN COORDONNÉES RECTILIGNES QUELCONQUES

RÉSUMÉ

En annulant les rayons de courbure (5), on obtient les conditions qui mènent aux coordonnées rectilignes. On considère surtout trois cas particuliers : *a*) les lignes de coordonnées forment deux faisceaux de droites concourantes, *b*) les lignes de coordonnées forment un faisceau de droites concourantes et un faisceau de droites parallèles, *c*) les lignes de coordonnées forment deux faisceaux de droites parallèles.

En utilisant ces résultats, on calcule plusieurs opérateurs différentiels et on exprime l'état de tension à l'aide d'une fonction de tension. Des considérations générales sur la possibilité de résoudre le problème plan de la théorie de l'élasticité, dans un domaine borné par des lignes droites, s'ensuivent.

BIBLIOGRAFIE

1. P. P. TEODORESCU, *Asupra problemei plane a elasticității în coordonate oblice*. St. cerc. mec. apl., **IX**, *2*, 391 (1958).
2. — *Probleme plane în teoria elasticității*, I, Ed. Acad. R.P.R., București, 1961.
3. — *Considerații în legătură cu problema plană a teoriei elasticității în coordonate triunghiulare*. St. cerc. mec. apl., **XIII**, *4*, 849 (1962).
4. — *Asupra problemei plane a teoriei elasticității în coordonate curbilinii oarecare*. I. *Introducere. Preliminarii matematice*. St. cerc. mec. apl., **XIII**, *5*, 1233 (1962).
5. — *Asupra problemei plane a teoriei elasticității în coordonate curbilinii oarecare*. II. *Stare de solicitare*. St. cerc. mec. apl., **XIII**, *6*, 1387 (1962).
6. — *Asupra problemei plane a teoriei elasticității în coordonate curbilinii oarecare*. III. *Formularea matematică a problemei. Metode de calcul*. St. cerc. mec. apl., **XIV**, *1*, 37 (1963).

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM KÖZPONTI KÖNYVTÁRA 1848

STABILIREA ȘI EXPERIMENTAREA UNUI PROCEDEU NOU PENTRU ÎNCERCAREA OȚELURILOR LA FORFECARE PURĂ

DE

N. IOSIPESCU[1]

539.3 : 620.1.669.14

Determinarea rezistenței la rupere prin forfecare pură a oțelului este necesară de realizat în mod curent, pentru a se cunoaște astfel în mod cît mai complet și mai exact caracteristicile mecanice comparative de rezistență la rupere pentru diferitele feluri de solicitări ale aceluiași oțel, cum și pentru a se putea stabili valorile rezistențelor de rupere la forfecare pură pentru diferitele oțeluri de calități variate, folosite la executarea construcțiilor metalice, la realizarea dispozitivelor mecanice și la confecționarea pieselor de mașini de tot felul.

Această categorie de încercări este necesară în tehnică, întrucît adeseori solicitările principale ale pieselor prelucrate din aceste oțeluri sînt acele de *forfecare*, *tăiere* sau *lunecare*, prin care se înțelege principial faptul că eforturile tangențiale sînt preponderente într-o mare măsură, dacă nu chiar absolut exclusive, într-o anumită secțiune, sau chiar într-o regiune întreagă a unei piese. Piesele respective trebuie să reziste în cele mai bune condiții la acțiunea acestor eforturi tangențiale, produse cu o intensitate progresivă pe măsura amplificării solicitării, mai înainte de a se ajunge la ruperea lor, produsă numai sub acțiunea unor asemenea eforturi tangențiale.

Astfel de încercări, aplicate pentru oțeluri, se pot efectua pe epruvete confecționate din probele luate, după norme fixate în mod oficial și în procentele stabilite de către standardele respective asupra încercărilor necesare de făcut cu ocazia fixării condițiilor de recepție ale materialelor. Probele respective sînt preluate din loturile de materiale metalice fabricate de către uzinele metalurgice, pentru diferitele forme de secțiuni și profiluri-tip de oțeluri de construcție laminate.

Asemenea probe se pot obține în același mod de la operațiile de turnare, forjare sau presare ale pieselor metalice brute, ce vor folosi apoi pentru prelucrarea din ele a elementelor mecanice şi a pieselor de maşini de tot felul, acele probe putînd servi, prin încercările respective, la stabilirea condiţiilor de rezistenţă la solicitările de forfecare pură a acelor piese.

---

[1] Institutul pentru cercetări în construcții și economia construcțiilor (INCERC).

Pînă în prezent încercările pentru determinarea rezistenţei oţelului la forfecare s-au realizat printr-o serie de procedee diferite, principial necorespunzătoare din punct de vedere ştiinţific, deşi ele sînt efectuate de cele mai multe ori sub forma unor anumite solicitări asemănătoare acelora reale, produse cu ocazia executării unor procese tehnologice de prelucrare şi de tăiere a metalelor. De asemenea, unele din aceste încercări sînt corespunzătoare modului de solicitare caracteristic al unora dintre elementele de construcţie, cum ar fi acele ale pieselor metalice servind la îmbinări şi la solidarizări, ca : nituri, buloane, pene de îmbinare etc. Procedeele de încercare la forfecare a oţelurilor cunoscute pînă astăzi, pe care le reproducem după tratatul lui Davis, Troxell şi Wiscocil [1], se prezintă precum urmează :

1. Încercările realizate cu ajutorul solicitărilor produse pînă la ruperea piesei respective, de către două piese sau fălci de forfecare din oţel, prevăzute cu muchii vii, acţionînd într-un acelaşi plan de tăiere, fiind aplicate pe cele două feţe sau margini paralele ale unor epruvete de secţiuni dreptunghiulare sau circulare (fig. 1).

2. Încercările de solicitare, mergînd pînă la rupere, realizate în condiţii practice analoge, dar pentru care eforturile sînt produse în mod simultan în două secţiuni de forfecare paralele, situate de o parte şi de alta a unei piese de solicitare masive, prevăzută cu două muchii vii pe margini, acţionînd asupra epruvetei, care este alcătuită dintr-o bară simplă, de secţiune dreptunghiulară sau circulară (fig. 2) rezemată la rîndul ei pe două piese metalice prevăzute de asemenea cu muchii vii.

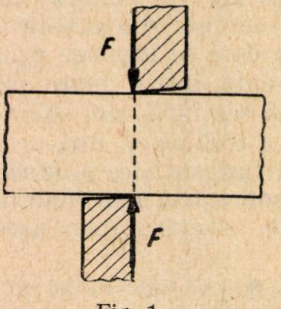


Fig. 1

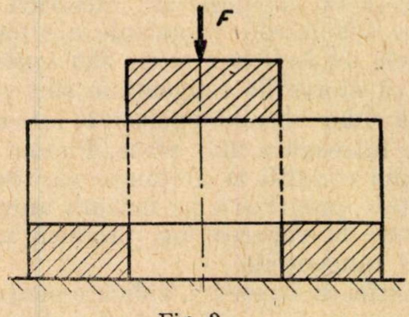


Fig. 2

3. Încercările făcute în mod special pentru determinarea rezistenţei de rupere la forfecare a niturilor sau buloanelor de diferite diametre, pentru solicitările produse într-o singură secţiune sau în două secţiuni de forfecare. Încercările acestea sînt realizate prin folosirea şi acţionarea la întindere a unor dispozitive speciale, prevăzute cu două plăci de solicitare bine ghidate ce alunecă una asupra celeilalte (fig. 3 *a*), sau a unei plăci intermediare lunecînd între alte două plăci exterioare (fig. 3 *b*), aceste

plăci fiind prevăzute cu găuri comune de diferite diametre, în care se introduc niturile sau buloanele pentru încercarea lor la forfecare.

4. Încercările de forfecare aplicate pe un contur închis, obținute în mod obișnuit pentru realizarea găurilor produse prin operațiile de *ștanțare* sau *poansonare* a tablelor de oțel de diferite grosimi (fig. 4).

5. Încercarea de forfecare sau de alunecare longitudinală, produsă printr-o solicitare de întindere a unei epruvete în formă de platbandă, în care s-au tăiat în prealabil, la oarecare distanță una de alta, două crestături oblice, cu laturile paralele și înclinate amîndouă în direcții la 45° față de axul piesei (fig. 5).

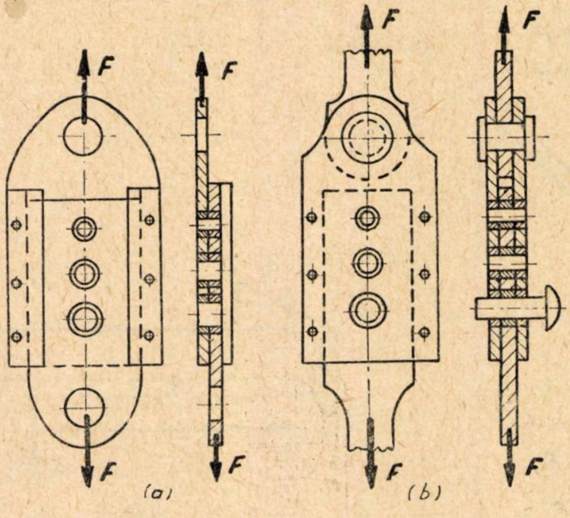


Fig. 3

6. Se folosesc adeseori în acest scop și încercările de torsiune sau de răsucire ale unor epruvete cilindrice, de secțiune circulară și de formă plină sau tubulară, solicitate pînă la ruperea lor sub acțiunea unui moment de răsucire M_r (fig. 6).

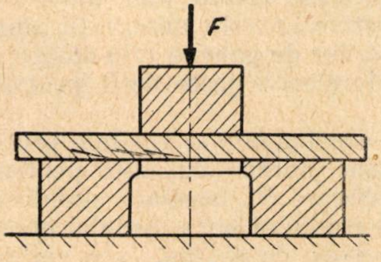


Fig. 4

Dezavantajele comune tuturor acestor procedee de încercare sînt că, deși fiecare din ele corespunde unui anumit mod precis de solicitare tehnică, bine determinat din punct de vedere practic și real, totuși nici unul nu corespunde unei stări de eforturi tangențiale pure dintr-o secțiune anumită, care să ducă la ruperea epruvetei exact după acea secțiune și numai din cauza acelor eforturi tangențiale, neexistînd de asemenea nici o repartiție uniformă a eforturilor de rupere pe secțiunea de forfecare respectivă, așa cum se urmărește întotdeauna la asemenea încercări.

Primele două procedee dintre acele menționate mai sus, corespund astfel modului de solicitare real și de rupere efectivă a niturilor, buloanelor și penelor de îmbinare, cu cîte una sau două secțiuni de forfecare. Deși solicitarea respectivă se aseamănă din punct de vedere practic unei operații tehnologice de așa-zisă *forfecare* sau *tăiere* a materialului, totuși ruperea epruvetelor respective nu se produce în aceste cazuri din cauza unor eforturi tangențiale τ, ci numai datorită acțiunilor locale și concentrărilor importante de eforturi normale σ, de natură complexă, cu caracter principal de compresiune transversală, din punctele de acțiune ale fălcilor aplicate asupra epruvetei, după cum s-a arătat și în articolul publicat anterior în revista ,,Studii și cercetări de mecanică aplicată'' [2].

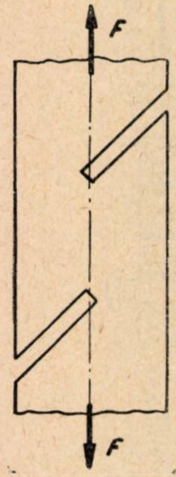


Fig. 5

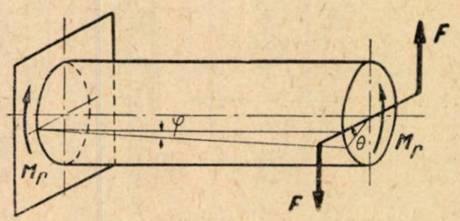


Fig. 6

Toate aceste încercări nu sînt deci valabile, prin rezultatele lor practice, decît pentru solicitările de același fel, produse de exemplu prin forfecarea niturilor, buloanelor și penelor, solicitate în acest mod, sau prin tăierea unor piese cu ajutorul unor foarfece sau al unor fălci dintr-un dispozitiv adecvat execuției operației respective. Aceste observații sînt în mare parte valabile și pentru cazul încercărilor de găurire prin *stanțare* sau *poansonare*, care nu pot da rezultate informative juste decît pentru operațiile tehnologice de acest gen.

Asemenea încercări nu sînt însă deloc concludente și valabile principial pentru aplicarea generală a rezultatelor practice obținute pentru cazul determinării rezistenței de rupere la forfecare R_f, necesară stabilirii rezistențelor admisibile respective, în vederea studiului sau calculului unor părți din construcțiile metalice, sau a unor piese de mașini, care vor fi solicitate numai de către o forță tăietoare simplă, sau de către o lunecare longitudinală, așa cum ar fi fost scopul principal al acestor încercări. Într-adevăr, această solicitare ar trebui să producă numai eforturi tangențiale pure în anumite secțiuni, la care acțiune va trebui să reziste materialul metalic respectiv, atunci cînd intensitatea solicitării nu depășește o anumită limită de rezistență care trebuie stabilită și pentru care trebuie făcute verificările sau calculele corespunzătoare ale elementelor respective de construcție.

Astfel că toate rezistențele de rupere, determinate prin oricare din aceste procedee menționate mai sus, au numai un caracter pur convențional și informativ, necorespunzînd în nici un caz unor stări de eforturi tangențiale pure, repartizate mai mult sau mai puțin uniform pe o secțiune de forfecare și cărora să se datorească în mod exclusiv pînă la urmă ruperea piesei, așa după cum se definesc în mod principial asemenea încercări.

Un alt dezavantaj general al folosirii oricăror epruvete de forme paralelipipedice sau cilindrice, cu marginile paralele, solicitate transversal la o forfecare pură, este acela că obținerea unei repartiții uniforme a eforturilor tangențiale, chiar pentru o secțiune supusă la o solicitare dată numai de către o forță tăietoare simplă și chiar atunci cînd aceasta ar fi aplicată în mod indirect în acea secțiune, fără acțiunile locale ale unor piese de solicitare, este imposibil de realizat în mod obișnuit pentru asemenea epruvete.

Într-adevăr, se știe că, în cazul formei dreptunghiulare a secțiunii piesei supuse la o solicitare de forfecare pură, repartiția acestor eforturi tangențiale, deși este uniformă în sensul lățimii, în cazul unei stări de eforturi plane, este totuși de o variație parabolică în sensul înălțimii, cu valoarea maximă la mijloc și cu valori nule la extremități. În cazul secțiunii circulare a piesei încercate, repartiția este și mai variată, atît ca valori, cît și ca direcții de acțiune, pe suprafața acelei secțiuni, din cauza condițiilor la limită diferite de pe contur. Aceasta face imposibilă aplicarea oricăror formule simplificate, stabilite pentru domeniul elastic de solicitare, care nu mai sînt valabile în domeniul plastic, mergînd pînă la rupere.

Din cauza dificultăților practice și a lipsei unor procedee adecvate de încercare, s-a ajuns astăzi pînă acolo încît, în standardele referitoare la încercările oțelurilor din țara noastră, nici nu s-au mai prevăzut încercările de forfecare, după cum se constată din *Colecția de comentarii STAS pentru fontă și oțeluri* [3], deși tratatele de specialitate tratează încă pe larg despre această chestiune.

Asemenea încercări sînt totuși de mare importanță pentru anumite solicitări și în special pentru stabilirea calității oțelurilor de rezistență ale pieselor puternic solicitate, cum sînt acele ale materialului de cale și ale materialului rulant de cale ferată, ale construcțiilor metalice speciale, ale podurilor metalice de cale ferată și de șosea etc., în primul rînd pentru a putea servi ca o bază de constatare a acestor calități cu ocazia recepției, cum și pentru determinarea rezistențelor admisibile de calcul pentru proiectare. Stabilirea și aplicarea unui procedeu corect din punct de vedere științific, care face obiectul lucrării de față, va împlini astfel o mare lipsă și va permite să se realizeze completarea standardelor respective cu aceste încercări de mare importanță pentru determinarea calităților de rezistență ale oțelurilor.

O definiție justă a încercărilor de forfecare, ca și a acelora de întindere de altfel, este aceea dată de către Morlay în tratatul său de *Rezistența materialelor* [4], care spune: „Sarcina maximă necesară pentru ruperea unei epruvete supusă la întindere sau la forfecare simplă, împărțită prin suprafața inițială a secțiunii din locul ruperii, dă rezistența nominală maximă de rupere a materialului pentru aceste feluri specifice de eforturi".

Aceasta înseamnă că primele condiții principale care trebuiesc urmărite în realizarea unui procedeu de încercare la forfecare, pentru orice material, sînt acele de producere a unor eforturi tangențiale pure, maxime și uniform distribuite pe o secțiune minimă a epruvetei respective, astfel ca ruperea să se realizeze numai la acțiunea acelor eforturi tangențiale și exact în secțiunea în care se produc ele, cum și în mod simultan pe toată secțiunea. Aceasta va conduce la posibilitatea de realizare a unui calcul precis al eforturilor tangențiale limită de rupere a acelui material, ceea ce s-a urmărit și s-a reușit să se obțină, principial și experimental, prin noul procedeu, după cum rezultă din studiul fotoelastic din articolul precedent [2].

Necorespondența cu realitatea fenomenelor fizice și cu aceste condiții de bază, a tuturor procedeelor de încercare la forfecare folosite în trecut și existente și în prezent, pentru toate materialele, este arătată de către toți autorii de specialitate, începînd cu O. Mohr, care în tratatul său de *Mecanică tehnică* [5], în ediția din anul 1906, în care dezvoltă principiile celebrei sale teorii a ruperii materialelor, spunea : „Cunoașterea împrejurărilor de care depind limitele de elasticitate și limitele de rupere ale materialelor aparțin celor mai importante principii de bază ale Rezistenței Materialelor. Nenumărate încercări au fost făcute pentru a se putea determina aceste limite, dar nu s-a ajuns pînă astăzi la rezultate neîndoelnice". El spune apoi : „Poate că se va ajunge în viitor să se învingă dificultățile arătate, prin dispozitive de încercare mai perfecte ; pînă atunci sîntem obligați să urmăm drumul de pînă acum și să căutăm ipoteze care să fie în stare să lămurească un număr cît mai mare posibil de rezultate categorice".

Mai departe el arată că : „Cea mai mare nesiguranță se produce la încercările de forfecare, deoarece repartiția forței tăietoare asupra suprafeței de rupere, iar afară de aceasta, modul de producere a eforturilor normale de pe această suprafață, sînt complet necunoscute".

După trecerea unui timp de jumătate de secol, Kollmann spune cam același lucru în tratatul său de *Tehnologia lemnului* [6], apărut în anul 1951, în capitolul privitor la procedeele de încercare la forfecare ale acestui material și aplicate pînă în timpurile de față, ceea ce este de altfel valabil și pentru celelalte materiale : „. . . nu s-a ajuns încă pînă acum la situația de a se realiza o stare de eforturi tangențiale aproximativ pure, fără influențe secundare, perturbatoare. Greutatea problemei rezultă destul de evident prin numărul mare de încercări de soluționare a ei, prin care au fost modificate în multiple moduri, atît felul procedeului de încercare, cît și forma și mărimea epruvetelor. Sub influența solicitărilor secundare inevitabile, care nu se pot stabili ca fel și mărime, rezultatele sînt foarte diferite și nu sînt deloc comparabile între ele. Aceasta a făcut pe F. Fonrobert [7] să considere că cercetarea rezistenței la forfecare este încă în parte o problemă a viitorului".

De asemenea în tratatul lui Ponomariov, privitor la *Calculul de rezistență a construcțiilor de mașini* [8], în vol. I, apărut în anul 1956, la § 8 se spune : „Numeroase încercări de solicitare a unei bare cu scopul realizării stării de tensiuni omogene de *forfecare pură* trebuie să fie considerate ca nereușite, deoarece în cazul unei asemenea solicitări apare o stare de tensiune neomogenă, foarte complicată, care este foarte diferită de *forfecarea pură*".

Din aceste cîteva citate, alese dintre multe altele tot atît de categorice, se constată suficient care este importanța și dificultatea problemei, care a căpătat o rezolvare favorabilă și definitivă prin lucrarea de față.

Conform celor arătate în articolul anterior [2], condițiile practice principale care trebuiesc avute în vedere pentru realizarea unui nou procedeu de încercare la forfecare pură a materialelor, în vederea evitării tuturor inconvenientelor procedeelor existente, care ar trebui să fie realizate prin alcătuirea unei epruvete de o formă potrivită, încercată cu ajutorul unui dispozitiv de solicitare adecvat, pentru a se obține ruperea ei la o stare de eforturi tangențiale pure, maxime și uniform distribuite pe acea secțiune de rupere, sînt următoarele :

— Epruveta trebuie să fie solicitată în secțiunea de rupere numai de către o forță tăietoare simplă, producătoare de eforturi tangențiale pure τ, acționînd acolo în mod indirect, fără a interveni în acea secțiune nici un moment încovoietor sau forță axială, care să dea naștere la eforturi normale σ, pe secțiune, cum și nici acțiunile locale directe ale unor piese de solicitare transversale producătoare de concentrări de eforturi ;

— Ruperea epruvetei trebuie să se producă într-o secțiune bine determinată și precis stabilită în mod anticipat, care să îndeplinească aceste condiții în domeniul elastic, după cum este cazul pentru tipul de epruvete studiat aci, conform rezultatelor cercetărilor fotoelastice din studiul publicat anterior [2], obținute pentru modul de alcătuire și felul de solicitare al epruvetei, pe baza procedeului nou stabilit ;

— Producerea ruperii epruvetei trebuie să se întîmple numai la solicitarea de forfecare simplă, dînd astfel naștere numai la eforturi tangențiale pure (τ), de valori maxime în toate punctele acelor secțiuni de rupere, direcțiile eforturilor principale sau izostaticele respective trebuind să fie deci înclinate la 45°, față de acea secțiune, ceea ce de asemenea s-a stabilit pe cale fotoelastică în articolul precedent pentru tipul de epruvetă studiat ;

— Repartiția eforturilor tangențiale pe secțiunea de rupere nu trebuie să prezinte nici un fel de variație, cu valori maxime la mijlocul înălțimii sau cu concentrări de eforturi la extremitățile ei, care să ducă la amorsarea unor ruperi premature intempestive și la repartiții necunoscute ale eforturilor tangențiale de rupere pe secțiune ;

— Secțiunea de rupere a epruvetei trebuie să prezinte deci o distribuție practic uniformă a eforturilor tangențiale pure în domeniul elastic de solicitare, astfel încît acea distribuție să poată rămîne uniformă și în domeniul plastic, în continuare, mergînd pînă la rupere, ceea ce rezultă de asemenea din studiul fotoelastic publicat anterior [2] ;

— Epruvetele trebuie să fie cît mai simple și să se poată confecționa ușor, cu mijloacele de atelier și cu mașinile-unelte obișnuite, iar încercările să se poată executa pe orice șantier de construcții, la orice uzină, sau în orice laborator de încercare a materialelor, prevăzute cu o presă obișnuită de încercare la compresiune sau întindere, folosită și pentru celelalte încercări, cum și cu un dispozitiv de solicitare corespunzător;

— Rezistența de rupere la forfecare trebuie să se obțină, după definiția lui Morlay [4], în mod cît mai simplu, prin împărțirea valorii forței tăietoare maxime din secțiunea de forfecare, din momentul ruperii, prin suprafața acelei secțiuni, nu ca o medie convențională, prea puțin valabilă în domeniul plastic de solicitare, ci ca o valoare nominală constantă și uniform distribuită pe secțiunea de rupere, atît în domeniul elastic cît și în acel plastic.

S-a văzut în articolul precedent [2] că aceste condiții de obținere a unei solicitări date de către o forță tăietoare simplă, despre care toți autorii de pînă acum susțin că nu se poate realiza în practică, se pot totuși îndeplini în cele mai bune împrejurări prin folosirea unei solicitări de încovoiere cu un moment încovoietor de variație liniară, deci cu o forță tăietoare constantă, cu un punct de moment nul sau de inflexiune la mijloc, în dreptul căruia nu va acționa decît forța tăietoare simplă, fără nici o încovoiere sau forță axială (fig. 7).

Realizarea experimentală a unei asemenea solicitări se poate efectua în modul cel mai simplu cu ajutorul unei piese de forma și modul de solicitare din figura 8, la care porțiunea principală AB ar putea reprezenta

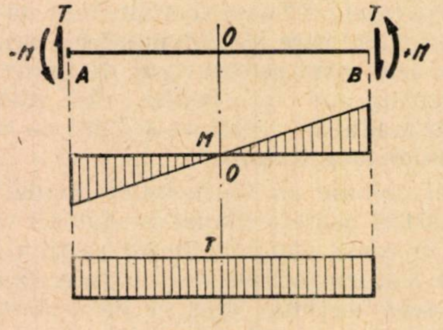


Fig. 7

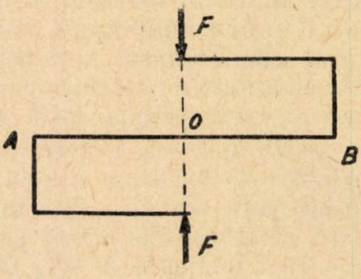


Fig. 8

epruveta de încercare, iar solicitarea respectivă va trebui să fie realizată printr-un dispozitiv de solicitare adecvat, după cum se va vedea mai departe, conform unei alcătuiri ca în figura 9.

Acest mod de solicitare nu soluționează însă în mod complet chestiunea, deoarece forța tăietoare fiind constantă în lungul unei asemenea epruvete, solicitate de către un moment încovoietor cu variație liniară, deci cu valori crescînde către capete, ruperea ei, în cazul cînd ea este de forma cu secțiune constantă, nu se va produce în nici un caz sub acțiunea solicitării de forfecare pură din dreptul secțiunii mijlocii, ci tocmai către capete unde, în afară de această forță tăietoare acționează și momentele încovoietoare respective. De asemenea, producerea solicitării de încovoiere cu variație liniară trebuind să se realizeze prin aplicarea unor forțe sau presiuni cît mai concentrate asupra marginilor epruvetei, în afară de regiunea de forfecare pură și de moment nul, deci către capetele epruvetei, intervin acolo și concentrările de eforturi, care vor contribui în plus și ele într-o mare măsură la producerea ruperilor, datorită unor cauze străine de forfecare, în contra cărora trebuie luate precauții speciale.

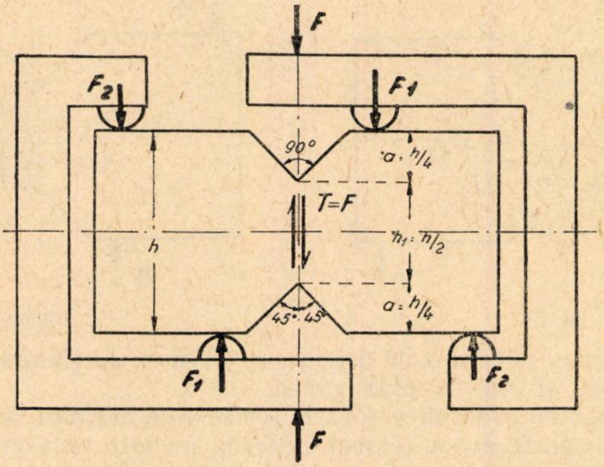


Fig. 9

După cum s-a arătat și în studiul publicat anterior [2], ruperea acestei epruvete cu punct de moment nul în secțiunea de forfecare pură se poate deci realiza numai prin prevederea ei în dreptul acelei secțiuni cu două crestături în formă de V, care să micșoreze înălțimea secțiunii nete pînă la o valoare suficientă pentru a duce la ruperea materialului respectiv, numai sub acțiunea acelei forțe tăietoare simple (fig. 9). Pentru ca eforturile tangențiale τ din acea secțiune să fie maxime, astfel ca să poată produce ruperea la forfecare, este necesar însă ca izostaticele respective să fie înclinate la 45° față de ea (fig. 10). Pentru ca acest lucru să fie posibil de obținut, mergînd pînă în apropiere de marginile superioară și inferioară ale epruvetei, conform condițiilor la limită de pe acel contur, trebuie ca înclinările laturilor crestăturilor în formă de V să fie și ele tot la un unghi de 45° față de secțiunea de rupere (vezi fig. 9).

Pentru ca valoarea lui $\tau_{\max}$ să fie practic constantă pe toată înălțimea secțiunii de forfecare pură, după cum s-a stabilit prin cercetările fotoelastice din articolul anterior [2], trebuie ca adîncimile celor două crestături în formă de V, cu laturile înclinate la 45°, să fie egale cu un sfert din înălțimea epruvetei ($a = 1/4\ h$), astfel ca înălțimea secțiunii nete dintre vîrfurile de unghi ale crestăturilor să fie egală cu jumătate din înălțimea totală a epruvetei ($h_1 = 1/2\ h$) (vezi fig 9).

În cazul cînd aceste condiții practice experimentale sînt îndeplinite, după cum a rezultat din studiul fotoelastic publicat anterior [2], se poate obţine o forfecare pură, maximă şi uniform distribuită pe secţiunea minimă a epruvetei, în domeniul elastic de solicitare (fig. 11), fără maxime şi fără concentrări de eforturi, ceea ce face ca această stare să se menţină apoi mai departe şi în domeniul plastic, mergînd pînă la rupere.

În afară de aceste condiţii generale, valabile pentru toate materialele încercate, mai trebuie ţinut seama de unele condiţii specifice fiecărui material în parte, pentru a se asigura ruperea în secţiunea respectivă de forfecare pură, şi nu în altă parte.

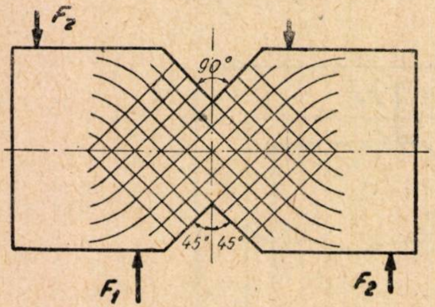


Fig. 10

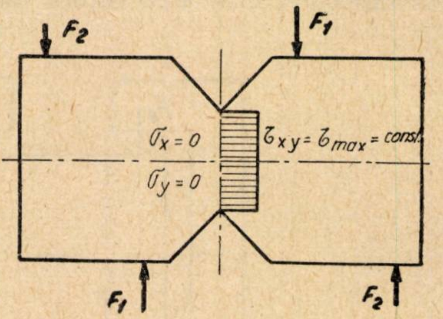


Fig. 11

Astfel, pentru cazul încercării la forfecare a oţelului, avînd în vedere că rezistenţa la forfecare a acestui material nu este prea mult diferită de aceea de întindere sau compresiune, va trebui să se ţină seama ca eforturile locale produse în punctele de acţiune ale pieselor de solicitare să nu ducă la strivirea materialului în acele locuri, mai înainte de ruperea epruvetei la forfecarea pură în secţiunea indicată.

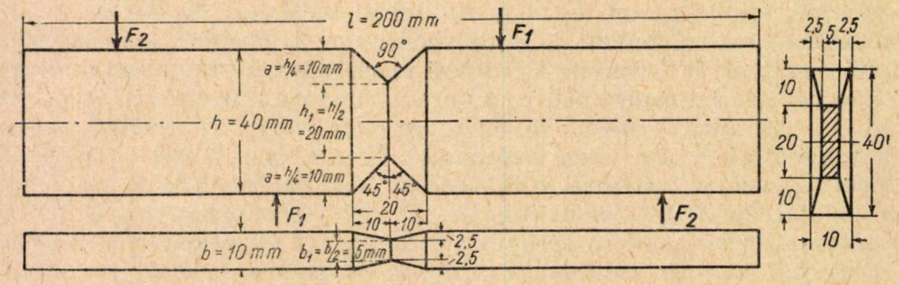


Fig. 12

Pentru aplicarea tuturor acestor principii la încercarea oţelului, s-a recurs la un procedeu realizat prin încercarea la o astfel de solicitare a unei epruvete (fig. 12), confecţionată prin prelucrarea mecanică a unei probe luate din oţelul care trebuie cercetat, alcătuită sub o formă generală paralelipipedică, cu aspect de platbandă îngustă aşezată cu înălţimea în sens vertical, cu o secţiune de înălţime *h* şi de lăţime *b*, cum şi de o lungime totală *l*. Această epruvetă este prevăzută la mijlocul lungimii ei, pe cele două margini orizontale, cu cele două crestături în formă de V, ale căror vîrfuri sînt situate în dreptul unei aceleiași secțiuni transversale mijlocii, avînd unghiurile vii intrînde de la fund de cîte 90°.

Crestăturile sînt alcătuite cu înclinările laturilor lor la unghiuri de cîte 45° față de orizontală sau verticală, ceea ce este necesar pentru ca izostaticele să poată avea această înclinare, deci ca eforturile tangențiale să poată să fie maxime în secțiunea de rupere, după cum a rezultat din studiul fotoelastic calitativ efectuat. Pentru ca eforturile tangențiale să fie și uniform distribuite pe secțiunea de rupere, crestăturile acestea sînt alcătuite de adîncimi egale cu un sfert din înălțimea respectivă a epruvetei ($a = h/4$), ceea ce a rezultat din studiul fotoelastic respectiv cu caracter cantitativ din articolul precedent [2]. Astfel că înălțimea netă a secțiunii slăbite, care rămîne în dreptul fundurilor crestăturilor, este egală cu jumătate din înălțimea totală a secțiunii pline a platbandei care alcătuește epruveta ($h_1 = h/2$).

Întrucît pentru realizarea în dreptul secțiunii de forfecare pură a unei forțe tăietoare de o valoare suficientă pentru a produce ruperea oțelului, va fi necesar să se aplice eforturi de presiune puternice asupra fețelor orizontale ale epruvetei în punctele de contact ale acestora cu piesa de solicitare, după cum s-a arătat anterior, se va putea produce o strivire a materialului, în dreptul acelor puncte de contact, depășindu-se limita elastică. A fost deci necesar să se reducă într-o măsură suficientă suprafața secțiunii de forfecare din dreptul punctului de moment nul, astfel ca forța tăietoare de rupere necesară să nu depășească o valoare admisă de către limita de strivire a oțelului la compresiune din dreptul punctelor de contact cu piesa de solicitare respectivă, ceea ce se realizează în modul arătat mai jos.

În acest scop grosimea b a epruvetei s-a redus și ea la jumătate $\left(b_1 = \frac{b}{2}\right)$ în dreptul crestăturilor verticale, ceea ce s-a realizat printr-o prelucrare mecanică a fețelor laterale ale epruvetei în dreptul secțiunii de forfecare pură, grosimea ei scăzîndu-se în mod progresiv și simetric, pe o lungime egală cu acea a crestăturilor verticale, adică egală cu $h/2$, mergînd pînă la grosimea minimă din secțiunea de forfecare pură. Astfel că, rezultă în acest mod o secțiune transversală netă de suprafață minimă, stabilită la mijlocul lungimii epruvetei, în dreptul fundului crestăturilor, de dimensiuni de $b_1 = \frac{b}{2}$ și $h_1 = \frac{h}{2}$, după care se va produce ruperea epruvetei la solicitarea de forfecare pură.

Solicitarea acestor epruvete la o încovoiere variabilă liniar, cu un punct de moment nul, sau de inflexiune în dreptul mijlocului lungimii lor, adică în dreptul secțiunii minime dintre vîrfurile crestăturilor, cum și cu o forță tăietoare constantă pe porțiunea ei mijlocie de solicitare, a fost realizată cu ajutorul unui dispozitiv special, care produce cele două momente egale și de sens contrar de la capetele porțiunii mijlocii a lor. Acest dispozitiv a fost alcătuit din două piese de solicitare, de formele masive din figura 13, de o grosime egală cu de cel puțin două ori lățimea epruvetei, confecționate dintr-un oțel de calitate superioară, suficient de rezistente pentru a nu ceda ele înșile la solicitarea respectivă produsă cu ocazia încercării. Părțile principale masive ale acestor piese de solicitare sînt prevăzute cu goluri longitudinale, de forme dreptunghiulare și de dimensiunile secțiunii transversale a epruvetei, goluri în care se pot introduce părțile respective din lungimea epruvetei, situate de o parte și de alta a crestăturilor din mijloc.

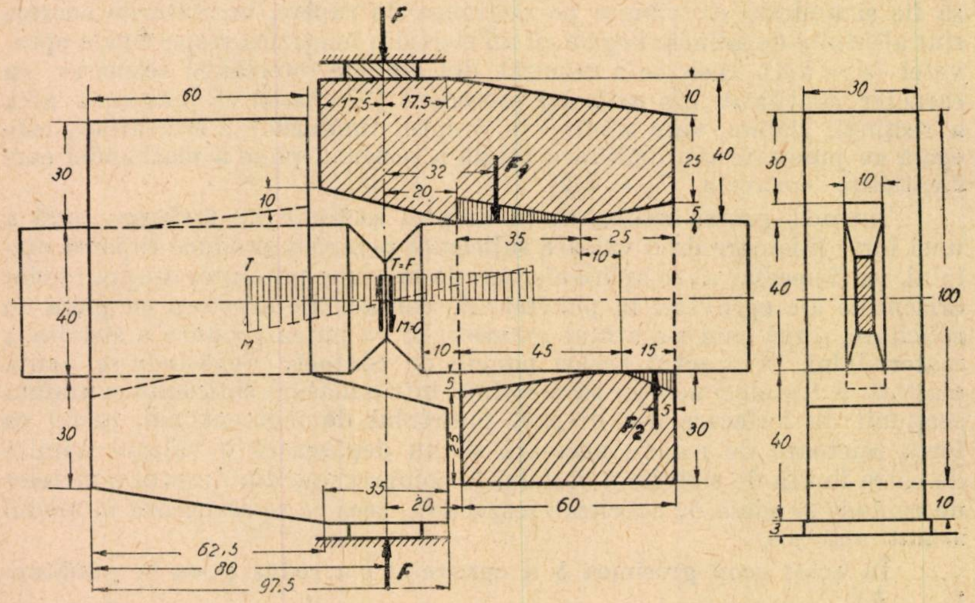


Fig. 13

Fețele interioare orizontale, superioare și inferioare, ale acestor goluri sînt prelucrate astfel încît să realizeze un contact cu fețele orizontale ale epruvetei numai pe porțiunile indicate în partea din dreapta a desenului din figura 13, care reprezintă o secțiune longitudinală dusă prin una din aceste piese de solicitare. Dimensiunile acestor suprafețe de contact din interiorul golurilor pieselor de solicitare sînt astfel stabilite, încît să permită introducerea ușoară a capetelor epruvetei, într-o poziție ușor înclinată a acesteia. Ele sînt astfel alcătuite și dimensionate, încît eforturile locale ce se produc în poziția de încercare, prin acțiunea de presiune repartizată liniar pe acele porțiuni, să fie aproximativ aceleași în punctele de maxime ale lor și să nu depășească limita de elasticitate a materialului epruvetei, sau pe aceea a oțelului piesei de solicitare, atunci cînd efortul de forfecare al epruvetei este suficient de puternic pentru a produce ruperea ei în secțiunea cea mai slăbită.

Pentru a se putea realiza în mod sigur aceste condiții, a fost necesar să se reducă dimensiunile epruvetei prin crestăturile orizontale produse în sens transversal, în dreptul secțiunii de rupere dintre fundurile crestăturilor verticale, ajungînd astfel pînă la jumătate din grosimea curentă a epruvetei în punctele din dreptul mijlocului ei. Justificarea necesității acestei măsuri de reducere a secțiunii de forfecare a rezultat dintr-un calcul aproximativ al presiunilor maxime produse de către dispozitivul de solicitare asupra epruvetei, pe suprafețele lor de contact, cum și din unele încercări experimentale preliminare executate.

Piesele de solicitare sînt prevăzute fiecare, într-o parte a lor, cu cîte o consolă scurtă și puternică, prelucrată din același bloc de oțel ca și părțile principale ale acestor piese, în care sînt amenajate și golurile de introducere și susținere a epruvetelor. Aceste piese de solicitare acționează, în timpul și în poziția lor de încercare din figura 13, prin forțele F_1 și F_2 produse prin presiunile de pe suprafețele de contact și rezultate din acțiunea forțelor F, date de către presiunile platourilor unei prese de încercare, aplicate asupra consolelor pieselor de solicitare prin intermediul unor plăcuțe așezate exact în dreptul secțiunii ce trece prin vîrfurile crestăturilor epruvetei.

Aceste piese de solicitare sînt așezate în poziții antisimetrice față de centrul epruvetei, în timpul și în poziția de încercare a acestora, producînd astfel, prin rezultantele F_1 și F_2 ale presiunilor de pe fețele de contact ale pieselor de solicitare cu fețele orizontale ale epruvetei, cele două momente încovoietoare M și $-M$, egale și de sensuri contrare, acționînd asupra părții mijlocii a epruvetei. Ele produc astfel solicitarea de încovoiere de variație liniară, cu un punct de moment nul sau de inflexiune situat la mijlocul lungimii epruvetei, cum și cu o forță tăietoare de valoare constantă pe lungimea mijlocie a acesteia, egală cu însăși valoarea forței F de solicitare dată de către presa de încercare.

Mărind în mod progresiv presiunea, pînă la producerea ruperii epruvetei în secțiunea minimă din dreptul vîrfurilor crestăturilor, se obține rezistența oțelului la forfecare pură prin împărțirea forței tăietoare maxime T, dată de către presiunea totală maximă a presei din momentul ruperii, prin suprafața secțiunii nete a epruvetei din locul ruperii, care se găsește în mod foarte apropiat de secțiunea minimă din dreptul vîrfurilor crestăturilor.

Epruvetele experimentate la început, realizate pentru încercarea aplicării procedeului, au fost confecționate dintr-o platbandă de oțel OL 38, prelucrată în mod mecanic la forma indicată, în lungime de $l = 200$ mm și de o secțiune de 40×10 mm, prevăzute cu cele două crestături în formă de V, cu unghiurile la fund de 90° și cu înclinările fețelor laterale de cîte 45°, de adîncimi de cîte 10 mm fiecare. Astfel încît a rămas la mijloc o secțiune netă slăbită de o înălțime de $h_1 = 20$ mm, care a fost redusă apoi și mai departe printr-o subțiere în sens transversal a epruvetelor de încercare, mergînd pînă la o grosime minimă de $b_1 = 5$ mm, ducînd la o suprafață a secțiunii de rupere de $h_1 \times b_1 = 20 \times 5 = 100$ mm^2. Această modificare a fost obținută printr-o prelucrare mecanică a celor două fețe laterale, într-un mod simetric, sub forma unor crestături în V orizontale, de adîncimi maxime de cîte 2,5 mm, de fiecare parte, realizate în dreptul crestăturilor verticale, racordate în mod progresiv pînă la grosimea totală a epruvetei în mod liniar de ambele părți, ca în figura 12.

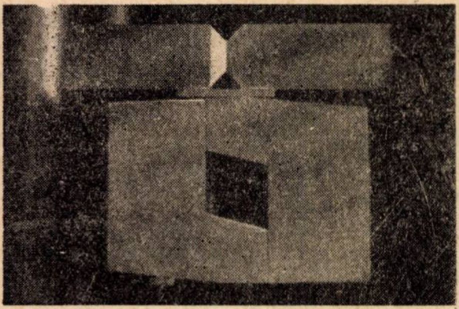


Fig. 14 *a*

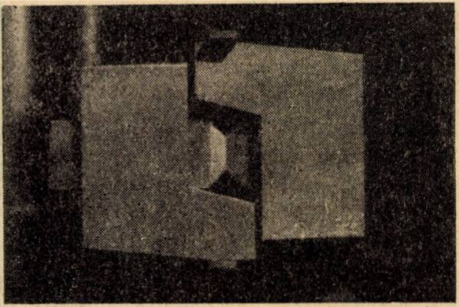


Fig. 14 *b*

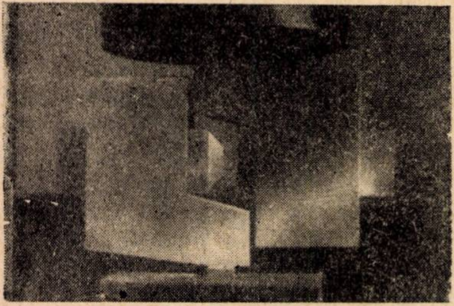


Fig. 14 *c*

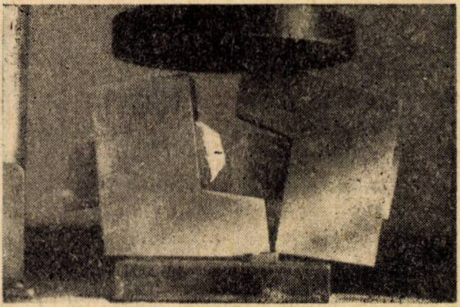


Fig. 14 *d*

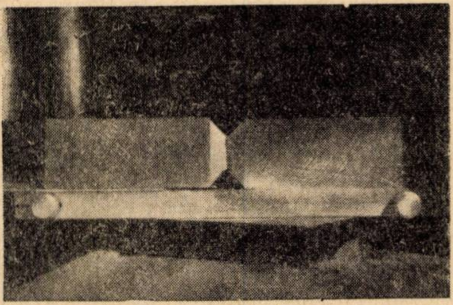


Fig. 14 *e*

Prin încercările experimentale preliminare făcute cu asemenea tipuri de epruvete și cu dispozitivul de solicitare respectiv, s-au obținut rezultate foarte favorabile asupra modului de rupere al epruvetei la o solicitare de forfecare pură, maximă și uniform distribuită pe secțiunea de rupere, după cum se poate constata din fotografiile etapelor succesive ale încercărilor respective din figura 14, *a*, *b*, *c*, *d* și *e*. Din aceste fotografii figura 14 *a* reprezintă epruveta și dispozitivul de solicitare respectiv în poziții suprapuse, înainte de montarea lor pentru încercare; figura 14 *b* reprezintă epruveta montată în interiorul dispozitivului pregătit pentru încercare; figura 14 *c* reprezintă dispozitivul de solicitare așezat între platourile presei, imediat înainte de încercare; figura 14 *d* arată poziția pieselor respective imediat după producerea ruperii, iar figura 14 *e* dă imaginea epruvetei reconstituite după rupere, prin alăturarea celor două jumătăți separate, cu secțiunea de forfecare bine precizată în secțiunea minimă dintre vîrfurile crestăturilor.

Încercările preliminare au fost începute prin ruperea a două epruvete confecționate pe cale semi-mecanică, la eforturi totale de cîte 3 960 kg/cm^2, dintre care una este reprezentată în figura 14 *e*. Ele au fost continuate apoi, cu care ocazie s-au mai încercat un număr de trei epruvete confecționate de asemenea pe cale semi-mecanică, din aceeași platbandă ca și cele anterioare, ruperile lor producîndu-se la eforturile respective de 3 600, 3 850 și 3 900 kg.

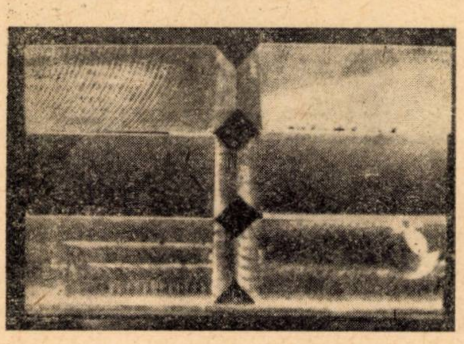


Fig. 15 *a*

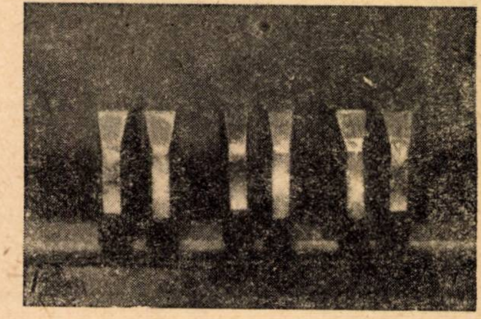


Fig. 15 *b*

Ruperile epruvetelor la această încercare, ale căror fotografii sînt acele reproduse în figura 15 *a*, s-au produs în același mod regulat în secțiunea de forfecare pură, maximă și uniform distribuită, cu o formă a profilului prezentînd o ușoară inflexiune în sens vertical și cu aspectul specific al suprafeței rupturilor provocate în mod evident de către o curgere plastică de lunecare în planul secțiunii. Aspectul ruperilor respective se poate constata după fotografiile acelor suprafețe de rupere, luate din față, reproduse în figura 15 *b*, în care sînt alăturate cîte două perechile de secțiuni ale celor trei epruvete încercate, după ruperea lor completă.

Efortul de rupere al primei din cele trei epruvete de mai sus, a fost cu circa 10% mai redus față de celelalte, din cauză că epruveta respectivă, fiind prelucrată în mod semi-mecanic și în parte manual în regiunea de degajare a secțiunii minime de rupere, această secțiune a fost cu cca. 10% mai mică față de celelalte, avînd înălțimea secțiunii nete minime de numai 18 mm, în loc de 20 mm. Rezultă de aici în mod suficient necesitatea prelucrării complet mecanice a acestor epruvete, cum și a bunei ajustări a lor la dimensiunile exacte, pentru a se obține rezultate perfect comparabile între ele. Rezistențele de rupere R_f la forfecare ale celor trei încercări de mai sus au fost deci de : $\frac{3\,600}{18 \times 5} = 40{,}0$ kg/mm², $\frac{3\,850}{20 \times 5} = 38{,}5$ kg/mm² și $\frac{3\,900}{20 \times 5} = 39{,}0$ kg/mm², ceea ce a dus la o medie de 39,2 kg/mm².

Din același material, anume din oțelul OL 38 al platbandei din care s-au confecționat epruvetele de forfecare de mai sus, s-a făcut în același timp o încercare pe o epruvetă de rupere la întindere, de o secțiune de

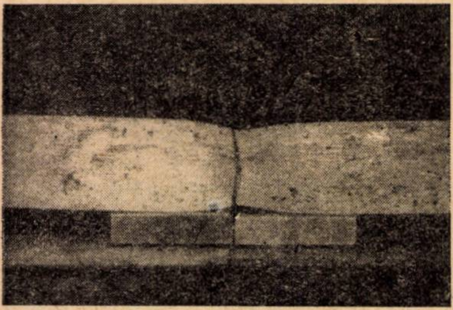


Fig. 16 *a*

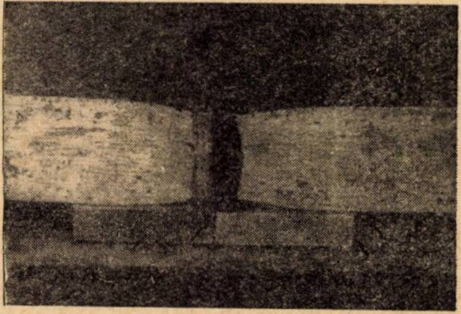


Fig. 16 *b*

dimensiuni 10 × 31,4 mm, a cărei rupere s-a produs la un efort total de 15 300 kg, ceea ce revine la o rezistență de rupere la întindere de $R_t = \frac{15\,350}{10 \times 31{,}4} = 49{,}0$ kg/mm². Rezultă că rezistența de rupere la forfecare, stabilită pentru acest material prin noul procedeu, variind în jurul unei medii de $R_f = 39{,}2$ kg/mm², reprezintă un raport de circa $\frac{R_f}{R_t} = \frac{39{,}2}{49{,}0} = 0{,}80$ din cea de la întindere, ceea ce corespunde și cu rezultatele cunoscute din literatura de specialitate, avînd însă un caracter mult mai precis și mai sigur de a corespunde cu realitatea și de a nu fi datorit unei întîmplări.

În figura 16 *a* și *b* sînt date fotografiile modului de rupere a acelei epruvete de încercare la întindere, scoase din aceeași platbandă ca și lotul epruvetelor de forfecare de mai sus, la care se constată că ruperea aceasta s-a produs totuși prin eforturile tangențiale dintr-o secțiune înclinată la 45⁰ în sens transversal față de direcția de solicitare la întindere a epruvetei, ceea ce arată caracterul plastic-ductil al acestui oțel moale [9].

Față de rezultatele favorabile ale acestor încercări preliminare, efectuate asupra procedeului nou de determinare a rezistenței la forfecare pură a oțelurilor, s-a trecut la efectuarea unor ultime încercări pe alte trei epruvete din lotul oțelului moale, scoase din platbanda studiată, care s-au rupt la eforturile de forfecare de : 3 890 kg, 3 920 kg şi 3 800 kg, cu rezistenţele lor de rupere la forfecare de : 38,9 kg/mm², 39,2 kg/mm² şi 38,0 kg/mm², deci cu o medie de 38,7 kg/mm².

S-a procedat apoi la realizarea încercărilor definitive, formînd obiectul unui studiu tehnico-ştiinţific asupra rezistenţei la forfecare a oţelului unor şine de cale ferată, cum şi a joantelor sudate de la şinele de cale ferată, pe baza încercării statice la forfecare pură, despre care se va trata mai pe larg într-o publicaţie viitoare, cum şi într-o comunicare ce a fost făcută la a IV-a consfătuire de sudură şi încercări de metale a „Bazei de cercetări ştiinţifice a Academiei R.P.R.", care a avut loc la Timişoara în toamna anului 1962.

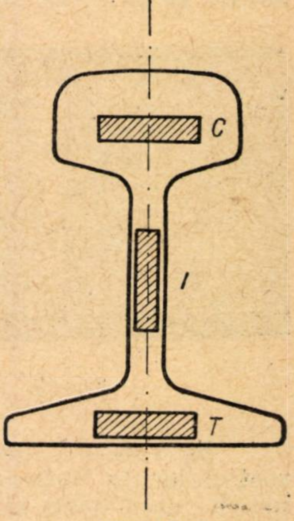


Fig. 17

Încercările la forfecare pură ale şinelor de cale ferată studiate, cu acea ocazie, au fost făcute în paralel şi anume : pentru oţelul şinelor propriu-zise şi pentru sudurile respective, prezentînd aci numai rezultatele obţinute pentru încercările la forfecare ale oţelului respectiv. Pentru aceasta trebuie ţinut seama că şinele de cale ferată sînt alcătuite dintr-un oţel mult mai dur, corespunzător unei caracteristici OL 70, cu rezistenţa de rupere la întindere de 70 kg/mm².

Pentru a constata modul de variaţie a rezistenţei la forfecare în diferite locuri din cuprinsul secţiunii şinei, s-au confecţionat epruvete de încercare, de formele şi dimensiunile din figura 12, provenite dintr-un număr de 4 cupoane de şină de tip 45 şi anume un număr de cîte trei epruvete din fiecare loc : una din ciupercă, alta din inimă şi alta din talpa şinei (fig. 17).

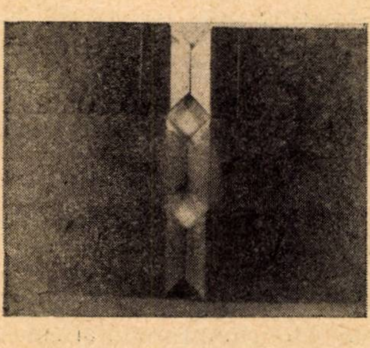


Fig. 18

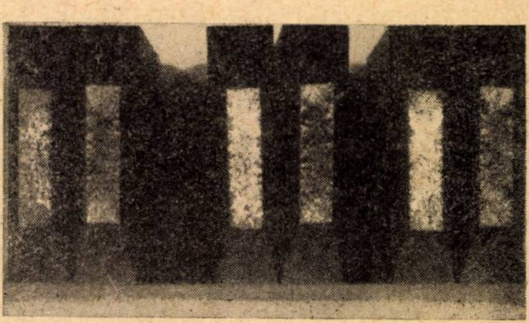


Fig. 19

Încercările au dus la ruperi mult mai nete şi regulate în secţiunile de înălţime minimă dintre vîrfurile crestăturilor, aspectul a trei dintre aceste epruvete, obţinute dintr-un prim cupon de şină, alăturate din nou după rupere şi suprapuse în ordinea indicată mai sus, considerîndu-le de sus în jos: ciupercă, inimă, talpă, fiind acel din figura 18. Aspectele secţiunilor de rupere văzute din faţă, pentru cele cîte două feţe ale secţiunii de rupere ale fiecărei epruvete, sînt acele din fotografia din figura 19, constatîndu-se bine diferenţa de aspect faţă de acele ale oţelului moale OL 38 din figura 15 *b*. Aspectele altor trei epruvete scoase din alt cupon de şină şi ale suprafeţelor respective de rupere ale lor la forfecare, sînt acele din figurile 20 şi 21.

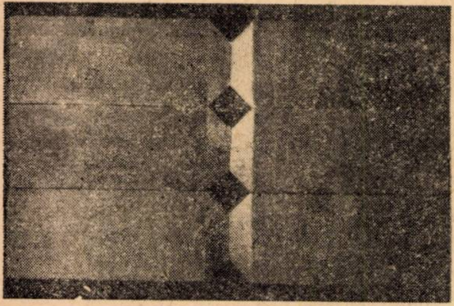


Fig. 20

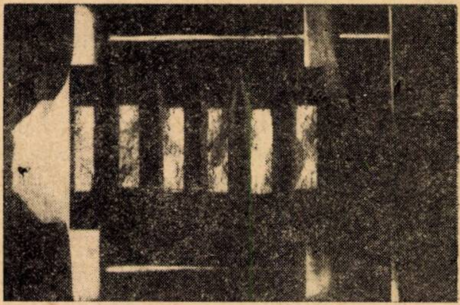


Fig. 21

Se constată că modul de rupere la forfecare, cum şi aspectele secţiunilor de forfecare din cazul acestui oţel OL 70, sînt mai puţin netede, decît acele ale oţelului moale OL 38, avînd un caracter aproape grăunţos. Explicaţia ar fi aceea că, materialul acesta fiind mult mai casant, ruperea lui sub acţiunea eforturilor tangenţiale limită se produce în fiecare punct mai degrabă la eforturile normale principale de întindere σ_1 din direcţii înclinate la 45° faţă de secţiunea de rupere globală la forfecare pură.

Rezultatele încercărilor făcute pentru determinarea rezistenţei la forfecare pură la oţeluri prin noul procedeu, a celor patru serii de cîte trei epruvete din cupoanele de şină de tip 45 studiate, sînt trecute în alăturatul tablou, în care sînt date: dimensiunile şi valorile suprafeţelor secţiunilor de rupere, valorile eforturilor totale de rupere la forfecare şi valorile rezistenţelor de rupere la forfecarea respectivă.

Din aceste rezultate se constată că rezistenţele de rupere la forfecare ale epruvetelor scoase din dreptul inimii au fost mai mari decît cele din ciupercă şi talpă, iar acele ale epruvetelor din talpă sînt mai mari decît acele din ciupercă.

Aceste rezultate sînt explicabile prin faptul că, la operaţiile de laminare ale profilului de şină, inima este mult mai bine comprimată şi compactată de către cilindrii sau rulourile laminorului. Aceste rezultate prezintă avantaje practice, din punct de vedere al rezistenţei şinelor la acţiunea forţelor tăietoare, avînd în vedere că pentru secţiunea în formă de I a unui profil de şină, inima are de preluat eforturile tangenţiale de valori maxime date de către acele forţe tăietoare.

Tabelă

Rezultatele încercărilor la forfecare pură a oțelului unor șine de cale ferată tip 45

Nr. încercării	Proveniența epruvetei din șina de tip 45	Ciuperca			Inima			Talpa		
		Secțiunea de rupere, în $\frac{mm \times mm}{mm^2}$	Efort total de rupere, în kg	Rezistența la forfecare, în kg/mm²	Secțiunea de rupere, în $\frac{mm \times mm}{mm^2}$	Efort total de rupere, în kg	Rezistența la forfecare, în kg/mm²	Secțiunea de rupere, în $\frac{mm \times mm}{mm^2}$	Efort total de rupere, în kg	Rezistența de forfecare, în kg/mm²
1	Cupon I	$\frac{20 \times 5}{100\ mm^2}$	5 000	50,0	$\frac{20{,}2 \times 5}{101\ mm^2}$	5 400	53,5	$\frac{20{,}1 \times 5}{100{,}5\ mm^2}$	5 575	53,5
2	Cupon II	$\frac{20 \times 4{,}9}{98\ mm^2}$	5 200	53,1	$\frac{20{,}2 \times 4{,}9}{99\ mm^2}$	5 750	58,1	$\frac{20{,}1 \times 4{,}7}{94\ mm^2}$	5 350	56,9
3	Cupon III	$\frac{20 \times 4{,}9}{98\ mm^2}$	5 050	51,5	$\frac{20 \times 4{,}9}{98\ mm^2}$	5 600	57,1	$\frac{20 \times 4{,}9}{98\ mm^2}$	5 650	57,7
4	Cupon IV	$\frac{20 \times 4{,}9}{98\ mm^2}$	5 000	51,5	$\frac{20{,}1 \times 4{,}9}{98{,}5\ mm^2}$	5 750	58,4	$\frac{20 \times 5{,}0}{100\ mm^2}$	5 550	55,5

Procedeul nou de încercare la forfecare a oțelurilor, preconizat, experimentat și aplicat pînă în prezent la lucrări de felul acelora ce au făcut obiectul acestei comunicări, constituie obiectul brevetului de invenție nr. 42082 eliberat pe numele Ministerului Transporturilor și Telecomunicațiilor ca beneficiar, unde a fost aplicat acest procedeu pînă în prezent și unde se aplică în continuare, la Institutul de Cercetări al acestui minister [10].

Față de rezultatele obținute pînă în prezent și față de fundamentarea științifică exactă obținută pe baza rezultatelor cercetărilor fotoelastice, se propune ca acest procedeu să fie generalizat și oficializat printr-un standard de stat, rezolvînd o problemă dificilă cercetată cu stăruință încă de multă vreme și considerată în toate țările, chiar și pînă în momentul de față, de către mulți autori, drept o ,,problemă a viitorului''. Aceasta constituie o nouă dovadă a posibilităților de realizare a tehnicii înaintate, ca un rezultat al acțiunii ,,prezentului'' din țara noastră, în mersul ei victorios către socialism.

Primită la redacție la 6 iunie 1962

DETERMINATION AND EXPERIMENTATION OF A NEW PROCEDURE FOR TESTING STEELS SUBJECTED TO PURE SHEAR

ABSTRACT

As it may be seen from the speciality literature and as it is shown in the present paper, loadings by pure shear could not be so far obtained, such that all testing procedures used for determining the shear strength of all materials do not correspond to the proposed purpose. Theoretically, these procedures have no accurate basis due to the difficulties of obtaining such a single loading, the shear force being always accompanied by the action of a bending moment, owing to the known relation : $T = \frac{dM}{dx}$.

It is possible however to achieve a loading given by a simple shear force, namely in the section near the inflexion point of a straight beam acted upon by a moment with linear variation ($M = T \cdot x$) and with point of zero moment at the middle ($M_0 = 0$), for which the shear force is constant all along this beam ($T =$ const.).

In view of obtaining the loading by pure shear, produced by the action of maximum pure tangential stresses, uniformly distributed upon a failure section of a specimen, which should lead to failure only under the action of a simple shear stress, a new procedure has been obtained for testing steels under shear, using the photoelastic results presented in no. 2/1962 of this periodical and also in the no 1/1963 of the "Revue de Mécanique Appliquée".

This procedure has been devised by making a specimen of rectangular form and section (h/b), presenting two V shaped notches, with the sides inclined at 45° and of depth equal to 1/4 of the height h of the specimen, having hence a failure section equal to $h_1 = h/2$. This specimen presents in addition a transversal weakening which leads to a reducing of the failure section width up to half of the specimen section ($b_1 = b/2$).

The ultimate load is applied with the aid of a suitable device, which can produce a linear variation of the bending moment, with zero value at the mid section, near the notches and with constant shear force along the beam.

In this manner, it has been possible to experiment and apply the new procedure for testing steels under pure shear, with maximum tangential pure stresses uniformly distributed, having an accurate scientific basis established through photoelastic investigations.

The procedure constitutes the object of a patent, granted to the Ministry of Transports and Telecommunications and it has been applied for the shear testing of rail steels and of the welded rail joints.

BIBLIOGRAFIE

1. H. E. DAVIS, G. E. TROXELL, C. T. WISKOCIL, *The Testing and Inspection of Engineering Materials*. Ed. McGraw Hill, New York, 1955.
2. N. IOSIPESCU, *Cercetări fotoelastice asupra unor procedee corecte de încercare la forfecare pură a materialelor*. St. cerc. mec. apl., *2* (1962).
3. * * * *Colecția de comentarii STAS pentru fonte și oțeluri. Biblioteca Standardizării. Seria tehnică A*, *1*, București (1958).
4. A. MORLAY, *Strength of Materials*. Ed. Longman, Green and Co, Londra, 1920.
5. O. MOHR, *Abhandlungen aus dem Gebiete der Technischen Mechanik*. Ed. W. Ernst, Berlin, 1906.
6. F. KOLMANN, *Technologie des Holzes und der Holzwerkstoffe*. I, Ed. Springer, Berlin, 1951.
7. F. FONROBERT, *Grundzüge des Holzbaues im Hochbau*. Berlin, 1942.
8. S. D. PONOMARIOV, V. L. BIDERMAN, C. K. LIHAREV, V. M. MAKUȘIN, N. N. MALININ, V. I. FEODOSIEV, *Calculul de rezistență în construcția de mașini*. I, Ed. tehnică, București, 1960.
9. A. NADAI, *Theory of Flow and Fracture of Solids*. Ed. McGraw Hill, New York, 1950.
10. *Descrierea invenției nr. 42 082. D.G.M.S.I.O.S.I.*, Ed. ESIP, 1963.

STUDII

GENERALIZAREA METODEI INDIRECTE DE CALCUL PLASTIC AL STRUCTURILOR DE BETON ARMAT

DE

VALERIU PETCU [1]

624.04

Studii recente [1], [2], [3], [4] au arătat că în calculul plastic al structurilor static nedeterminate de beton armat intervin condiții de rupere și de exploatare care limitează gradul de exploatare a rezervelor plastice de rezistență.

În cazul în care aceste condiții sînt identice pentru toate secțiunile critice ale structurii considerate, cercetările efectuate [5] au demonstrat existența unor soluții optime ale momentelor plastice, obținute în ipoteza redistribuirii totale a eforturilor, care stau la baza determinării momentelor plastice de calcul (momente plastice care îndeplinesc integral condițiile de rupere și de exploatare).

De asemenea, pentru aceste structuri s-a stabilit o metodă indirectă de determinare a momentelor plastice de calcul, bazată pe admiterea unei valori limită unice pentru toți coeficienții de redistribuție ai fiecărei structuri [6].

În cadrul proiectării plastice a structurilor de beton armat se întîlnesc însă cazuri în care condițiile de rupere și de exploatare nu sînt identice pentru toate secțiunile critice.

Din această categorie fac parte structurile la care :

— gradul de redistribuire plastică a eforturilor este funcție de secțiunea critică în care se formează prima articulație plastică ;

— se acordă o atenție deosebită procesului de fisurare în cîmpuri ;

— se contează pe depășiri de scurtă durată a sarcinilor normate în timpul exploatării, care afectează nefavorabil procesul de fisurare din cîmpuri ;

— se urmărește realizarea unei armări cît mai uniforme a secțiunilor critice.

---

[1] Institutul de cercetări în construcții și economia construcțiilor (INCERC), București.

Pentru aceste structuri, condiţiile diferite de rupere şi de exploatare conduc la stabilirea unei anumite valori limită a coeficientului de redistribuţie pentru fiecare secţiune critică în parte.

Studiul ce urmează reprezintă generalizarea metodei indirecte de calcul plastic la structuri ai căror coeficienţi de redistribuţie au valori limită diferite. Se au în vedere structurile a căror comportare plastică se caracterizează prin formarea exclusiv a articulaţiilor plastice la încovoiere.

I. BAZELE METODEI INDIRECTE GENERALIZATE

Pentru prezentarea bazelor metodei indirecte generalizate se consideră o structură static nedeterminată de beton armat alcătuită din bare şi se notează cu h, i şi j secţiunile critice dintr-o deschidere oarecare (fig. 1).

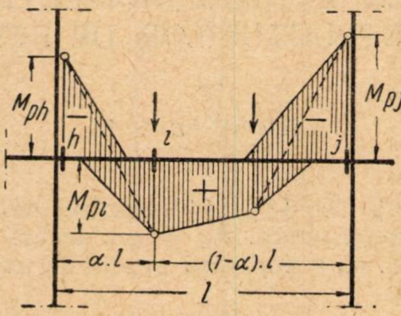


Fig. 1

Momentele plastice din aceste secţiuni au expresiile :

$$\begin{aligned} m_{ph} &= a_h + b_h \cdot K_{1h}, \\ m_{pi} &= a_i + b_i \cdot K_{1i}, \\ m_{pj} &= a_j + b_j \cdot K_{1j}, \end{aligned} \tag{1}$$

în care

$$m_{ph} = \frac{M_{ph}}{G.l}\ ;\ m_{pi} = \frac{M_{pi}}{G.l}\ ;\ m_{pj} = \frac{M_{pj}}{G.l}\ ;$$

$$K_{1h} = \frac{P_{1h}}{G}\ ;\ K_{1i} = \frac{P_{1i}}{G}\ ;\ K_{1j} = \frac{P_{1j}}{G}\ ;$$

M_{ph}, M_{pi}, M_{pj} — momentele plastice din secţiunile critice h, i şi j ;
G — sarcina permanentă de calcul ;
P_{1h}, P_{1i}, P_{1j} — sarcina utilă corespunzătoare formării primei articulaţii plastice în secţiunea h, i, respectiv j ;
a_h, a_i, a_j — coeficienţi care caracterizează momentele elastice din secţiunile h, i şi j produse de sarcinile permanente ;
b_h, b_i, b_j — coeficienţi care caracterizează momentele elastice maxime (în valoare absolută) din secţiunile h, i şi j, produse de sarcinile utile ;
l — deschiderea grinzii.

Ţinînd seama de relaţiile (1), coeficienţii de redistribuţie corespunzători secţiunilor critice din deschiderea considerată au valorile

$$
\begin{aligned}
r_h &= \frac{1 + K_u}{1 + K_{1h}} = \frac{b_h \cdot (1 + K_u)}{m_{ph} - a_h + b_h}, \\
r_i &= \frac{1 + K_u}{1 + K_{1i}} = \frac{b_i \cdot (1 + K_u)}{m_{pi} - a_i + b_i}, \\
r_j &= \frac{1 + K_u}{1 + K_{1j}} = \frac{b_j \cdot (1 + K_u)}{m_{pj} - a_j + b_j}.
\end{aligned}
\tag{2}
$$

În relaţiile de mai sus $K_u = \frac{P_u}{G}$, P_u fiind sarcina utilă de calcul.

Presupunînd că valorile coeficienţilor de redistribuţie sînt date, din relaţiile (2) rezultă următoarele valori ale momentelor plastice :

$$
\begin{aligned}
m_{ph} &= a_h - b_h + \frac{b_h}{r_h}(1 + K_u), \\
m_{pi} &= a_i - b_i + \frac{b_i}{r_i}(1 + K_u), \\
m_{pj} &= a_j - b_j + \frac{b_j}{r_j}(1 + K_u).
\end{aligned}
\tag{3}
$$

Aceste momente trebuie să satisfacă condiţia de echilibru plastic, adică

$$(1 - \alpha) . m_{ph} + m_{pi} + \alpha . m_{pj} \geqslant m_{ig} + m_{ip}, \tag{4}$$

în care

m_{ig} = $(1 - \alpha) . a_h + a_i + \alpha . a_j$, este momentul în secţiunea i produs de sarcina permanentă, în ipoteza simplei rezemări a extremităţilor h şi j ;

m_{ip} = $d_i . K_u$ este momentul în secţiunea i produs de sarcina utilă, în ipoteza simplei rezemări a extremităţilor h şi j ;

$\alpha . l$ = distanţa dintre secţiunile critice h şi i.

După înlocuiri, condiţia (4) devine

$$(1 - \alpha) . \frac{b_h}{r_h} + \frac{b_i}{r_i} + \alpha . \frac{b_j}{r_j} \geqslant \frac{(1 - \alpha) . b_h + b_i + \alpha . b_j + d_i . K_u}{1 + K_u}. \tag{5}$$

În practică, pot interveni următoarele cazuri :

a) Coeficienţii de redistribuţie r_h, r_i şi r_j, stabiliţi apriori pe baza condiţiilor de rupere şi de exploatare ale fiecărei secţiuni critice, satisfac condiţia (5) pentru toate deschiderile structurii.

În acest caz momentele plastice sînt date de relaţiile (3).

b) Coeficienţii de redistribuţie r_h, r_i şi r_j nu satisfac condiţia (5) în una sau mai multe deschideri ale structurii.

În acest din urmă caz este necesar ca pentru aceste deschideri să se stabilească alte valori ale coeficienților de redistribuție

$$r'_h \leqslant r_h \; ; \; r'_i \leqslant r_i \; ; \; r'_j \leqslant r_j \, ,$$

care să satisfacă egalitatea

$$(1-\alpha).\frac{b_h}{r'_h} + \frac{b_i}{r'_i} + \alpha.\frac{b_j}{r'_j} = \frac{(1-\alpha).b_h + b_i + \alpha.b_j + d_i.K_u}{1+K_u}. \tag{6}$$

Momentele plastice corespunzătoare acestor valori ale coeficienților de redistribuție sînt date de relațiile :

$$\begin{aligned} m_{ph} &= a_h - b_h + \frac{b_h}{r'_h}(1+K_u), \\ m_{pi} &= a_i - b_i + \frac{b_i}{r'_i}(1+K_u), \\ m_{pj} &= a_j - b_j + \frac{b_j}{r'_j}(1+K_u). \end{aligned} \tag{7}$$

II. CAZURI PARTICULARE

1. $r_h = r_i = r_j = r$ (condiții de rupere și de exploatare identice pentru toate secțiunile critice ale deschiderii $h - i - j$).

Condiția (5) devine :

$$r \leqslant \frac{1+K_u}{1 + \dfrac{d_i}{(1-\alpha).b_h + b_i + \alpha.b_j}\cdot K_u}. \tag{8}$$

2. $r_h = r_j = r \neq r_i$ (condiții de rupere și de exploatare identice pentru secțiunile critice de pe reazeme, dar diferite de cele corespunzătoare secțiunilor critice din cîmpuri).

Condiția (5) devine în acest caz :

$$r \leqslant \frac{(1-\alpha).b_h + \alpha.b_j}{\dfrac{(1-\alpha).b_h + b_i + \alpha.b_j + d_i.K_u}{1+K_u} - \dfrac{b_i}{r_i}}. \tag{9}$$

Un deosebit interes îl prezintă cazul în care $r_i = 1$ (redistribuție de eforturi nulă în raport cu articulațiile plastice din cîmpuri).

Corespunzător acestei situații, condiția (9) capătă forma :

$$r \leqslant \frac{1+K_u}{1 + \dfrac{d_i - b_i}{(1-\alpha).b_h + \alpha.b_j}\cdot K_u}. \tag{10}$$

Observații. 1. În cazurile în care una din extremitățile deschiderii considerate este simplu rezemată, în relațiile (3) – (10) se vor face înlocuirile $a_h = b_h = 0$ și $m_{ph} = 0$ respectiv $a_j = b_j = 0$ și $m_{pj} = 0$, după cum simpla rezemare are loc la capătul h sau la capătul j.

2. Dacă schema de încărcare corespunzătoare apariției primei articulații plastice pe un reazem coincide cu cea corespunzătoare apariției primei articulații plastice în cîmp, atunci coeficienții de redistribuție ai celor două secțiuni sînt egali între ei.

III. LIMITĂRI ÎN STABILIREA VALORILOR COEFICIENȚILOR DE REDISTRIBUȚIE

Rezultatele aplicării metodei indirecte generalizate sînt valabile atîta timp cît este asigurată apariția efectivă a primei articulații plastice în fiecare din secțiunile critice ale structurii, pentru schemele de încărcare corespunzătoare cele mai defavorabile.

În cele ce urmează se stabilesc valorile limită ale coeficienților de redistribuție pînă la care este îndeplinită această condiție.

Fie x și y două secțiuni critice dintr-o deschidere oarecare a unei structuri.

Momentele plastice ale acestor secțiuni au expresiile

$$\begin{aligned} m_{px} &= a_x + b_x \, . \, K_{1x} = a_x - b_x + \frac{b_x}{r_x}(1 + K_u), \\ m_{py} &= a_y + b_y \, . \, K_{1y} = a_y - b_y + \frac{b_y}{r_y}(1 + K_u). \end{aligned} \tag{11}$$

Momentul elastic în secțiunea y, corespunzător formării primei articulații plastice în secțiunea x, are expresia

$$m_{ey} = a_y + c_y \, . \, K_{1x}. \tag{12}$$

Valabilitatea metodei de calcul elaborate subsistă atîta timp cît este îndeplinită condiția

$$m_{ey} \leqslant m_{py}\,, \tag{13}$$

adică

$$c_y \, . \, K_{1x} \leqslant - b_y + \frac{b_y}{r_y}(1 + K_u). \tag{14}$$

Din prima relație (11) rezultă

$$K_{1x} = -1 + \frac{1 + K_u}{r_x}.$$

Făcînd înlocuirea în relația (14) se obține:

$$r_y \leqslant \frac{b_y}{\dfrac{b_y - c_y}{1 + K_u} + \dfrac{c_y}{r_x}}. \tag{15}$$

Valoarea limită minimă a coeficientului de redistribuţie r_v, pînă la care este asigurată formarea primei articulaţii plastice în secţiunea x, se obţine pentru $r_x = 1$.

Ea este dată de relaţia :

$$r_v = \frac{1 + K_u}{1 + \frac{c_v}{b_v} \cdot K_u} \tag{16}$$

Această limitare se referă exclusiv la coeficienţii de redistribuţie ai secţiunilor critice de pe reazeme, deoarece, în practică, coeficienţii de redistribuţie ai secţiunilor critice din cîmpuri sînt totdeauna mai mici sau cel mult egali cu cei corespunzători secţiunilor critice de pe reazeme.

★

Metoda indirectă generalizată prezentată în lucrare este aplicabilă, de asemenea, plăcilor continue de beton armat, cu armătura pe două direcţii.

Primită la redacţie la 27 septembrie 1962

GENERALIZATION OF THE INDIRECT METHOD FOR THE PLASTIC DESIGN OF REINFORCED CONCRETE STRUCTURES

ABSTRACT

The indirect method in the plastic design of reinforced concrete structures consists in decreasing the maximum elastic moments, established on the basis of design loads, assuming an elastic behaviour of the structures such that the plastic moments obtained in this manner correspond to some re-distribution coefficients of the critical section, smaller or at most equal to a unique limit value.

This paper generalizes this method for structures admitting different limit values of the re-distribution coefficients.

The generalized indirect method is applicable to all reinforced concrete structures whose plastic behaviour is characterized by the exclusive formation of plastic hinges in bending.

BIBLIOGRAFIE

1. V. PETCU, *Problemele proiectării plastice a structurilor static nedeterminate de beton armat*, Revista construcţiilor şi a materialelor de construcţii, **XIII**, *8* (1961).
2. — *Les conditions de service dans le calcul plastique des structures hyperstatiques en béton armé*, Archiwum Inzynierii Ladowej (Varşovia), **VIII**, *1* (1962).
3. — *Articulaţia plastică în calculul plastic al structurilor de beton armat*, St. cerc. mec. apl., **XIV**, *1* (1963).
4. — *Limitări în calculul plastic al grinzilor static nedeterminate de beton armat*, Buletinul INCERC — ISCAS, **III**, *4* (1962).
5. — *Un principiu fundamental în proiectarea structurilor static nedeterminate de beton armat în domeniul plastic*, St. cerc. mec. apl., **XII**, *5* (1961).
6. — *Metodele directă şi indirectă în calculul plastic al structurilor de beton armat*, St. cerc. mec. apl., **XIII**, *5* (1962).

STUDIUL BATERII PILOŢILOR

DE

VASILE GABRIELESCU [1]

539.4 : 624

Problema baterii piloţilor a fost, în general, tratată în mod practic, făcîndu-se abstracţie de fenomenele complexe care apar la şocul dintre berbecul de batere şi căciula de protecţie a pilotului, de modul de transmitere a solicitării dinamice prin sistemul căciulă-amortizor, precum şi de consecinţele vibraţiilor longitudinale ce se produc în pilot datorită şocului.

Teoriile asupra vibraţiilor barelor cu secţiune mică în raport cu lungimea, precum şi studiile asupra solicitărilor prin şocuri şi a modului lor de amortizare îngăduie prezentarea studiului teoretic de faţă.

Pentru exemplificare s-au pus în evidenţă cazurile particulare şi s-au făcut aplicaţii cu caracter practic. De asemenea, s-au stabilit diferite relaţii utile între elementele esenţiale ale sistemului de batere şi pilot.

1. SOLICITĂRILE DIN VIBRAŢII LONGITUDINALE

Se consideră un pilot de lungime l_1 şi de greutate G. El poate fi din beton armat cu secţiune circulară, pătrată sau coroană; sau din lemn de brad, pin sau stejar, cu secţiune circulară.

Pilotul se va considera cu dimensiunile transversale suficient de mici în raport cu lungimea, încît sub acţiunea şocului efectuează o serie de vibraţii numai longitudinale, neglijîndu-se cele transversale (adică deplasările transversale ale secţiunii sînt neglijabile faţă de deplasările longitudinale).

Se va nota cu

l_2 — lungimea amortizorului de cauciuc,
l_3 — lungimea căciulii din lemn,
P — greutatea berbecului, care cade de la înălţimea h, măsurată de la capătul căciulii.

---

[1] Ministerul Transporturilor — Institutul de proiectări, transporturi şi telecomunicaţii.

La contactul dintre berbec și căciulă, berbecul are o viteză egală cu v_0, iar după contact, fața superioară a pilotului va căpăta o viteză egală cu v_1.

Notînd cu $u(x, t)$ deplasarea secțiunii plane situată la distanța x de capătul încastrat al pilotului la momentul t, ecuația de echilibru dinamic este

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \tag{1}$$

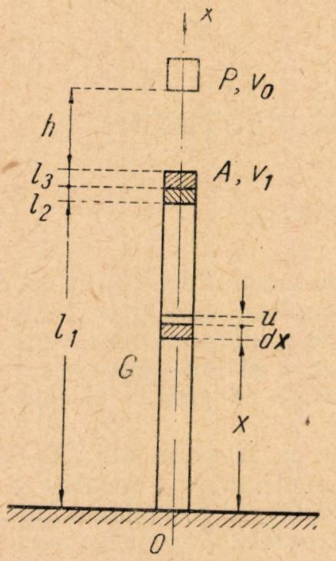


Fig. 1

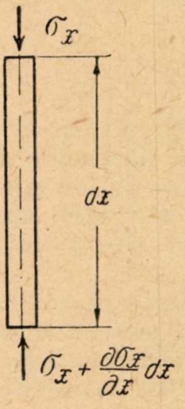


Fig. 2

cu notația

$$\alpha^2 = \frac{E}{\rho}, \tag{2}$$

E fiind modulul de elasticitate echivalent, iar ρ masa specifică a barei.

Ecuației precedente i se poate atașa condițiile inițiale de forma

$$u(x, 0) = f_1(x), \tag{3}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{t=0} = f_2(x) \tag{4}$$

și condițiile la limită de forma

$$u(0, t) = 0, \tag{5}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=l} = 0. \tag{6}$$

Condițiile inițiale au următoarea semnificație : prima dă deplasările secțiunilor barei, iar cea de-a doua dă vitezele de mișcare ale acestora pentru $t = 0$.

Condițiile la limită indică : prima faptul că extremitatea inferioară a pilotului este încastrată, iar cea de-a doua, adică limita superioară, că extremitatea superioară este liberă de tensiune.

Utilizînd metoda Fourier, soluția problemei se obține sub forma

$$u = \sum_{i=1,3,5\ldots}^{\infty} \left(A_i \cos \frac{i\pi}{2l}\,\alpha t + B_i \sin \frac{i\pi}{2l}\,\alpha t\right) \sin \frac{i\pi}{2l}\,x \tag{7}$$

coeficienții dezvoltării fiind dați de formulele

$$A_i = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f_1(x) \sin \frac{i\pi}{2l}\,x \,\mathrm{d}x, \tag{8}$$

$$B_i = \frac{2}{i\pi\alpha}\int_{-l}^{l} f_2(x) \sin \frac{i\pi}{2l}\,x \,\mathrm{d}x \tag{9}$$

(v. Filonenko-Borodici [2], p. 79).

În cazul problemei de față, funcțiunile $f_1(x)$ și $f_2(x)$ se determină ținînd seama de faptul că la șoc, în momentul inițial deplasările sînt nule, iar vitezele imprimate secțiunilor sînt cele care rezultă din ipoteza lui Beleaev ([1] p. 865), deci

$$f_1(x) = 0, \tag{10}$$

$$f_2(x) = v(x). \tag{11}$$

Prima relație conduce la anularea coeficienților : $A_i = 0$.

Pentru determinarea vitezei imprimate secțiunilor, se folosește calea energetică în ipoteza cea mai defavorabilă, și anume că stîlpul, ajuns în teren rezistent, nu mai poate pătrunde (a ajuns la refuz). În acest caz, fie W_c energia cinetică a berbecului la șoc

$$W_c = \frac{1}{2g}\,P\,v_0^2, \tag{12}$$

v_0 fiind viteza berbecului la șoc.

Fie W_{c_1} energia cinetică a berbecului după șoc, care, după lovirea pilotului, continuă deplasarea cu viteza v_1 cu stîlpul

$$W_{c_1} = \frac{1}{2g}\,P\,v_1^2. \tag{13}$$

Fie W_{c_2} energia cinetică a stîlpului după șoc,

$$\mathrm{d}W_{c_2} = \frac{1}{2}\,\mathrm{d}m\, v_2. \tag{14}$$

în care masa elementară de stîlp

$$\mathrm{d}m = A\,\frac{\gamma}{g}\,\mathrm{d}x, \tag{15}$$

iar viteza particulei dm la distanța x de origină este v.

Cum viteza la capul stîlpului este v_1 la momentul șocului, și zero la încastrare, se poate considera că repartiția vitezei este liniară de-a lungul stîlpului în momentul șocului (numai în momentul șocului) deci

$$v = v_1 \frac{x}{l} \text{ (ipoteza Beleaev, vol. II, p. 865).} \tag{16}$$

Substituind pe (16) și (15) în (14) și integrînd, dă

$$W_{c_2} = \frac{1}{2g} \frac{A\gamma\, v_1^2}{l^2} \int_0^l x^2 \,\mathrm{d}x = \frac{1}{6g} A\,\gamma\, l\, v_1^2. \tag{17}$$

De fapt γl este o sumă de produse dintre greutățile specifice și lungimile fracțiunilor : dop, amortizor și stîlp, dar primele două sînt neglijabile în raport cu ultima, deci ne limităm numai la stîlp.

Scriem energia cinetică pierdută de sistem prin șoc

$$W_p = W_c - (W_{c_1} + W_{c_2}) = \frac{P}{2g}\left[v_0^2 - \left(1 + \frac{A\,\gamma l}{6g}\right)v_1^2\right]. \tag{18}$$

Energia pierdută este regăsită sub formă de energie internă adică

$$W_i = \underset{\text{în berbec}}{\frac{1}{2g}\, P\,(v_0 - v_1)^2} + \underset{\text{în stîlp}}{\frac{1}{6}\,\frac{A\gamma\, l}{g}\, v_1^2}. \tag{19}$$

Egalînd (18) cu (19) rezultă

$$v_1 = \frac{v_0}{1 + \dfrac{A\gamma l}{3P}}. \tag{20}$$

Notînd cu

$$\mu = \frac{1}{1 + \dfrac{A\gamma l}{3P}} \tag{21}$$

sau

$$\mu = \frac{1}{1 + \dfrac{G}{3\,P}}, \tag{22}$$

se poate scrie

$$v_1 = \mu v_0. \tag{23}$$

Înlocuind pe (23) în (16) și apoi pe (16) în (11), respectiv (4), rezultă :

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{t=0} = \mu v_0 \frac{x}{l} = f_2(x) \tag{24}$$

și substituind pe (24) în expresiunea lui B_i din (9), dă imediat

$$B_i = \frac{2}{i\pi\alpha}\int_{-l}^{l} \frac{\mu v_0 x}{l} \sin \frac{i\pi x}{2l}\, dx = \frac{16\,\mu\, v_0\, l}{i^3 \pi^3 \alpha}. \tag{25}$$

Introducînd expresiunea lui B_i în (7), se obține

$$u = \sum_{i=1,3,5\ldots}^{i=\infty} \frac{16\,\mu v_0 l}{i^3 \pi^3 \alpha} \sin \frac{i\pi}{2l} \alpha t \sin \frac{i\pi}{2l} x. \tag{26}$$

Deformația într-un punct de coordonată x este

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \sum_{i=1,3,5\ldots}^{i=\infty} \frac{16\mu v_0 l}{i^3 \pi^3 \alpha} \sin \frac{i\pi}{2l} \alpha t \cos \frac{i\pi}{2l} x.\, \frac{i\pi}{2l}, \tag{27}$$

sau

$$\varepsilon_x = \sum_{i=1,3,5\ldots}^{i=\infty} \frac{8\,\mu\, v_0}{i^2 \pi^2 \alpha} \sin \frac{i\pi}{2l} \alpha t \cos \frac{i\pi}{2l} \cdot x. \tag{28}$$

Maximum lui ε_x pentru o valoare dată a timpului t este pentru cazul cînd

$$\cos \frac{i\pi}{2l} x = 1, \tag{29}$$

care are ca soluție

$$\frac{i\pi}{2l} x = 0 \quad \text{sau} \quad \frac{i\pi}{2l} x = 2\pi i,$$

de unde se deduce

$$x = 0 \tag{30}$$

sau

$$x = 4l. \tag{31}$$

A doua soluție este absurdă.

Să căutăm maximum maximorum al lui ε_x pentru diferite valori a timpului t.

Pentru aceasta căutăm maximum lui ε_x considerînd expresia din (28) în care facem $x = 0$, adică vom căuta valoarea maximă a lui ε_x în punctul $x = 0$, la încastrare.

De asemenea, pentru simplificare vom considera numai o parte din termeni. În adevăr, avem din (28)

$$\varepsilon_x = \frac{8\,\mu v_0}{\pi^2 \alpha}\left[\sin \frac{\pi}{2l} \alpha t + \frac{1}{3^2} \sin \frac{3\pi}{2l} \alpha t + \frac{1}{5^2} \sin \frac{5\pi}{2l} \alpha t\right], \tag{32}$$

ai cărei termeni descresc repede prin numitorul la pătrat.

Derivînd

$$\frac{\partial \varepsilon_x}{\partial t} = \frac{8\,\mu\, v_0}{\pi^2 \alpha}\left[\frac{\pi\alpha}{2l} \cos \frac{\pi}{2l} \alpha t + \frac{1}{3}\, \frac{\pi\alpha}{2l} \cos \frac{3\pi}{2l} \alpha t + \frac{1}{5}\, \frac{\pi\alpha}{2l} \cos \frac{5\pi}{2l} \alpha t\right], \tag{33}$$

sau egalînd cu zero derivata (numai cu doi termeni)

$$\cos \frac{\pi}{2l} \alpha t + \frac{1}{3} \cos \frac{3\pi}{2l} \alpha t = 0, \tag{34}$$

dar

$$\cos \frac{3\pi}{2l} \alpha t = 4 \cos^3 \frac{\pi}{2l} \alpha t - 3 \cos \frac{\pi}{2l} \alpha t. \tag{35}$$

Substituind pe (35) în (34) avem

$$\cos \frac{\pi}{2l} \alpha t + \frac{4}{3} \cos^3 \frac{\pi}{2l} \alpha t - \cos \frac{\pi}{2l} \alpha t = 0,$$

cu soluția :

$$\cos \frac{\pi}{2l} \alpha t = 0,$$

sau

$$\frac{\pi \alpha t}{2l} = \frac{\pi}{2}, \text{ sau în general} \tag{36}$$

$$\frac{\pi \alpha t}{2l} = K\pi + \frac{\pi}{2} \text{ unde } K \text{ întreg, pozitiv sau nul.} \tag{37}$$

Din (36) se deduce

$$t = \frac{l}{\alpha} \tag{38}$$

şi în general

$$t = \frac{l}{\alpha} (2k + 1). \tag{39}$$

În concluzie : *prima undă de șoc maximă se produce la încastrare la momentul* $t = \frac{l}{\alpha}\cdot$

Înlocuind valoarea lui t din (38) în (32) dă

$$\varepsilon_{x\,\max} = \frac{8\mu v_0}{\pi^2 \alpha} \left[\sin \frac{\pi}{2} + \frac{1}{9} \sin \frac{3\pi}{2} + \frac{1}{25} \sin \frac{5\pi}{2} \right] =$$

$$= \frac{8\mu v_0}{\pi^2 \alpha} \left[1 - \frac{1}{9} + \frac{1}{25} - \dots \right] \cong \frac{8\mu v_0}{\pi^2 \alpha} 0{,}89,$$

deci

$$\varepsilon_{x\max} = 0{,}72 \frac{\mu v_0}{\alpha}, \tag{40}$$

iar

$$\sigma_{x\max} = 1{,}02\, \mu \sqrt{h \gamma E}. \tag{41}$$

Se vede că termenii mai mari de rangul doi sînt neglijabili, eroarea, în modul, este mai mică decît 0,04.

Caz particular. Cum uzual $P = G$ adică greutatea berbecului este egală cu a stîlpului, rezultă că (pentru stîlpi din beton armat)

$$\mu = 0{,}75, \text{ deci}$$

$$\varepsilon_{x\max} = 0{,}54 \frac{v_0}{\alpha}. \tag{42}$$

Dar

$$\sigma_x = \varepsilon_x E \quad \text{şi } \alpha = \sqrt{\frac{E}{\rho}} = \sqrt{\frac{Eg}{\gamma}}, \quad v_0 = \sqrt{2\,gh}.$$

Înlocuind rezultă

$$\sigma_x = 0{,}54\, E \sqrt{\frac{2\,gh}{Eg}} = 0{,}54 \sqrt{2\,\gamma E h},$$

sau în secţiunea de încastrare solicitarea maximă este

$$\sigma_{x\max} = 0{,}76 \sqrt{h \gamma E}. \tag{43}$$

În această formulă atît γ, cît şi E, trebuie luate cu valorile lor medii calculate asupra ansamblului stîlp, amortizor, căciulă.

1.1. *Calculul elementelor* γ *şi e.* Pentru calculul greutăţii specifice γ mediu, se scrie

$$V\gamma = V_1\gamma_1 + V_2\gamma_2 + V_3\gamma_3.$$

Cum greutatea specifică a betonului armat γ_1 este mai mare în raport cu greutăţile specifice ale amortizorului γ_2 şi dop γ_3, iar volumul stîlpului (cca 12 m lungime) este mult mai mare faţă de volumul amortizorului şi al dopului, se poate lua aproximativ

$$V\gamma \cong V_1\gamma_1,$$

deci

$$\gamma \cong \gamma_1.$$

Pentru calculul modulului de elasticitate mediu, se consideră relaţia dintre forţă, constanta elastică şi deformaţia (săgeata) unui element elastic:

$$F = C\Delta l. \tag{44}$$

Dar dacă avem mai multe elemente elastice în serie,

$$\frac{l}{E} = \sum_1^n \frac{l_i}{E_i}. \tag{45}$$

În cazul nostru avem trei elemente.

Înlocuind pe (45) în (43) avem

$$\sigma_{x_{\max}} = 0{,}76\,\sqrt{h\gamma}\,\sqrt{\frac{l}{\frac{l_1}{E_1}+\frac{l_2}{E_2}+\frac{l_3}{E_3}}} = 0{,}76\,\sqrt{h\gamma E_1}\cdot K. \qquad (46)$$

Din care se vede că : *cu cît se bate stîlpul și pătrunde în pămînt, cu atît* l_1 *scade, deci radicalul scade și în consecință descrește, adică unda de șoc devine din ce în ce mai puțin periculoasă.*

Ipoteza cea mai defavorabilă este deci pentru cazul cînd stîlpul abia a pătruns în pămînt și terenul este foarte rezistent.

1.2. *Pentru cazul particular cînd pilotul este la refuz.*

l_1 = lungimea stîlpului = 12 m,
l_2 = „ amortizorului de cauciuc = 0,15 m (maxim),
l_3 = „ dopului = 0,5 m,
E_1 = modulul de elasticitate la tensiune al betonului = 60 000 kg/cm² (Hütte, vol. I, p. 629),
E_2 = modulul de elasticitate al cauciucului = 30 kg/cm² (A. Tenot, p. 144),
E_3 = modulul de elasticitate stejar = 100 000 kg/cm² (Hütte, vol. I, p. 625),
γ = greutatea specifică a betonului armat, $\gamma = 2{,}4$ kg/dm³, avem coeficientul

$$K = 0{,}20.$$

Deci folosind relația (46)

$$\sigma_x = 26 \text{ kg/cm}^2.$$

În concluzie : *dacă terenul este greu penetrabil, unda de șoc dă o rezistență la întindere în beton la încastrare mai mică decît cea admisibilă* $\sigma_a' = 40$ kg/cm², (dar numai cu elementele din exemplu) și este bine dimensionat.

În adevăr, examinînd coeficientul K se vede că :

la numărător, lungimile dopului și amortizorului sînt neglijabile în raport cu lungimea stîlpului ;

la numitor, termenul aferent dopului este neglijabil, iar termenul amortizorului reprezintă valoarea predominantă.

1.3. *Pentru cazul real* cînd intervine și elasticitatea terenului se poate considera că expresiunea (45) devine

$$\frac{l}{E} = \frac{l_1}{E_1} + \frac{l_2}{E_2} + \frac{l_3}{E_3} + \frac{1}{C_z}, \qquad (47)$$

C_z se numește coeficient de compresiune elastică uniformă și valoarea lui este dată atît de Barcan, cît și de Ponomarev [5] (vol. I, p. 294).

$$C_z = C_{z_{10}}\sqrt{\frac{10}{A}} \qquad (48)$$

pentru argilă și argilă nisipoasă ;

$C_{z_{10}}$ fiind dat în tabela 11 (p. 295) pentru terenuri de rezistență medie

$$C_{z_{10}} = 3\ldots5 \text{ kg/cm}^3,$$

A = secțiunea stîlpului, în m².

Considerînd că aria secțiunii este pentru $D_1 = 0{,}3$ m și $D_2 = 0{,}26$ m (pilot cav)

$$A = \frac{\pi D_1^2}{4} - \frac{\pi D_2^2}{4} = 908 \text{ cm}^2 - 531 \text{ cm}^2 = 0{,}0377 \text{ m}^2 < 10 \text{ m}^2,$$

iar

$$C_z = 48{,}5 \text{ kg/cm}^3.$$

Formula (46) devine cu $l_2 \simeq 0$, $l_3 \cong 0$, $\frac{E}{E_3} l_3 \cong 0$,

$$\sigma_x = 0{,}76 \sqrt{h\gamma E_1} . K_1,$$

unde

$$K_1 = \sqrt{\frac{l_1}{1 + \frac{E_1}{E_2} l_2 + \frac{E_1}{C_z}}} = 0{,}180, \tag{49}$$

deci

$$\sigma_x = 23 \text{ kg/cm}^2. \tag{50}$$

Ceea ce înseamnează că: *elasticitatea unui teren de rezistență medie nu modifică mult* (cu cca 17%) *solicitarea maximă la vibrații; în consecință, poate fi neglijată, la calculul rezistenței pilotului.*

Formula (46) poate fi aplicată în practică sub forma

$$\sigma_x = 0{,}76 K_2 \sqrt{h\gamma E_1}, \text{ sau în general,} \tag{51}$$

$$\sigma_x = 1{,}02 \mu K_2 \sqrt{h\gamma E_1}, \tag{52}$$

în care

$$K_2 = \sqrt{\frac{l_1}{l_1 + \frac{E_1}{E_2} l_2}}$$

σ_a = rezistența admisibilă pentru beton, $\sigma_a = 40$ kg/cm²,

E_1 = modulul de elasticitate la întindere al betonului,
E_2 = modulul de elasticitate al amortizorului (de ex. cauciuc),
l_1 = lungimea stîlpului (maximă),
l_2 = lungimea amortizorului.

2. SOLICITĂRILE DIN FORȚA DINAMICĂ

Pentru solicitarea dinamică se aplică formula dată în tratate sub forma

$$\sigma_d' = \Psi \sigma_s \tag{53}$$

coeficientul dinamic este dat de relația :

$$\Psi = 1 + \sqrt{1 + \frac{W_s}{W_d}}, \tag{54}$$

W_s = energia cinetică de șoc,
W_d = energia de deformație a sistemului sub sarcina statică *P*.

Or, energia cinetică de șoc s-a calculat pentru stabilirea energiei pierdute (v. relația (18)). Ea este

$$W_s = W_{c_1} + W_{c_2} = \frac{1}{2g} P v_1^2 + \frac{1}{6g} \cdot A \gamma v_1^2,$$

care dă prin transformări succesive și ținînd seama de (23)

$$W_s = \frac{P v_0^2}{2g} \frac{1}{1 + \frac{1}{3} \frac{G}{P}}. \tag{55}$$

Energia de deformație din sarcina *P* aplicată static, este

$$W_d = \frac{1}{2} P \, \Delta l, \tag{56}$$

în care

$$\Delta l = \frac{P}{C_z A} + \Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3,$$

în care primul termen reprezintă deformația elastică a terenului.

$$\Delta l = \frac{P}{A} \left(\frac{l_1}{E_1} + \frac{l_2}{E_2} + \frac{l_3}{E_3} + \frac{1}{C_z} \right).$$

Neglijînd ultimii doi termeni în raport cu primii doi, ca în relația (56), se obține

$$\Delta l = \frac{P}{A} \left(\frac{l_1}{E_1} + \frac{l_2}{E_2} \right). \tag{57}$$

Substituind pe (57) în (56) avem :

$$W_d = \frac{1}{2} \frac{P^2}{A} \left(\frac{l_1}{E_1} + \frac{l_2}{E_2} \right).$$

Ducînd pe W_d și W_s din (55), în (54) avem

$$\Psi = 1 + \sqrt{1 + \frac{3 v_0^2 A}{g (3P + G) \left(\frac{l_1}{E_1} + \frac{l_2}{E_2} \right)}}, \tag{58}$$

deci înlocuind pe

$$\sigma_s = \frac{P}{A}$$

şi pe Ψ din (58) în relația (53) se obține

$$\sigma_d = \frac{P}{A}\left[1 + \sqrt{1 + \frac{3\,v_0^2 A}{g\,(3P + G)\left(\frac{l_1}{E_1} + \frac{l_2}{E_2}\right)}}\right], \tag{59}$$

înlocuind pe

$v_0^2 = 2\,gh$ avem pentru cazul general

$$\sigma_d = \frac{P}{A}\left[1 + \sqrt{1 + \frac{6\,h\,A}{(3\,P + G)\left(\frac{l_1}{E_1} + \frac{l_2}{E_2} + \frac{l_3}{E_3} + \frac{1}{c_z}\right)}}\right]. \tag{60}$$

2.1. *Cazul particular*, cînd pilotul este la refuz, necesită aplicarea formulei (59).

Folosind cazul practic de la punctul 1.2 şi relațiile

$$P = l_1\,\gamma A,\ P = G, \text{ dă}$$

$$\sigma_d = \gamma\, l_1\left[1 + \sqrt{1 + \frac{3\,h}{2\,l_1\,\gamma\left(\frac{l_1}{E_1} + \frac{l_2}{E_2} + \frac{l_3}{E_3}\right)}}\right].$$

Substituind valorile numerice

$$\sigma_d = \frac{2{,}4 \times 1\,200}{1\,000}\left[1 + \sqrt{1 + \frac{6 \times 200 \times 1\,000}{4 \times 2{,}4 \times 1\,200\left(\frac{1\,200}{6 \times 10^4} + \frac{15}{30} + \frac{50}{10^5}\right)}}\right].$$

Din această relație se vede că termenul sensibil este numai acela dat de amortizor, restul termenilor putînd fi neglijat.

Efectuînd calculele, rezultă :

$$\sigma_d = 16{,}7 \text{ kg/cm}^2.$$

În concluzie : *solicitarea din vibrația longitudinală este mai mare decît aceea cu care se calculează în mod uzual, adică din solicitarea dinamică.*

Dacă însă nu s-ar monta amortizorul de cauciuc, ar rezulta

— pentru cazul de la punctul 1.2.

$$K \cong 1, \quad \text{iar } \sigma_z = 130 \text{ kg/cm}^2,$$

adică depăşeşte rezistența admisibilă $\sigma_a = 40$ kg/cm^2;

— pentru cazul de la punctul 2.1.

$$\sigma_d = 69 \text{ kg/cm}^2,$$

adică depăşeşte limita admisibilă, dar rămîne totuşi inferioară solicitării unitare din vibrație.

Rezistența dinamică este totuși aceea cu care se va calcula atît căciula din lemn, cît și amortizorul.

3. RELAŢIILE DIMENSIONALE DINTRE ELEMENTE

3.1. Pentru o folosire rațională a materialelor este indicat să se realizeze

$$\sigma_x = \sigma_a \text{ (pentru materialul pilotului)}$$

şi să se deducă apoi σ_d, cu care să se calculeze amortizorul şi căciula.

În acest scop, din (52) se deduce

$$\sigma_x = \sigma_a = 1{,}02 \frac{3P}{3P + G} K_2 \sqrt{h \gamma E_1} \tag{61}$$

în care

$$K_2 = \left[\sqrt{\frac{l_1}{l_1 + \frac{E_1}{E_2} l_2}} \right], \tag{62}$$

iar din (59)

$$\sigma_d = \frac{P}{A} \left[1 + \sqrt{1 + \frac{6 h A E_1}{(3P + G) \frac{l_1}{K_2^2}}} \right]. \tag{63}$$

Eliminînd pe K_2 din (61) şi (62), rezultă

$$K_2 = \frac{(3P + G)\sigma_a}{3{,}06 P} \cdot \frac{1}{\sqrt{h \gamma E_1}}. \tag{64}$$

Din (63)

$$\left(\frac{\sigma_a A - P}{P} \right)^2 - 1 = \frac{6 h A E_1 K_2^2}{(3P + G) l_1}. \tag{65}$$

Substituind pe K_2 din (64) făcînd simplificările, grupînd după puterile lui σ_d

$$A \sigma_d^2 - 2P \sigma_d - \frac{0{,}64 (3P + G) A \sigma_a^2}{G} = 0, \tag{66}$$

rezolvînd ecuația în σ_d, rezultă

$$\sigma_d = \frac{P}{A} \left[1 \pm \sqrt{1 + \frac{0{,}64 (3P + G) A^2 \sigma_a^2}{G P^2}} \right]. \tag{67}$$

Din cele două soluții rămîne valabilă soluția pozitivă, adică :

$$\sigma_d = \frac{P}{A} \left[1 + \sqrt{1 + \frac{0{,}64 (3P + G) A^2 \sigma_a^2}{G P^2}} \right]. \tag{68}$$

Determinarea elementelor dimensionale ale amortizorului din cauciuc se face în modul următor :

— se calculează, din (67), σ_d, unde toți ceilalți parametri sînt cunoscuți;

— apoi se deduce K_2 din (64), unde toți parametrii sînt cunoscuți;

— se obține apoi lungimea amortizorului l_2 din (62).

Folosind ca amortizor un inel din cauciuc, modulul de elasticitate se ia pînă la maximum:

$$E_2 = 60 \ldots 70 \text{ kg/cm}^2. \tag{69}$$

Un cauciuc curent are

$$E_2 = 60 \text{ kg/cm}^2 \text{ (v. [6], p. 129)}.$$

Fig. 3 arată modul în care se bate un pilot, în condițiile de mai sus.

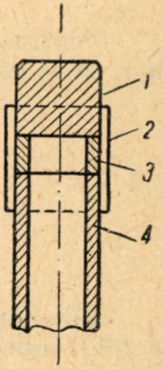


Fig. 3

1 — căciulă de lemn
2 — inel din tablă de oțel
3 — inel din cauciuc
4 — pilot de tip cav

3.2. Un exemplu va preciza formula pentru un caz particular cînd $P = G$ (piloți din beton).

Din (61) se deduce

$$l_2 = E_2\left[\frac{hG}{1{,}72\,\sigma_a^2 A} - \frac{G}{E_1}\right]. \tag{70}$$

Cu datele practice

$E_2 = 60 \text{ kg/cm}^2$, $E_1 = 60\,000 \text{ kg/cm}^2$,
$G = 1\,080 \text{ kg}$, $A = 377 \text{ cm}^2$,
$\sigma_a = 40 \text{ kg/cm}^2$, $h = 200 \text{ cm}$,
$l_1 = 1\,200 \text{ cm}$,

valoarea lui l_2 devine

$$l_2 = 10{,}2 \text{ cm}. \tag{71}$$

A. Tenot dă în lucrarea [6] la p. 144 : *$l_2 \leqslant 15$ cm, condiție esențială pentru a se evita strivirea cauciucului*. Cauciucul va trebui să aibă posibilitatea de dilatare laterală ([6], p. 148).

3.3. Eficiența baterii este maximă dacă se urmărește ca solicitările realizate în materialul folosit, adică pilot, căciulă și amortizor să fie la limita admisibilă.

Dacă pentru cauciuc se aleg caracteristicile limită de rupere, pentru pilot se vor alege caracteristicile limită admisibilă. Aceasta se traduce prin relațiile de mai jos

$$\sigma_d = \sigma_r = \chi\,\sigma_c, \tag{72}$$

unde

χ este coeficientul de siguranță pentru cauciuc,
σ_r, rezistența de rupere a cauciucului,
σ_c, rezistența admisibilă pentru cauciuc.

Apoi

$$\sigma_a = \sigma_p \tag{73}$$

unde σ_p este rezistența admisibilă pentru pilot.

Se poate pune :

$$\sigma_r = \alpha \sigma_p = \chi \sigma_c \tag{74}$$

unde α este un coeficient, pe care îl vom numi *factor de proporționalitate.* De asemenea, se mai poate nota

$$G = \beta P. \tag{75}$$

Pentru a se satisface condiția principială enunțată mai sus trebuie ca σ_r să se calculeze cu formula (63), iar σ_p cu formula (52), adică

$$\sigma_r = \frac{P}{A}\left[1 + \sqrt{1 + \frac{6hAE_1}{(3P + G)\frac{l_1}{K_2^2}}}\right], \tag{76}$$

$$\sigma_p = 1{,}02\,\frac{3P}{3P + G}\,K_2\sqrt{h\gamma E_1}\cdot \tag{77}$$

Eliminînd pe K_2, ca și la punctul 3.1, rezultă o ecuație analoagă cu (66), adică

$$A\sigma_r^2 - 2P\sigma_r - \frac{0{,}64\,(3P + G)\,A\,\sigma_p^2}{G} = 0, \tag{78}$$

$$A\alpha^2\,\sigma_p - 2P\alpha - \frac{0{,}64\,(3 + \beta)\,A\,\sigma_p}{\beta} = 0,$$

de unde se deduce valoarea lui P

$$P = \frac{\beta\alpha^2 - 0{,}64\,(3 + \beta)}{2\alpha\beta}\,A\,\sigma_p. \tag{79}$$

Sau se poate obține valoarea lui β, substituind

$$\beta P = G = l_1 A\,\gamma,$$

adică

$$\beta = \frac{2l_1\,\alpha\gamma + 1{,}92\,\sigma_p}{(\alpha^2 - 0{,}64)\,\sigma_p}, \tag{80}$$

cu condiția

$$\alpha^2 - 0{,}64 > 0, \tag{81}$$

sau

$$\alpha > 0{,}8.$$

Relațiile (80) și (81) reprezintă condițiile fundamentale pe care trebuie să le îndeplinească pilotul, berbecul și amortizorul pentru ca solicitarea pilotului să rămînă sub limita admisibilă, iar amortizorul din cauciuc să fie la limita de rupere. Ele reprezintă *condițiile de folosire rațională ale materialelor.*

3.4. Hütte (ediția franceză) vol. III, p. 223 arată că pentru betonul armat greutatea berbecului este sensibil egală cu a pilotului, iar între căciula din lemn dur și capul pilotului se interpune un strat de plumb amortizor.

Să verificăm ce calități trebuie să îndeplinească un strat de cauciuc amortizor în ipoteza de mai sus.

Fie următoarele date practice :

$l_1 = 1\,200$ cm (indicată de Hütte, p. 222),

$\gamma = 2{,}4 \times 10^{-3}$ kg/cm^3 pentru betonul armat,

$\sigma_p = 40$ kg/cm^2 pentru rezistența admisibilă la compresiune a betonului,

$\sigma_c > 10$ kg/cm^2 ([6] p. 129) pentru $E = 60$ kg/cm$^2 \ldots$ 70 kg/cm^2, iar pentru ipoteza pusă în Hütte :

$$\beta = 1.$$

Se va folosi formula (80) care va determina valoarea lui α, adică, punînd $\beta = 1$, rezultă ecuația în α, care rezolvată și abandonînd soluția negativă, rămîne

$$\alpha = \frac{\gamma l_1}{\sigma_p}\left[1 + \sqrt{1 + 1{,}60^2\left(\frac{\sigma_p}{\gamma l_1}\right)^2}\right]. \tag{82}$$

Cu valorile de mai sus, termenul

$$1{,}60\,\frac{\sigma_p}{l_1 \gamma} = 22{,}4,$$

devine foarte mare în raport cu ceilalți, așa încît eroarea este mică dacă se ia

$$\alpha \cong 1{,}60. \tag{83}$$

Ceea ce conduce la

$$\alpha = 1{,}60 = \chi\,\frac{\sigma_c}{\sigma_p},$$

sau

$$\sigma_r = \chi\,\sigma_c = 64 \text{ kg/cm}^2.$$

Se poate alege un cauciuc cu caracteristicile curente

$$\chi = 4, \quad \sigma_c = 16 \text{ kg/cm}^2.$$

3.5. Determinarea celorlalte elemente ale sistemului se face în modul următor :

— se aleg materialele cu caracteristicile cele mai convenabile (mai mari), adică σ_c, σ_t, χ ;

— se determină α din (74) ;

— se calculează β cu (80), în care s-a ales l_1 după condițiile terenului, restul elementelor fiind cunoscute (σ_p, α, γ) ;

— din relația

$$\beta P = G = l_1 A \gamma ;$$

se deduce P și G, admițînd pe A ;

— se calculează h din formula (77), în care se substituie din (80), adică

$$\sigma_p = 1{,}02 \frac{3\,P}{3P + \dfrac{2\,l_1\,\alpha\gamma + 1{,}92\,\sigma_p}{(\alpha^2 - 0{,}64)\,\sigma_p}\,P}\,K_2\sqrt{h\gamma\,E_1}.$$

Simplificînd, se obține

$$h = \left(\frac{C}{K_2}\right)^2, \tag{84}$$

unde

$$C = \frac{\alpha^2\,\sigma_p + 0{,}66\,l_1\,\alpha\,\gamma}{(\alpha^2 - 0{,}64)\sqrt{\gamma\,E_1}}, \tag{85}$$

relație în care se cunosc toate elementele.

Pentru un anumit material, pilot și amortizor, C = constant, iar relația (84) este o curbă

$$h = f(K_2)$$

care are asimptote pe Oh și OK_2.

Alegerea lui K_2 determină pe h și reciproc, cu condiția ca să nu se depășească pentru K_2 valoarea rezultînd din relația (71) și (62), adică

$$h = \text{maximum}$$

pentru

$$K_2 = K_2' \text{ (v. fig. 4).}$$

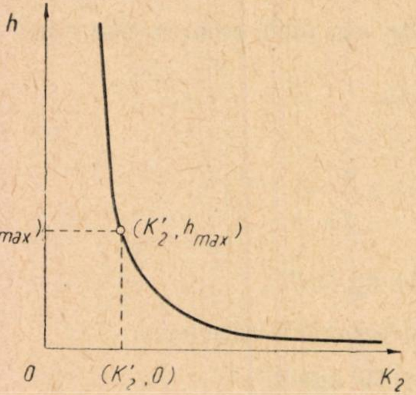


Fig. 4

— În acest mod, se determină toate elementele, adică :

A, l_1, σ_p, σ_c χ, K_2 : se dau
α, β, P, G, h : se deduc.

3.6. Exemplu.

Cu elementele de la pct. 3.4. se poate scrie :

$$C = 4{,}4 \text{ cm}^{1/2}$$

iar pentru cazul limită (71) : $l_2 = 15$ cm, și deci din (62) :

$$K_2 = 0{,}272 \text{ (mărime fără dimensiuni).}$$

Aceasta dă pentru înălțimea de cădere :

$$h_{\max} = \left(\frac{4{,}4}{0{,}27}\right)^2 = 2{,}85 \text{ m} \tag{86}$$

ca înălțime maximă posibilă de cădere, cu un amortizor din cauciuc, cu un berbec de greutate egală cu a pilotului și cu un pilot din beton armat.

4. FORȚA DE PĂTRUNDERE

4.1. Forța de acționare este dată de relația

$$F = A\sigma_d \tag{87}$$

iar σ_d se poate lua din relația (68), care, pentru folosire rațională de material, se ia

$$\sigma_d = \sigma_r$$

adică rezistența de rupere a amortizorului de cauciuc.

$$F = P\left[1 + \sqrt{1 + \frac{0{,}64\ (3P + G)\ A^2\ \sigma_p^2}{G\ P^2}}\right]. \tag{88}$$

La înaintarea stîlpului se opune

— rezistența laterală, cu o forță unitară p_0

— rezistența la vîrf, cu o forță unitară p_1

(v. Hütte, vol. III, p. 224).

Rezistența totală este deci dată de:

$$R = aHp_0 + Ap_1 \tag{89}$$

unde R este forța de rezistență totală

a, perimetrul secțiunii,

H, înălțimea de pătrundere,

A, secțiunea (aria).

Pentru ca stîlpul să nu mai înainteze în condițiile sistemului conceput, trebuie ca:

$$R = F \text{ deci } H = H_{\max}. \tag{90}$$

Din (89) și (90) rezultă atunci

$$H_{\max} = \frac{F - Ap_1}{ap_0}. \tag{91}$$

4.2. Pentru cazul cînd terenul este nămol și cu elementele folosite la pct. 3.2.

$$P = G = \gamma\, l_1 A$$

iar (88) devine

$$F = P\left[1 + \sqrt{1 + \left(\frac{1{,}60\ \sigma_a\ A}{P}\right)^2}\right].$$

Cu datele practice

$$F = 2{,}72 \text{ t.}$$

Hütte, vol. III, p. 224 dă

$$p_0 = 0 \ldots 0{,}2 \text{ t/m}^2,\ p_0 = 0{,}2 \text{ t/m}^2$$
$$p_1 = \text{sub } 4 \text{ kg/cm}^2,\ p_1 = 2 \text{ kg/cm}^2 = 20 \text{ t/m}^2.$$

Înlocuind în (91)

$$H_{\max} = 6{,}15 \text{ m}$$

adică pilotul de 12 m nu poate intra decît 6,15 m.

4.3. Pentru motive de economie, se poate pune problema ca lungimea pilotului să se aleagă astfel încît la refuz, capul lui să fie la nivelul solului, adică

$$H_{\max} = l_1 . \tag{92}$$

Substituind pe (92) în (91), — în care F se consideră din relația (28) — se obține o relație între dimensiunile secțiunii și lungimea pilotului (β, σ_a, p_0 și p_1 fiind cunoscute).

4.4. De exemplu, pentru un pilot cu secțiune pătrată de latura b și cu $\beta = 1$, se obține succesiv

$$l_1 = \frac{\gamma l_1 b^2 \left[1 + \sqrt{1 + 2{,}56 \left(\frac{\sigma_p}{\gamma l_1}\right)^2}\right] - b^2 p_1}{4 b p_0}$$

care dă valoarea lui $b = f(l_1)$, adică

$$b = \frac{4 l_1 p_0}{\gamma l_1 \left[1 + \sqrt{1 + 2{,}56 \left(\frac{\sigma_p}{\gamma l_1}\right)^2}\right] - p_1} \tag{93}$$

care determină univoc pe G, P și h, în condițiile cele mai economice.

5. CONCLUZII

a) La baterea piloților s-au folosit, pînă în prezent, date empirice pentru stabilirea caracteristicilor elementelor esențiale : pilot, berbec, înălțime de cădere, care uneori au condus la distrugerea piloților :

b) Studiul stabilește corelația strînsă între caracteristici și condițiile unei eficiențe maxime corespunzătoare calității terenului în care se bat piloții și fără distrugerea materialelor folosite.

c) De asemenea, determinarea univocă a elementelor caracteristici ține seama și de suprasolicitările ce apar în piloți prin vibrațiile longitudinale provocate de șoc.

Primită la redacție la 18 mai 1962, o nouă versiune la 25 iulie 1962

ИССЛЕДОВАНИЕ СВАЙНЫХ РАБОТ

РЕЗЮМЕ

До настоящего времени при свайных работах установление зависимости между элементами: сваи, свайный молот, высота падения и вид амортизатора — было эмпирическим, а расчет на прочность свая основан на формуле динамической нагрузки.

Автор устанавливает технико-экономические соотношения между характеристиками этих элементов, а также формулы расчета на прочность для каждого элемента (сваи, свайный молот, амортизатор).

Излагается в особенности использование каучукового амортизатора максимальной эффективности, а также формула для расчета на прочность свая с учетом перегрузок от продольных колебаний из-за удара.

Указанное практическое применение выявляет заметную разницу между двумя методами, т.е. между методом, использованным до сих пор, и методом, предложенным в настоящем исследовании.

BIBLIOGRAFIE

1. N. M. BELEAEV, *Rezistenţa materialelor.* Ed. tehnică, Bucureşti, I, 597 ; II, 1065 (1956).
2. M. M. FILONENKO-BORODICI, *Teoria elasticităţii.* Ed. tehnică, Bucureşti, 1952, 287.
3. S. TIMOSHENKO, *Théorie des vibrations.* Paris, Lib. Polytechnique, Ch. Béranger, 1947, 482.
4. GH. BUZDUGAN, *Rezistenţa materialelor.* Ed. Inst. politehnic Bucureşti, III, 1954, 358.
5. S. D. PONOMAREV, *Calculul modern de rezistenţă în construcţia de maşini.* Ed. tehnică, Bucureşti, I, 1957, 634.
6. A. TENOT, *Mesure des vibrations et isolation des assises de machines.* Paris, Ed. Dunod, 1953, 243.

-MANIFESTARI ŞTIINŢIFICE PESTE HOTARE-

AL ŞAPTELEA CONGRES DE MECANICĂ TEORETICĂ ŞI APLICATĂ, BOMBAY, 23–26 DECEMBRIE, 1961

DE

D. MANGERON[1]

Abordarea unei tematici din ce în ce mai largi şi regularitatea cu care se desfăşoară, în Republica India, începînd cu toamna anului 1955[2], Congresele de mecanică teoretică şi aplicată, au făcut ca aceste congrese să se bucure de participare internaţională mereu crescîndă.

Astfel, la cel de-al şaptelea Congres de mecanică teoretică şi aplicată, desfăşurat între 23–26 decembrie 1961 la Institutul tehnologic din Bombay au participat peste 200 de oameni de ştiinţă, printre care cunoscuţii specialişti G. N. Mesčeriakov, N. P. Ermolin, A. A. Sirotin, N. A. Gluhov, G. Samohin, T. N. Loladze, I. E. Ţarapov, V. A. Javoronkov din U.R.S.S., H. Langhaar, E. A. Kearsley, T. Wah din S.U.A., L. Collatz şi J. Hang din R.F.G., S. Ruza din R. S. F. Iugoslavia.

Discursurile de deschidere ţinute de noul vicepreşedinte al Societăţii Indiene de mecanică teoretică şi aplicată şi Director al Institutului tehnologic din Bombay, prof. dr. S. K. Bose şi de preşedintele aceleeaşi societăţi prof. dr. S. Kothari au fost consacrate, respectiv, problemelor organizatorice relative la procesul de învăţămînt şi de cercetare ştiinţifică în domeniul Mecanicii teoretice şi aplicate[3] şi aspectului fizic al fenomenelor subatomice. Ele au fost urmate de un număr de conferinţe generale ţinute de Y. V. G. Acharya, R. Ballabh, L. Collatz, J. N. Kapur, E. A. Kearsley, G. N. Mesčeriakov, H. Langhaar, I. E. Ţarapov şi T. Wah.

---

[1] Institutul Politehnic, Iaşi.

[2] A se vedea darea de seamă asupra volumului „Proceedings of the first Congress on theoretical and applied Mechanics", November 1–2, 1955, Indian Institute of Technology, Kharagpur, 284 pp., „Buletinul Institutului politehnic din Iaşi", serie nouă, vol. 4 (8), fasc. 3–4, 1958, pp. 447–448.

[3] Aceste probleme, încadrîndu-se într-un domeniu mai vast de organizare şi dezvoltare multilaterală a învăţămîntului tehnic superior şi a cercetării ştiinţifice, au fost dezbătute pe larg în recentul Simpozion internaţional al oamenilor de ştiinţă consacrat problemelor învăţămîntului superior (Moscova, septembrie 1962). A se vedea „Vestnik Vîsšei Školi", nr. 8, 1962, pp. 67–71.

Lucrările de specialitate prezentate la Congres se încadrează în limite îndeajuns de largi în următoarele domenii ale Mecanicii : 1. Mecanica fluidelor ; 2. Elasticitate și Plasticitate ; 3. Vibrații și Lubrificație ; 4. Transport de căldură ; 5. Teoria și practica mașinilor și 6. Calculul numeric, Mașini matematice și statistică matematică și mecanică.

1. Cel mai mare număr de lucrări prezentat la acest Congres face parte din domeniul Mecanicii fluidelor. Multe din lucrările expuse se ocupă de problema scurgerii plane sau rotaționale a fluidelor vîscoase, semifluidelor conducătoare sau se încadrează în magneto-gazo-dinamică. Unele din aceste probleme constau în adîncirea criteriului lui Rayleigh relativ la stabilitatea scurgerii în spirală a lichidelor perfecte elasto-vîscoase, altele în rezolvarea unor probleme de scurgeri potențiale de-a lungul corpurilor de formă poligonală sau în căutarea soluțiilor ecuațiilor relative la stratul limită nestaționar ș.a. Pentru mai multă precizie se pot cita aici următoarele lucrări : M. K. Jain studiază problema transferului de căldură într-un curent laminar al unui fluid ne-Newtonian între pereți paraleli[1]) cu ajutorul metodei colocației ; J. N. Kapur expune o problemă de scurgere a lichidelor ne-Newtoniene ; M. N. L. Narasimhan prezintă cîteva noi cercetări în domeniul scurgerii laminare a unui fluid ne-Newtonian într-o conductă poroasă ; P. K. Kulshrestha descrie scurgerea elicoidală a unui lichid perfect elastic-vîscos în lumina criteriului de stabilitate a scurgerii în sensul lui Rayleigh etc.

În cadrul numeroaselor probleme consacrate scurgerilor de fluide dotate cu caracteristici îndeajuns de generale , cităm aici lucrările lui Y. V. G. Acharya relative la studii experimentale recente executate în tunele aerodinamice în care au loc vîrtejuri de joasă intensitate, lucrarea lui Ram Ballabh privitoare la variate aspecte ale teoriei superpozabilității în hidrodinamică ; expunerea lui J. P. Agarval prin care se pune în evidență faptul că, în cazul unei scurgeri generalizate incompresibile în sensul lui Couette în magnetohidrodinamică, cîmpul magnetic contribuie la încetinirea separării ; S. D. Nigam și P. D. Nigam arată, în lucrarea lor consacrată propagării undelor în lichide în rotație, existența în amonte a unei regiuni ferită de pătrunderea undelor.

Cîteva lucrări se ocupă cu probleme de turbulență. Printre ele amintim lucrarea lui G. L. Saini consacrată studiului oscilațiilor plasmei din punct de vedere al teoriei elasticității, expunerea lui R. K. Rathy privitoare la scurgerea hidromagnetică în sens Couette cu aspirație și injecție, cu care prilej se determină și distribuția de temperatură, studiul lui Z. U. A. Warsi relativ la mișcarea nestaționară a unei sfere solide printr-un fluid vîscos. P. C. Jain discută teoria turbulenței fluidelor gravitaționale, R. N. Ingle și A. K. Chaudhuri analizează stabilitatea cisternelor în cazul undelor hidraulice mari, Omar Ali Siddiqi analizează proprietățile funcției de curgere și a funcției potențial viteză în două și trei dimensiuni.

---

[1]) Dezvoltarea ulterioară a acestei din urmă probleme este expusă în articolul „Forced flow of a non-Newtonian liquid against a rotating disc", inserat de același autor în „Buletinul Institutului politehnic din Iași", serie nouă,vol. 8 (12), fasc. 1—2, 1962, pp. 63 și urm.

2. Un număr de lucrări prezentate la Congres ce se încadrează în vastul domeniu al elasticității și plasticității se referă la diferite probleme specifice privitoare la deformație finită în cilindri în rotație, în discuri și tronsoane, grinzi și plăci. T. Wah discută soluția generală a ecuației

$$\nabla^4 W + \frac{P}{D} \ddot{W} + \sum_{j=1}^{k} \delta_j \frac{M_j}{D} \ddot{\overline{W}}_j = g \sum_{j=1}^{k} \delta_j \frac{M_j}{D},$$

care schematizează problema de determinare a frecvențelor proprii ale plăcilor avînd un număr de mase conexate rigid de suprafața acestora și în care simbolurile folosite au semnificația uzuală. K. T. Sundara Raja Iyengar expune o nouă metodă de rezolvare a problemelor relative la incastrarea și la vibrația plăcilor dreptunghiulare. N. C. Lind și A. Bhattacharya adîncesc unele aspecte ale calculului eforturilor de deformație în cazul presării conice a unei porțiuni de vas supus la presiune interioară a unui fluid, utilizîndu-se în acest scop un anume procedeu fotoelastic. B. Rao și G. Lakshminarayana¹) discută unele aplicații ale efortului de presiune finit și obțin o generalizare a legii de tensiune-extensiune. D. N. Mitra expune studiul unei probleme de încovoiere a unei pojghițe sferice supusă la acțiunea unei sarcini continue de-a lungul unui arc de cerc concentric cu conturul exterior al pojghiței și obține o relație între încovoiere și sarcină. G. A. Nariboli și V. B. Nyayadhish expun problema undelor monodimensionale termoelastice, K. S. Sarma discută relațiile stabilite de B. R. Seth între tensorii de deformație și presiune etc.

3. Un număr restrîns de lucrări prezentate la Congres au fost consacrate problemelor de vibrații și lubrificație. Menționăm dintre ele în primul rînd lucrarea lui I. E. Țarapov relativă la aplicarea ecuațiilor de momente în problema scurgerii fluidelor între două suprafețe solide cu privire specială asupra problemei lubrificației. Expunerea lui B. V. A. Rao este o trecere în revistă a cercetărilor teoretice și experimentale relative la un nou tip de vibrații datorite proprietăților cvazielastice a filmelor de ulei în lagăre cilindrice. A. K. Chaudhuri și alții studiază stabilitatea oscilațiilor neliniare în cazul unor condiții mai generale decît acelea considerate de Hayashi. S. C. Mukherjee și P. N. Chatterjee discută studiul probelor de comportare a echipamentului ultrasonic folosit în încercări de betoane.

4. Mai multe probleme relative la transportul căldurii au atras atenția Congresului. Printre ele citâm lucrarea lui D. Banerjee și B. R. Ramaprian relativă la stabilitatea flăcării în stratul limită laminar al unei plăci încălzite, expunerea lui A. K. Rao relativă la transferul de căldură prin convecție într-o conductă rectangulară în prezența unui cîmp magnetic transvers, studiul lui C. N. Kaul relativ la propagarea discontinuității circulare cilindrice magneto-sonice ș.a.

---

¹) A se vedea articolul prof. dr. G. Lakshminarayana „Bending of an incompressible circular block" legat de lucrările sale expuse la Congres, inserat în „Buletinul Institutului politehnic din Iași", serie nouă, **8** (**12**), *3—4* (1962) (sub tipar).

5. Relativ puţine probleme au fost consacrate teoriei şi practicii legate de maşini şi mecanisme. Aici se situează studiul fundamental al lui G. N. Mesčeriakov care prezintă noi metode electroerozionale de tăierea metalelor elaborate în U.R.S.S. de B. P. Lazarenko. Cu acest prilej se subliniază posibilitatea executării unui mare număr de operaţii complexe fără a se diminua înalta precizie în execuţie şi capacitatea de producţie intensă. Prof. Mesčeriakov atrage atenţia îndeosebi asupra unor concluzii practice deosebit de utile în variate procese de prelucrare prin presiune şi impulsuri interesînd tehnologia metalelor ce izvorăsc din aplicarea tehnicii electroerozionale. R. K. Shency studiază legătura între forţele tăietoare şi geometria şi natura materialelor într-o bormaşină. L. M. Saluja expune problema eliminării vibraţiilor de autoexcitaţie în strunguri folosindu-se în acest scop diferite forme de suporturi susţinătoare a pieselor de prelucrat. A. K. De studiază erori dinamice în operaţii de tăiere a metalelor, T. N. Loladze prezintă problema oboselii materialelor în tăierea metalelor, V. A. Javoronkov descrie unele probleme din cadrul teoriei moderne a rostogolirii Cross-spirale cu privire specială la efectele economice în industrie. N. A. Gluhov expune problema execuţiei eficiente a roţilor planetare şi necesitatea ridicării nivelului de proiectare a lor. G. Samohin prezintă date relative la măsura micilor mişcări liniare în dinamometre destinate cercetării organelor de maşini ş.a.m.d.

6. Un număr de aproape zece lucrări se referă la domeniul vast al calculului numeric şi al maşinilor matematice precum şi la acel al statisticii. Astfel L. Collatz expune un studiu relativ la aplicarea teoremelor de monotonie la analiză numerică utilizată în rezolvarea problemelor de mecanică tehnică. K. J. Srivastava se ocupă de comportarea asimptotică a soluţiilor ecuaţiilor diferenţiale cu diferenţe finite neliniare de forma

$$U'(\ ) + [a_0(t) + a(t)]\, U(t) + [b_0(t) + b(t)]\, U(t-w) = f\,[U(t),\, U(t-w),\, t],$$

în care $a\,(t)$, $b\,(t)$ şi f satisfac la anumite proprietăţi menite să asigure existenţa soluţiilor. S. N. N. Pandit sugerează o nouă operaţie matricială numită „minadunare", definită prin relaţiile $A \times B = D$, în care $d_{ij} = \min\limits_{x}(a_{ix} + b_{xj})$. Drept aplicaţie a operaţiei introduse se expune problema alegerii celui mai scurt drum în teoria programării. P. K. Sinha Roy descrie integratorul digital şi utilizarea lui într-o maşină de calcul de corelaţie, B. M. Belgaumkar expune rezultatele unui studiu statistic relativ la deşeuri în fabricarea bielelor ş.a.

Cel de-al şaptelea Congres indian de mecanică teoretică şi aplicată, încadrîndu-se într-unul din „cele mai remarcabile fenomene ale contemporaneităţii, ce constă în dezvoltarea multilaterală a legăturilor culturale şi ştiinţifice între ţări şi reflectă năzuinţa vie a popoarelor către înţelegere reciprocă şi pace"¹), a oferit o platformă comună pentru oameni de ştiinţă

---

¹) A se vedea articolul de fond „Razvivat 'meždunarodnye sviazi vysšei školy", inserat în VESTNIK VYSŠEI ŠKOLY, nr. 7, 1962, pp. 3–6.

și tehnicieni deosebit de propice pentru o serie de discuții fructuoase. Cotitura înregistrată la acest Congres, axat mai mult decît congresele precedente pe domeniile mecanicii fluidelor, teoriei elasticității și a variatelor procedee experimentale, reflectă pe deplin importanța vitală a acestor domenii în diferite ramuri ale ingineriei de astăzi.

THE SEVENTH INDIAN CONGRESS OF THEORETICAL AND APPLIED MECHANICS, INSTITUTE OF TECHNOLOGY, BOMBAY, DECEMBER 23–26, 1961

ABSTRACT

This is a survey on the papers presented at the Seventh Congress of Theoretical and Applied Mechanics. The articles were grouped under the following head lines: Fluid mechanics, elasticity and plasticity, vibrations and lubrication, heat transfer, theory and practice of machines, numerical calculation, mathematical machines and mathematical and mechanical statistics.

RECENZII

M. STAMATIU, *Mecanica rocilor*, Ed. didactică și pedagogică, București, 1962, 876 p.

Dezvoltarea mare a studiilor în domeniul mecanicii rocilor, mai ales în ultimul timp, a făcut ca apariția unei lucrări în această direcție în țara noastră — bogată în substanțe minerale utile — să reprezinte o necesitate. Bazat pe un bogat material documentar (bibliografia cuprinde 389 titluri), apărut în U.R.S.S., țările de democrație populară sau alte țări, pe numeroase date culese din țara noastră și — mai ales — pe rezultate proprii de laborator, obținute pe probe de roci specifice zăcămintelor noastre, și pe o activitate îndelungată în această direcție, autorul prezintă, sub forma de manual didactic, o sinteză de mare utilitate teoretică și practică a cunoștințelor celor mai moderne în acest domeniu. Trebuie să remarcăm că prin valoarea și larga cuprindere a materialului prezentat, această lucrare este un adevărat tratat de mecanica rocilor.

Lucrarea este împărțită în patru părți care totalizează 19 capitole.

Partea întîi cuprinde capitolul „Noțiuni introductive", în care se fac unele considerații generale asupra mecanicii rocilor : obiectul și importanța studiului, legătura cu alte științe, metodele de cercetare, dezvoltarea mecanicii rocilor ca știință etc.

În partea a doua sînt studiate, în cuprinsul a două capitole, proprietățile fizice și mecanice ale rocilor și substanțelor minerale utile din punct de vedere petrografic. După o scurtă trecere în revistă (clasificare, structură, textură) a principalelor roci magmatice, sedimentare, metamorfice și pămîntoase, se prezintă principalele caracteristice fizice și mecanice ale rocilor : densitate, greutate specifică, porozitate, umiditate, higroscopicitate, permeabilitate, capilaritate, coeziune, rezistență la forfecare (unghi de frecare interioară, unghi de taluz natural), afînare, fragmentare naturală, duritate etc. O atenție deosebită se acordă proprietăților de rezistență mecanică a rocilor, aici fiind incluse și multe cercetări proprii de laborator ale autorului. Menționăm studiul privind rezistența rocilor la eforturi monoaxiale sau la eforturi complexe de compresiune. Proprietățile elastice și plastice ale rocilor sînt tratate pe larg, menționîndu-se influența vitezei de deformare. Fenomenul de curgere ca și proprietățile de umflare-contracție sînt de asemenea luate în considerație. În studiul făcut se ține seama și de influența apei sau a variațiilor de temperatură.

Partea a treia cuprinde trei capitole și are un caracter teoretic ; aici sînt studiate fenomenele fizice care contribuie la deformarea corpurilor solide. După ce se prezintă cîteva încercări de rezistență ale corpurilor solide și posibilitățile de determinare a rezistenței de rupere, se dau cîteva elemente de teoria elasticității și plasticității. Se introduc noțiunile de tensiune și deformație, arătîndu-se modul în care se calculează starea de tensiune și starea de deformație în jurul unui punct. După introducerea noțiunii de lucru mecanic specific de deformație, se trece la prezentarea cîtorva teorii de plasticitate. Pe baza acestor date se pot trece apoi în revistă cele mai importante teorii de rupere ale solidelor deformabile; menționăm, în special, prezentarea pe larg a ipotezei lui Mohr ca și a înfășurătoarelor familiilor de cercuri considerate de acesta.

În cuprinsul celor 13 capitole ale părții a patra a lucrării se dezvoltă diferite probleme teoretice și practice de mecanica rocilor. Se face întîi un studiu al stării de tensiune și al deformării rocilor din interiorul scoarței terestre, folosindu-se rezultatele obținute anterior; o atenție deosebită se acordă stării plastice la adîncimi mari. Menționăm interpretarea mecanică pe modele a deformărilor tectonice. În cazul în care formațiunile de roci sînt atacate prin lucrări subterane, starea de tensiune se schimbă. În această direcție, autorul se ocupă, în primul rînd, de tasarea pămînturilor sub fundațiile clădirilor și construcțiilor; se prezintă starea de tensiune în interiorul stratelor de roci sub asemenea construcții, tasarea lor, precum și condițiile de rezistență și stabilitate corespunzătoare; menționăm amortizarea tasărilor în timp (procedeele Ghersevanov și Țîtovici); considerăm ca deosebit de utile exemplele de accidente din tasare sau cedare a terenului a unor construcții, prezentate în această parte a lucrării. O altă problemă importantă este cea a stabilității la alunecare a taluzurilor; se ține seama de influența formei taluzelor și se stabilește forma suprafețelor de alunecare; procedeele de calcul și de verificare a stabilității taluzelor sînt de asemenea prezentate. Capitolul al X-lea este dedicat problemelor de împingere a pămîntului asupra zidurilor de sprijin; se dau diferite procedee analitice și grafo-analitice de calcul, valabile în caz general, și se fac variate particularizări.

Următoarele două capitole cuprind problema stabilității și presiunii rocilor în jurul lucrărilor miniere subterane. O atenție mare se acordă distribuției tensiunilor în jurul lucrărilor miniere subterane, considerate ca medii omogene, izotrope, elastice sau plastice. Pe lîngă studiile cu caracter teoretic, se prezintă și diferite cercetări cu caracter experimental, în special fotoelastic. Menționăm specificarea zonelor de tensiuni reduse și mărite în jurul lucrărilor miniere subterane. Pentru determinarea presiunii stabilizate a rocilor asupra lucrărilor subterane: orizontale, înclinate, verticale se dau diferite metode. Presiunea rocilor în abataje este calculată prin procedeele Țimbarevici și Kegel. Se dau și diferite metode experimentale (mecanice, hidraulice, electrice) de măsurare a presiunii rocilor.

Capitolele XIII, XIV, XV și XVI sînt destinate calculului dimensiunilor camerelor la metodele de exploatare cu camere și stîlpi. Se indică procedeele de calcul ale deschiderii la tavan, calculul lungimii și înălțimii unei camere, precum și calculul dimensiunilor planșeului dintre camere. O atenție deosebită se dă calculului dimensiunilor stîlpilor de susținere părăsiți în cazul unor asemenea metode de exploatare; se prezintă în paralel diferite procedee și formule de verificare și de calcul ale dimensiunilor acestor stîlpi; menționăm rezultatele date de autor în această direcție. Se arată de asemenea și calculul dimensiunilor bazinelor cilindrice la metoda de exploatare cu dizolvare cinematică a sării geme. Pe baza acestor rezultate se fac unele considerații asupra adîncimii maxime de exploatare a unui zăcămînt de substanțe minerale utile prin metoda cu camere și stîlpi de susținere părăsiți.

Ultimele trei capitole cuprind unele probleme conexe. Se prezintă astfel ipotezele de dirijare a presiunii rocilor în jurul spațiului exploatat, precum și metodele de dirijare a acestor presiuni. O importanță deosebită au dimensiunile spațiului de lucru și viteza de înaintare; influența exploziilor de roci, erupțiilor de gaze și de praf de cărbune sînt luate de asemenea în considerare. Se cercetează apoi presiunea rocilor predispuse la umflare asupra susținerii lucrărilor subterane. Dar lucrările miniere subterane influențează și terenul de la suprafață; autorul cercetează factorii care determină procesul de tasare-scufundare a terenului de la suprafața minelor, arătînd un calcul al adîncimii de siguranță. Se prezintă și unele mijloace de protecție a construcțiilor, instalațiilor și clădirilor de la suprafață.

Lucrarea prof. Stamatiu cuprinde un material bogat şi deosebit de interesant ; noţiunile teoretice se împletesc strîns cu problemele practice de mecanica rocilor, formînd un tot unitar. O caracteristică a acestei cărţi este claritatea expunerii. Autorul izbuteşte să prezinte într-o formă precisă şi sistematică cele mai noi rezultate din domeniul ştiinţei respective. În felul acesta, tratatul este destinat unui cerc larg de cititori : ingineri de mine ingineri geologi, ingineri constructori, care se ocupă cu probleme de studiu, proiectare şi execuţie de lucrări în care influenţa rocilor şi pămînturilor este importantă, studenţi ai facultăţilor corespunzătoare etc. De asemenea, acest volum poate fi folosit cu succes şi în cercetarea ştiinţifică, în domeniul respectiv.

P. P. Teodorescu

ALEXANDRU MAJOR, *Berechnung und Planung von Maschinen- und Turbinenfundamenten. Schwingungen im Bau- und Verkehrswesen* (Calculul şi proiectarea fundaţiilor de maşini şi turbine. Vibraţii în construcţii şi transporturi) — Editura Academiei de ştiinţe ungare, Budapest, 852 p., 516 fig., 78 tabele, 1961.

Dezvoltarea rapidă şi puternică luată de industrie în ultimele decenii a condus la crearea şi folosirea de maşini din ce în ce mai puternice şi cu turaţii mari scoţînd în evidenţă necesitatea de a concepe şi a proecta fundaţii capabile să asigure o rezemare convenabilă şi sigură a maşinilor, să reziste la solicitările dinamice provocate de mişcarea lor şi să reducă cît mai mult perturbaţiile produse de vibraţiile la care dau naştere.

În afară de aceasta, influenţa vibraţiilor atît asupra construcţiilor în care sînt instalate maşinile cît şi asupra mediului înconjurător constituie o problemă de importanţă deosebită în tehnica construcţiilor.

Cercetările şi studiile intreprinse în domeniul menţionat încă de la începutul acestui veac, au condus deabia în ultimele decenii la unele formulări şi recomandări pentru alcătuirea fundaţiilor de maşini.

Complexitatea problemei datorită marelui număr de parametrii ce intervin în mişcarea maşinilor şi a fundaţiilor, a interdependenţei şi complexităţii lor, a impus o schematizare a fenomenelor şi introducerea de ipoteze simplificatoare în vederea posibilităţii de dimensionare a fundaţiilor.

Primele metode practice pentru calculul fundaţiilor de maşini atacau problema sub un aspect static. Metodele constau în aplicarea unei majorări a sarcinii statice reprezentată de greutatea maşinii. Rezultatele nesatisfăcătoare obţinute în practică au condus la aplicarea unor forţe statice acţionînd orizontal fără a se ajunge practic la o mai bună soluţionare a problemei.

Introducerea aspectului dinamic în calcul a permis abordarea problemei pe o cale mai corespunzătoare dar numai prin dezvoltarea geotehnicii care a condus la stabilirea caracteristicilor de deformaţie ale terenului s-a ajuns la o formulare mai precisă a problemelor. Bineînţeles că soluţionarea problemei în formă matematică a implicat introducerea unor ipoteze simplificatoare. Spre a verifica în ce măsură aceste ipoteze acoperă fenomenul real a fost nevoie să se verifice rezultatele date de calcul cu măsurători efective. Din această confruntare s-a putut stabili valabilitatea mai generală sau mai restrînsă a ipotezelor şi a metodelor de calcul adoptate în diferitele cazuri.

Varietatea ipotezelor, diversitatea problemelor a dus la întocmirea de numeroase studii şi cercetări de unde au rezultat şi multe puncte de vedere diferite pentru proiectarea şi alcătuirea fundaţiilor maşinilor, funcţie de tipul şi caracteristicele maşinii, de regimul de funcţionare, de natura şi caracteristicele terenului etc.

Efectul fizic pe care-l provoacă maşinile în funcţionarea lor este producerea de vibraţii care se transmit prin fundaţii şi teren construcţiilor învecinate. Asemenea acţiuni pot provoca cu timpul deteriorarea şi chiar distrugerea construcţiilor pe lîngă alte efecte fiziologice ce pot avea urmări dăunătoare asupra oamenilor, lucru care trebuie evitat cît mai mult posibil.

De aici rezultă că problema acţiunii dinamice a maşinilor acoperă un cîmp foarte vast din domeniul de activitate al inginerului constructor şi capătă o deosebită importanţă în tehnica construcţiilor.

Literatura tehnică modernă ce se ocupă de aceste probleme este foarte bogată, dar în genere este dispersată în articole sau publicaţii atacînd de cele mai multe ori numai unele aspecte sau probleme ale acestui vast domeniu al tehnicii.

În literatura tehnică mondială lucrările de ansamblu sînt destul de puţine.

Cităm remarcabila lucrare a lui D. D. Barkan : *Dinamica fundaţiilor şi terenurilor*, Moscova, 1948, lucrarea mai recentă a lui A. O. Sawinow : *Fundaţii de maşini*, Leningrad, 1955 şi aceea mai recentă a lui E. Rausch : *Fundaţii de maşini şi alte construcţii solicitate dinamic*, Düsseldorf, 1959, lucrări de mare valoare care prezintă complexul problemelor legate de calculul fundaţiilor de maşini şi de efectul vibraţiilor asupra construcţiilor. La noi în ţară în 1958 Editura tehnică a publicat o monografie foarte interesantă de prof. ing. Gh. Buzdugan şi colaboratori.

Recent, literatura tehnică străină s-a îmbogăţit cu o valoroasă nouă lucrare de mare amploare privind calculul şi proiectarea fundaţiilor de maşini şi efectul vibraţiilor în construcţii. Cartea este opera profesorului dr. ing. dr. sc. tehn. Alexandru Major din Budapesta şi a apărut în limba germană în Editura Academiei de Ştiinţe Ungară la Budapesta 1961.

Autorul este o personalitate binecunoscută pe plan internaţional ca specialist în probleme de fundaţii de maşini şi de vibraţii şi care în lunga şi bogata sa activitate a proiectat şi a executat numeroase şi importante fundaţii de maşini, cercetînd şi probleme legate de efectele produse de vibraţii asupra construcţiilor.

Lucrarea este împărţită în 7 părţi din care primele 4 părţi cuprind probleme ridicate de studiul fundaţiilor şi vibraţiilor maşinilor, partea a 5-a se referă la vibraţia construcţiilor, podurilor şi mijloacelor de comunicaţie, partea a 6-a tratează dinamica construcţiilor hidraulice, iar partea a 7-a este consacrată prezentării unor exemple de calcul. Cele 7 părţi cuprind în total 23 de capitole tratînd diferitele aspecte şi probleme ce intră în domeniul acestei lucrări. Amploarea materialului ne sileşte să ne mulţumim cu accentuarea unora din chestiunile care am găsit că ar prezenta mai multă importanţă pentru o recenzie.

Prima parte se referă la stabilirea elementelor teoretice şi practice privind proiectarea fundaţiilor de maşini şi cuprinde 5 capitole.

Capitolul I tratează consideraţiile generale privind fundaţiile de maşini indicîndu-se sumar evoluţia metodelor de calcul şi modul în care se pune problema acestui calcul.

Capitolul II se ocupă cu studiul teoriei fundamentale a vibraţiilor.

După studiul vibraţiilor armonice amortizate şi neamortizate, a fenomenelor de rezonanţă se trece la studiul generării vibraţiilor în fundaţii cu accentul asupra determinării vibraţiilor proprii. Se studiază cazul sistemelor cu mai multe grade de libertate cu indicaţii asupra aplicării metodelor exacte şi aproximative, aplicabile diferitelor cazuri ce se prezintă în studiul fundaţiilor şi a posibilităţii de înlocuire pentru fundaţii complicate cu exemplificări pentru unele cazuri concrete. În încheiere se dau unele exemple de valori proprii stabilite pe cale experimentală.

Capitolul III cuprinde o privire generală asupra sistemelor de alcătuire a fundaţiilor corespunzătoare feluritelor tipuri de maşini: fundaţii masive, fundaţii cu diafragme, fundaţii în cadre etc.

Capitolul IV indică punctele de vedere şi normele generale ce trebuie avute în vedere la construcţia fundaţiilor de maşini şi care urmează a fi detaliate în capitolele ce urmează.

Capitolul V tratează materialele utilizate la alcătuirea fundaţiilor.

După o introducere în studiul solicitărilor variabile şi a oboselii materialelor, se expune comportarea mecanică a diferitelor materiale utilizate pentru alcătuirea fundaţiilor. Un paragraf prezintă diferitele materiale utilizate pentru amortizarea vibraţiilor cu caracteristicile lor de comportare în lucrare. Cu aceasta se încheie partea de generalităţi.

Partea a II-a se referă la studiul terenului de fundaţie din punct de vedere geotehnic şi al comportării dinamice cu descrierea aparaturii necesară pentru aceste cercetări. Partea aceasta cuprinde şi principiile generale de calcul ale fundaţiilor de maşini şi însumează 6 capitole.

Capitolul VI examinează în amănunţime acţiunea dinamică a forţelor asupra terenurilor şi metodele de cercetare a acestei acţiuni. Se dă o deosebită importanţă descrierii aparaturii pentru cercetarea comportării dinamice a terenului detaliîndu-se aparatele şi metodele de producere a vibraţiilor în teren şi de măsurarea lor. Un paragraf este consacrat unei metode noi şi originale imaginată de autor pentru a măsura vibraţiile provocate de turbine în perioada de pornire, asupra construcţiilor. Metoda permite o analiză rapidă a fenomenelor de vibraţie ce intervin în construcţii cu posibilitatea stabilirii deficienţelor fundaţiilor în vederea corectării lor. Problema studiului dinamic al terenurilor cu comportarea lor la vibraţii încheie capitolul.

Capitolul VII este consacrat studiului teoretic şi practic al caracteristicilor elastice ale terenurilor.

Pe lîngă relaţiile mecanice de elasticitate şi deformabilitate ale terenurilor se dau şi valorile practice pe care trebuie să le adopte constructorul în diferitele sisteme de fundaţii. În special trebuie remarcat studiul fundaţiilor de maşini pe piloţi care este tratat teoretic şi practic corespunzător diferitelor cazuri ce pot interveni.

Capitolul VIII se preocupă de comportarea terenului la solicitările dinamice. În special, se insistă asupra fenomenelor de tasare şi deformare ca urmare a solicitării dinamice a terenului.

Capitolul IX stabileşte ipotezele asupra comportării terenului sub acţiunea fundaţiilor solicitate dinamic, astfel cum sînt admise în diverse prescripţii de calcul.

Capitolul X dezvoltă bazele fundamentale pentru calculul fundaţiilor de maşini.

Se studiază oscilaţiile verticale, orizontale şi de rotaţii ale fundaţiilor, ţinînd seama şi de amortizarea produsă de teren cu accentul asupra vibraţiilor proprii. Se determină apoi pentru diferite cazuri modul de stabilire a deplasărilor şi rotaţiilor masivelor de fundaţii.

Capitolul XI încheie această parte a lucrării cu studiul experimental al vibraţiilor fundaţiilor folosind rezultatele măsurătorilor efectuate în special de profesorul D. D. Barkan din U.R.S.S.

Partea a III-a este dedicată studiului alcătuirii şi calculului diferitelor tipuri de fundaţii de maşini şi cuprinde 8 capitole.

Capitolul XII se ocupă cu studiul maşinilor acţionînd prin şocuri.

După descrierea titlului şi caracteristicelor acestor maşini care cuprind diferitele tipuri de ciocane mecanice, se precizează modul de alcătuire a fundaţiilor pentru asemenea maşini.

Capitolul XIII dă teoria calculului fundaţiilor pentru ciocane mecanice comparîndu-se diferite ipoteze de calcul.

După ce se indică mersul ce trebuie adoptat pentru calcul se dau şi dispoziţiile constructive în special pentru fundaţiile din beton armat. Schema de calcul cu care se încheie capitolul fixează mersul operaţiilor pentru calculul fundaţiilor acestui grup de maşini.

Capitolul XIV studiază motoarele cu solicitări periodice şi ale maşinilor cu bielă şi manivelă, precizînd caracteristicile diferitelor genuri de asemenea maşini cu indicaţii generale cu privire la alcătuirea lor.

Capitolul XV prezintă metodele de calcul pentru fundaţiile maşinilor cu bielă şi manivelă.

Cu toată varietatea mare şi ca urmare a complicaţiilor de calcul, autorul izbuteşte să dea o sistematizare a calculului făcînd şi o expunere comparativă a diferitelor metode de calcul preconizate. Capitolul se încheie cu o schemă de modul în care trebuie condus calculul fundaţiilor acestor tipuri de maşini.

Capitolul XVI este consacrat fundaţiilor de turbine. Se face întîi o clasificare a diferitelor tipuri de maşini care intră în categoria turbinelor cu precizări privitoare la elementele lor caracteristice. Marea importanţă şi varietate a turbogeneratorilor în industrie şi energetică, a îndreptăţit pe autor să analizeze mai amplu diferitele tipuri care prin alcătuirea şi dispoziţia lor impun anumite condiţii fundaţiilor. Sînt examinate 33 de tipuri şi maşini şi prezentate pe scurt caracteristicele care influenţează alcătuirea fundaţiilor.

După ce se examinează aspectul economic al materialului pentru alcătuirea fundaţiei, se precizează sarcinile care acţionează asupra fundaţiilor şi de care trebuie ţinut seama în proiectarea acestora.

Capitolul XVII se ocupă cu calculul fundaţiilor de turbine.

Se precizează întîi bazele de calcul insistînd în special asupra acţiunii dinamice a forţelor centrifugale cu dezvoltarea studiului vibraţiilor proprii şi a fenomenelor de rezonanţă. Cu această ocazie se examinează acţiunea dinamică în lumina diferitelor metode şi prescripţii de calcul. O comparaţie între diferitele metode de calcul pune în evidenţă avantajele şi lipsurile fiecăreia din metode. Într-o expunere rezumativă la finele capitolului se arată mersul general al calculului dîndu-se elementele practice necesare pentru proiectarea fundaţiilor acestui tip de maşini.

Capitolul XVIII este consacrat altor tipuri de maşini care nu au fost cercetate anterior. Se examinează laminoarele, presele de forjat, concasoarele de diferite tipuri, maşinile unelte indicîndu-se principiile de alcătuire şi elementele de calcul necesare.

Capitolul XIX este consacrat studiului elementelor constructive din beton şi beton armat ale fundaţiilor de maşini. Se dau detalii de execuţii cu privire la cofraje, armarea şi turnarea betonului şi diferite elemente constructive. De asemenea, sînt date indicaţii cu privire la legarea fundaţiilor cu construcţiile în care sînt montate şi la execuţia acestor legături. Se analizează în detaliu şi sistemele de ancorare şi montaj ale maşinilor de fundaţii. Se expune sumar şi alcătuirea fundaţiilor din zidărie de cărămidă precum şi dispozitivele permiţînd realizarea de economii.

Partea a IV-a cuprinde studiul procedeurilor mecanice pentru amortizarea vibraţiilor şi are un singur capitol (cap. XX), care se referă la metodele constructive ale maşinilor în vederea reducerii vibraţiilor.

După ce se arată pentru diferitele cazuri modul de determinare a turaţiilor critice, se indică metodele de echilibrare internă a maşinilor insistînd asupra dispozitivelor de combaterea vibrațiilor și a diferitelor metode de amortizare dinamice și elastice cu descrierea cuplungurilor elastice. Se dau atît elementele de calcul necesare cît și dispozitivele constructive adecvate precum și caracteristicele materialelor de amortizare pentru diferite cazuri din practică.

Partea a V-a se ocupă cu problema vibrațiilor construcțiilor, a podurilor și a mijloacelor de locomoție și cuprinde un singur capitol (cap. XXI), în care se examinează pe rînd vibrația construcțiilor, a podurilor și a vehiculelor. În introducere se expune efectul vibrațiilor asupra organismului omenesc și asupra construcțiilor. Întrucît această chestiune este încă controversată, autorul expune diferitele criterii folosite pentru aprecierea efectului vibrațiilor asupra organismului omenesc și a clădirilor. Chestiunea care a făcut obiect de numeroase studii și discuții este expusă sistematic, folosind criteriile care sînt în general admise în special în Europa.

Efectele vibrațiilor asupra clădirilor sînt analizate mai în amănunt indicîndu-se modul de transmitere, posibilitatea determinării eforturilor cu exemplificări practice de comportare a unor construcții. Pentru o serie de construcții și anumite solicitări se indică și metode pentru reducerea sau evitarea vibrațiilor.

Un paragraf este destinat grinzilor podurilor rulante.

Pentru solicitarea dinamică a podurilor se prezintă sumar cauzele și modalitatea dezvoltării solicitărilor cu indicația metodei de a ține seama de efectul solicitării dinamice asupra rezistenței construcției. Problema aceasta făcînd obiect de studii speciale, autorul face referire la literatura de specialitate.

Un alt paragraf este consacrat efectului vibrațiilor datorită circulației vehiculelor. Se examinează sumar problema circulației pe drumuri, pe căi ferate și în aer. Se expun numai aspectele generale ale problemelor și expunerea are mai mult un caracter informativ pentru a indica felul în care se pun problemele.

Partea a VI-a este consacrată dinamicii lucrărilor hidraulice și cuprinde de asemenea un singur capitol XXII în care se studiază acțiunea forțelor dinamice ce intervin în construcțiile hidrotehnice.

Un prim paragraf se referă la acțiunea dinamică ce se produce la ecluse, cu studiul efectului de vibrație provocat de scurgerea apei prin orificii. Paragraful următor studiază variațiile de presiune produse în conductele forțate.

Un alt paragraf examinează oscilațiile din rezervoarele de compensație și acțiunea loviturilor vaselor, a ghețurilor și presiunea dezvoltată de ghețuri.

Un paragraf mai dezvoltat este cel ce se ocupă cu studiul vibrației vaselor. Deși se expune doar sumar un aspect care face obiect de numeroase studii de specialitate, totuși se dau cititorului elementele necesare pentru a-și putea face o idee de ansamblul fenomenelor de oscilație care se produc în vapoare.

Partea a VII-a expune exemple de calculul fundațiilor luate din practică și are un singur capitol (XXIII) care cuprinde 14 exemple de calcul în aplicarea teoriilor expuse.

Primele 3 exemple se referă la stabilirea perioadelor de vibrații proprii, la elemente de construcții ce intervin în calculul fundațiilor și anume : grinda simplu rezemată, sisteme de grinzi și cadre simple.

Două exemple se referă la ciocane mecanice iar alte două la motoare Diesel avînd diferite caracteristici.

Pentru compresoare se dă exemplul calculului fundaţiei pentru un compresor monocilindric în două trepte. Pentru diferite feluri de turbine se dau 3 exemple, iar ultimele 3 exemple se referă la 3 tipuri de concasoare.

Exemplele date sînt foarte amănunţit şi clar studiate. Se dau şi referinţe la metodele folosite şi expuse în lucrare.

Cu aceasta se încheie expunerea generală. Cartea cuprinde şi anexe folositoare, ca : o expunere sumară a unităţilor de măsură internaţional folosite azi în tehnică şi în aplicaţiile ei. O bibliografie cu 134 de titluri încheie această valoroasă lucrare.

Lucrarea cuprinde tot ceea ce este necesar inginerului pentru alcătuirea şi proiectarea fundaţiilor de maşini ce intervin în industria modernă.

Inginerului proectant lucrarea îi dă toate elementele necesare alcătuirii şi dimensionării fundaţiilor de maşini în condiţii cît mai avantajoase, inginerului executant îi dă vederea de ansamblu necesară pentru o execuţie a fundaţiilor adecvată scopului iar cercetătorului îi scoate în evidenţă problemele ridicate de calculul şi alcătuirea fundaţiilor de maşini cu expunerea soluţiilor existente şi posibilităţile şi lipsurile lor şi îi permite să se orienteze asupra căilor ce trebuie defrişate pentru perfecţionarea acestor elemente de construcţie.

Academician *Aurel A. Beleş*

GH. BUZDUGAN, C. MITESCU, R. VOINEA, S. CALMANOVICI, M. BLUMENFELD, *Culegere de probleme de rezistenţa materialelor*, vol. I, ed. a IV-a, Ed. didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1962, 424 p.

Această culegere de probleme, rod al experienţei Catedrei de rezistenţa materialelor de la Institutul politehnic din Bucureşti, apare în a IV-a ediţie. Faţă de prima ediţie, apărută în 1954, se constată unele regrupări şi completări de material. De altfel, problemele prezentate în această culegere sînt, în mare parte, clasice întîlnindu-se, evident cu alte valori numerice, şi în alte cărţi. Contribuţia esenţială a autorilor a constat în modul de a grupa materialul şi în metodele de rezolvare folosite, care s-a căutat să fie cît mai potrivite cu scopul didactic propus.

Acest prim volum este destinat problemelor legate de solicitări simple şi compuse precum şi problemelor de flambaj. Fiecare din cele 10 capitole ale sale este alcătuit dintr-o scurtă enumerare a formulelor folosite în cuprinsul său, sub titlul „Definiţii şi formule", după care urmează probleme rezolvate iar apoi un număr mic de probleme nerezolvate.

În primele trei capitole găsim aplicaţii privitoare la întindere, compresiune şi forfecare simplă, precum şi unele elemente de teoria elasticităţii, privitoare la variaţia tensiunilor şi deformaţiilor specifice în jurul unui punct, precum şi la teoriile de rezistenţă ale materialelor. Remarcăm studiul unor sisteme simple static nedeterminate. De asemenea, ca o aplicaţie la capitolul destinat problemelor de forfecare simplă, se consideră diferite tipuri de îmbinări pentru elemente de construcţie de lemn sau metal.

Capitolele IV şi V cuprind unele probleme anexă, necesare într-un studiu de rezistenţa materialelor : momente de inerţie şi diagrame de forţe axiale, forţe tăietoare şi momente încovoietoare. Se folosesc atît metode exacte de calcul cît şi metode grafice.

Următoarele trei capitole cuprind probleme de încovoiere şi răsucire a barei drepte. Se dau astfel aplicaţii la formulele lui Navier şi Jurawski pentru bare de lemn şi metalice cu secţiune simplă sau compusă. O atenţie deosebită se acordă deformaţiei acestor bare, pentru barele cu moment de inerţie variabil, dîndu-se şi metode grafice de calcul. În ceea ce priveşte răsucirea se consideră bare de secţiune circulară sau inelară.

În capitolul al IX-lea se dau probleme privind solicitările compuse. Se consideră cazul unei încovoieri cu întindere sau compresiune (întindere sau compresiune excentrică), stabilindu-se în diferite cazuri sîmburele central şi secţiunea activă. De asemenea se dau şi probleme de încovoiere cu răsucire. Menţionăm aplicarea diferitelor teorii de rezistenţă în aceste cazuri.

Capitolul al X-lea este destinat flambajului barelor drepte. Se consideră bare acţionate de forţe concentrate de compresiune la capete, în diferite cazuri de rezemare. În domeniul elastic se foloseşte formula lui Euler iar dincolo de limita de elasticitate formula Tetmajer-Iasinski. Se ia în considerare şi forţa tăietoare în unele cazuri; rezultatele obţinute se aplică la secţiuni metalice compuse, în cazul solidarizării cu plăcuţe sau cu zăbreluţe.

Un număr de tabele anexe sînt foarte utile pentru calcul practic.

Atît prin cuprinsul său cît şi prin claritatea şi concizia prezentării, lucrarea este utilă studenţilor din învăţămîntul tehnic superior de la toate facultăţile în care se studiază Rezistenţa materialelor precum şi inginerilor de diferite specialităţi.

P. P. Teodorescu

L. M. MILNE-THOMSON, *Antiplane elastic systems* (Sisteme elastice antiplane), Ergebnisse der angewandten Mathematik (Cercetări de matematică aplicată), caietul 8, Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1962, VIII + 266 p.

Termenul de *sistem elastic antiplan*¹) a fost introdus pentru prima dată de L.N.G. Filon, în legătură cu *problemele unidimensionale* ale teoriei elasticităţii (întindere-compresiune, răsucire şi încovoiere). În general, prin stare de tensiune unidimensională înţelegem acea stare de tensiune în care, pe elemente de arie de normală perpendiculară pe o direcţie fixă, nu apar decît tensiuni tangenţiale după această direcţie. În cazul unei stări de tensiune antiplane numai trei componente ale tensorului tensiune (cazul tensorului simetric) sînt diferite de zero (o componentă normală şi două componente tangenţiale), pe cînd în cazul unei stări de tensiune plane aceste trei componente sînt totdeauna nule, celelalte trei componente fiind diferite de zero (o componentă normală şi două componente tangenţiale).

L. M. Milne-Thomson consideră în cartea sa, în cuprinsul a şapte capitole, cazul general al unui corp elastic anizotrop; el numeşte sistem elastic antiplan acel sistem pentru care există un plan Π (antiplanul sistemului), care îndeplineşte următoarele condiţii: (i) singura componentă a tensorului tensiune care poate depinde de distanţa la planul Π este componenta normală la acest plan, (ii) particulele corpului care înainte de deformaţie se găseau în plane paralele la planul Π nu se mai găsesc în asemenea plane după deformaţie. Pornind de la această definiţie, Milne-Thomson ajunge, în cazul corpurilor anizotrope, la formularea unei probleme mult mai complexe a teoriei elasticităţii: problema plană (bidimensională) a teoriei elasticităţii *cuplată* cu problema antiplană (unidimensională), funcţiile de tensiune corespun-

---

¹) Puţin folosit în literatura de specialitate, pînă în prezent.

zătoare trebuind să satisfacă un sistem de două ecuaţii cu derivate parţiale cuplate. În cazul unui corp elastic izotrop se ajunge la o problemă antiplană pură, care este tratată pe larg de autor.

Primul capitol este dedicat legii constitutive a corpului liniar elastic, omogen şi anizotrop. După o introducere a noţiunii de tensor cu ajutorul produselor diadice, utile în cazul ecuaţiilor teoriei elasticităţii, autorul prezintă tensorul tensiune şi tensorul deformaţie specifică, precum şi proprietăţile lor cele mai importante. Cu ajutorul energiei de deformaţie şi a lucrului mecanic specific de deformaţie se introduce tensorul lui Hooke şi legea fundamentală a corpurilor liniar elastice, în caz anizotrop. Se consideră de asemenea şi unele cazuri particulare de anizotropie (cazul în care există unul sau trei plane de simetrie elastică etc.), precum şi cazul corpului izotrop.

În capitolul al II-lea se introduc funcţiile de tensiune şi tensiunile complexe (pentru cazul general al problemei cuplate). Se arată modul în care se calculează deformaţiile specifice şi deplasările. O atenţie specială este acordată punerii condiţiilor la limită în cazul unui domeniu finit sau în cazul domeniilor infinite. Menţionăm introducerea cazului în care forţele masice derivă dintr-un potenţial.

Capitolul al III-lea cuprinde un studiu general al barei drepte izotrope. În acest caz se tratează o problemă antiplană pură. După un studiu al determinării tensiunilor şi deplasărilor în caz general, autorul consideră cîteva cazuri particulare importante : întinderea-compresiunea simplă, încovoierea sub acţiunea a două momente de încovoiere la capetele barei, cazul cilindrului suspendat sub greutatea proprie etc.

Răsucirea şi încovoierea barei drepte izotrope, în caz general, sînt tratate în capitolele IV şi V. Se introduc liniile tensiunilor tangenţiale şi se calculează tensiunea tangenţială maximă. Se menţionează de asemenea şi analogiile hidrodinamice ce se pot face. O atenţie deosebită se acordă calculului momentului de răsucire şi a rigidităţii la răsucire, pentru care se stabilesc unele proprietăţi de maximum şi de minimum. În cazul răsucirii, autorul arată modul în care se poate folosi metoda transformărilor conforme, considerînd posibilitatea de reprezentare pe un cerc sau pe un semicerc. În felul acesta sînt obţinute rezultate pentru diferite secţiuni transversale : cerc, cardioidă, buclă de lemniscată Bernoulli, elipsă, triunghi, epitrochoidă, lemniscată a lui Booth, dreptunghi etc. Se arată de asemenea modul în care se aplică principiul lucrului mecanic virtual şi se studiază analogia de membrană. Principiul variaţiilor virtuale ale stării de tensiune este de asemenea introdus, împreună cu principiul minimului energiei complementare. În cazul încovoierii se folosesc metode analoge de calcul. O problemă importantă este aceea a determinării centrului de încovoiere. Menţionăm folosirea funcţiei de tensiune de forfecare, a funcţiei de încovoiere a lui St. -Venant şi a funcţiei de tensiune a lui Timoşenko. Problema încovoierii este studiată pentru cazul în care secţiunea transversală este : un cerc, un inel circular, un melc al lui Pascal, o buclă de lemniscată Bernoulli, elipsă, triunghi echilateral, dreptunghi etc. Principiul lucrului mecanic virtual în cazul unor deplasări virtuale sau în cazul unor variaţii virtuale ale stării de tensiune este folosit şi în acest caz.

Capitolele VI şi VII cuprind cazul unor corpuri anizotrope. Toate problemele menţionate anterior sînt reluate în cazul în care Π este un plan de simetrie elastică, în cazul corpurilor ortotrope, ca şi pentru cazul în care apare o axă de simetrie elastică sau pentru cazul anizotropiei cilindrice.

Fiecare din cele şapte capitole menţionate mai sus este însoţit de numeroase exemple de calcul, pentru care se dau numai enunţurile.

Monografia lui L. M. Milne-Thomson reprezintă dezvoltarea sistematică a unei formulări date de autor, în 1959, problemelor antiplane, cu ajutorul funcţiilor de variabilă complexă.

Cu toate că este scrisă într-o formă teoretică, ea este direct adaptată aplicaţiilor de ordin fizic şi tehnic, cercul de cititori căruia i se adresează fiind astfel destul de mare. Împreună cu lucrarea „Plane elastic systems”1) (Sisteme elastice plane), apărută anterior (1960), această monografie formează un tot, cuprinzînd problemele uni- şi bidimensionale ale teoriei elasticităţii, precum şi legătura dintre ele.

Trebuie să subliniem deosebita claritate şi concizie a expunerii, precum şi rigurozitatea matematică cu care sînt tratate diferitele probleme. Consideraţiile de mai sus fac ca această lucrare să prezinte un interes deosebit pentru cei care se ocupă cu determinarea stării de solicitare în bare cilindrice, elastice supuse la solicitări axiale, încovoiere sau răsucire.

P. P. Teodorescu

BRUNO FINZI, *Meccanica razionale*. Volume primo. *Teorie introduttive. Cinematica. Statica*, Terza edizione, XVI + 379 pp., Volume Secondo. *Dinamica*. Terza edizione. XI + 427 pp., Nicola Zanichelli, Editore, Bologna, 1959.

Şirul de discuţii, reflectat cu competenţă şi în revistele noastre de specialitate matematică şi fizică din ultimii ani, relativ la necesitatea de a moderniza la maximum conţinutul cursurilor de matematică şi fizică atît în învăţămîntul mediu cît şi, mai ales, în învăţămîntul universitar teoretic sau tehnic superior, a găsit în prof. B. Finzi un adept entuziast în ceea ce priveşte mecanica teoretică. În cele 24 capitole ale volumelor recenzate autorul reuşeşte să trateze cu deosebit succes, conservînd — paralel cu rigoarea necesară — eleganţa şi concizia corespunzătoare încadrării în numărul de ore rezervat de regulă cursurilor de mecanică teoretică la facultăţile de mecanică sau de specialităţi similare (un minim de trei semestre de curs de cîte trei ore pe săptămînă), aproape totalitatea problemelor esenţiale într-un curs modern de mecanică teoretică.

Trimiţînd cititorul, interesat pentru detalii, la recenzia primei ediţii a acestui curs, apărută în „Buletinul Institutului politehnic din Iaşi” (vol. 2, fasc. 1, 1947, pp. 241—242) subliniem aici deosebita utilitate a următoarelor capitole sau subcapitole : capitolul IX, *Cinematica relativistă* ; capitolul XII, *Statica sistemelor deformabile*, în care şi-a găsit loc o expunere succintă şi bine echilibrată asupra staticii firelor şi vergelelor, staticii corpurilor continue deformabile, staticii fluidelor, staticii corpurilor elastice, staticii corpurilor plastice, staticii membranelor şi plăcilor. În capitolul XVII, *Mecanică relativistă*, se prezintă o expunere judicios dozată atît asupra relativităţii restrînse cît şi relativităţii generalizate, iar capitolul XVIII, intitulat *Dimensiuni şi unităţi de măsură a mărimilor mecanice*, se ocupă cu o introducere în teoria modelelor mecanice. Capitolul XXII aduce un studiu introductiv asupra dinamicii firelor, dinamicii vergelelor, dinamicii membranelor şi plăcilor, dinamicii corpurilor deformabile continue, dinamicii corpurilor elastice, dinamicii fluidelor. În sfîrşit, menţionăm cap. XXIV, *Mecanică statistică*. Este de regretat că în această nouă ediţie nu a fost introdus un capitol special destinat să reflecte uriaşele succese ale mecanicii teoretice în cucerirea spaţiului cosmic.

Merită remarcată excelenta formă exterioară a volumelor recenzate.

D. Mangeron

---

1) Această lucrare a fost recenzată în „Studii şi cercetări de mecanică aplicată”, XII, nr. 2, 1961, p. 454.

* * * *Progress in solid mechanics* (Progrese în mecanica solidului). Edited by I. N. Sneddon and R. Hill, Volume I, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1960, XII + 448 p.

Acest volum, primul dintr-o serie care își propune să îmbrățișeze diversele aspecte ale dezvoltării recente a mecanicii corpurilor solide deformabile, conține opt capitole, consacrate fiecare în parte unei anumite probleme.

Primul capitol, datorit lui S. C. Hunter, are ca subiect undele vîscoelastice. Se consideră solidul vîscoelastic liniar, relația dintre tensiuni și deformații fiind dată în reprezentare integrală. În continuare, se utilizează transformata Laplace și transformata Fourier pentru studiul propagării undelor unidimensionale, arătîndu-se că studiul cu ajutorul transformatei Fourier permite o verificare experimentală directă. Se analizează apoi rezultatele experimentale și în încheiere se dă pe scurt o generalizare pentru cazul tridimensional.

În al doilea capitol, K. Marguerre prezintă aplicarea așa-numitelor matrici de transmisie în studiul vibrației grinzilor, indicînd și posibilitățile de aplicare la probleme mai complexe.

Capitolul al treilea, redactat de H. G. Hopkins, se ocupă de expansiunea cavităților sferice în metale. Se expune mai întîi în amănunt problema fizică și se tratează apoi, pentru un solid pur elastic, problema cuasi-statică și aceea dinamică, ultima cu ajutorul transformatei Fourier. Trecîndu-se la deformațiile elasto-plastice, se consideră separat cazurile deformațiilor mici și mari.

Teoremele generale pentru solidele elasto-plastice formează obiectul expunerii lui W. T. Koiter în capitolul al patrulea. Reținînd numai cazul deformațiilor mici, autorul prezintă mai întîi relațiile între tensiuni și deformații, iar după aceea demonstrează teoremele de unicitate, prinicipiile de minimum și unele teoreme privind comportarea solidelor plastice. Pe baza principiului lui Dirichlet, se demonstrează și existența soluțiilor.

Capitolul al cincilea, datorit lui W. A. Green, are ca subiect relațiile de dispersie pentru undele elastice în bare. Se prezintă mai întîi soluția exactă a lui Pochhammer și Cree pentru propagarea undelor elastice într-un cilindru circular și apoi diferite metode aproximative pentru bare cu secțiuni transversale de diferite forme. Compararea acestor metode arată că acelea care pornesc de la ecuații aproximative ale mișcării dau rezultate mai bune decît cele care utilizează soluții ale ecuațiilor exacte, satisfăcînd însă aproximativ condițiile la limită. În încheiere, se prezintă soluțiile de frecvență înaltă pentru un cilindru circular.

Teoria dinamică a termoelasticității este prezentată de P. Chadwick în capitolul al șaselea. Sînt stabilite ecuațiile fundamentale și se dă în primul rînd aplicarea lor la studiul undelor termoelastice plane armonice. Din acest studiu rezultă proprietăți cu caracter general ale proceselor termoelastice și unele concluzii interesante. Partea finală a capitolului conține o serie de considerații asupra problemelor la limită termoelastice.

Capitolul al șaptelea, redactat de B. A. Bilby se ocupă de distribuția continuă a dislocațiilor. Este vorba de studiile care au ca obiect încorporarea în mecanica mediilor deformabile a conceptului fizic de dislocație, care desenează un anumit tip de imperfecțiune în structura cristalină. Printr-un proces de trecere la limită formal, se ajunge la noțiunea de cristal continuu dislocat. Starea de deformație este descrisă cu ajutorul aparatului matematic al geometriei diferențiale. Sînt date exemple de aplicații la anumite stări de tensiuni și deformații.

În ultimul capitol, R. Muki se ocupă de problemele axial-simetrice ale teoriei elasticității pentru un solid semi-infinit și pentru o placă groasă. Ecuațiile sînt rezolvate cu ajutorul transformatei lui Hankel, același procedeu fiind utilizat și pentru problemele termoelastice.

Ca exemple, sînt tratate cîteva cazuri de încărcare a unui corp semi-infinit elastic şi problema termoelastică pentru un corp semi-infinit elastic şi pentru o placă groasă, cu o distribuţie staţionară a temperaturii.

Fiecare capitol conţine o sinteză bazată pe un bogat material bibliografic, indicat la sfîrşit şi este de real folos pentru cercetătorii în domeniul mecanicii solidelor deformabile. În ansamblu, volumul apare de mare interes pentru specialişti care vor găsi probabil, în continuare, în această serie, un ajutor preţios în munca lor.

T. Oroveanu

PUBLICAŢII PRIMITE PRIN SCHIMB LA REDACŢIE

— Fedor Petrovici Savarenski, Izd. Akademii Nauk SSSR, Moskva, 1962, 46 p.
— Konst. Vasilievici Ostrovitianov, Izd. Akademii Nauk SSSR, Moskva, 1962, 62 p.
— Valentin Petrovici Vologdin, Izd. Akademii Nauk SSSR, Moskva, 1962, 71 p.
— Trudî instituta maşinovedenia. Seminar po TMM, tom XXIII, nr. 91, 1962.
— Trudî vîcislitelnogo ţentra, Izd. Akademii Nauk Gruzinskoi SSR, II, 1962,
— Vestnik Akademii Nauk SSSR, nr. 5, 6, 7, 8, 1962.
— Dokladî Akademii Nauk, tom 144, nr. 3, 4, 5, 6, 1962; tom 145, nr. 1, 2, 3, 4, 1962; tom 146, nr. 1, 1962.
— Izvestia Akademii Nauk:
  — Energhetika i avtomatika, nr. 3, 4, 1962.
  — Metallurghia i topliva, nr. 3, 4, 1962.
  — Seria Fiziceskaia, nr. 6, 7, 8, 1962.
  — Seria Mehanika i maşinostroenie, nr. 3, 4, 1962.
— Referativnîi Jurnal:
  — Maşinostroenie, nr. 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 1962.
  — Mehanika, nr. 6, 7, 8, 1962.
  — Matematika, nr. 6, 7, 1962.
  — Injenernîi Jurnal, nr. 2, 3, 1962.
  — Uspehi fiziceskih nauk, nr. 1, 2, 3, 4, 1962.

P. Ionas, *Scurgerea de recirculaţie plană a unui fluid viscos* (în limba cehă), Zpravu Vzlu Z-1, 1962, Praha.
— Casopis pro pestovani matematiky, nr. 3, 1962.
— Cehoslovaţkii matematiceskii jurnal, nr. 3, 1962.
— Aplikace Matematiky, nr. 4, 1962.
— Jurnal Prikladnoi Mehaniki i Tehniceskoi Fiziki, nr. 4, 5, 1962.
— Problemî Procinosti v maşinostroenii, nr. 9, 1962.

V. Brezina, Vzperná únosnost kovových prutu a nosníku Praha, Naklad. Cehoslovenske Akad. Ved., 1962, 383 pag.

V. Klima, Trojfázové komutátorové derivacni motory, Praha, Naklad. Cehoslovenske Akad. Ved., 1962, 628 pag.
— Abhandlungen der Deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, nr. 6, 1961; 2, 3, 1962.
— Physica statul solidi, vol. 2, nr. 10, 1962.

— Jenaer Rundschau, nr. 5, 1962.
— Informationsdienst „Angewandte Mechanik"
  Seria A : Strömungslehre, nr. 10a, 1962 ;
  Seria B : Festigkeit, Leichtbau, nr. 10b, 1962.
— Kernenergie, nr. 9, 1962.
— Veranstaltungskalender 1962, 3. Nachtrag zum 2. Grundkalender.
— Wissenschaftliche Zeitschrift der Hochschule für Verkehrswesen, Dresden, nr. 1, 2, 1962.
— Isotopentechnik, nr. 9, 10, 1962.
— Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences, Série Sciences Techniques, vol. X, nr. 6, 1962.
— Mechanik, Warszawa, nr. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 12, 1962.
— Archiwum Budowy Maszyn, tom IX, nr. 2, 1962.
— Przeglad Prac. Naukowych i Budowzych, nr. 9, 1962.
— Przeglad Mechaniczny, nr. 15, 16, 17, 1962.
Varga I. : Vizgépek, belső égesü motorok
  Műszaki Értelmezö Szótár, Budapest, 1962, 140 p.
— Periodica polytechnica, Budapest, vol. 6, nr. 2, 1962.
— Gép, nr. 9, 1962.
— Jármüvek Mezőgazdasági gépek, nr. 9, 10, 1962.
— Wissenschaftliche Zeitschrift der Technischen Hochschule „Otto von Guericke" Magdeburg, nr. 1, 2, 1962.
— Freiberger Forschungshefte, nr. A245, A 247, A248, 1962.

Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, vol. 176, 1962.
Nr. 7 : H. E. Merritt — *Gear-tooth contact phenomena.*
Nr. 8 : A. W. Roberts — *Performance of grain augers.*
Nr. 9 : N. D. Whitehouse — *Method of predicting some aspects of performance of a diesel engine using a digital computer.*
Nr. 10 : K. E. Buckman — *Lubricating-oil filter testing.*
Nr. 11 : J. R. Treharne — *Maintenance experience of the calder reactor.*
Nr. 12 : S. Eilon — *An analysis of alternative policies for the issue of commodities from stores.*
Nr. 13 : W. Carnegie — *Vibrations of pre-twisted cantilever blading : an additional effect due to torsion.*
Nr. 14 : L. E. Culver — *Dependence of joint strength on the degree of expanding in the tube expanding process.*
Nr. 15 : J. P. Roux & C. Bienvenu — *First steps towards conventional nuclear power.*
Nr. 16 : J. P. Duncan — *Interferometry applied to the study of elastic flexure.*
Nr. 17 : A. E. Bingham — *Hydraulic seals for extremes of working temperatures, with special reference to aircraft.*
Nr. 18 : H. Billet — *Generation of electricity by unconventional methods.*

The College of Aeronautics, Cranfield

CoA Note 128
R. J. A. Paul, *Determination of dynamical models for adaptive control systems.*
CoA Report 148
S. R. Swanson, *An improved law of cumulative damage in metal fatigue.*
CoA Report 157
A. H. Craven & H. L. Hopkins, *On the application of boundary layer control to a slender wing supersonic airliner cruising* $AT\mu = 2.2$.

Disertaţii primite de la Institutul politehnic Aachen

J. Buter, *Spannungssteuerung mit Reihenkondensatoren im Niederspannungsdrehstromnetz bei Motorlast*, 1962, 110 p.

M. Pütz, *Vorschläge zur Beseitigung der Wirkung von Nichtlinearitäten auf die Regelgüte verfahrenstechnischer Anlagen*, 1962, 87 p.

E. H. Kohlhage *Der Einfluss von Bezugssystem, Oberflächenkennwert, Messgerät und Fertigungsstreuung auf die Genauigkeit der Rauheitsmessung*, 1962, 109 p.

H. Plass, *Drehstrom — Regeltransformatoren, ihre einpoligen Ersatzbilder und ihre Beeinflussung der Leitungsschutzeinrichtungen bei einpoligen Erdkurzschlüssen in starr-geerdeten Netzen*, 1962, 145 p.

L. Graf, *Aufbauzeit und Rückwirkung bei elektrischen Entladungen in Wasserstoff niedrigen Drucks*, 1962, 116 p.

Lakkhi Ram Govil, *Untersuchung des Einflusses der Zusammensetzung von Kraftstoffdampf —Sauerstoff—Stickstoff—Gemischen auf das Zündverzugs- u. Klopfverhalten*, 1961, 70 p.

Sali Kumar Pal, *Automatisches Schmelzschweissen von Stumpfstössen dickwandiger Kesselbleche nach dem Kohlendioxyd—Schutzgas—Schweissverfahren mit abschmelzender Elektrode in Wannenlage*. 1962, 135 p.

H. Scheele, *Entwicklung einer Versuchsgasturbine zur Messung der Läufertemperaturen im Betrieb*. 1962, 106 p.

O. Stumpf, *Theoretische und experimentelle Grundlagen der Hochtemperaturverbrennung und der Reaktionsvorgänge in Schubdüsen*, 1962, 102 p.

J. Lehmann, *Untersuchungen über die Abhängigkeit des elektrischen Wiederstandes hygroskipischer Faserstoffe von ihrem Wassergehalt*. 1961, 125 p.

H. Hermann, *Nichtlinearer, mit Druckfluss betriebener Schwinger zum Antrieb von Gewinnungs- und Lademaschinen für den Bergbau*, 1962, 82 p.

F 2557

R

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÎNE
INSTITUTUL DE MECANICĂ APLICATĂ „TRAIAN VUIA"

3

ANUL XIV
1963

STUDII ŞI CERCETĂRI DE

MECANICĂ APLICATĂ

1964 FEB 17

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

COMITETUL DE REDACŢIE

Redactor responsabil:

ACADEMICIAN E. CARAFOLI

Membri:

ACADEMICIAN N. PROFIRI;

ACADEMICIAN A. BELEŞ;

CR. MATEESCU, membru corespondent al Academiei R.P.R.;

R. BOGDAN, conferenţiar la Institutul de petrol, gaze şi geologie, Bucureşti;

N. TIPEI, membru corespondent al Academiei R.P.R., conferenţiar la Institutul politehnic, Bucureşti;

M. ARCAN, şef secţie, Institutul de cercetări în construcţii şi economia construcţiilor (INCERC), Bucureşti.

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ
APARE DE 6 ORI PE AN
Redacţia: INSTITUTUL DE MECANICĂ APLICATĂ „TRAIAN VUIA"
Str. Const. Mille 15, tel 17.34.09

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÎNE
INSTITUTUL DE MECANICĂ APLICATĂ „TRAIAN VUIA"

STUDII ŞI CERCETĂRI DE
MECANICĂ APLICATĂ

3

ANUL XIV

1963

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

Revista

STUDII ȘI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

publică:

- Studii originale *de înalt nivel cu caracter fundamental de interes general științific și reflectare în practică.*
- Note *(lucrări mai scurte) cu caracter original sau constituind o punere la punct a unei anumite chestiuni.*
- Referate științifice și tehnice *în care se expune: stadiul actual al unei anumite probleme, subliniindu-se aspectul nou, observații și discuții asupra unor lucrări de mecanică aplicată.*
- Recenzii *asupra cărților și studiilor romîne sau străine.*

Domeniile de specialitate ale revistei sînt:

- *Astrodinamică (optimizarea traiectoriilor, calculul orbitelor sau al segmentelor de orbite, optimizarea transferului interorbital, impactul vehiculelor spațiale cu meteoriții, orbite sincrone, astrorelativitate, zborul în atmosfera rarefiată, reintrarea în atmosfera densă, frînarea și captarea aerodinamică a unui vehicul cosmic).*
- *Aeromecanică (mecanica fluidelor, aerodinamică, dinamica gazelor, mecanica avionului, aeroelasticitate, aerodinamica motoarelor cu ardere internă, termo-aerodinamica motoarelor cu reacție, ventilație, aeromotori).*
- *Hidromecanică (hidraulică, construcții hidrotehnice, irigație, turbine și pompe, amenajări hidraulice).*
- *Construcții de mașini (cinematica și dinamica mecanismelor, frecare, ungere, uzură, metode moderne de calculul mașinilor, automatizare, studiul suprafețelor, tehnologia mediilor solide continue).*
- *Mecanică generală (rezistența materialelor, elasticitate, plasticitate, vibrații și șocuri, stabilite, analogii electrice și hidraulice).*
- *Statica și dinamica construcțiilor (metode pentru calculul static și dinamic al construcțiilor, studiul materialelor neomogene, geotehnică, stabilitatea terenurilor, metode de executarea lucrărilor de construcții).*
- *Tehnica măsurătorilor (aparate electronice pentru măsurarea mărimilor mecanice, utilizarea ultrasunetului și a izotopilor radioactivi în tehnică).*

Revista urmărește stimularea activității științifice precum și difuzarea lucrărilor valoroase, primind în acest scop spre publicare articole de la toți specialiștii din țară și de la colaboratorii din străinătate.

★

Articolele vor fi redactate într-o formă concisă și clară, evitîndu-se introduceri lungi referitoare la părțile cunoscute ale problemei.

Manuscrisele se vor preda în trei exemplare, dactilografiate la două rînduri, iar formulele vor fi scrise clar și citeț cu cerneală. Figurile și graficele se vor desena în tuș pe hîrtie de calc. Se vor utiliza figuri numai cînd este absolut necesar și în număr cît mai mic.

Literatura citată în text se va insera la sfîrșitul lucrării sub formă de bibliografie. Se va indica numele autorului, titlul lucrării, tomul, pagina, locul, editura, anul de apariție, iar pentru revistă se va indica și numărul respectiv. Trimiteri la lucrări nepublicate nu se admit.

Pe lîngă text se vor înainta pentru fiecare exemplar rezumate în limba romînă, eventual în rusă, franceză, engleză și germană. Rezumatele vor fi în medie una pagină dactilografiată la 20 pagini de text.

Aceleași norme sînt valabile și pentru colaborările din străinătate, care pot fi redactate în limbile rusă, engleză, franceză sau germană.

Manuscrisele se vor trimite la sediul Institutului de mecanică aplicată, București, str. C. Mille nr. 15, raionul „16 februarie”.

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÎNE
INSTITUTUL DE MECANICĂ APLICATĂ „TRAIAN VUIA”

STUDII ȘI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

Tomul XIV, nr. 3 1963

SUMAR

STUDII

Pag.

T. OROVEANU, Unele considerații asupra scurgerii fluidelor compresibile prin medii poroase neomogene 497

H. PASCAL, Asupra constantei dielectrice a mediului poros saturat cu fluid și posibilitatea aplicării acesteia la investigarea geofizică a sondelor . . . 507

NICOLAE S. PÎRVULESCU, Ascensiunea gazului prin lichid în tuburi verticale 523

CLAUDIU IONESCU-BUJOR, Introducere în studiul intrinsec al clasei mișcărilor permanente ale plasmei perfecte într-un cîmp magnetic staționar 537

AL. MARINESCU, Considerații privind răspunsul dinamic al structurii rachetei în timpul zborului perturbat 559

M. M. NIȚĂ, O manevră de transfer între două orbite eliptice necoplanare . . . 573

PETRE BRĂDEANU, Programarea optimă a direcției tracțiunii unei rachete balistice care se mișcă în aer 591

LUCIAN DUMITRESCU, O metodă pentru etalonarea dinamică a traductoarelor de presiune 605

GH. VASILCA și AL. NICA, Contribuții la determinarea pe cale experimentală a parametrilor funcționali de la lagărele motoarelor cu ardere internă. II. Rezultate experimentale și concluzii 611

DAN PAVELESCU, Cu privire la erorile de măsură și ponderea acestor erori, în cazul studiului uzurii cu izotopi radioactivi 621

M. P. POPOV, I. MITRICĂ și E. D. DECIU, Influența unghiurilor de așezare asupra uzurii sculei așchietoare 641

DAN BODNĂRESCU, Combinarea generalizată a prăjinilor de pompare la oboseală 651

MARCEL TANNENBAUM, Calculul la starea limită de rezistență a elementelor de beton precomprimat solicitate la încovoiere 675

VALERIU PETCU, Principiile calculului plastic al cadrelor de beton armat 705

M. BLUMENFELD, Relațiile generalizate ale metodei de recurență a celor trei necunoscute, pentru studiul sistemelor elastice 715

RECENZII 727

PUBLICAȚII PRIMITE PRIN SCHIMB LA REDACȚIE 741

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

Le périodique

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ
(*ETUDES ET RECHERCHES DE MÉCANIQUE APPLIQUÉE*)

publie :

- *des* études originales *à caractère hautement scientifique, recherches fondamentales d'intérêt général, orientées vers l'activité pratique ;*
- *des* notes *(communications brèves) à caractère général, ou constituant une mise au point d'une certaine question* ;
- *des* exposés scientifiques et techniques *où l'on expose; l'état actuel d'un certain problème, en soulignant son aspect nouveau* ; *des remarques et discussions concernant certains travaux de mécanique appliquée* ;
- *des* notes bibliographiques *au sujet des livres et des études roumains et étrangers.*

Les domaines de spécialité de la revue sont les suivants:

- *astrodynamique (réalisation des trajectoires optimums, calcul des orbites, ou des segments d'orbites, obtention du transfert interorbital optimum, impact des véhicules spatiaux avec les météorites, orbites synchrones, astrorelativité, vol en atmosphère raréfiée, retour dans l'atmosphère dense, freinage et saisie aérodynamique d'un véhicule cosmique);*
- *aéromécanique (mécanique des fluides, aérodynamique, dynamique des gaz, mécanique de l'avion, aéroélasticité, aérodynamique des moteurs à combustion interne, thermo-aérodynamique des moteurs à réaction, ventilation, aéromoteurs);*
- *hydromécanique (hydraulique, constructions hydrotechniques, irrigation, turbines hydrauliques et pompes)* ;
- *constructions mécaniques (cinématique et dynamique des mécanismes, frottement, lubrification, usure, méthodes modernes de calcul des machines, automation, étude des surfaces, technologie des milieux solides continus);*
- *mécanique générale (résistance des matériaux, élasticité, plasticité, vibrations et chocs, stabilité, analogies électriques et hydrauliques);*
- *statique et dynamique des constructions (méthodes de calcul statique et dynamique des constructions, étude des matériaux hétérogènes, mécanique des sols, stabilité des terrains, méthodes d'exécution des travaux de construction);*
- *technique des mesures (appareils électroniques pour la mesure des grandeurs mécaniques, utilisation des ultra-sons et des isotopes radioactifs en technique).*

La revue tend à stimuler la recherche scientifique et la diffusion des travaux méritoires en publiant, dans ce but, les articles scientifiques des collaborateurs roumains et étrangers.

★

Les articles seront rédigés dans un style concis et clair, étant évitées les introductions trop longues concernant les données connues des problèmes.

Les manuscrits seront envoyés en trois exemplaires, dactylographiés, aux formules écrites de manière lisible, à l'encre. Les figures, ainsi que les diagrammes, seront tracés à l'encre de Chine sur du papier calque. On utilisera le nombre de figures strictement indispensable.

Les références bibliographiques seront mentionnées à la fin de l'article. On y indiquera le nom de l'auteur, le titre de l'ouvrage, le tome, la page, le lieu de la parution et, pour les périodiques on ajoutera le numéro auquel on se réfère. On ne fera pas mention des travaux non publiés.

Les manuscrits seront accompagnés d'un résumé en roumain ou, éventuellement, en russe, français, anglais ou allemand (environ une page pour 20 pages dactylographiées de texte).

Les mêmes normes sont valables pour les collaborateurs étrangers, qui peuvent rédiger leurs travaux en russe, anglais, français ou allemand.

Les manuscrits seront envoyés à l'adresse suivante : *Institut de Mécanique Appliquée « Traian Vuia », 15, str. Constantin Mille, Bucarest, Roumanie.*

Журнал

,,ТРУДЫ И ИССЛЕДОВАНИЯ ПО ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКЕ''

публикует:

● Оригинальные исследования *высокого уровня, представляющие общий научный интерес, связанный с практикой.*

● Заметки (*краткие работы*) *оригинального характера, представляющие уточнение некоторого вопроса.*

● Научные и технические рефераты, *в которых излагаются современное состояние определенной задачи с выявлением нового подхода к ней, замечания и обсуждения некоторых работ по прикладной механике.*

● Рецензии *на румынские или зарубежные книги и исследования. В журнале публикуются работы по следующим специальностям:*

● *Астродинамика* (*оптимальные траектории, расчет орбит или отрезка орбит, оптимальная межорбитальная теплопередача, удар космических кораблей о метеориты, полет в разреженной атмосфере, возвращение в плотную атмосферу, торможение и аэродинамическое улавливание космического аппарата*).

● *Аэромеханика* (*механика жидкостей и газов, аэродинамика, газодинамика, механика самолета, аэроупругость, аэродинамика двигателей внутреннего сгорания, термоаэродинамика реактивных двигателей, вентиляция, ветродвигатели*).

● *Гидромеханика* (*гидравлика, гидромеханические сооружения, орошение, гидравлические турбины и насосы, гидравлические устройства.*

● *Машиностроение* (*кинематика и динамика механизмов, трение, смазка, износ, современные методы расчета различных машин, автоматизация, исследование поверхностей, механика сплошных твердых сред*).

● *Общая механика* (*сопротивление материалов, упругость, пластичность, вибрация и удары, устойчивость, электрические и гидравлические аналогии*).

— *Статика и динамика сооружений* (*методы статистического и динамического расчета сооружений, исследование неоднородных материалов, механика грунтов, устойчивость грунтов, методы производства строительных работ*).

— *Техника измерений* (*электронные приборы для измерения механических величин, применение ультразвука и радиоактивных изотопов в механике.*

Журнал предназначен для стимулирования научной деятельности, а также для распространения выдающихся работ и принимает с этой целью к опубликованию статьи всех отечественных специалистов и зарубежных сотрудников.

★

Статьи должны быть написаны в сжатой и ясной форме, избегая длинных введений (*относящихся к уже известным частям проблемы*).

Рукописи следует направлять в трех экземплярах, напечатанных на машинке через два интервала, формулы должны быть вписаны чернилами четко и ясно. Рисунки и графики следует делать китайской тушью на кальке. Присылать рисунки следует только в случае совершенной необходимости и в ограниченном количестве.

Литература, цитированная в тексте должна даваться общим списком в конце статьи. Нужно указывать инициалы и фамилию автора, заглавие, том, страницу, место издания, издательство, год издания, а для журналов — и соответствующий номер. Ссылки на неопубликованные работы не допускаются.

Кроме текста, для каждого экземпляра нужно представлять резюме на румынском языке или же на русском, французском, английском или немецком языках. Резюме должно составлять 1 страницу, написанную на машинке, на 20 страницах текста. Эти же нормы относятся и к работам зарубежных сотрудников, редактированным на русском, английском, французском или немецком языках.

Рукописи препровождаются по адресу: Институт прикладной механики, Бухарест, ул. Константин Милле, № 15, район ,,16 Februarie''.

STUDII

UNELE CONSIDERAŢII ASUPRA SCURGERII FLUIDELOR COMPRESIBILE PRIN MEDII POROASE NEOMOGENE

DE

T. OROVEANU

532 : 517.9

1. **Introducere.** În cîteva lucrări anterioare [2], [3], am considerat scurgerea lichidelor compresibile prin medii poroase, mai întîi cu porozitate şi permeabilitate constantă şi apoi cu aceste caracteristici variabile. În ipoteza că legea lui Darcy trebuie modificată, pentru a se ţine seama de caracterul nestaţionar al scurgerii, am stabilit ecuaţii diferenţiale pentru masa specifică şi pentru presiune, indicînd ca aplicaţii posibile acele fenomene care sînt însoţite de o variaţie rapidă a presiunii în mediul poros. În cele ce urmează, vom relua problema sub un aspect mai general, tot pentru mediile poroase a căror permeabilitate este funcţie de punct şi, în acelaşi timp, vom justifica mai bine unele aproximaţii făcute anterior în lucrarea [3]. De asemenea, vom trata aceeaşi problemă şi pentru cazul cînd fluidul care se scurge prin mediul poros este un gaz.

2. **Scurgerea unui lichid compresibil printr-un mediu poros neomogen. Ecuaţia diferenţială a masei specifice.** În lucrarea [3] am dedus legea de filtrare în regim nestaţionar pentru mediile poroase neomogene şi anizotrope, generalizînd raţionamentul utilizat de V.I. Aravin şi S. N. Numerov [1]. Dacă ne limităm la mediile poroase neomogene, la care permeabilitatea este un scalar funcţie de punct avem

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} = -\frac{\partial V}{\partial x_i} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{\mu}{\rho k} v_i \quad (i = 1,\ 2,\ 3), \tag{1}$$

unde v_i sînt componentele vitezei de filtrare, ρ masa specifică a fluidului, p presiunea, μ viscozitatea dinamică, k permeabilitatea mediului poros şi V potenţialul forţelor exterioare raportate la unitatea de masă de fluid. Dacă aceste forţe se rezumă la greutatea fluidului, avem

$$g_i = -\frac{\partial V}{\partial x_i}, \tag{2}$$

g_i fiind componentele acceleraţiei gravitaţiei.

Dacă presupunem că mediul poros este indeformabil, ecuaţia de continuitate are forma[1])

$$m\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_i)}{\partial x_i} = 0 \tag{3}$$

în care m este porozitatea care poate fi de asemenea o funcţie de punct.

Pentru lichidele compresibile, avem ecuaţia de stare

$$\rho = \rho_0 e^{\beta_l (p - p_0)}, \tag{4}$$

în care coeficientul de compresibilitate β_l al lichidului poate fi considerat constant.

Fără a mai intra în amănuntele care se găsesc în lucrările [2] şi [3], reamintim numai că putem pune

$$\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} \approx \rho\frac{\partial v_i}{\partial t} \tag{5}$$

deoarece β_l are valori foarte mici. Ţinînd seama de acest fapt, utilizarea ecuaţiei (1) ne dă

$$\begin{aligned}\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} \approx -\rho\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial V}{\partial x_i} + \frac{\mu}{\rho k}v_i\right) = -\frac{1}{\rho}\Bigg(\frac{1}{\beta_l}\frac{\partial \rho}{\partial x_i} &+ \\ + \rho^2\frac{\partial V}{\partial x_i} + \frac{\mu}{k}\rho v_i\Bigg)&,\end{aligned} \tag{6}$$

eliminarea presiunii fiind făcută cu ajutorul ecuaţiei (4).

Mai departe, din ecuaţia de continuitate (3) obţinem

$$m\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = -\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t}\right] \tag{7}$$

sau, dacă ţinem seama de (6),

$$m\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left[\frac{1}{\rho}\left(\frac{1}{\beta_l}\frac{\partial \rho}{\partial x_i} + \rho^2\frac{\partial V}{\partial x_i}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial x_i}\left[\frac{1}{\rho}\left(\frac{\mu}{k}\rho v_i\right)\right]. \tag{8}$$

---

[1]) Pentru simplificare, utilizăm convenţia indicelui de sumare.

Admițînd că viscozitatea este constantă, ultimul termen al relației precedente se scrie

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\frac{1}{\rho}\left(\frac{\mu}{k}\,\rho v_i\right)\right] = -\left(\frac{\mu}{\rho k}\,\frac{\partial \rho}{\partial x_i} + \frac{\mu}{k^2}\,\frac{\partial k}{\partial x_i}\right) v_i + \frac{\mu}{\rho k}\,\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial x_i} \tag{9}$$

sau

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\frac{1}{\rho}\left(\frac{\mu}{k}\,\rho v_i\right)\right] = -\left(\frac{\mu}{\rho k}\,\frac{\partial \rho}{\partial x_i} + \frac{\mu}{k^2}\,\frac{\partial k}{\partial x_i}\right) v_i - \frac{\mu m}{\rho k}\,\frac{\partial \rho}{\partial t}, \tag{10}$$

cu observația că am utilizat din nou ecuația de continuitate.

În felul acesta, relația (8) devine

$$m\,\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} + \frac{\mu m}{\rho k}\,\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left[\frac{1}{\rho}\left(\frac{1}{\beta_l}\,\frac{\partial \rho}{\partial x_i} + \rho^2\,\frac{\partial V}{\partial x_i}\right)\right] - \left(\frac{\mu}{\rho k}\,\frac{\partial \rho}{\partial x_i} + \frac{\mu}{k^2}\,\frac{\partial k}{\partial x_i}\right) v_i \tag{11}$$

și urmează să înlocuim factorul v_i. În lucrarea [3] am făcut acest lucru luînd în considerare forma obișnuită a legii lui Darcy. Procedînd și acum în același mod, vom căuta în cele ce urmează să justificăm acest lucru.

Urmînd un raționament analog cu acela al lui B. K. Rizenkampf[1]), vom pune în (1)

$$u_i = v_i + \frac{\rho k}{\mu}\left(\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial V}{\partial x_i}\right), \tag{12}$$

ceea ce ne dă, după calcule simple,

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\mu}{\rho k}\,u_i = \frac{k}{\mu}\,\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho\,\frac{\partial V}{\partial x_i}\right) \tag{13}$$

sau

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\mu}{\rho k}\,u_i = \frac{k}{\mu}\,\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{\rho\beta_l}\,\frac{\partial \rho}{\partial x_i} + \rho\,\frac{\partial V}{\partial x_i}\right) \tag{14}$$

dacă eliminăm presiunea cu ajutorul ecuației de stare.

Considerînd un interval de timp $[t_0, t]$ și presupunînd că expresia $\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{\rho\beta_l}\,\frac{\partial \rho}{\partial x_i} + \rho\,\frac{\partial V}{\partial x_i}\right)$ este mărginită în acest interval, putem înlocui (14) cu ecuația aproximativă

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\mu}{\rho k}\,u_i = 0 \tag{15}$$

deoarece coeficientul $\frac{k}{\mu}$ este foarte mic, atît față de unitate cît și față de $\frac{\mu}{\rho k}$. Într-adevăr, dacă luăm pentru exemplificare $k = 1$ darcy, ceea ce reprezintă o valoare foarte mare a permeabilității, $\mu = 1$ centipoise și $\rho = 1$ g/cm^3 avem, în sistemul de unități C.G.S., $\frac{k}{\mu} = 1{,}02 \cdot 10^{-6}$ și $\frac{\mu}{\rho k} = 0{,}981 \cdot 10^6$.

---

[1]) Citat după [4].

Integrînd ecuația (15) obținem însă

$$u_i = u_{i0}\, \mathrm{e}^{-\frac{\mu}{k}\int_{t_0}^{t}\frac{\mathrm{d}t}{\rho}} \tag{16}$$

și se observă că deoarece $\frac{\mu}{k}$ este foarte mare (cu datele din exemplul precedent avem $\frac{\mu}{k} = 0{,}981 \cdot 10^6$), u_i tinde foarte repede spre zero. Prin urmare, după un interval de timp $[t_0, t]$ foarte scurt, putem pune

$$u_i \approx 0 \tag{17}$$

și

$$v_i = -\frac{k}{\mu}\left(\frac{1}{\rho\beta_l}\frac{\partial\rho}{\partial x_i} + \rho\frac{\partial V}{\partial x_i}\right). \tag{18}$$

Dacă $\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{\rho\beta_l}\frac{\partial\rho}{\partial x_i} + \rho\frac{\partial V}{\partial x_i}\right)$ este mărginită și monotonă în intervalul $[t_0, t]$, nu este necesar să recurgem la aproximația utilizată de B. K. Rizenkampf. Astfel, integrînd ecuația (14) obținem

$$u_i = \mathrm{e}^{-\frac{\mu}{k}\int_{t_0}^{t}\frac{\mathrm{d}t}{\rho}}\left[u_{i0} + \frac{k}{\mu}\int_{t_0}^{t}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{\rho\beta_l}\frac{\partial\rho}{\partial x_i} + \rho\frac{\partial V}{\partial x_i}\right)\mathrm{e}^{\frac{\mu}{k}\int\frac{\mathrm{d}t}{\rho}}\,\mathrm{d}t\right]. \tag{19}$$

Deoarece $\mathrm{e}^{\frac{\mu}{k}\int\frac{\mathrm{d}t}{\rho}}$ este evident integrabilă în $[t_0, t]$ ipoteza precedentă ne permite să aplicăm integralei din (19) formula a doua a mediei sub forma[1]

$$\begin{aligned}\int_{t_0}^{t}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{\rho\beta_l}\frac{\partial\rho}{\partial x_i} + \rho\frac{\partial V}{\partial x_i}\right)\mathrm{e}^{\frac{\mu}{k}\int\frac{\mathrm{d}t}{\rho}}\,\mathrm{d}t &= \left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{\rho\beta_i}\frac{\partial\rho}{\partial x_i} + \rho\frac{\partial V}{\partial x_i}\right)\right]_{t_0}\int_{t_0}^{\tau}\mathrm{e}^{\frac{\mu}{k}\int\frac{\mathrm{d}t}{\rho}}\,\mathrm{d}t + \\ &+ \left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{\rho\beta_l}\frac{\partial\rho}{\partial x_i} + \rho\frac{\partial V}{\partial x_i}\right)\right]_{t}\int_{\tau}^{t}\mathrm{e}^{\frac{\mu}{k}\int\frac{\mathrm{d}t}{\rho}}\,\mathrm{d}t,\end{aligned} \tag{20}$$

unde $t_0 < \tau < t$.

---

[1] Indicii t_0 și t de pe lîngă paranteză arată că valoarea funcției din paranteză se consideră respectiv la timpurile t_0 și t.

Pe de altă parte, observăm însă că avem

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho k}{\mu}\,\mathrm{e}^{\frac{\mu}{k}\int\frac{dt}{\rho}}\right) &= \mathrm{e}^{\frac{\mu}{k}\int\frac{dt}{\rho}}\left(1+\frac{k}{\mu}\,\frac{\partial\rho}{\partial t}\right)= \\ &= \mathrm{e}^{\frac{\mu}{k}\int\frac{dt}{\rho}}\left(1+\frac{k}{\mu}\,\beta_l\,\rho\,\frac{\partial\rho}{\partial t}\right)\approx \mathrm{e}^{\frac{\mu}{k}\int\frac{dt}{\rho}}\end{aligned} \tag{21}$$

deoarece atît $\frac{k}{\mu}$ cît și β_l au valori foarte mici față de unitate iar ρ și $\frac{\partial\rho}{\partial t}$ sînt mărginite. Putem scrie deci

$$\int_{t_0}^{t}\mathrm{e}^{\frac{\mu}{k}\int\frac{dt}{\rho}}\,dt\approx\frac{\rho_0 k}{\mu}\,\mathrm{e}^{\frac{\mu}{k}\int_{t_0}^{t}\frac{dt}{\rho}} \tag{22}$$

făcînd și aproximația de a înlocui pe ρ cu valoarea constantă ρ_0 deoarece masa specifică variază puțin.

Înlocuind acest rezultat în (20) și apoi în (19), obținem

$$\begin{aligned}u_i = u_{i0}\,\mathrm{e}^{-\frac{\mu}{k}\int_{t_0}^{t}\frac{dt}{\rho}} &+ \rho_0\frac{k^2}{\mu^2}\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{\rho\beta_l}\,\frac{\partial\rho}{\partial x_i}+\rho\,\frac{\partial V}{\partial x_i}\right)\right]_{t_0}\mathrm{e}^{-\frac{\mu}{k}\int_{\tau}^{t}\frac{dt}{\rho}}+ \\ &+\rho_0\,\frac{k^2}{\mu^2}\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{\rho\beta_l}\,\frac{\partial\rho}{\partial x_i}+\rho\,\frac{\partial V}{\partial x_i}\right)\right]_{t}\mathrm{e}^{-\frac{\mu}{k}\int_{t_0}^{\tau}\frac{dt}{\rho}}.\end{aligned} \tag{23}$$

Primul termen din membrul al doilea al acestei relații este identic cu expresia aproximativă (16) a lui u_i. În ceea ce privește pe ceilalți doi termeni, pe de o parte ei conțin ca factor raportul $\frac{k^2}{\mu^2}$ care este foarte mic iar pe de alta exponențialele care tind de asemenea destul de repede spre zero. Rezultă de aici că este suficient să considerăm un interval de timp $[t_0, t]$ foarte scurt pentru ca expresia (23) a lui u_i să fie practic nulă și v_i să fie dat de legea lui Darcy (18).

Ipoteza că derivata $\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{\rho\beta_l}\,\frac{\partial\rho}{\partial x_i}+\rho\,\frac{\partial V}{\partial x_i}\right)$ este mărginită într-un interval oarecare $[t_0, t]$ este în concordanță cu aspectul fizic al problemei la care pot fi aplicate aceste condiții. Același lucru se poate spune și despre ipoteza suplimentară că această derivată este o funcție monotonă de timp în intervalul $[t_0, t]$.

În toate calculele precedente, viscozitatea lichidului a fost presupusă constantă. S-a admis de asemenea că permeabilitatea nu variază cu timpul deoarece mediul poros este considerat indeformabil.

Rezultatul obținut ne arată că aproximația de a înlocui în (11) viteza de filtrare cu expresia corespunzătoare legii lui Darcy (18) este admisibilă. În acest fel, ţinînd sema şi de faptul că β_l a fost presupus constant, ajungem după cîteva calcule la ecuaţia

$$\rho\beta_l mk \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} + \mu\beta_l m \frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left[k\left(\frac{\partial \rho}{\partial x_i} + \beta_l \rho^2 \frac{\partial V}{\partial x_i}\right)\right] \tag{24}$$

care generalizează pe aceea dedusă în [3].

Pentru liniarizarea acestei ecuaţii se poate înlocui în coeficientul derivatei $\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2}$ masa specifică ρ cu valoarea constantă ρ_0, aproximaţie care este acceptabilă datorită valorii mici a coeficientului de compresibilitate β_l. La acest rezultat se poate ajunge ca în lucrările [2] şi [3] şi anume înlocuind în membrul al doilea al relaţiei (8) factorul $\frac{1}{\rho}$ prin $\frac{1}{\rho_0}$. Cu toate acestea, ecuaţia (24) rămîne neliniară din cauza prezenţei termenului care reprezintă forţele exterioare şi are forma

$$\rho_0 \beta_l mk \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} + \mu\beta_l m \frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left[k\left(\frac{\partial \rho}{\partial x_i} + \rho^2 \frac{\partial V}{\partial x_i}\right)\right]\cdot \tag{25}$$

O liniarizare completă nu se poate face deci decît dacă se neglijează efectul forţelor exterioare, respectiv, în cazurile obişnuite, al forţelor gravitaţionale. Se ajunge astfel la ecuaţia dedusă în [3] şi anume

$$\rho_0 \beta_l mk \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} + \mu\beta_l m \frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(k \frac{\partial \rho}{\partial x_i}\right)\cdot \tag{26}$$

2. 1. *Ecuaţia diferenţială a presiunii.* Rezultatele precedente permit să se scrie cu uşurinţă ecuaţia corespunzătoare pentru presiune. În acest scop, este suficient să utilizăm ecuaţia de stare (4), cu ajutorul căreia găsim

$$\begin{aligned} &\rho_0 e^{\beta_l(p-p_0)} \beta_l mk \left[\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + \beta_l \left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)^2\right] + \mu\beta_l m \frac{\partial p}{\partial t} = \\ &= \frac{\partial}{\partial x_i}\left(k \frac{\partial p}{\partial x_i}\right) + \beta_l k \left(\frac{\partial p}{\partial x_i}\right)^2 + \rho_0 e^{\beta_l(p-p_0)}\left[\frac{\partial}{\partial x_i}\left(k \frac{\partial V}{\partial x_i}\right) + 2\beta_l k \frac{\partial p}{\partial x_i} \frac{\partial V}{\partial x_i}\right], \end{aligned} \tag{27}$$

ecuaţie care corespunde cu (24), în timp ce în loc de (25) avem

$$\begin{aligned} &\rho_0 \beta_i mk \left[\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + \beta_l \left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)^2\right] + \mu\beta_l m \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(k \frac{\partial p}{\partial x_i}\right) + \\ &+ \beta_l k \left(\frac{\partial p}{\partial x_i}\right)^2 + \rho_0 e^{\beta_l(p-p_0)}\left[\frac{\partial}{\partial x_i}\left(k \frac{\partial V}{\partial x_i}\right) + 2\beta_l k \frac{\partial p}{\partial x_i} \frac{\partial V}{\partial x_i}\right]\cdot \end{aligned} \tag{28}$$

De asemenea, dacă luăm ca punct de plecare ecuația liniară (26) obținem

$$\rho_0 \beta_i mk \left[\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + \beta_l \left(\frac{\partial p}{\partial t} \right)^2 \right] + \mu \beta_l m \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(k \frac{\partial p}{\partial x_i} \right) + \beta_l k \left(\frac{\partial p}{\partial x_i} \right)^2 \cdot \qquad (29)$$

Spre deosebire de (26), această ecuație este tot neliniară dar poate fi liniarizată dacă se neglijează termenii care conțin pătratele derivatelor de primul ordin ale presiunii, aproximație acceptabilă deoarece coeficientul de compresibilitate β_l are valori foarte mici. În felul acesta, se ajunge la ecuația dedusă în lucrarea [3] și anume

$$\rho_0 \beta_l mk \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + \mu \beta_l m \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(k \frac{\partial p}{\partial x_i} \right) \cdot \qquad (30)$$

3. **Scurgerea unui gaz printr-un mediu poros neomogen. Ecuația diferențială a masei specifice.** Considerațiile precedente pot fi extinse și pentru cazul în care fluidul care se scurge prin mediul poros este un gaz. Pe lîngă ecuațiile (1) și (3) vom introduce ecuația de stare a gazului, pe care o luăm de forma

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \left(\frac{p}{p_0} \right)^n \qquad (31)$$

presupunînd că gazul este perfect. Mersul calculelor este analog cu acela din problema precedentă. Într-adevăr, aproximația introdusă prin (5) poate fi utilizată și aici, deoarece din (1) obținem

$$\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} = - \left(\frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho \frac{\partial V}{\partial x_i} + \frac{\mu}{k} v_i \right) \qquad (32)$$

precum și

$$v_i \frac{\partial \rho}{\partial t} = - \frac{k}{\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho \frac{\partial V}{\partial x_i} + \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} \right) \frac{\partial \rho}{\partial t} \cdot \qquad (33)$$

Și în acest caz raportul $\frac{k}{\mu}$ are valori mici; astfel, dacă luăm ca mai înainte $k = 1$ darcy și $\mu = 130.10^{-4}$ centipoise avem, în sistemul de unități C.G.S., $\frac{k}{\mu} = 0{,}7846.10^{-4}$. Pe de altă parte, abstracție făcînd de raportul $\frac{k}{\mu}$, termenii din membrul al doilea al relației (33) sînt de ordine de mărime comparabile cu cei din membrul al doilea al relației (32), așa că aproximația (5) este justificată. Rezultă deci

$$\frac{\partial (\rho v_i)}{\partial t} \approx - \left(\frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho \frac{\partial V}{\partial x_i} + \frac{\mu}{k} v_i \right) = - \left(\frac{p_0}{\rho_0^{\frac{1}{n}}} \frac{\partial \rho^{\frac{1}{n}}}{\partial x_i} + \rho \frac{\partial V}{\partial x_i} + \frac{\mu}{k} v_i \right), \qquad (34)$$

eliminarea presiunii fiind făcută cu ajutorul ecuației (31).

Acest rezultat, combinat cu derivarea în raport cu timpul a ecuației de continuitate (3), ne dă

$$m\frac{\partial^2\rho}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\frac{1}{\rho}\left(\frac{p_0}{\rho_0^{\frac{1}{n}}}\,\rho\,\frac{\partial\rho^{\frac{1}{n}}}{\partial x_i}+\rho^2\frac{\partial V}{\partial x_i}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\frac{1}{\rho}\left(\frac{\mu}{k}\rho v_i\right)\right] \qquad (35)$$

şi deoarece avem

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\frac{1}{\rho}\left(\frac{\mu}{k}\rho v_i\right)\right]=-\frac{\mu m}{\rho k}\frac{\partial\rho}{\partial t}+v_i\frac{\partial\left(\frac{\mu}{k}\right)}{\partial x_i}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial x_i}\frac{\mu}{k}v_i \qquad (36)$$

obținem

$$\begin{aligned} m\frac{\partial^2\rho}{\partial t^2}+\frac{\mu m}{\rho k}\frac{\partial\rho}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\frac{1}{\rho}\left(\frac{p_0}{\rho_0^{\frac{1}{n}}}\rho\frac{\partial\rho^{\frac{1}{n}}}{\partial x_i}+\rho^2\frac{\partial V}{\partial x_i}\right)\right]+ \\ +v_i\frac{\partial\left(\frac{\mu}{k}\right)}{\partial x_i}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial x_i}\frac{\mu}{k}v_i\,. \end{aligned} \qquad (37)$$

Se constată însă cu ușurință că putem scrie

$$\frac{\partial\left(\frac{\mu}{k}\right)}{\partial x_i}=-\frac{\mu^2}{k^2}\frac{\partial\left(\frac{k}{\mu}\right)}{\partial x_i} \qquad (38)$$

iar viteza de filtrare v_i poate fi înlocuită cu expresia ei corespunzătoare legii lui Darcy

$$v_i=-\frac{k}{\mu}\left(\frac{p_0}{\rho_0^{\frac{1}{n}}}\frac{\partial\rho^{\frac{1}{n}}}{\partial x_i}+\rho\frac{\partial V}{\partial x_i}\right) \qquad (39)$$

deoarece raționamentul expus mai înainte se poate repeta întocmai și în acest caz.

Înlocuind expresiile (38) și (39) în (37) obținem, după cîteva calcule simple, ecuația

$$\frac{\rho mk}{\mu}\frac{\partial^2\rho}{\partial t^2}+m\frac{\partial\rho}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\frac{k}{\mu}\left(\frac{p_0}{\rho_0^{\frac{1}{n}}}\rho\frac{\partial\rho^{\frac{1}{n}}}{\partial x_i}+\rho^2\frac{\partial V}{\partial x_i}\right)\right]\cdot \qquad (40)$$

În calculele precedente, viscozitatea dinamică a fost considerată variabilă, pentru o mai mare apropiere de situațiile reale. De asemenea, s-a luat în considerare şi termenul care reprezintă forţele exterioare, respectiv greutatea. Pentru gaze acest termen poate fi însă neglijat fără a se introduce o eroare apreciabilă. Dacă mai observăm că avem

$$\rho \frac{\partial \rho^{\frac{1}{n}}}{\partial x_i} = \frac{1}{n+1} \frac{\partial \rho^{\frac{n+1}{n}}}{\partial x_i} \tag{41}$$

ecuaţia (40) devine

$$\frac{\rho m k}{\mu} \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} + m \frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{p_0}{(n+1)\, \rho_0^{\frac{1}{n}}} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{k}{\mu} \frac{\partial \rho^{\frac{n+1}{n}}}{\partial x_i} \right). \tag{42}$$

Pentrul cazul scurgerii izotermice ($n = 1$), care este cel mai frecvent în practică, ajungem la ecuaţia

$$\frac{\rho m k}{\mu} \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} + m \frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{p_0}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{k}{\mu} \rho \frac{\partial \rho}{\partial x_i} \right). \tag{43}$$

Ecuaţiile obţinute sînt neliniare, aşa cum sînt şi acelea care rezultă dacă se ia de la început pentru viteza de filtrare expresia corespunzătoare legii lui Darcy. De data aceasta mai este însă neliniar şi termenul care conţine derivata a doua a masei specifice în raport cu timpul.

3.1. *Ecuaţia diferenţială a presiunii.* Cu ajutorul ecuaţiei de stare (31) găsim, pentru cazul general în care exponentul n este diferit de unitate,

$$\frac{\rho_0}{p_0^n} \frac{mk}{\mu} p^n \frac{\partial^2 p^n}{\partial t^2} + m \frac{\partial p^n}{\partial t} = \frac{1}{n+1} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{k}{\mu} \frac{\partial p^{n+1}}{\partial x_i} \right). \tag{44}$$

Particularizarea pentru scurgerea izotermică ne conduce la ecuaţia

$$\frac{\rho_0}{p_0} \frac{mk}{\mu} p \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + m \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{k}{\mu} p \frac{\partial p}{\partial x_i} \right), \tag{45}$$

pentru care se poate lua în considerare un procedeu de liniarizare ce urmează a fi examinat într-o altă lucrare.

Primită la redacţie la 9 februarie 1963

CONSIDÉRATIONS SUR L'ÉCOULEMENT DES FLUIDES COMPRESSIBLES À TRAVERS DES MILIEUX POREUX NON HOMOGÈNES

RÉSUMÉ

En prenant comme point de départ les travaux antérieurs [2] et [3], l'auteur apporte quelques précisions et justifie certaines hypothèses utilisées dans les calculs faits en vue d'établir l'équation différentielle

de l'écoulement d'un liquide compressible à travers un milieu poreux non homogène, lorsque c'est le caractère non stationnaire du phénomène qui est prédominant. En suivant une voie analogue, il établit en outre l'équation différentielle de l'écoulement des gaz à travers un milieu poreux non homogène, dans les mêmes conditions que pour les liquides compressibles.

BIBLIOGRAFIE

1. В. И. Аравин, С. Н. Нумеров, *Теория движения жидкостей и газов в недеформируемой пористой среде*. ГИТТЛ, Москва, 1953, 39—42, 62—65.
2. T. Oroveanu, H. Pascal, *Asupra propagării undelor de presiune într-un lichid care curge printr-un mediu poros*. St. cerc. mec. apl., **IX**, *3* (1958).
3 T. Oroveanu, *Considerații asupra scurgerii lichidelor compresibile prin medii poroase neomogene*. St. cerc. mec. apl., **XII**, *2* (1961).
4. П. Я. Полубаринова-Кочина, *Теория движения грунтовых вод*. ГИТТЛ, Москва, 1952, 36—37.

ASUPRA CONSTANTEI DIELECTRICE A MEDIULUI POROS SATURAT CU FLUID ȘI POSIBILITATEA APLICĂRII ACESTEIA LA INVESTIGAREA GEOFIZICĂ A SONDELOR

DE

H. PASCAL [1]

550.3 : 622.323

1. În lucrarea de față vom examina problema stabilirii dependenței funcționale a constantei dielectrice pentru un mediu avînd o structură poroasă, saturat cu fluid, față de proprietățile sale fizice și anume porozitatea și permeabilitatea.

Această problemă prezintă o mare importanță practică în scopul elaborării unei metode geofizice de investigare eficientă a găurii de sondă, bazată pe această proprietate geoelectrică, care să poată permite detectarea stratelor poroase saturate cu fluide după natura conținutului, precum și o mai bună delimitare în spațiu a acestora.

Dacă ținem seama că o rocă poroasă necimentată, saturată cu fluid, este un mediu eterogen alcătuit dintr-o fază solidă, numită matricea mediului, și o fază fluidă, care poate fi țiței, gaze sau apă, atunci evident că valoarea constantei dielectrice va depinde de natura fluidelor acumulate în spațiile libere ale rocii, de porozitate, precum și de alți factori, după cum vom arăta mai departe.

Deoarece constantele dielectrice ale țițeiului și apei mineralizate au valori foarte diferite, rezultă că constanta dielectrică a unui nisip saturat cu țiței va fi de asemenea mult diferită, comparativ cu cazul cînd acesta este saturat cu apă, presupunînd că porozitatea și litologia sînt identice. Din acest motiv, cunoașterea variației constantei dielectrice, în funcție de adîncimea sondei, a cărei valoare este mult influențată de natura fluidelor din rocile poroase, precum și variația acesteia pe suprafața zăcămîntului de hidrocarburi fluide, poate permite obținerea unor informații extrem de utile pentru conturarea zonei productive, în ceea ce privește stabilirea contactului apă-țiței sau țiței-gaze, asigurînd o mai bună corelare a stratelor productive.

---

[1] Ministerul Industriei Petrolului și Chimiei, Întreprinderea laboratoare geologice.

În afară de aceasta, utilizarea măsurătorilor efectuate într-o gaură de sondă poate permite de asemenea să estimăm, pe baza interpretării cantitative a diagrafiei sau carotajului constantei dielectrice, valorile proprietăților fizice ale rocilor străbătute de sonde.

2. În general, rocile poroase naturale prezintă o pronunțată neomogenitate și de aceea proprietățile lor fizice variază într-o gamă relativ largă cu poziția și direcția. Datorită acestui fapt, orientarea în spațiu, formele și dimensiunile spațiilor umplute cu fluid, au un caracter întîmplător. Cu toate acestea, valorificarea statistică a unui mare număr de măsurători asupra proprietăților fizice, efectuate atît în condiții de laborator cît și in situ, a arătat că acestea se supun în majoritatea cazurilor legilor statistice. Astfel, pentru permeabilitate s-a observat frecvent o distribuție gaussiană într-o diagramă de probabilitate log-normală, iar pentru porozitate și diametrul granulelor de asemenea, însă într-o diagramă de probabilitate normală [1]. Rezultatele obținute, în urma valorificării statistice, permit să admitem în considerațiile teoretice că mediul poros este omogen și izotrop din punct de vedere statistic, atunci cînd ne referim la problemele unde intervin aceste proprietăți. Față de cele arătate mai sus, rezultă că putem de asemenea considera, în cazul mediului poros, și pentru proprietățile geoelectrice ale acestuia, rezistivitatea și constanta dielectrică, că este omogen din punct de vedere statistic, întrucît, după cum vom arăta în cele ce urmează, aceste proprietăți depind de structura geometrică a spațiului ocupat de fluid, respectiv de dimensiunile, orientarea și forma geometrică a canalelor care leagă porii. Pe baza unei asemenea scheme fizice idealizate, apare posibilitatea descrierii cantitative a dependenței dintre proprietățile geoelectrice și cele fizice ale rocilor poroase saturate cu fluid, ceea ce are o mare importanță practică atît pentru interpretarea calitativă a măsurătorilor cît și pentru stabilirea unor relații necesare interpretării cantitative.

Dacă dispunem de curbele reale de distribuție statistică a proprietăților fizice, atunci cu ajutorul parametrilor distribuției este ușor să determinăm valorile medii statistice și în consecință erorile introduse, prin această ipoteză, asupra determinării constantei dielectrice în funcție de proprietățile fizice vor fi substanțial ameliorate.

În figura 1 este redată histograma factorului rezistivității electrice, rezultată din măsurători în condiții de laborator, asupra eșantioanelor de roci, unde se poate observa că această proprietate verifică legea de distribuție normală, fiind practic o dreaptă într-o diagramă de probabilitate log-normală.

3. Admițînd că curentul de deplasare are o valoare medie ponderată după volum, atunci avem

$$\overline{D}V = \overline{D}_1 V_1 + \overline{D}_2 V_2, \tag{1}$$

unde V_1 reprezintă volumul porilor, V_2 volumul matricei, $V = V_1 + V_2$ volumul rocii la care referim măsurătoarea, $\overline{D_1}$ și $\overline{D_2}$ sînt curenții de deplasare în faza fluidă, respectiv în matrice.

Dacă introducem următoarele notații : l_r — lungimea medie a matricei, l — lungimea medie a canalelor saturate total cu fluid, L — lungimea probei, Ω — secțiunea probei și ω — secțiunea ocupată de fluid, atunci ecuația (1) devine

$$\overline{D} = m \frac{l}{L} \overline{D}_1 + (1 - m) \frac{l_r}{L} \overline{D}_2, \tag{2}$$

unde $m = \dfrac{\omega}{\Omega}$ este porozitatea definită ca raportul secțiunilor.

În cazul mediului poros real trebuie să utilizăm, bineînțeles, porozitatea efectivă și nu cea absolută, care reprezintă raportul dintre volumul porilor în comunicație și volumul total al probei, întrucît chiar dacă roca prezintă spații libere care nu comunică între ele acestea nu permit acumularea fluidelor și în consecință nu asigură conductibilitatea electrică a mediului. Prin urmare, porozitatea efectivă va fi în conformitate cu cele de mai sus

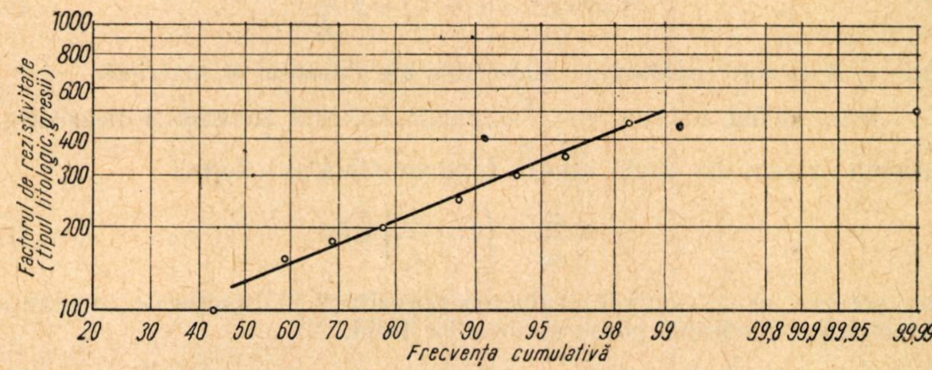


Fig. 1

$$m_e = \frac{\omega}{\Omega} \frac{l}{L} = mT, \tag{2'}$$

unde raportul $T = \dfrac{l}{L}$ se numește tuortozitatea rocii.

În mod analog, putem considera și pentru cîmpul electric o valoare medie ponderată după volum care conduce la o ecuație similară cu (2)

$$\overline{E} = m \frac{l}{L} \overline{E}_1 + (1 - m) \frac{l_r}{L} \overline{E}_2. \tag{3}$$

Pe de altă parte, dacă ținem seama și de ecuațiile materiale ale cîmpului electric, avem pentru curenții de deplasare următoarele relații

$$\overline{D} = \varepsilon \overline{E}, \quad \overline{D}_1 = \varepsilon_1 \overline{E}_1 \quad \text{și} \quad \overline{D}_2 = \varepsilon_2 \overline{E}_2 \tag{4}$$

şi prin urmare din combinaţia ecuaţiilor (2), (3) şi (4) rezultă

$$\varepsilon = \frac{m\frac{l}{L}\varepsilon_1\overline{E}_1 + (1-m)\frac{l_r}{L}\varepsilon_2\overline{E}_2}{m\frac{l}{L}\overline{E}_1 + (1-m)\frac{l_r}{L}\overline{E}_2}, \qquad (5)$$

sau cu notaţia $f = \frac{\overline{E}_1}{\overline{E}}$ care reprezintă raţia cîmpului electric, şi utilizînd relaţia (3), ecuaţia (5) devine

$$\varepsilon = \varepsilon_2 + (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)\, m f \frac{l}{L}, \qquad (6)$$

unde ε_1 şi ε_2 sînt constantele dielectrice ale fluidului şi matricei.

Introducînd notaţia $\gamma = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_1}$, numit factorul constantei dielectrice, obţinem în cele din urmă relaţia fundamentală sub forma

$$\gamma = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} + \left(1 - \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right) mfT \qquad (7)$$

care permite să determinăm valoarea porozităţii în funcţie de constanta dielectrică a mediului poros saturat cu fluid.

Raportul $\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$ are practic o valoare constantă şi poate fi uşor estimat, deoarece constantele dielectrice ale fluidului şi matricei sînt practic invariabile în cazul rocilor necimentate. Pentru nisipurile cimentate influenţa cimentului, respectiv factorul litologic, se manifestă prin procentul şi natura cimentului care intră în compoziţia petrografică a rocii şi care de obicei sînt variabile.

În situaţia nisipurilor cimentate problema se complică foarte mult datorită faptului că acestea trebuie tratate ca un mediu trifazic.

Este necesar să menţionăm că principala dificultate întîmpinată la aplicarea ecuaţiei (7) constă în stabilirea coeficientului f. După cum se ştie, valoarea medie ponderată după volum a cîmpului electric depinde de formele geometrice ale particulelor de nisip şi aranjamentul acestora în spaţiu, precum şi de valorile constantelor dielectrice ale matricei şi fluidului.

În cazul unui mediu poros avînd o structură geometrică ideală, ceea ce înseamnă să presupunem aranjamentul geometric regulat al particulelor de nisip dispersate, avînd forme şi dimensiuni identice, se poate obţine o rezolvare analitică exactă pentru valoarea coeficientului f din ecuaţia (7). În acest scop, apare necesar să admitem că una din faze, solidă sau fluidă, se află dispersată în mod uniform în cealaltă, presupusă omogenă din punct de vedere geoelectric. Din acest motiv, în cazul mediului poros este normal să considerăm că faza fluidă, repartizată în mod discontinuu pe secțiune, este dispersată în matricea mediului poros care este continuă, ținînd seama de valorile reduse ale porozității efective întîlnite frecvent în practică, de exemplu 1—20%.

Problema a fost examinată pentru particule dispersate în concentrații mici, astfel încît efectul interacțiunii să poată fi neglijat [2], ceea ce corespunde cazului mediilor poroase naturale unde porozitatea acestora este în general relativ redusă. În felul acesta, determinarea coeficientului *f* a putut fi redusă la studiul cîmpului electric indus cînd particula este plasată într-un cîmp omogen. Au fost obținute soluții exacte numai pentru cîteva cazuri particulare, și anume : bare infinit de lungi și discuri circulare infinit de subțiri. Un număr foarte mare de relații aproximative pentru calculul constantei dielectrice a mediilor bifazice, considerate omogene, sînt redate în lucrările [3], [4], [5], atît în cazul particulelor orientate întîmplător în spațiu cît și pentru cele orientate după o direcție sau mai multe.

În cazul rocilor poroase naturale structura geometrică a acestora este foarte complexă, respectiv formele, dimensiunile și aranjamentul canalelor umplute cu fluid au în spațiu o distribuție întîmplătoare, și de aceea descrierea cantitativă, pentru determinarea coeficientului *f*, este condiționată de mari dificultăți matematice. Acest fapt ne obligă să admitem deocamdată diferite modele geometrice ale spațiului ocupat de fluid care să poată permite stabilirea valorii lui *f* și prin urmare să putem pune în evidență dependența funcțională a constantei dielectrice de geometria mediului poros, respectiv de proprietățile sale fizice.

Dacă ținem seama că o rocă avînd o structură poroasă este constituită din particule de nisip și din spațiile libere, care se formează între acestea, atunci spațiile libere ocupate de fluid pot fi considerate conducte de dimensiuni foarte mici și extrem de variate, atît în ceea ce privește direcția cît și mărimea acestora. Prin urmare, ca punct de plecare pentru descrierea matematică a proceselor fizice care apar la trecerea curentului electric, continuu sau variabil, ar trebui să ne imaginăm astfel de medii poroase care permit asigurarea analogiei, din punct de vedere electric, cu cazurile studiate în literatură referitoare la mediile neporoase și ale căror rezultate să poată fi extinse la mediul poros.

Astfel, putem considera mediul poros ideal constituit din tuburi capilare rectilinii și paralele, mediul poros fictiv constituit din particule sferice avînd același diametru și, în sfîrșit, mediul poros real unde particulele sînt de formă neregulată iar dimensiunile acestora foarte variate, avînd un aranjament întîmplător în spațiu. În ceea ce privește valoarea porozității unui mediu fictiv, aceasta este independentă de diametrul particulelor sferice și dependentă numai de aranjamentul lor geometric.

Diferite aranjamente ale sferelor pot varia între cea cubică și romboedrică și de aceea valorile porozității sînt cuprinse între 26 și 47,64%, cea maximă corespunzînd aranjamentului romboedric.

În conformitate cu rezultatele obținute în lucrările [2], [3], [4], [5], [6] și [7] valoarea constantei dielectrice pentru mediul poros ideal, unde acesta este reprezentat printr-un fascicul de tuburi capilare rectilinii și paralele, va fi

$$\gamma = \frac{1-\alpha}{1+\alpha}\cdot\frac{1+m\alpha}{1-m\alpha}, \tag{8}$$

unde prin α s-a notat $\alpha = \frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}$, m fiind valoarea porozității volumetrice, întrucît în acest caz tuortozitatea este egală cu unitatea.

În situația mediului poros fictiv, avînd particulele de formă sferică orientate întîmplător, ecuația (8) capătă forma

$$\gamma = \frac{1-\alpha}{1+\alpha}\cdot\frac{1+2m\alpha}{1-m\alpha}, \tag{9}$$

unde $\alpha = \frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\varepsilon_1+2\varepsilon_2}$.

Pentru sferoide orientate întîmplător, adică pentru particule de nisip avînd o formă apropiată de cea sferică, de exemplu elipsoidul rezultat din rotirea unei elipse cu o excentricitate mică, în jurul uneia din axe, coeficientul f se obține din ecuația

$$f_i = \sum_{i=1}^{3}\frac{\cos^2\alpha_i}{1+A_i\left[\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}-1\right]}, \tag{10}$$

unde α_i sînt unghiurile făcute de axele sferoidului cu direcția cîmpului aplicat, iar A_i este o constantă care depinde de raportul semiaxelor.

Pe baza ecuației (10) rezultă pentru constanta dielectrică, în cazul unei orientări întîmplătoare, ecuație

$$\varepsilon = \varepsilon_2 + \frac{m}{3}\sum_{i=1}^{3}\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{1+A_i\left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}-1\right)}, \tag{10'}$$

iar cînd există un aranjament cu axele paralele și direcția măsurării este perpendiculară pe una din axe avem

$$\gamma = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} + m\frac{1-\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}{1+A\left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}-1\right)}, \tag{11}$$

sau pentru situația cînd una din axe este paralelă cu direcția măsurării

$$\gamma = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} + m\frac{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}{A(1-m)+\left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}-1\right)^{-1}}. \tag{12}$$

Pe de altă parte, trebuie menționat că pentru determinarea rezistivității electrice a mediului poros, saturat total cu un electrolit, se utilizează în prezent relații bazate pe presupunerea că acesta este constituit din plăci plane paralele, unde plăcile fluide se află intercalate între cele solide (matricea) [8].

Dacă se admite acest model geometric, atunci valorile rezistivității și constantei dielectrice se obțin din relațiile

$$\frac{\varepsilon - \varepsilon_2}{\varepsilon + u} = m\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + u}, \tag{13}$$

$$\frac{\dfrac{1}{\rho} - \dfrac{1}{\rho_1}}{\dfrac{1}{\rho} + u} = m\frac{\dfrac{1}{\rho_1} - \dfrac{1}{\rho_2}}{\dfrac{1}{\rho_1} + u}, \tag{14}$$

unde u reprezintă un coeficient, a cărui valoare depinde pentru conductori stratificați de unghiul format de direcția măsurării cu direcția planului de stratificație. De exemplu, cînd măsurarea se efectuează pe o direcție paralelă cu planul de stratificație $u = \infty$, iar relațiile (13) și (14) devin

$$\frac{1}{\rho} = \frac{m}{\rho_1} + \frac{(1 - m)}{\rho_2}, \qquad \varepsilon = m\varepsilon_1 + (1 - m)\varepsilon_2, \tag{15}$$

iar pentru o direcție perpendiculară pe stratificație, $u = 0$,

$$\rho = m\rho_1 + (1 - m)\rho_2, \qquad \frac{1}{\varepsilon} = \frac{m}{\varepsilon_1} + \frac{1 - m}{\varepsilon_2}. \tag{16}$$

Este ușor de observat, din relațiile (15) și (16), în cazul determinării valorilor echivalente ale constantei dielectrice și rezistivității celor două faze, care compun mediul poros, matricea și fluidul din pori sînt asimilate cu două rezistențe, respectiv cu doi condensatori conectați în paralel. În acest caz, ecuațiile (15) și (16) se obțin din ecuația generală (6), considerînd rația cîmpului electric egală cu unitatea.

Este interesant să stabilim acum, pentru comparație, cîteva valori orientative ale constantei dielectrice pentru un nisip necimentat saturat cu apă, țiței sau gaze.

În figura 2 s-a redat variația factorului constantei dielectrice în funcție de porozitate pentru un nisip saturat total cu fluid, cînd raportul $\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$ are diferite valori, calculată cu ajutorul ecuației (15), respectiv în ipoteza modelului stratificat.

Din grafic rezultă pentru o porozitate de 20% o valoare a constantei dielectrice a nisipului necimentat saturat total cu țiței, avînd o constantă dielectrică $\varepsilon_1 = 10$, și admițînd că matricea acestuia este un cuarț cu $\varepsilon_2 = 4$, egală cu $\varepsilon = 5{,}2$. În cazul cînd este saturat total cu apă distilată, unde $\varepsilon_1 = 80$, obținem o valoare a constantei dielectrice egală cu $\varepsilon = 19{,}2$.

Acest exemplu a fost ales datorită lipsei datelor asupra constantei dielectrice a apei mineralizate, întîlnită în cazul zăcămintelor de hidrocarburi fluide.

Diferenţele mari ale constantei dielectrice pentru rocile care au o structură poroasă, obţinute pentru apă şi ţiţei, justifică importanţa introducerii în şantierele de petrol a metodei geofizice de investigare a găurii de sondă bazată pe măsurarea acestei proprietăţi geoelectrice. Este evident că rezultatele arătate mai sus se referă la rocile poroase a căror particule nu sînt cimentate. În ceea ce priveşte influenţa cimentului asupra valorii constantei dielectrice, aceasta nu poate introduce variaţii importante, comparativ cu cele datorită fluidului, întrucît valorile constantei dielectrice ale cimentului sînt în general apropiate de cele ale matricei, iar concentraţia acestuia este relativ mică în raport cu volumul matricei. Acest fapt reprezintă un avantaj al metodei geofizice de carotaj a sondei, avînd o putere de rezoluţie mai mare faţă de metodele utilizate în prezent, asigurînd o mai bună corelare a straturilor productive după profilele obţinute din sonde, dacă ţinem seama că factorul litologic are în general o influenţă neglijabilă [1]). Bineînţeles că această ipoteză trebuie verificată experimental.

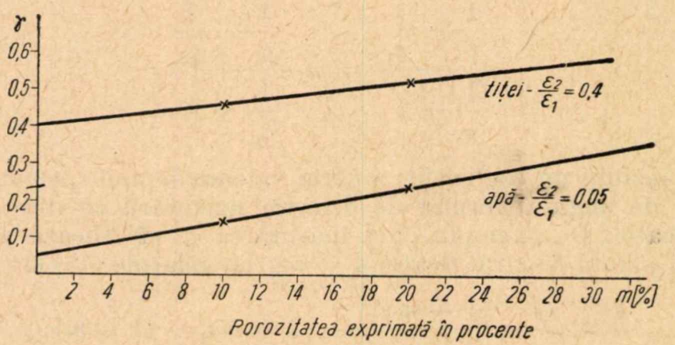


Fig. 2

Pentru obţinerea valorii medii ponderate după volum a curentului de deplasare şi a cîmpului electric, am admis că suprafaţa porilor este invariabilă cu lungimea probei. În acest mod, s-a presupus o valoare constantă a porozităţii, definită ca raportul dintre suprafaţa porilor ocupaţi de fluid şi cea a probei. În cazul mediului poros real datorită tuortozităţii şi neregularităţii canalelor, care formează spaţiile umplute cu fluid, suprafaţa porilor variază într-o gamă largă cu lungimea. Influenţa variaţiei porozităţii poate fi luată în considerare numai dacă facem o descriere cantitativă microscopică a rocii şi nu macroscopică, cum am procedat la deducerea ecuaţiilor (2) şi (3). În cazul rocilor poroase care prezintă o structură geometrică simplă putem ţine seama de variaţia porozităţii cu lungimea. Cu toate că geometria rocilor poroase naturale are un caracter aleatoric şi în consecinţă cunoaşterea acesteia pe cale teoretică devine practic imposibil de realizat, este interesant să obţinem soluţia problemei limitîndu-ne deocamdată numai la modele geometrice idealizate. O asemenea tratare a problemei va permite să putem pune în evidenţă legătura funcţională dintre constanta dielectrică şi structura geometrică a mediului poros. În acest scop, apare necesar să introducem permeabilitatea rocii, deoarece această proprietate fizică depinde direct de geometria spaţiului umplut cu fluid.

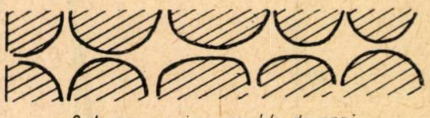
---

[1]) Se face abstracţie de apa interstiţială. Acest aspect al problemei va fi examinat într-o lucrare ulterioară.

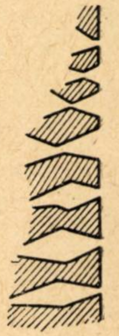
În prealabil vom face unele consideraţii, necesare acestui scop, care ne vor permite să obţinem informaţii extrem de utile asupra geometriei unei structuri poroase, pentru rocile necimentate.

După cum se ştie, studiul morfologic se efectuează aplicînd metoda injecţiei mercurului sub presiune în porii supuşi în prealabil operaţiei de dislocuire a conţinutului acestora. Cu ajutorul curbei de presiune capilară, pentru o anumită tensiune superficială, putem stabili valoarea razei tubului capilar din relaţia cunoscută $r = \frac{2T}{p_c}$, T fiind tensiunea superficială.

Studiile efectuate au condus în general la geometria redată în figura 3, unde se remarcă că formele canalelor pot fi asimilate cu trunchiuri de con.



Schema unui ansamblu de pori



Secţiune schematică a ansamblului de pori pe suprafaţa eşantionului

Fig. 3

Valorificarea statistică a măsurătorilor efectuate au arătat că dimensiunile porilor verifică cu o bună aproximaţie legea distribuţiei normale [9]. Prin urmare, ţinînd seama de acest rezultat, mediul poros natural, în cazul unui nisip necimentat, poate fi descris ca un mediu ideal din punct de vedere statistic, considerînd ca model geometric un fascicul de canale paralele avînd un diametru mediu statistic determinat. Astfel, dacă într-un volum al spaţiului poros diametrul porilor, paralel la o direcţie dată, este cuprins între δ şi $\delta + d\delta$, atunci funcţia de distribuţie trebuie să satisfacă următoarea ecuaţie :

$$\int_0^\infty \alpha(\delta)\, d\delta = 1. \qquad (17)$$

De obicei, curba reală de distribuţie statistică trebuie să fie aproximată cu una din curbele teoretice cunoscute, pentru a stabili parametrii distribuţiei şi prin urmare să deducem valoarea medie statistică a dimensiunilor şi a dispersiei. În figura 4 este redată o curbă de distribuţie a dimensiunilor porilor, obținută prin metoda injecției mercurului sub presiune [9].

Deoarece distribuția permeabilității este log-normală, după cum s-a menționat mai sus, rezultă că distribuția dimensiunilor porilor poate fi de asemenea presupusă log-normală, ținînd seama că coeficientul de permeabilitate este direct proporțional cu pătratul diametrului tubului

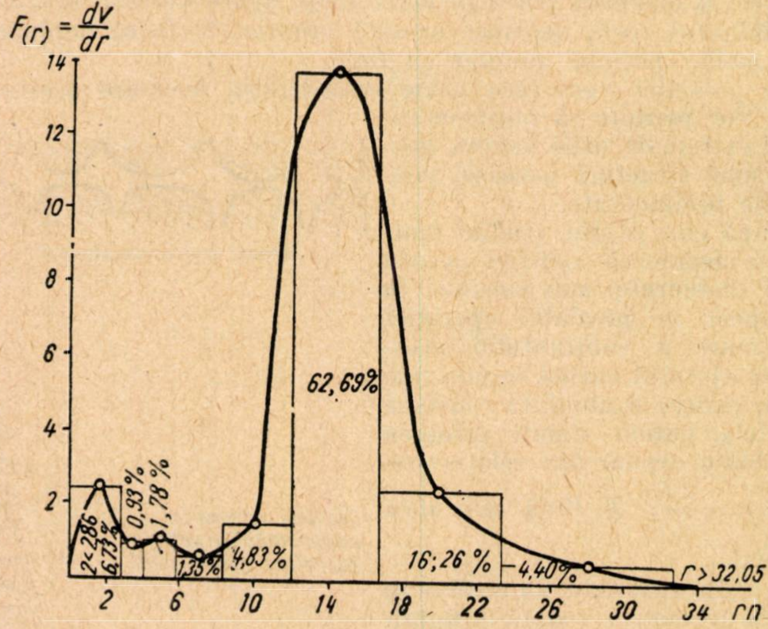


Fig. 4

capilar, în cazul modelului format din canale circulare. În acest caz, parametrii distribuției se determină utilizînd următorii estimatori :

$$\delta^* = \overline{\delta} \exp \frac{\sigma}{2}, \tag{18}$$

unde $\overline{\delta}$ reprezintă valoarea medie geometrică a diametrului canalelor, iar σ, valoarea dispersiei, rezultă din ecuația

$$\sigma^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (\log \delta_i - \log \overline{\delta})^2, \tag{19}$$

$$\log \overline{\delta} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \log \delta_i .$$

Dacă ne referim la modelul constituit dintr-un fascicul de capilare paralele și rectilinii, atunci, în conformitate cu ecuația lui Kozeny, avem

$$K = \frac{m^3}{T^2 S^2 f_0}, \tag{20}$$

unde K reprezintă permeabilitatea mediului poros, S suprafața porilor pe unitatea de volum de rocă și f_0 factorul de formă care variază între valoarea 2 pentru conducte circulare și valoarea 3 în cazul curgerii între doi pereți plani apropiați, avînd o întindere infinită.

De obicei, ecuația (20) se scrie sub o altă formă dacă se utilizează notația $f = T^2 f_0$, constanta lui Kozeny, și S_p suprafața specifică,

$$K = \frac{m}{f S_p^2}. \tag{21}$$

Datorită faptului că capilarele sînt paralele, nu va exista o curgere pe o direcție perpendiculară și în consecință un asemenea model este permeabil numai într-o direcție. Din acest motiv, acest model este departe de a putea reprezenta situația reală, totuși aceasta ne permite într-o primă aproximație să punem în evidență dependența căutată care acum este ușor de obținut eliminînd valoarea porozității din ecuațiile (20) și (8) și ținînd seama de ecuația (2):

$$\gamma = \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \cdot \frac{1 + \alpha \sqrt[3]{K\beta S^2}}{1 - \alpha \sqrt[3]{K\beta S^2}}, \tag{22}$$

unde prin β am notat produsul $\beta = fT^3$.

Ipoteza de bază admisă pentru deducerea ecuației (22) constă din identificarea tuortozității din sistemul electric cu tuortozitatea hidraulică, introdusă de Kozeny.

Dacă ne referim la cazul cînd tuburile capilare sînt rectilinii și paralele, avînd o formă circulară, atunci valoarea tuortozității este egală cu unitatea și prin urmare ecuația (20) devine [10]

$$K = \frac{m \bar{\delta}^2}{96} \tag{23}$$

iar ecuația (22) capătă forma

$$\gamma = \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \cdot \frac{1 + 96 \dfrac{K\alpha}{\bar{\delta}^2}}{1 - 96 \dfrac{K\alpha}{\bar{\delta}^2}}, \tag{24}$$

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM KÖZPONTI KÖNYVTÁRA 1848

unde $\bar{\delta}$ este diametrul mediu statistic definit prin ecuația

$$\bar{\delta}^2 = \int_0^\infty \delta^2 \alpha(\delta)\, d\delta. \tag{25}$$

Vom examina acum tipul de model geometric alcătuit din tuburi de formă tronconică care, comparativ cu modelul precedent, este mult mai apropiat de condițiile reale.

Dacă introducem următoarele notații : V_p — volumul porilor, respectiv al canalului tronconic, V — volumul total al probei la care referim măsurătoarea, N — numărul de canale, atunci rezultă pentru numărul de canale pe unitatea de suprafață următoarea ecuație :

$$\frac{N}{S} = \frac{3\,m}{\pi\,(R^2 + rR + r^2)}, \tag{26}$$

unde R și r sînt razele canalului tronconic și h înălțimea acestuia.

În ipoteza curgerii laminare ecuația lui Hagen-Poiseuille, considerînd raza tubului variabilă, capătă forma

$$\mathrm{d}p = \frac{8\,\eta\,q}{\pi\,y^4}\,\mathrm{d}x, \tag{27}$$

unde y este diametrul, q debitul corespunzător unui singur canal și η viscozitatea dinamică.

Deoarece raza canalului tronconic variază cu distanța după ecuația

$$y = \frac{R - r}{h}\,x + r, \tag{28}$$

avem pentru căderea de presiune

$$\Delta\,p = \frac{8}{3}\,\frac{\eta\,q\,h}{\bar{n}}\,\frac{(R^2 + r\,R + r^2)}{R^3\,r^3,}, \tag{29}$$

iar pentru debitul de lichid care trece printr-un canal,

$$q = \frac{Q}{N} = \frac{\pi\,Q\,(R^2 + rR + r^2)}{3m\,S}, \tag{30}$$

Q fiind debitul total.

Introducînd ecuația (30) în (29) rezultă în cele din urmă

$$\frac{\Delta p}{h} = \frac{8}{3}\,\frac{\eta Q\,(R^2 + rR + r^2)^2}{m\,S\,R^3\,r^3}, \tag{31}$$

iar din compararea cu ecuația lui Darcy, unde

$$Q = \frac{K}{\eta}\,S\,\frac{\Delta p}{L}, \tag{32}$$

obținem pentru coeficientul de permeabilitate

$$K = \frac{9}{8}\,\frac{m_p\,R^3\,r^3}{(R^2 + r\,R + r^2)^2\,T^2} \tag{33}$$

unde m_p este porozitatea volumetrică.

Este ușor de observat din (33), cînd $R = r$, că ecuația (33) este identică cu ecuația lui Kozeny, scrisă sub forma cunoscută

$$K = \frac{\delta^2 m_p}{f_0 T^2}, \tag{34}$$

și prin urmare efectul de gîtuire a canalului poate fi luat în considerare dacă introducem în ecuația lui Kozeny diametrul echivalent, a cărui valoare se determină din identificarea relațiilor (33) și (34)

$$\delta^2_{\text{ech}} = \frac{9}{8} \frac{R^3 r^3 f_0}{(R^2 + rR + r^2)^2}. \tag{35}$$

După cum s-a menționat mai sus, în cazul mediilor poroase naturale, datorită caracterului aleatoric al distribuției dimensiunilor canalelor, formelor geometrice și orientarea acestora, este foarte greu de a construi pe cale teoretică dependența funcțională dintre constanta dielectrică și proprietățile fizice.

La fel ca și în cazul modelului geometric format din canale paralele și rectangulare, putem utiliza și aici diametrul mediu statistic [10]. Valoarea permeabilității mediului poros se obține din relația [10]

$$K = \frac{m_p}{96\, T^2} \frac{1}{\left[\int_0^\infty \delta^2 \alpha(\delta)\, d\delta\right]^2 \int_0^\infty \frac{\alpha(\delta)}{\delta^6} d\delta}, \tag{36}$$

unde diametrul mediu statistic va fi dat de ecuația

$$\frac{1}{\delta^2} = \left[\int_0^\infty \delta^2 \alpha(\delta)\, d\delta\right]^2 \int_0^\infty \frac{\alpha(\delta)}{\delta^6} d\delta. \tag{37}$$

Ecuațiile (36) și (7) permit să obținem pentru factorul constantei dielectrice a mediului poros o relație generală, a cărei formă devine

$$\gamma = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} + \left(1 - \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right) 96\, k f T^2 \left[\int_0^\infty \delta^2 \alpha(\delta)\, d\delta\right]^2 \int_0^\infty \frac{\alpha(\delta)}{\delta^6} d\delta. \tag{38}$$

Deoarece coeficientul f, respectiv rația cîmpului electric, depinde de asemenea de structura geometrică a mediului poros, precum și de constantele dielectrice ε_1 și ε_2, rezultă că dependența funcțională (38) trebuie să fie scrisă sub forma

$$\gamma = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} + \left(1 - \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right) k \Omega(\varepsilon_1, \varepsilon_2, T, \delta), \tag{39}$$

unde funcția $\Omega(\varepsilon_1, \varepsilon_2, T, \delta)$ urmează să fie determinată experimental, în cazul rocilor poroase naturale.

Pe de altă parte, dacă ținem seama de dependența dintre valorile factorului de rezistivitate și tuortozitatea avem [11]

$$Fm = T^2, \tag{40}$$

F fiind factorul de rezistivitate, sau din relația empirică dedusă pe baza unui mare număr de măsurători [12]

$$F = 0{,}62\ m^{-2.15}. \tag{41}$$

Din combinarea ecuațiilor (40) și (41) putem obține informații asupra valorii aproximative a tuortozității, utilizînd o relație de forma

$$T = A\,m^{-\sigma}, \tag{42}$$

unde constantele A și σ se deduc din datele experimentale, respectiv din relația empirică (41).

În felul acesta, dependența constantei dielectrice față de porozitatea mediului poros devine în cele din urmă

$$\gamma = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} + \left(1 - \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right) m\ \Omega_1(\varepsilon_1, \varepsilon_2, T, \delta), \tag{43}$$

unde δ este o mărime care caracterizează dimensiunile geometrice ale canalelor, considerate uniforme din punct de vedere statistic.

4. Rezultatele obținute mai sus ne-au permis să putem pune în evidență, pe baza modelelor geometrice idealizate examinate, dependența funcțională a constantei dielectrice pentru un mediu poros saturat cu fluid față de proprietățile sale fizice. După cum s-a arătat, în cazul cînd ne referim la o geometrie relativ simplă și admitem orientarea canalelor regulată, atunci aspectul funcțiilor Ω și Ω_1 este ușor de stabilit. Dacă ne referim la rocile poroase naturale, rezultă că rezolvarea problemei pe cale teoretică devine practic imposibil de obținut, datorită distribuției întîmplătoare a aranjamentului și dimensiunilor geometrice ale particulelor de nisip. Din acest motiv, apare necesar să comparăm datele obținute din măsurători cu cele stabilite din relațiile teoretice, pentru a verifica în ce măsură modelele geometrice idealizate examinate pot aproxima satisfăcător rocile poroase naturale saturate cu fluide, sau să determinăm aspectul funcțiilor Ω și Ω_1.

Din punct de vedere al interpretării, relațiile obținute arată că constanta dielectrică a unei roci sedimentare de o anumită litologie și de porozitate constantă depinde direct de constanta dielectrică a fluidului din porii acesteia. Deoarece constantele dielectrice sînt diferite pentru apele mineralizate și pentru hidrocarburi fluide, devine posibilă utilizarea profilului acestei proprietăți geoelectrice, obținut într-o sondă, ca un ajutor prețios în separarea nisipurilor purtătoare de țiței, sau gaze, de nisipurile acvifere, identice din celelalte puncte de vedere. În afară de aceasta, un asemenea profil poate permite să punem în evidență schimbările litologice ale rocilor sedimentare de porozitate constantă și saturate cu un anumit fluid, întrucît constanta dielectrică depinde direct de constantele dielectrice ale componenților mineralogici care intră în compoziția rocii. Astfel, dacă profilul rezistivității electrice nu prezintă o anomalie, iar pe profilul constantei dielectrice apare o anomalie, atunci aceasta poate fi atribuită schimbării litologice, întrucît rezistivitatea electrică a unei roci nu este influențată practic de litologia acesteia.

Este ușor de remarcat acum că investigarea găurii de sondă cu ajutorul metodei bazată pe constanta dielectrică, combinată cu utilizarea metodei rezistivității electrice aplicată în prezent, oferă posibilitatea detectării și separării stratelor productive după natura conținutului acestora, deoarece influența factorului litologic cît și a porozității pot fi în acest caz mult mai ușor eliminați. Astfel, nisipurile saturate cu țiței au în general constantele dielectrice și rezistivitățile electrice diferite, comparativ cu cazul cînd acestea sînt saturate cu apă mineralizată, în ipoteza că porozitatea și litologia rocii rămîn identice în ambele situații. Prin urmare, apariția anomaliilor constantei dielectrice și a rezistivității pe profilele obținute în sondă ar putea permite, în unele cazuri, asigurarea unei interpretări geologice mai eficiente a stratelor străbătute de sondă. Rezolvarea problemelor geologice dificile în sondele de explorare actuale, importante, reclamă bineînțeles lucrări de investigare geofizică complexe, care necesită înregistrarea tuturor curbelor de proprietăți geoelectrice pentru obținerea unei informări complete, și de aceea interpretarea cantitativă și calitativă va fi substanțial ușurată cînd acestea apar pe același grafic, înregistrate simultan și corelate după adîncime. În ceea ce privește determinarea in situ a constantei dielectrice, aceasta poate fi efectuată cu ajutorul metodei electrometrice utilizînd curentul alternativ, fie printr-un dispozitiv cu contact direct, așa cum se folosește în prezent pentru curentul continuu, fie prin crearea cîmpului electromagnetic prin inducție. Măsurînd unghiul de fază, precum și valorile tensiunii și curentului, putem deduce valoarea componentei reactive a impedanței electrice, respectiv valoarea constantei dielectrice și rezistivitatea electrică. Ținînd seama de cele expuse mai sus, considerăm că aprofundarea posibilităților aplicării constantei dielectrice la investigarea geofizică a sondelor de hidrocarburi fluide, alături de celelalte proprietăți geoelectrice, prin studii teoretice și experimentale, va conduce în cele din urmă la rezolvarea problemelor fundamentale referitoare la stabilirea naturii fluidelor din stratele poroase străbătute de sondă.

Primită la redacție la 9 ianuarie 1963

ON THE DIELECTRIC CONSTANT OF THE SATURATED POROUS MEDIUM AND THE POSSIBILITY OF ITS APPLICATION TO THE LOG INVESTIGATION OF OIL WELLS

ABSTRACT

The present paper examines the possibility of using the dielectric constant of saturated porous rocks for substantiating a log investigation method which permits a better detecting of the porous strata according to the nature of their content.

For this purpose, the functional dependences of the dielectric constant and the physical properties of the porous medium, e.g. permeability and porosity, are established by using ideal geometric models.

It is shown that the measuring of the variation of the dielectric constant in a well may be employed for obtaining information on the physical properties. The theoretical bases of the quantitative interpretation of this method are also given.

BIBLIOGRAFIE

1. Hans von Johns, *Die statische Auswertung von Porozitäts- und Permeabilitätsmessungen,* Erdöl und Kohle, februarie 1961.
2. D.A.G. Bruggeman, *Berechnung verschiedener physikalischer Konstanten von heterogenen Substanzen.* Annalen der Physik, *5* (1935).
3. R. von Weber, *Dielektrizitätskonstanten wässriger Lösungen.* Z. für Physik, *iulie*,711 (1931).
4. M. M. Kharadley, W. Jackson, *The properties of artificial dielectrics comprising arrays of conducting elements.* The proceedings of the institution of electrical engineers, iulie, 1953.
5. Walter von Niesel, *Die Dielektrizitätskonstanten heterogener Mischkörper aus isotropen und anisotropen Substanzen.* Annalen der Physik, *iunie*, 336 (1952).
6. K. Lichtenecker, K. Rother, Phys. Zeit. (1926).
7. В. Оделевский, Журнал технической физики, *6* (1951).
8. V. N. Dahnov, *Interpretarea rezultatelor cercetării geofizice a profilelor de sondă.* Edit. tehnică, București, 1962.
9. Н. Ф. Котяхов, *Основы физики нефтяного пласта.* Гостоптехиздат, Москва, 1956.
10. A. Scheidegger, *The physics of flow through porous media.* University of Toronto Press, 1957.
11. В. Дахнов, К. Долина, *Геофизические методы изучения нефтегазоносных коллекторов.* Гостехиздат, Москва, 1959.
12. George Keller, *Electrical resistivity of rocks in the area 12 tunnels, Nevada test site.* Geophysics, *aprilie* (1962).

STUDII

ASCENSIUNEA GAZULUI PRIN LICHID ÎN TUBURI VERTICALE

DE

NICOLAE S. PÎRVULESCU [1]

622.323

Ascensiunea gazului prin lichid apare la sondele eruptive, unde este cunoscută sub numele de *alunecare* (slipage) iar studiul său este necesar pentru o judicioasă dimensionare a construcției din sondă, a instalației de la suprafață și mai ales pentru precizarea parametrilor de funcționare din procesul tehnologic al erupțiilor naturale și artificiale.

Introducînd o bulă de aer pe la capătul inferior al unui tub de sticlă vertical plin cu apă, observăm că bula se ridică prin apă păstrînd poziția centrală a tubului, iar apa de deasupra bulei coboară scurgîndu-se (prelingîndu-se) pe pereții tubului.

Să facem deocamdată următoarele premise simplificatoare. Luăm în considerație numai energia de poziție a lichidului și neglijăm : compresibilitatea gazului și solubilitatea sa în lichid.

Pentru schematizarea fenomenului să considerăm bula de gaz îndeajuns de lungă încît suprafața separatoare dintre gaz și lichid — între extremitățile bulei — să fie asimilată cu un cilindru.

Ne referim la scurgerea laminară limitată de numărul adimensional Reynolds $\mathcal{R}e < 1\,900 - 2\,300$ (limitele inferioară și superioară determinate de starea lichidului înainte de începerea mișcării, respectiv agitată sau liniștită) definit de expresia

$$\mathcal{R}e = u\frac{d}{\nu} \qquad (1)$$

în care

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}, \qquad (2)$$

---

[1] Întreprinderea de utilaj terasier și foraje.

u — viteza fluidului sau a corpului în fluid,

d — diametrul canalului sau al obiectului,

ν — viscozitatea cinematică (la 20° pentru apă $\nu = 1{,}01 \cdot 10^{-6}$ m^2/s, pentru aer $\nu = 15{,}1 \cdot 10^{-6}$ m^2/s),

ρ — densitatea specifică a fluidului (la 20° pentru apă $\rho = 101{,}7$ kg s^2/m^4, pentru aer $\rho = 0{,}123$ kg s^2/m^4).

Între ρ şi acceleraţia gravitaţiei ($g = 9{,}81$ m/s^2) avem relaţia:

$$\gamma = \rho g, \qquad (3)$$

unde γ este greutatea specifică.

În acest caz, pe suprafaţa de separaţie dintre gaz şi lichid viteza este aceeaşi pentru ambele fluide — fie u^*. Prin urmare, lucrurile se petrec ca şi cum suprafaţa de separaţie dintre gaz şi lichid ar fi un perete cilindric care se deplasează cu viteza u^*.

Să luăm întîi în consideraţie:

1. CURGEREA FLUIDULUI PRIN TUBURI DE SECŢIUNE INELARĂ CU UN PERETE MOBIL

Pentru tuburi de secţiune circulară [1] folosim expresia

$$u = \frac{K}{4} r^2 + C_1 \ln r + C_2, \qquad (4)$$

$$K = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{g\mathcal{J}}{\nu}, \qquad (5)$$

în care:

u — viteza,

p — presiunea,

r — depărtarea punctului considerat de axul tubului,

$\mathcal{J}$ — gradientul de presiune,

C_1, C_2 — constantele de integrare,

x — coordonata pe direcţia axei tubului.

Relaţia (4) este valabilă pentru un fluid vîscos incompresibil, în cazul mişcării axial simetrice şi curgere staţionară.

Fie:

R — raza tubului exterior (imobil),

r^* — raza tubului interior (mobil),

şi punînd în expresia (4) condiţiile la limită:

pentru $r = R$ avem $u = 0$,

pentru $r = r^*$ avem $u = u^*$,

se determină constantele de integrare

$$C_1 = -\frac{u^\star + (1 - \beta^2) R^2 \dfrac{K}{4}}{\ln \dfrac{1}{\beta}}, \tag{6}$$

$$C_2 = -\frac{K}{4} R^2 + \frac{\ln R}{\ln \dfrac{1}{\beta}} \left[u^\star + \frac{K}{4} R^2 (1 - \beta^2) \right], \tag{7}$$

unde

$$\beta = \frac{r^\star}{R}. \tag{8}$$

Viteza medie u_m, corespunzătoare aceluiaşi debit, este dată prin definiţie de expresia

$$u_m S = 2\pi \int_{r^\star}^{R} u \; r \, \mathrm{d}r, \tag{9}$$

în care

$$S = \pi R^2 (1 - \beta^2). \tag{10}$$

Făcînd înlocuirile date de relaţiile (4), (6), (7), (10) şi integrînd, expresia (9) devine

$$u_m = \chi u^\star - \xi R^2 \frac{K}{8}, \tag{11}$$

unde :

$$\chi = \frac{\varepsilon - \beta^2}{1 - \beta^2}, \qquad \xi = 1 + \beta^2 - 2\varepsilon, \tag{12}$$

$$\varepsilon = \frac{1 - \beta^2}{2 \ln \dfrac{1}{\beta}}. \tag{13}$$

2. FORMULELE ASCENSIUNII GAZULUI PRIN LICHID ÎN CAZUL FENOMENULUI SCHEMATIZAT

Considerăm bula îndeajuns de lungă pentru a putea neglija influenţa extremităţilor bulei. Deocamdată neglijăm influenţa tensiunii superficiale şi a adeziunii lichidului de peretele tubului.

Deosebim domeniul 1 al lichidului în care notațiile capătă indicele 1, și domeniul 2 al gazului, cu indicele 2, pe care îl subdividem la rîndul său în subdomeniul 2_1 al gazului descendent și subdomeniul 2_2 al gazului ascendent, fiecare cu indicii respectivi (fig. 1).

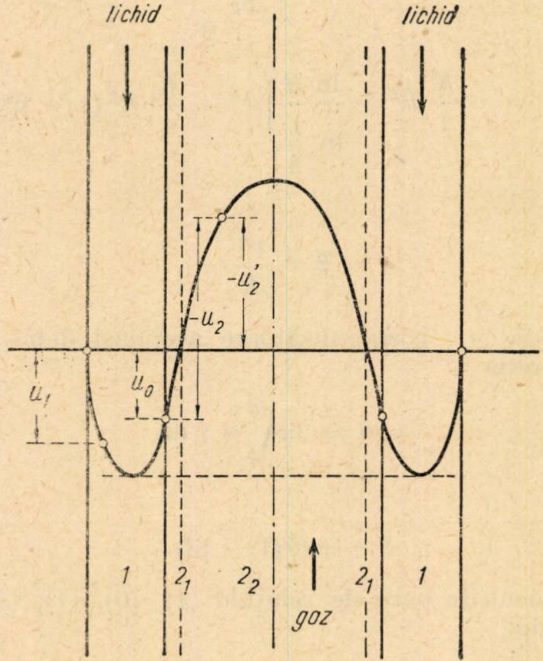


Fig. 1

a) *Domeniul 1*

În acest domeniu, expresiile (4), (6), (7) devin

$$u = \frac{K_1}{4} r^2 + C_{11} \ln r + C_{21}, \tag{14}$$

în care

$$C_{11} = \frac{u^* + (1 - \beta^2) R^2 \dfrac{K_1}{4}}{- \ln \dfrac{1}{\beta}},$$

$$C_{21} = \frac{-K_1}{4} R^2 + \frac{\ln R}{\ln \dfrac{1}{\beta}} \left[u^* + \frac{K_1}{4} R^2 (1 - \beta^2) \right]. \tag{15}$$

Viteza medie u_{m1} în acest domeniu este dată de expresia (11)

$$u_{m1} = \chi u^{*} - \xi R^{2} \frac{K_1}{8}. \tag{16}$$

b) *Domeniul 2*

În acest domeniu expresia (4) devine

$$u = \frac{K_2}{4} r^{2} + C_{12} \ln r + C_{22}. \tag{17}$$

Expresiile C_{12}, C_{22} se obțin din (6), (7) pentru $r^{*} = R$ și $\beta = 0$ astfel:

$$C_{12} = 0, \qquad C_{22} = - R^{2} \beta_0^{2} \frac{K_2}{4}, \tag{18}$$

$$\beta_0 = \frac{r_0}{R}, \tag{19}$$

unde r_0 este depărtarea de ax a liniei de curent de viteză nulă.

Punînd condițiile la limită, pentru $r = r^{*}$ avem $u = u^{*}$ și expresia (17), ținînd seama de (18), devine

$$K_2 = \frac{4\, u^{*}}{R^{2}\beta^{2}(1 - \beta^{*2})}, \tag{20}$$

în care

$$\beta^{*} = \frac{\beta_0}{\beta} = \frac{r_0}{r^{*}}. \tag{21}$$

Făcînd înlocuirile date de (18) și (20), expresia (17) devine

$$u = \frac{\dfrac{r^{2}}{R^{2}} - \beta_0^{2}}{\beta^{2} - \beta_0^{2}} u^{*}. \tag{22}$$

c) *Subdomeniul 2_1*

În acest subdomeniu, expresia (9) devine:

$$u_{m\,21} = \frac{2\pi}{S_{21}} \int_{r_0}^{r^{*}} ur \, \mathrm{d}r, \tag{23}$$

unde u_{m21} este viteza medie în acest subdomeniu iar

$$\frac{S_{21}}{\pi} = R^{2}\beta^{2} (1 - \beta^{*2}). \tag{24}$$

Înlocuind valoarea u din expresia (22), relația (23) devine

$$u_{m\,21} = \frac{2\,u^*}{R^2(\beta^2 - \beta_0^2)^2}\int_{r_0}^{r^*}\left[\frac{r^2}{R^2} - \beta_0^2\right] r\,\mathrm{d}r \tag{25}$$

și integrînd se obține

$$u_{m\,21} = \frac{u^*}{2}\cdot \tag{26}$$

d) *Subdomeniul 2_2*

În acest subdomeniu relația (22) devine

$$u_{m\,22} = -\,r_0^2\,\frac{K_2}{8} \tag{27}$$

și făcînd înlocuirea dată de (22) se obține

$$u_{m\,22} = \frac{-\,\beta^{*2}}{1 - \beta^{*2}}\,\frac{u^*}{2}\cdot \tag{28}$$

e) *Constanța debitului*

Considerînd ca incompresibile atît lichidul cît și gazul, legile de constanță a debitului ne dau

$$S_1\,u_{m\,1} + S_2\,u_{m\,2} = 0, \quad S_2 u_{m\,2} = S_{21}\,u_{m\,21} + S_{22}\,u_{m\,22}. \tag{29}$$

Notăm u_b viteza ascendentă a bulei de gaz, a cărei valoare este prin definiție

$$u_b = -\,u_{m\,2}\,. \tag{30}$$

Avînd în vedere relațiile (8), (10), (19), (21), (24), rapoartele secțiunilor au expresiile

$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{\beta^2}{1 - \beta^2}, \quad \frac{S_{21}}{S_2} = 1 - \beta^{*2}, \quad \frac{S_{22}}{S_2} = \beta^{*\,2} \tag{31}$$

și relațiile (29) devin

$$u_{m\,1} = \frac{\beta^2}{1 - \beta^2}\,u_b\,, \quad u_b = \left[\frac{\beta^{*2}}{1 - \beta^{*2}} - 1\right]\frac{u^*}{2}\cdot \tag{32}$$

Înlocuind în (16) se obține

$$-\,\frac{K_1}{8} = \left[\frac{\beta^2}{1 - \beta^2}\,\frac{\beta^{*2} - \dfrac{1}{2}}{1 - \beta^{*2}} - \chi\right]\frac{u^*}{\xi\,R^2}\cdot \tag{33}$$

f) Condiția energetică

Energia hidraulică totală se definește [2] cu suma tuturor energiilor parțiale

$$E_h = \gamma V \left(h + \frac{p}{\gamma} + \frac{c^2}{2g} + h_r\right)\cdot \tag{34}$$

În ipotezele menționate, considerăm că energia de poziție a lichidului se consumă prin frecările lichidului în spațiul inelar și prin frecarea gazului în bula ascendentă și, prin urmare, din expresia (34) se deduce

$$\gamma_1 V_1 h = l\,[\gamma_1 V_1 \mathcal{J}_1 + \gamma_2 (V_{21} \mathcal{J}_{21} + V_{22} \mathcal{J}_{22})] \tag{35}$$

în care :

V — volumul fluidului corespunzător indicelui respectiv,
h — căderea de presiune măsurată în coloană de lichid,
l — lungimea bulei de gaz.

Pentru $h = l$ și ținînd seama de (3), expresia (35) devine

$$\mathcal{J}_1 + \frac{\rho_2}{\rho_1}\left[\frac{S_{21}}{S_1}\mathcal{J}_{21} + \frac{S_{22}}{S_1}\mathcal{J}_{22}\right] = 1 \tag{36}$$

și făcînd înlocuirile date de (44) se obține

$$\mathcal{J}_1 + \frac{\rho_2}{\rho_1}\,\frac{\beta_2}{1-\beta^2}\,[(1-\beta^{*2})\,\mathcal{J}_{21} + \beta^{*2}\,\mathcal{J}_{22}] = 1. \tag{37}$$

Conform expresiilor (5) și ținînd seama de sens, observăm că

$$\mathcal{J}_{21} = \mathcal{J}_{22} = \frac{\nu_2}{g} K_2 \tag{38}$$

și avînd în vedere (2), relația (37) devine

$$K_1 - K_2 \frac{\mu_2}{\mu_1}\,\frac{\beta^2}{1-\beta^2} + \frac{g}{\nu_1} = 0. \tag{39}$$

Făcînd înlocuirile date de (20), (33) și ținînd seamă de (12), (32) se obține

$$u_b = P\,\mathcal{P} \tag{40}$$

în care

$$P = \frac{g R^2}{4\,\nu_1} \tag{41}$$

o expresie de dimensiunile vitezei, iar

$$\mathcal{P} = \frac{(1-\beta^2)\left(\beta^{*2} - \frac{1}{2}\right)}{\mathfrak{N}}, \quad \mathfrak{N} = 1 + \frac{2\,\varepsilon\,\beta^{*2} - 1}{\xi} + \frac{\mu_2}{\mu_1} \tag{42}$$

expresii adimensionale.

g) *Condiția energiei cinetice*

Considerăm că energia de ascensiune a gazului din domeniul 2_2 este dată de energia cinetică acumulată de lichidul din domeniul 1 și, prin urmare, conform expresiei (34) avem

$$\gamma_2 V_{22} \mathcal{J}_{22} l = \gamma_1 V_1 \frac{c_1^2}{2g}, \tag{43}$$

unde c_1 este o viteză medie corespunzătoare aceleiași energii cinematice.

Să măsurăm pe l cu diametrul țevii, introducînd expresia

$$\alpha = \frac{l}{2R}. \tag{44}$$

Ținînd seama de (3), (31) și făcînd înlocuirile date de (20), (38), (44), relația (43) devine

$$c_1^2 = \frac{16\,\alpha\,\mu_2}{R\,\rho_1} \frac{\beta^{\star 2} u^{\star}}{(1-\beta^2)(1-\beta^{\star 2})}. \tag{45}$$

Facem simplificarea

$$c_1 \approx u_{m1} \tag{46}$$

și ținînd seama de (32) relația (45) devine

$$u_b \approx N\,\alpha \frac{1-\beta^2}{\beta^4} \frac{\beta^{\star 2}}{\beta^{\star 2} - \frac{1}{2}} \tag{47}$$

în care

$$N = 16 \frac{\mu_2}{R\,\rho_1}, \tag{48}$$

N avînd dimensiunile vitezei.

Eliminînd pe u_b din relațiile (40) și (47) se obține — ținînd seama de (41), (42) — expresia adimensională

$$\mathfrak{M} = \frac{P}{N\,\alpha} \approx \frac{\beta^{\star 2}\,\mathfrak{N}}{\beta^4 \left(\beta^{\star 2} - \frac{1}{2}\right)^2}, \tag{49}$$

în care P și N sînt dați de expresiile (41) și (48).

h) *Condiția travaliului minim*

Debitul gazului Q_2 este dat de expresia

$$Q_2 = S_2\,u_b \tag{50}$$

și făcînd înlocuirea dată de (47)

$$Q_2 = 16\,\pi\,R\,\alpha \frac{\mu_2}{\rho_1} \left[\frac{1}{\beta^2} - 1\right] \left[1 + \frac{1}{2\beta^{\star 2} - 1}\right]. \tag{51}$$

Determinarea raportului β se poate face aplicînd principiul travaliului minim, ceea ce corespunde la debitul maxim și prin urmare punem condiția valorii extreme pentru Q_2 astfel

$$\frac{\mathrm{d}Q_2}{\mathrm{d}\beta} = 0 \cdot \tag{52}$$

Avînd în vedere că:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{ab}\,\frac{\mathrm{d}(ab)}{\mathrm{d}\beta} = \frac{1}{a}\,\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}\beta} + \frac{1}{b}\,\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}\beta}, \\ &\frac{c}{a}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\beta}\left(\frac{a}{c}\right) = \frac{1}{a}\,\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}\beta} - \frac{1}{c}\,\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}\beta}, \\ &\frac{1}{a^n}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\beta}\left(a^n\right) = \frac{n}{a}\,\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}\beta}, \end{aligned} \tag{53}$$

observăm că derivînd expresia (51) se elimină factorul $16\,\pi R\,\alpha\,\mu_2/\rho_1$ și se obține

$$\frac{-1}{Q_2}\,\frac{\mathrm{d}Q_2}{\mathrm{d}\beta} = \frac{2}{\beta\,(1-\beta^2)} + \frac{1}{\beta^{*2}\,(2\beta^{*2}-1)}\,\frac{\mathrm{d}\beta^{*2}}{\mathrm{d}\beta} \tag{54}$$

și ținînd seama de condiția (49)

$$\frac{\mathrm{d}\beta^{*2}}{\mathrm{d}\beta} = \frac{-2\beta^{*2}\,(2\beta^{*2}-1)}{\beta\,(1-\beta^2)}\cdot \tag{55}$$

Derivînd expresia (49) se obține

$$\frac{\mathrm{d}\beta^{*2}}{\mathrm{d}\beta} = \frac{2}{\beta}\,\frac{\dfrac{\xi\mathfrak{N}}{\varepsilon} - \chi\beta^{*2} + \dfrac{2\varepsilon\,\beta^{*2}-1}{\xi}\left[\dfrac{\beta^2}{2\varepsilon} - \chi\right]}{1 - \dfrac{\xi\mathfrak{N}}{2\varepsilon}\,\dfrac{2\beta^{*2}+1}{\beta^{*2}\,(2\,\beta^{*2}-1)}}. \tag{56}$$

Eliminînd pe $\mathrm{d}\beta^{*2}/\mathrm{d}\beta$ din (55) și (56) rezultă condiția travaliului minim:

$$\begin{aligned} &\frac{\xi\mathfrak{N}}{2\varepsilon}\,(2\beta^2 + 2\beta^{*2} - 1) - \beta^{*2}\,(2\beta^{*2}-1) + \\ &+ (1-\beta^2)\left[\chi\beta^{*2} + \left(\chi + \frac{\beta^2}{2\varepsilon}\right)\frac{2\varepsilon\beta^{*2}-1}{\xi}\right] = 0. \end{aligned} \tag{57}$$

Din ecuațiile (49) și (57) se determină valorile β și β^{*2} care introduse în (40) — (42) sau în (47) ne dau valoarea u_b.

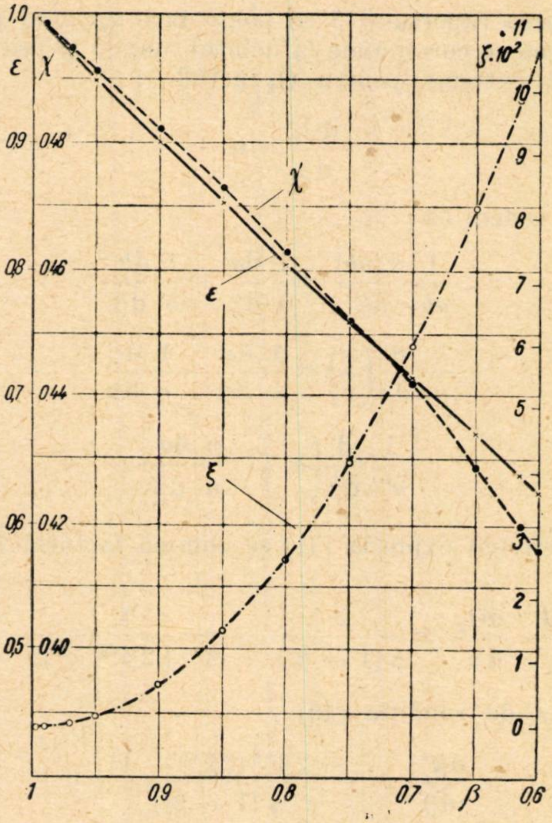


Fig. 2

Tabela 1

β	ε	ξ	χ
0,999	0,99900002	0,00000096	0,49975990
0,997	0,99700150	0,00000599	0,49950037
0,995	0,99500417	0,00001666	0,49916504
0,990	0,9900167	0,0000667	0,4983249
0,980	0,9800667	0,0002667	0,4963300
0,970	0,9701500	0,0006000	0,4949239
0,950	0,9504166	0,0016667	0,4914462
0,900	0,901666	0,006668	0,482426
0,850	0,853747	0,015007	0,472961
0,800	0,856656	0,026689	0,462932
0,750	0,760388	0,041725	0,452314
0,700	0,741937	0,060127	0,441052
0,650	0,670291	0,081918	0,429076
0,615	0,689511	0,099203	0,420226
0,600	0,626437	0,107126	0,416308

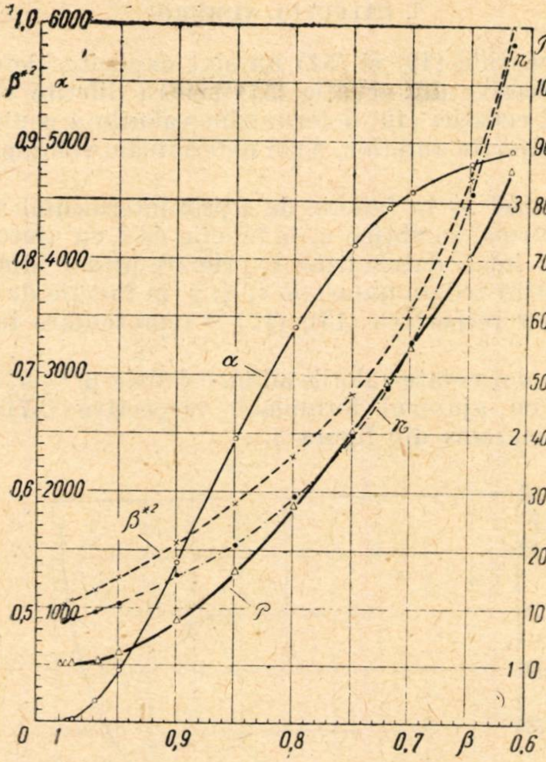


Fig. 3

Tabela 2

β	β^{*2}	$\mathfrak{N}$	α	$\mathcal{P} \cdot 10^3$
0,999	0,50050055	1,12102	0,2325	0,0008926
0,997	0,50150425	1,18154	1,972	0,007627
0,995	0,5025119	1,1892	5,409	0,02107
0,990	0,505048	1,1936	21,19	0,08402
0,970	0,51545	1,2307	175,3	0,7419
0,950	0,5263	1,263	443,0	2,030
0,900	0,5559	1,389	1 388	7,648
0,850	0,5902	1,535	2 450	16,303
0,800	0,6315	1,723	3 403	27,48
0,750	0,6788	1,924	4 048	40,65
0,700	0,7570	2,389	4 583	54,87
0,650	0,8693	3,037	4 820	70,23
0,615	1,000	3,672	4 927	85,50

3. CALCULUL NUMERIC

Deoarece ecuațiile (49) și (57) nu sînt explicite, determinăm pe β^* prin încercări succesive din ecuația (57) pentru diferite valori β arbitrar alese. Cu ajutorul ecuației (49) determinăm valorile α pentru perechile de valori β, β^* determinate anterior. Apoi determinăm valorile $\mathcal{P}$ din formula (42).

Se obține astfel $\mathcal{P}$ în funcție de α prin intermediul valorilor β, β^*.

În cele din urmă, se obține u_b în funcție de l, cu ajutorul formulelor (44), (40), în care intră datele fizice exprimate prin P din expresia (41).

În tabela 1 sînt redate numerele ε, ξ, χ în funcție de β, calculate cu ajutorul formulelor respective (13), (12) și reprezentate în diagrama din figura 2.

În tabela 2 sînt redate valorile adimensionale β^{*2}, $\mathfrak{N}$, α, $\mathcal{P}$ în funcție de β, calculate cu ajutorul formulelor respective (57), (42), (49), și reprezentate în diagrama din figura 3.

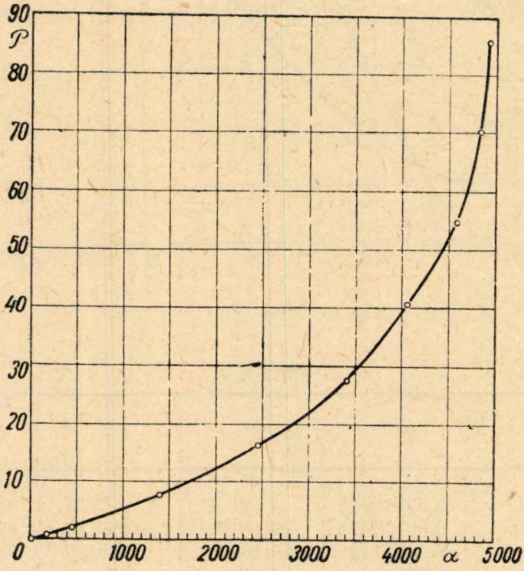


Fig. 4

În diagrama din figura 4 este reprezentată variația lui $\mathcal{P}$ în funcție de α, prin eliminarea variabilei intermediare β.

CONCLUZII

Viteza de ascensiune a bulei de gaz u_b, în cazul fenomenului schematizat prin acceptarea premiselor simplificatoare menționate, este dată de relația (40), unde P este dat de expresia (41) iar $\mathcal{P}$, ale cărui valori sînt trecute în tabela 2, se calculează cu formula (42), în funcție de β definit de expresia (8) şi determinat de ecuaţiile (49) şi (57), α fiind dat de expresia (44).

Prin urmare, după cum se poate vedea şi pe diagramele din figurile 3 şi 4, $\mathcal{P}$ şi respectiv u_b sînt funcţii de lungimea bulei de gaz l, iar grosimea, corespunzătoare $(R - r^*)$ a peliculei de lichid este determinată.

În realitate, viteza de ascensiune u_b^* a bulei de gaz este mai mare, încît expresia (40) devine

$$u_b^* = k\,P\,\mathcal{P}, \tag{58}$$

unde k este un coeficient care urmează să fie determinat experimental.

Primită la redacţie la 29 iunie 1962

ASCENSION DU GAZ DANS UN LIQUIDE DANS DES TUBES VERTICAUX

RÉSUMÉ

Après avoir montré la nécessité de cette étude pour le processus technologique de l'éruption naturelle et artificielle des sondes, l'auteur présente un schéma du phénomène de l'ascension du gaz traversant un liquide dans des tubes verticaux, par l'introduction d'hypothèses simplificatrices.

Il part de l'expression de la vitesse (4) et déduit la formule de la vitesse moyenne (11) d'écoulement du fluide dans des tubes à section annulaire avec une paroi mobile. Il développe la théorie de l'écoulement du fluide dans les deux domaines : liquide et gaz, dans les conditions du schéma mentionné.

En posant une série de conditions — de *e*) à *h*) — , il établit la relation (40) et les suivantes, où l'épaisseur de la pellicule du liquide et la vitesse d'ascension u_b d'une bulle de gaz sont déterminées en fonction de la longueur l de cette dernière.

L'étude est complétée par un calcul numérique avec des fonctions utilisées. Les résultats du calcul numérique sont inscrits dans des tableaux et sont représentés dans des diagrammes.

BIBLIOGRAFIE

1. С. ТАРГ, *Основные задачи теории ламинарных течений.* Москва-Ленинград, 1951, 60.
2. DORIN PAVEL, *Maşini hidraulice.* Edit. energetică de Stat, Bucureşti, 1954, I, 64.

STUDII

INTRODUCERE ÎN STUDIUL INTRINSEC AL CLASEI MIŞCĂRILOR PERMANENTE ALE PLASMEI PERFECTE ÎNTR-UN CÎMP MAGNETIC STAŢIONAR

DE

CLAUDIU IONESCU-BUJOR

538.6

I. INTRODUCEREA ,,SISTEMULUI REDUS DE ECUAŢII"

§ 1. Studiul diferitelor probleme ale dinamicii plasmei perfecte ocupă în ultimii ani un loc de seamă în lucrările teoretice din cadrul magnetodinamicii fluidelor.

O expunere mai amplă a noţiunilor generale din acest domeniu de cercetare relativ recent este prezentată în mai multe lucrări fundamentale, dintre care cităm lucrările lui T. G. Cowling [1], E. L. Resler şi W. R. Sears [2], P. Germain [3], F. A. Baum, S. A. Kaplan şi K. P. Staniukovici [4].

În scopul precizării caracterului dezvoltărilor cuprinse în această lucrare, considerăm util să revenim pe scurt asupra unor noţiuni fundamentale din acest domeniu.

Astfel, un fluid conductor de electricitate, alcătuit din mai multe părţi componente (ioni, electroni, neutroni etc.) şi supus acţiunii unui cîmp electromagnetic, este denumit în literatură ,,plasmă" dacă sînt satisfăcute următoarele condiţii :

(C_1)

1. lungimea lui Debye este foarte mică în raport cu celelalte lungimi caracteristice ale problemei ;
2. legea lui Ohm este luată sub forma sa simplificată :

$$\vec{J} = q\,\vec{v} + \sigma\,(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})\,; \tag{1.1}$$

în această relație $\vec{v}$ este viteza fluidului, q este sarcina electrică, $\vec{E}$ este intensitatea cîmpului electric, $\vec{J}$ este densitatea curentului electric, $\vec{B}$ este densitatea fluxului magnetic și σ este conductivitatea fluidului.

Prima ipoteză din (C_1) permite introducerea unui „fluid mediu", aproximativ neutru din punct de vedere electric, la care se vor referi în continuare toate mărimile și ecuațiile problem eiconsiderate ; prin urmare, studiul matematic al mișcărilor plasmei se bazează pe ecuațiile mecanicii fluidelor, ecuațiile lui Maxwell și legea lui Ohm simplificată exprimate în raport cu mărimile ce caracterizează fluidul mediu și cîmpul electromagnetic.

„Plasma perfectă" se definește adăugînd ipotezelor (C_1) următoarele condiții :

(C_2)
1. sarcina electrică q este neglijabilă în ecuațiile problemei în raport cu celelalte mărimi ce intervin ($q \equiv 0$) ;
2. densitatea fluxului electric $\vec{D}$ este neglijabilă în ecuațiile lui Maxwell, în raport cu celelalte mărimi ce intervin ($\vec{D} \equiv 0$).

În acest caz, în expresia energiei specifice termenii de origine electrică sînt neglijabili în raport cu cei de origine magnetică ; energia specifică provenind din acțiunile electromagnetice va fi notată cu $\mathcal{E}$ și va avea expresia

$$\mathcal{E} = \vec{E} \, . \, \vec{J}. \tag{1.2}$$

Ne propunem să studiem în această lucrare unele probleme privind clasa mișcărilor plasmei perfecte, definită prin următoarele condiții, ce se adaugă ipotezelor (C_1) și (C_2) :

(C_3)
1. singurele forțe de volum, care acționează asupra fluidului mediu, sînt forțele electromagnetice :
$$\vec{F} = \vec{J} \wedge \vec{B} \, ; \tag{1.3}$$
2. fluidul mediu este perfect, adică viscozitatea sa și conductibilitatea sa termică sînt neglijabile în raport cu celelalte mărimi ale problemei ;
3. fluidul mediu este „perfect conductor", adică
$$\sigma = \infty \, ;$$
4. mișcarea fluidului mediu este permanentă ;
5. densitatea fluxului magnetic $\vec{B}$ este staționară.

Vom desemna prin (C) ansamblul celor nouă ipoteze (C_1), (C_2) și (C_3) care definesc clasa de mișcări fluide considerată în această lucrare.

În cadrul definit de ansamblul de ipoteze (C), ecuaţiile mecanicii fluidelor, ecuaţiile lui Maxwell şi legea lui Ohm simplificată conduc la următorul sistem de ecuaţii :

$$
\begin{aligned}
&(1)\ \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0,\\
&(2)\ \vec{v} \wedge \operatorname{rot} \vec{v} = \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p + \operatorname{grad} \frac{V^2}{2} + \frac{1}{\rho} \vec{B} \wedge \vec{J},\\
&(3)\ \vec{v} \cdot \operatorname{grad} S = 0,\\
&(4)\ \operatorname{grad} h = \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p + T \operatorname{grad} S, \qquad\qquad \text{(I)}\\
&(5)\ \operatorname{rot} \vec{E} = 0,\\
&(6)\ \operatorname{div} \vec{B} = 0,\\
&(7)\ \vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B} = 0,\\
&(8)\ \vec{J} = \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \vec{B};
\end{aligned}
$$

se folosesc notaţiile obişnuite : ρ este densitatea, p este presiunea, V este modulul vitezei $\vec{v}$, S este entropia, h este entalpia, T este temperatura absolută, μ este permeabilitatea magnetică (presupusă constantă), aceste mărimi fiind raportate la unitatea de volum a fluidului mediu ; vom mai folosi şi următoarele notaţii :

$$
H = h + \frac{1}{2} V^2, \qquad \vec{\omega} = \operatorname{rot} \vec{v}, \qquad \vec{\Omega} = \operatorname{rot} \vec{B}. \tag{1.4}
$$

Se observă că ecuaţia (I,5) asigură existenţa unei funcţii scalare — pe care o vom nota $\tau(x_1, x_2, x_3)$ — astfel ca

$$
\vec{E} = \operatorname{grad} \tau, \tag{1.5}
$$

ecuaţiile vectoriale (I,5) şi (1.5) fiind echivalente.

Înlocuind în sistemul (I) ecuaţia vectorială (5) prin ecuaţia vectorială (1.5) rezultă că clasa mişcărilor fluide, definită de ansamblul de ipoteze (C), este caracterizată de un sistem de 18 ecuaţii scalare pentru 18 funcţii scalare necunoscute.

Sistemul de ecuaţii (I) poate fi pus sub o formă echivalentă, mai adecvată dezvoltărilor cuprinse în această lucrare. Astfel, ecuaţia vectorială (I,2) — care exprimă conservarea cantităţii de mişcare — şi ecuaţia vectorială (I,4) — care exprimă primele două principii ale termodinamicii — permit să se înlocuiască ecuaţia (I,2) prin

$$
\vec{v} \wedge \vec{\omega} = \operatorname{grad} \widetilde{H} - \widetilde{T} \operatorname{grad} S + \frac{1}{\rho\mu} \vec{B} \wedge \vec{\Omega}, \tag{1.6}
$$

ţinînd seama de ecuaţia (I,8) şi de notaţiile (1.4).

De asemenea, se observă că ecuația vectorială (I,4) este echivalentă cu ansamblul de 3 ecuații scalare,

$$h = h(p, S), \frac{1}{\rho} = \left(\frac{\partial h}{\partial p}\right)_{S=\text{const.}}, \quad T = \left(\frac{\partial h}{\partial S}\right)_{p=\text{const.}}; \tag{1.7}$$

prima ecuație din (1.7), numită și „ecuația canonică de stare", caracterizează fluidul considerat din punct de vedere termodinamic, expresia analitică a funcției $h(p, S)$ fiind cunoscută dacă fluidul este dat.

După cum am observat în lucrarea noastră de Teză [5], cap. V, § 2, „ecuația canonică de stare" este echivalentă cu forma obișnuită a ecuației de stare

$$p = \widetilde{p}(\rho, S), \tag{1.8}$$

dacă și numai dacă entalpia h nu este de forma

$$h = p\, h_1(S) + h_2(S), \tag{1.9}$$

cu h_1 și h_2 funcții arbitrare de entropia S; presupunînd că entropia S și entalpia h nu sînt legate printr-o relație de forma (1.9), ecuațiile (1.7) și (1.8) vor da

$$h = \widetilde{h}(\rho, S), \qquad T = \widetilde{T}(\rho, S). \tag{1.10}$$

Prin urmare, dacă fluidul este dat, atunci ecuațiile (1.8) și (1.10) dau presiunea p, entalpia h și temperatura absolută T, ca funcții de variabilele carteziene ortogonale x_1, x_2, x_3 de îndată ce funcțiile $\rho(x_1, x_2, x_3)$ și $S(x_1, x_2, x_3)$ vor fi determinate.

În concluzie, sistemul de ecuații (I) poate fi pus sub următoarea formă:

$$\begin{aligned}
&(1)\ \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0,\\
&(2)\ \vec{v} \wedge \vec{\omega} = \operatorname{grad} \widetilde{H} - \widetilde{T} \operatorname{grad} S + \frac{1}{\rho\mu} \vec{B} \wedge \vec{\Omega},\\
&(3)\ \vec{v}.\operatorname{grad} S = 0,\\
&(4)\ \operatorname{div} \vec{B} = 0,\\
&(5)\ \vec{B} \wedge \vec{v} = \operatorname{grad} \tau,\\
&(6)\ h = \widetilde{h}(\rho, S),\\
&(7)\ \widetilde{H} = \widetilde{h}(\rho, S) + \frac{V^2}{2},\\
&(8)\ T = \widetilde{T}(\rho, S),\\
&(9)\ p = \widetilde{p}(\rho, S),\\
&(10)\ \vec{E} = \operatorname{grad} \tau,\\
&(11)\ \vec{J} = \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \vec{B},
\end{aligned} \tag{I'}$$

care cuprinde 19 ecuaţii scalare pentru 19 funcţii scalare necunoscute. Se observă însă că ne putem limita, într-o primă etapă, la sistemul de 9 ecuaţii scalare, cu derivate parţiale, dat de primele 5 ecuaţii vectoriale din (I'), după ce în ecuaţia (I',2) funcţiile $\widetilde{H}$ şi $\widetilde{T}$ sînt înlocuite prin expresiile lor date de ecuaţiile (I',7) şi respectiv (I',8); în aceste 9 ecuaţii scalare intervin numai 9 funcţii scalare necunoscute : cele 3 componente ale vitezei $\vec{v}$, cele 3 componente ale densităţii fluxului magnetic $\vec{B}$, densitatea fluidului $\rho(x_1, x_2, x_3)$, entropia sa $S(x_1, x_2, x_3)$ şi funcţia introdusă $\tau(x_1, x_2, x_3)$.

Vom nota cu (I'') sistemul format de aceste 9 ecuaţii scalare; dacă cele 9 funcţii scalare necunoscute enumerate anterior au fost determinate cu ajutorul sistemului (I''), atunci celelalte ecuaţii ale sistemului (I') dau direct pe h, H, T , p, $\vec{E}$, $\vec{J}$ ca funcţii de variabilele carteziene ortogonale x_1, x_2, x_3.

Relativ la sistemele de ecuaţii (I), (I'), (I''), nu vom insista aici nici asupra felului în care li s-ar putea ataşa o problemă la limită corect pusă — care să aibă şi un anumit sens fizic — şi nici asupra faptului dacă aceste sisteme de ecuaţii sînt complete sau nu din acest punct de vedere; în acest sens se pot extinde imediat observaţiile pe care le-am formulat în lucrarea [5], cap. I, § 1, pentru problemele similare din cazul fluidelor perfecte, neconductoare de electricitate.

§ 2. În cele ce urmează, ne propunem să utilizăm, în studiul clasei de mişcări fluide definită de ansamblul de ipoteze (C), metoda matematică exactă pe care am dezvoltat-o în lucrarea [5] pentru cazul mişcărilor tridimensionale, permanente şi rotaţionale ale fluidelor perfecte şi neconductoare de electricitate.

În acest sens, prin ,,studiu intrinsec'' al unei clase de mişcări fluide vom înţelege studiul interdependenţei pe care ansamblul legilor fizice generale şi al ipotezelor introduse o impune mărimilor de natură termodinamică (h, S, T, p, ρ etc) şi ,,parametrilor'' ce determină ,,configuraţia geometrică'' a mişcărilor considerate; rolul acestor ,,parametri'' va fi jucat de funcţiile ce intervin în reprezentarea familiilor liniilor de forţă ale cîmpurilor vectoriale necunoscute, ca intersecţii a cîte două familii de suprafeţe.

Cel mai simplu exemplu de acest fel îl constituie studiul mişcărilor plane sau axial simetrice cu ajutorul funcţiei de curent; în aceste două cazuri, parametrii consideraţi sînt (x_3, ψ) şi respectiv (θ, ψ).

Pe această cale, în studiul clasei mişcărilor fluide, definită de ansamblul de ipoteze (C), vom urmări în primul rînd înlocuirea sistemului de ecuaţii (I') printr-un sistem echivalent, în care componentele vectorilor $\vec{v}$, $\vec{B}$, $\vec{\omega}$ şi $\vec{\Omega}$ să fie înlocuite prin parametrii ce determină liniile de forţă ale acestor vectori, deducînd ecuaţiile care vor lega noul ansamblu de funcţii necunoscute.

În al doilea rînd, menţinînd caracterul general tridimensional şi rotaţional al mişcărilor fluide considerate, vom căuta să stabilim sisteme de ,,condiţii necesare şi suficiente'' care să caracterizeze subclase de mişcări fluide mai generale decît mişcările plane sau axial simetrice ; aceste condiţii trebuie astfel alese încît să conducă la sisteme de ecuaţii complete în raport cu o problemă la limită corect pusă, avînd un sens fizic bine determinat.

Pentru a obţine noul sistem de ecuaţii, este necesar să ne referim numai la cele 9 ecuaţii scalare care formeză sistemul (I″). În acest scop vom folosi următorul rezultat, pe care l-am pus în evidenţă în [5], cap. II, § 1 şi § 2 : dacă un cîmp vectorial $\vec{a}\,(x_1, x_2, x_3)$ şi un cîmp scalar $f_1(x_1, x_2, x_3)$ satisfac condiţiilor

$$\operatorname{div} \vec{a} = 0, \qquad \vec{a}.\operatorname{grad} f_1 = 0, \tag{1.11}$$

atunci există întotdeauna un cîmp scalar $f_2\,(x_1, x_2, x_3)$[1] astfel ca

$$\vec{a} = \operatorname{grad} f_2 \wedge \operatorname{grad} f_1\ ^{1)}; \tag{1.12}$$

în acest fel se generalizează în mod natural procedeul prin care se introduce funcţia de curent în cazul mişcărilor plane sau axial simetrice.

În baza acestei proprietăţi, ecuaţiile (I′, 4) şi (I′, 5) asigură existenţa unei funcţii de clasă C^2 pe care o vom nota $\Psi\,(x_1, x_2, x_3)$ astfel ca

$$\vec{B} = \operatorname{grad} \Psi \wedge \operatorname{grad} \tau. \tag{1.13}$$

În mod analog, ecuaţiile (I′,1), (I′,3) şi (I′,5) conduc la introducerea a două funcţii de clasă C^2, pe care le notăm respectiv cu $\Psi'(x_1, x_2, x_3)$ şi $\Psi''(x_1, x_2, x_3)$, astfel ca

$$\rho \vec{v} = \operatorname{grad} \Psi' \wedge \operatorname{grad} S = \operatorname{grad} \Psi'' \wedge \operatorname{grad} \tau; \tag{1.14}$$

dacă

$$\operatorname{grad} S \wedge \operatorname{grad} \tau \neq 0 \tag{1.15}$$

în domeniul $(\mathfrak{D})$ al mişcării considerate, atunci rezultă imediat următoarea reprezentare a vitezei $\vec{v}$:

$$\vec{v} = \frac{\lambda}{\rho} \operatorname{grad} \tau \wedge \operatorname{grad} S, \tag{1.16}$$

unde λ este o funcţie arbitrară de τ şi S,

$$\lambda = \lambda\,(\tau\,, \mathrm{S}) = \Lambda\,(x_1, x_2, x_3).$$

Dacă condiţia (1.15) nu este satisfăcută, atunci $S = S(\tau)$ şi vom alege pentru viteza $\vec{v}$ reprezentarea

$$\vec{v} = \frac{1}{\rho}\,\frac{\mathrm{d}\,S}{\mathrm{d}\,\tau} \operatorname{grad} \Psi' \wedge \operatorname{grad} \tau. \tag{1.16'}$$

---

[1] Evident, se presupune că toate aceste cîmpuri îndeplinesc condiţiile cunoscute de regularitate, necesare în asemenea cazuri.

Introducînd expresiile (1.13) şi (1.16) în ecuaţia (I′,5), obţinem

$$\vec{B} \wedge \vec{v} = \frac{\Lambda}{\rho} (\vec{B} \,.\, \operatorname{grad} S) \operatorname{grad} \tau = (\vec{v} \,.\, \operatorname{grad} \Psi) \operatorname{grad} \tau = \operatorname{grad} \tau, \tag{1.17}$$

adică

$$\vec{v} \,.\, \operatorname{grad} \Psi = 1, \quad \vec{B} \,.\, \operatorname{grad} S = \frac{\rho}{\Lambda}, \tag{1.18}$$

ambele condiţii exprimînd aceeaşi ecuaţie scalară şi anume

$$\frac{\mathrm{D}(\Psi, \tau, S)}{\mathrm{D}(x_1, x_2, x_3)} = \frac{\rho}{\Lambda}; \tag{1.18′}$$

în cazul cînd viteza $\vec{v}$ are reprezentarea (1.16′), se obţine ecuaţia analogă :

$$\frac{\mathrm{D}(\Psi, \Psi', S)}{\mathrm{D}(x_1, x_2, x_3)} = \rho. \tag{1.18″}$$

Ecuaţiile (1.18′) şi (1.18″) arată că funcţiile $\Psi(x_1, x_2, x_3)$, $S(x_1, x_2, x_3)$ şi $\tau(x_1, x_2, x_3)$ — respectiv $\Psi'(x_1, x_2, x_3)$ — pot forma un sistem de coordonate curbilinii în orice punct al domeniului mişcării fluide considerate ($\rho \neq 0, \Lambda \neq \infty$).

Din sistemul de ecuaţii (I″) a mai rămas de utilizat ecuaţia vectorială (I′, 2) ; înlocuind expresiile (1.13) şi (1.16) în această ecuaţie, obţinem

$$\begin{aligned} &\frac{\Lambda}{\rho} (\vec{\omega} \,.\, \operatorname{grad} \tau) \operatorname{grad} S - \frac{\Lambda}{\rho} (\vec{\omega} \,.\, \operatorname{grad} S) \operatorname{grad} \tau = \\ &= \operatorname{grad} \widetilde{H} - \widetilde{T} \operatorname{grad} S + \frac{1}{\rho\mu} (\vec{\Omega} \,.\, \operatorname{grad} \Psi) \operatorname{grad} \tau - \\ &\quad - \frac{1}{\rho\mu} (\vec{\Omega} \,.\, \operatorname{grad} \tau) \operatorname{grad} \Psi \end{aligned} \tag{1.19}$$

şi exprimînd această ecuaţie numai cu ajutorul funcţiilor introduse, se obţine forma echivalentă

$$\begin{aligned} &\left[\frac{\Lambda}{\rho} \operatorname{grad} \tau \,.\, \operatorname{rot} \left(\frac{\Lambda}{\rho} \operatorname{grad} \tau \wedge \operatorname{grad} S\right) + \widetilde{T}\right] \operatorname{grad} S - \operatorname{grad} \widetilde{H} - \\ &\quad - \left[\frac{\Lambda}{\rho} \operatorname{grad} S . \operatorname{rot} \left(\frac{\Lambda}{\rho} \operatorname{grad} \tau \wedge \operatorname{grad} S\right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\rho\mu} \operatorname{grad} \Psi \,.\, \operatorname{rot} (\operatorname{grad} \Psi \wedge \operatorname{grad} \tau)\right] \operatorname{grad} \tau + \\ &\quad + \left[\frac{1}{\rho\mu} \operatorname{grad} \tau \,.\, \operatorname{rot} (\operatorname{grad} \Psi \wedge \operatorname{grad} \tau)\right] \operatorname{grad} \Psi = 0. \end{aligned} \tag{1.20}$$

Ţinînd seama de ecuaţia (1.18′), se deduce imediat că ecuaţia vectorială (1.19) este echivalentă cu următorul sistem de trei ecuaţii scalare :

$$\begin{aligned}
&(\mathrm{a})\quad \vec{\Omega}\,.\,\mathrm{grad}\,\tau = \mu\,\rho\,\vec{v}\,.\,\mathrm{grad}\,\widetilde{H},\\
&(\mathrm{b})\quad \vec{\omega}\,.\,\mathrm{grad}\,\tau + \frac{\rho}{\Lambda}\,\widetilde{T} = \vec{B}\,.\,\mathrm{grad}\,\widetilde{H}, \qquad (1.21)\\
&(\mathrm{c})\quad \vec{\omega}\,.\,\mathrm{grad}\,S + \frac{1}{\Lambda\mu}\,\vec{\Omega}\,.\,\mathrm{grad}\,\Psi = (\mathrm{grad}\,\Psi \wedge \mathrm{grad}\,S)\,.\,\mathrm{grad}\,\widetilde{H}
\end{aligned}$$

sau, exprimînd aceste ecuaţii numai cu ajutorul funcţiilor introduse, obţinem forma echivalentă

$$\begin{aligned}
&(\mathrm{a})\quad \mathrm{grad}\,\tau\,.\,\mathrm{rot}\,(\mathrm{grad}\,\Psi \wedge \mathrm{grad}\,\tau) = \mu\,\Lambda\,\frac{\mathrm{D}\,(\tau,\ S,\ \widetilde{H})}{\mathrm{D}\,(x_1,\ x_2,\ x_3)},\\
&(\mathrm{b})\quad \mathrm{grad}\,\tau\,.\,\mathrm{rot}\left(\frac{\Lambda}{\rho}\,\mathrm{grad}\,\tau \wedge \mathrm{grad}\,S\right) + \frac{\rho}{\Lambda}\,\widetilde{T} = \frac{\mathrm{D}\,(\Psi,\ \tau,\ \widetilde{H})}{\mathrm{D}\,(x_1,\ x_2,\ x_3)}, \qquad (1.22)\\
&(\mathrm{c})\quad \mathrm{grad}\,S\,.\,\mathrm{rot}\left(\frac{\Lambda}{\rho}\,\mathrm{grad}\,\tau \wedge \mathrm{grad}\,S\right) +\\
&\qquad + \frac{1}{\mu\Lambda}\,\mathrm{grad}\,\Psi\,.\,\mathrm{rot}\,(\mathrm{grad}\,\Psi \wedge \mathrm{grad}\,\tau) = \frac{\mathrm{D}\,(\Psi,\ S,\ \widetilde{H})}{\mathrm{D}\,(x_1,\ x_2,\ x_3)}\,.
\end{aligned}$$

Observînd că în cazul considerat legea conservării energiei totale conduce la ecuaţia

$$\mathcal{E} \equiv \vec{E}.\,\vec{J} \equiv \frac{1}{\mu}\,\vec{\Omega}\,.\,\mathrm{grad}\,\tau = \rho\,\vec{v}.\,\mathrm{grad}\,\widetilde{H},$$

rezultă că ecuaţia (1.21, a) exprimă conservarea energiei totale ; prin urmare, la fel ca şi în cazul similar din dinamica fluidelor perfecte şi neconductoare de electricitate, conservarea energiei totale este şi în acest caz o consecinţă a conservării cantităţii de mişcare şi a conservării entropiei.

În mod analog se obţine şi sistemul de ecuaţii ce corespunde reprezentării (1.16′) a vitezei $\vec{v}$.

§ 3. Am redus în acest fel studiul sistemului de ecuaţii (I″) la studiul următorului sistem :

$$
\begin{aligned}
&\text{(a)}\ \operatorname{grad}\tau \,.\, \operatorname{rot}(\operatorname{grad}\Psi \wedge \operatorname{grad}\tau) = \mu\,\Lambda\,\frac{D(\tau,\ S,\ \tilde{H})}{D(x_1,\ x_2,\ x_3)},\\
&\text{(b)}\ \operatorname{grad}\tau \,.\, \operatorname{rot}\left(\frac{\Lambda}{\rho}\operatorname{grad}\tau \wedge \operatorname{grad} S\right) + \frac{\rho}{\Lambda}\,\tilde{T} = \frac{D(\Psi,\ \tau,\ \tilde{H})}{D(x_1,\ x_2,\ x_3)},\\
&\text{(c)}\ \operatorname{grad} S \,.\, \operatorname{rot}\left(\frac{\Lambda}{\rho}\operatorname{grad}\tau \wedge \operatorname{grad} S\right) +\\
&\qquad + \frac{1}{\mu\Lambda}\operatorname{grad}\Psi \,.\, \operatorname{rot}(\operatorname{grad}\Psi \wedge \operatorname{grad}\tau) = \frac{D(\Psi,\ S,\ \tilde{H})}{D(x_1,\ x_2,\ x_3)}, \qquad \text{(II)}\\
&\text{(d)}\ \frac{D(\Psi,\ \tau,\ S)}{D(x_1,\ x_2,\ x_3)} = \frac{\rho}{\Lambda},\\
&\text{(e)}\ \tilde{H} = \tilde{h} + \frac{\Lambda^2\,|\operatorname{grad}\tau \wedge \operatorname{grad} S|^2}{2\,\rho^2},
\end{aligned}
$$

care conţine cinci ecuaţii scalare, independente, pentru şase funcţii scalare necunoscute : ρ, S, $\tilde{H}$, τ, Ψ, Λ.

Prin analogie cu cazul similar al mişcărilor permanente şi rotaţionale ale fluidelor perfecte şi neconductoare de electricitate (a se vedea [5], cap. III şi cap. V), vom denumi sistemul (II) ,,sistemul redus de ecuaţii ataşat clasei de mişcări fluide definită prin ansamblul de ipoteze (C)''.

Dacă cele şase funcţii scalare necunoscute pot fi determinate cu ajutorul sistemului redus de ecuaţii (II) , atunci viteza $\vec{v}$ şi densitatea fluxului magnetic $\vec{B}$ vor fi date direct, respectiv de relaţiile (1.16) şi (1.13), obţinîndu-se astfel cele nouă funcţii scalare necunoscute ce intervin în sistemul iniţial (I″) ; celelalte zece funcţii scalare necunoscute, care intervin în sistemul complet (I′), vor fi de asemenea obţinute direct, aşa cum am mai precizat anterior.

Prin urmare, obţinerea unei clase de soluţii, sau a unei soluţii bine determinate, a sistemului de ecuaţii (I′) este echivalentă cu obţinerea unei clase de soluţii, respectiv a unei soluţii bine determinate, a sistemului redus de ecuaţii (II) ataşat clasei de mişcări fluide considerată.

În consecinţă, sistemul redus de ecuaţii (II) reprezintă ansamblul de ,,condiţii necesare'' impuse, de către legile fizice considerate şi de ansamblul de ipoteze (C), celor şase funcţii scalare necunoscute.

Se observă că, în paragraful anterior, am trecut de la un sistem în care numărul funcţiilor necunoscute este egal cu numărul ecuaţiilor sale, la un alt sistem în care numărul funcţiilor necunoscute este cu o unitate mai mare decît numărul ecuaţiilor pe care le conţine. Acest fapt se explică prin caracterul rotaţional al mişcării şi el se întîlneşte şi în cazul clasic al fluidelor perfecte și neconductoare de electricitate, atît în mișcările plane sau axial simetrice, cît și în cele tridimensionale (a se vedea [5], cap. IV, cap. V). Această nedeterminare este pusă în evidență, în toate aceste cazuri, atunci cînd se înlocuiesc componentele cîmpurilor vectoriale necunoscute prin parametrii ce determină configurația geometrică respectivă, introduși așa cum am arătat anterior.

Trecerea la noul sistem de ecuații — echivalent cu sistemul clasic (I′) — prezintă avantajul de a reduce numărul ecuațiilor cu derivate parțiale și numărul funcțiilor scalare necunoscute; de asemenea, forma analitică a ecuațiilor cu derivate parțiale obținute aici este mult mai simetrică și mai adecvată unui studiu matematic exact decît forma analitică a ecuațiilor corespunzătoare din sistemul (I″).

Sistemul complet obținut — care conține 20 ecuații scalare pentru 21 funcții scalare necunoscute — va fi abordat în mai multe etape succesive, dintre care cea esențială este prima — studiul sistemului redus de ecuații (II).

Se vede ușor, din însăși natura ipotezelor (C), că sistemul redus de ecuații (II) nu poate conduce la determinarea unei singure mișcări fluide. De aceea, va fi necesar să adăugăm noi condiții, avînd o semnificație fizică precisă și posibilă, pentru a obține în acest fel un ansamblu de condiții necesare și suficiente care să caracterizeze o anumită mișcare fluidă (sau o subclasă de mișcări fluide) aparținînd clasei de mișcări considerată în această lucrare. Rezultatele obținute anterior pot fi formulate astfel:

TEOREMA 1. *Clasa mișcărilor plasmei perfecte, definită prin ansamblul de ipoteze* (C), *este caracterizată prin următoarele proprietăți*:

1. *Există o funcție* $\tau(x_1, x_2, x_3)$, *definită și de clasă* C^2 *în raport cu variabilele carteziene ortogonale* x_1, x_2, x_3, *în domeniul* $(\mathfrak{D})$ *al mișcării fluide considerate, astfel ca, în orice punct din* $(\mathfrak{D})$, *viteza* $\vec{v}$ *să aibă reprezentarea* (1.16) *sau* (1.16′), λ *fiind o funcție de* τ *și de* S.

2. *Există o funcție* $\Psi(x_1, x_2, x_3)$, *definită și de clasă* C^2 *în raport cu variabilele carteziene ortogonale* x_1, x_2, x_3, *în domeniul* $(\mathfrak{D})$ *al mișcării fluide considerate, astfel ca, în orice punct din* $(\mathfrak{D})$, *densitatea fluxului magnetic* $\vec{B}$ *să aibă reprezentarea* (1.13).

3. *Funcțiile introduse*: $\tau(x_1\, x_2, x_3)$, $\Psi(x_1, x_2, x_3)$ *și* $\lambda(\tau, S)$, *împreună cu masa specifică* $\rho(x_1, x_2, x_3)$, *entropia specifică* $S(x_1, x_2, x_3)$, *energia mecanică specifică* $H(x_1, x_2, x_3)$, *trebuie să satisfacă sistemul redus de ecuații* (II) *atașat acestei clase de mișcări*, $\tilde{h}$ *și* $\tilde{T}$ *fiind funcții cunoscute de* ρ *și* S, *date de relațiile* (1.10) *îndată ce se precizează fluidul considerat.*

4. *La fiecare „soluție" bine determinată a sistemului redus de ecuații* (II) *corespund valori bine determinate ale vitezei* $\vec{v}$, *densității fluxului magnetic* $\vec{B}$, *entalpiei* h, *temperaturii absolute* T, *presiunii* p, *intensității cîmpului electric* $\vec{E}$ *și densității curentului electric* $\vec{J}$, *date direct respectiv prin relațiile* (1.16), (1.13), (I′,6), (I′,8), (I′,9), (I′,10) *și* (I′,11).

§ 4. Să considerăm o anumită mişcare fluidă aparţinînd clasei de mişcări definită la începutul acestei lucrări ; acestei mişcări îi va corespunde o ,,soluţie'' a sistemului redus de ecuaţii (II), determinată cu ajutorul condiţiilor fizice suplimentare ce caracterizează mişcarea considerată. O asemenea soluţie va conţine pe τ, ρ, S şi H ca funcţii bine determinate de variabilele carteziene ortogonale x_1, x_2, x_3, ţinînd seama de semnificaţia fizică a acestor funcţii ; celelalte două funcţii $\Psi(x_1, x_2, x_3)$ şi $\lambda(\tau, S) = \Lambda(x_1, x_2, x_3)$ aparţinînd acestei soluţii nu pot fi însă determinate în mod unic, nici prin semnificaţia lor fizică, nici prin ecuaţiile sistemului redus (II), datorită felului în care ele intervin în aceste ecuaţii şi în expresiile mărimilor vectoriale ale problemei ($\vec{v}$, $\vec{B}$ etc). De asemenea, datorită acestor legături între ,,parametrii geometrici'' Ψ, Λ şi mărimile fizice τ, ρ, S şi H, nu este posibilă introducerea arbitrară a unor ipoteze simplificatoare privind funcţiile Ψ sau Λ.

De aceea, este necesar să studiem modul în care legile fizice considerate şi ansamblul de ipoteze (C) leagă cele 6 funcţii necunoscute ale sistemului redus de ecuaţii (II) de un sistem oarecare de parametri care determină ,,geometria mişcării'', adică familiile liniilor de forţă ale cîmpurilor vectoriale necunoscute.

În acest sens, observăm mai întîi că ecuaţia vectorială (I',5) asigură existenţa unei familii de suprafeţe rigide, ale cărei suprafeţe conţin atît liniile de curent ale mişcării fluide, cît şi liniile de forţă ale densităţii fluxului magnetic $\vec{B}$; dacă

$$\tau_1(x_1, x_2, x_3) = \text{const.} \tag{1.23}$$

este ecuaţia acestei familii de suprafeţe, atunci rezultă

$$\tau \equiv \tau(x_1, x_2, x_3) = \tilde{\tau}(\tau_1). \tag{1.24}$$

Să considerăm ecuaţia familiei liniilor de curent ale mişcării fluide sub forma

$$\begin{aligned} \tau_1(x_1, x_2, x_3) &= \text{const.}, \\ \alpha(x_1, x_2, x_3) &= \text{const.} \end{aligned} \tag{1.25}$$

şi, în mod analog, ecuaţia familiei liniilor de forţă ale cîmpului vectorial $\vec{B}$

$$\begin{aligned} \tau_1(x_1, x_2, x_3) &= \text{const.}, \\ \beta(x_1, x_2, x_3) &= \text{const.}, \end{aligned} \tag{1.26}$$

α şi β fiind unii din parametrii geometrici ce pot fi asociaţi funcţiei τ_1 pentru a determina cele două familii de curbe.

Vom presupune în continuare, pentru a fixa ideile, că entropia specifică S nu este constantă în lungul suprafeţelor familiei (1.23), ceea ce ne permite să considerăm reprezentarea (1.16) pentru viteza $\vec{v}$; cazul în care $S = S(\tau_1)$ poate fi studiat în mod analog. Introducînd ipoteza formulată anterior, rezultă

$$S = \widetilde{S}(\alpha, \tau_1), \ \Psi = \widetilde{\Psi}(\beta, \tau_1). \tag{1.27}$$

Pentru simplificarea scrierii vom folosi în continuare următoarele notații :

$$\text{(a)}\quad \vec{w}_1 = \operatorname{grad} \tau_1 \wedge \operatorname{grad} \alpha\,, \quad \vec{w}_2 = \operatorname{grad} \beta \wedge \operatorname{grad} \tau_1,$$

$$\text{(b)}\quad \vec{\omega}_1 = \operatorname{rot} \vec{w}_1,\ \vec{\omega}_2 = \operatorname{rot} \vec{w}_2, \qquad W_1 = |\vec{w}_1|, \qquad W_2 = |\vec{w}_2|,$$

$$\text{(c)}\quad \tau' = \frac{d\tilde{\tau}}{d\tau_1}, \quad \xi \equiv \tilde{\xi}(\alpha, \tau_1) = \lambda\tau' \frac{\partial \tilde{S}}{\partial \alpha},\ \eta \equiv \tilde{\eta}(\beta, \tau_1) = \tau' \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial \beta}, \tag{1.28}$$

$$\text{(d)}\quad I_0 \equiv \tilde{I}_0(\alpha, \beta, \tau_1) = \frac{\mathrm{D}(\alpha, \beta, \tau_1)}{\mathrm{D}(x_1, x_2, x_3)}.$$

Deoarece am presupus că, în cazul considerat, cîmpurile vectoriale $\vec{v}$ și $\vec{B}$ nu sînt coliniare în nici un punct al domeniului mișcării ($\mathfrak{D}$), rezultă că $I_0 \neq 0$ în ($\mathfrak{D}$) și ecuația (II, d) va da

$$\frac{\mathrm{D}(\Psi, \tau, S)}{\mathrm{D}(x_1, x_2, x_3)} = I_0 \frac{\mathrm{D}(\tilde{\Psi}, \tilde{\tau}, \tilde{S})}{\mathrm{D}(\alpha, \beta, \tau_1)} = \frac{\rho}{\lambda}, \tag{1.29}$$

adică

$$\tilde{I}_0 \tau' \frac{\partial \tilde{S}}{\partial \alpha} \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial \beta} = \frac{\rho}{\lambda}, \tag{1.29'}$$

sau

$$\rho = \tilde{\rho}(\alpha, \beta, \tau_1) = \frac{1}{\tau'} \tilde{I}_0\, \tilde{\xi}\, \tilde{\eta}, \tag{1.29''}$$

ecuație care este echivalentă cu ecuația (II, d).

Relațiile de mai sus permit să se exprime funcțiile vectoriale $\vec{v}$, $\vec{B}$, $\vec{\omega}$ și $\vec{\Omega}$ sub forma următoare :

$$\text{(a)}\quad \vec{v} = \frac{\tilde{\xi}}{\tilde{\rho}} \vec{w}_1,\ \vec{B} = \tilde{\eta}\, \vec{w}_2,$$

$$\begin{aligned}\text{(b)}\quad \vec{\omega} = {} & \frac{\tilde{\xi}}{\tilde{\rho}} \vec{\omega}_1 + \frac{1}{\tilde{\rho}} \left[\frac{\partial \tilde{\xi}}{\partial \alpha} |\operatorname{grad} \alpha|^2 + \right. \\ & \left. + \frac{\partial \tilde{\xi}}{\partial \tau_1} (\operatorname{grad} \alpha \,.\, \operatorname{grad} \tau_1) - \frac{\tilde{\xi}}{\tilde{\rho}} (\operatorname{grad} \rho \,.\, \operatorname{grad} \alpha) \right] \operatorname{grad} \tau_1 - \\ & - \frac{1}{\tilde{\rho}} \left[\frac{\partial \tilde{\xi}}{\partial \alpha} (\operatorname{grad} \alpha \,.\, \operatorname{grad} \tau_1) + \frac{\partial \tilde{\xi}}{\partial \tau_1} |\operatorname{grad} \tau_1|^2 - \right. \\ & \left. - \frac{\tilde{\xi}}{\tilde{\rho}} (\operatorname{grad} \rho \,.\, \operatorname{grad} \tau_1) \right] \operatorname{grad} \alpha,\end{aligned} \tag{1.30}$$

$$\begin{aligned}\text{(c)}\quad \vec{\Omega} = {} & \tilde{\eta}\, \vec{\omega}_2 + \left[\frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial \beta} (\operatorname{grad} \beta \cdot \operatorname{grad} \tau_1) + \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial \tau_1} |\operatorname{grad} \tau_1|^2 \right] \operatorname{grad} \beta - \\ & - \left[\frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial \beta} |\operatorname{grad} \beta|^2 + \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial \tau_1} (\operatorname{grad} \beta \,.\, \operatorname{grad} \tau_1) \right] \operatorname{grad} \tau_1 .\end{aligned}$$

De asemenea, ținînd seama că ecuația (II, e) ia forma

$$H \equiv \widetilde{\widetilde{\widetilde{H}}}(\alpha, \beta, \tau_1) = \widetilde{\widetilde{\widetilde{h}}}(\widetilde{\rho}, \widetilde{S}) + \frac{\widetilde{\xi}^2 \widetilde{W}_1^2}{2\, \widetilde{\rho}^2}, \tag{1.31}$$

unde

$$\widetilde{W}_1 \equiv \widetilde{W}_1(\alpha, \beta, \tau_1) \equiv W_1(x_1, x_2, x_3),$$

deducem din ecuațiile (1.29″) și (1.31) următoarele relații :

$$\begin{aligned} \operatorname{grad} \rho = {} & \frac{\widetilde{\eta}}{\tau'}\left[\widetilde{I}_0 \frac{\partial \widetilde{\xi}}{\partial \alpha} + \widetilde{\xi} \frac{\partial \widetilde{I}_0}{\partial \alpha}\right] \operatorname{grad} \alpha + \frac{\widetilde{\xi}}{\tau'}\left[\widetilde{I}_0 \frac{\partial \widetilde{\eta}}{\partial \beta} + \right. \\ & \left. + \widetilde{\eta} \frac{\partial \widetilde{I}_0}{\partial \beta}\right] \operatorname{grad} \beta + \frac{1}{\tau'}\left[\frac{\partial}{\partial \tau_1}(\widetilde{I}_0 \widetilde{\xi} \widetilde{\eta}) - \frac{1}{\tau'^2} \widetilde{I}_0 \widetilde{\xi} \widetilde{\eta} \frac{\mathrm{d}\tau'}{\mathrm{d}\tau_1}\right] \operatorname{grad} \tau_1, \end{aligned} \tag{1.32}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{grad} H = {} & (a^2 - V^2) \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} \rho + \frac{\xi^2}{\rho^2} \operatorname{grad} \frac{W_1^2}{2} + \\ & + \left[\left(T + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial S}\right) \frac{\partial \widetilde{S}}{\partial \alpha} + \frac{V^2}{\xi} \frac{\partial \widetilde{\xi}}{\partial \alpha}\right] \operatorname{grad} \alpha + \left[\left(T + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial S}\right) \frac{\partial \widetilde{S}}{\partial \tau_1} + \right. \\ & \left. + \frac{V^2}{\xi} \frac{\partial \widetilde{\xi}}{\partial \tau_1}\right] \operatorname{grad} \tau_1 ; \end{aligned} \tag{1.33}$$

am notat prin

$$a^2 \equiv \widetilde{a}^2(\alpha, \beta, \tau_1) = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_{S = \mathrm{const.}} \tag{1.34}$$

viteza locală a sunetului în fluidul considerat.

Relațiile vectoriale (1.32) și (1.33) vor permite în continuare să se exprime derivatele parțiale ale funcțiilor $\rho = \widetilde{\rho}(\alpha, \beta, \tau_1)$ și $H = \widetilde{\widetilde{\widetilde{H}}}(\alpha, \beta, \tau_1)$ cu ajutorul derivatelor parțiale ale celorlalte funcții ce intervin în aceste relații; în acest fel se pot elimina funcțiile $\widetilde{\rho}$, $\widetilde{\widetilde{\widetilde{H}}}$ și derivatele lor parțiale din ecuațiile problemei. Ținînd seama de relațiile și observațiile anterioare, se obține imediat exprimarea primelor trei ecuații ale sistemului redus (II) în raport cu variabilele introduse α, β, τ_1; astfel, ecuația (II, a) ia forma

$$\widetilde{N}_2 - \frac{1}{\widetilde{\eta}} \frac{\partial \widetilde{\eta}}{\partial \beta} \widetilde{W}_2^2 = \frac{1}{\widetilde{\eta}} \mu \lambda \widetilde{I}_0 \frac{\partial \widetilde{S}}{\partial \alpha} \frac{\partial \widetilde{H}}{\partial \beta}, \tag{1.35$_1$}$$

ecuația (II, b) se scrie

$$\begin{aligned} \widetilde{L}_2 + \frac{1}{\widetilde{\xi}} \frac{\partial \widetilde{\xi}}{\partial \alpha} \widetilde{W}_1^2 + \frac{1}{\widetilde{W}_1^2} \widetilde{\mathscr{M}}^2 \widetilde{b}_1 = {} & \frac{1}{\tau'^2} \widetilde{I}_0^2 \widetilde{\eta}^2 \left[\frac{\partial \widetilde{H}}{\partial \alpha} - \widetilde{T} \frac{\partial \widetilde{S}}{\partial \alpha}\right] - \\ & - \frac{1}{\widetilde{u}^2} \widetilde{b}_{12} \frac{\partial \widetilde{H}}{\partial \beta} - \frac{1}{\lambda \tau'^2} \widetilde{\mathscr{M}}^2 \widetilde{I}_0 \widetilde{\eta} \frac{\partial p}{\partial S}, \end{aligned} \tag{1.35$_2$}$$

iar ecuația (II, c)

$$\widetilde{L}_1 + \frac{1}{\mu\,\tau'\,\widetilde{\xi}}\,\widetilde{I}_0\,\widetilde{\eta}^3\,(1-\widetilde{\mathscr{M}}^2)\,\widetilde{N}_1 - \frac{1}{\widetilde{\xi}}\,\frac{\partial\widetilde{\xi}}{\partial\tau_1}\,\widetilde{W}_1^2 +$$

$$+\frac{1}{\widetilde{W}_1^2}\,\widetilde{\mathscr{M}}^2\,\widetilde{b}_2 + \frac{1}{\mu\,\tau'\,\widetilde{\xi}}\,\widetilde{I}_0\,\widetilde{\eta}^2\,\frac{\partial\widetilde{\eta}}{\partial\tau_1}\,(1-\widetilde{\mathscr{M}}^2)\,\widetilde{W}_2^2 = \tag{1.35$_3$}$$

$$= -\frac{1}{\tau'^2}\,\widetilde{I}_0^2\,\widetilde{\eta}^2\left[\frac{\partial\widetilde{H}}{\partial\tau_1} - \widetilde{T}\,\frac{\partial\widetilde{S}}{\partial\tau_1}\right] + \frac{1}{\widetilde{a}^2}\left[\frac{\widetilde{W}_1^2}{\widetilde{\rho}}\,\frac{\partial p}{\partial S}\,\frac{\partial\widetilde{S}}{\partial\tau_1} + \widetilde{b}_3\right].$$

Pentru simplificarea scrierii acestor ecuații am introdus în plus următoarele notații :

$$\begin{aligned}
&(a)\ L_1 \equiv \widetilde{L}_1(\alpha,\beta,\tau_1) \equiv \mathrm{rot}\,(\mathrm{grad}\ \tau_1 \wedge \mathrm{grad}\ \alpha)\,.\,\mathrm{grad}\ \alpha,\\
&(b)\ L_2 \equiv \widetilde{L}_2(\alpha,\beta,\tau_1) \equiv \mathrm{rot}\,(\mathrm{grad}\ \tau_1 \wedge \mathrm{grad}\ \alpha)\,.\,\mathrm{grad}\ \tau_1,\\
&(c)\ N_1 \equiv \widetilde{N}_1(\alpha,\beta,\tau_1) \equiv \mathrm{rot}\,(\mathrm{grad}\ \beta \wedge \mathrm{grad}\ \tau_1)\,.\,\mathrm{grad}\ \beta,\\
&(d)\ N_2 \equiv \widetilde{N}_2(\alpha,\beta,\tau_1) \equiv \mathrm{rot}\,(\mathrm{grad}\ \beta \wedge \mathrm{grad}\ \tau_1)\,.\,\mathrm{grad}\ \tau_1,
\end{aligned} \tag{1.36$_1$}$$

$$\begin{aligned}
&(a)\ \vec{m}_1 \equiv (\vec{w}_1\cdot\nabla)\,\vec{w}_1 \equiv \mathrm{grad}\,\frac{W_1^2}{2} + \vec{\omega}_1 \wedge \vec{w}_1,\\
&(b)\ b_1 \equiv \widetilde{b}_1(\alpha,\beta,\tau_1) \equiv (\mathrm{grad}\ \tau_1 \wedge \vec{m}_1)\,.\,\vec{w}_1,\\
&(c)\ b_2 \equiv \widetilde{b}_2(\alpha,\beta,\tau_1) \equiv (\mathrm{grad}\ \alpha \wedge \vec{m}_1)\,.\,\vec{w}_1,\\
&(d)\ b_3 \equiv \widetilde{b}_3(\alpha,\beta,\tau_1) \equiv (\mathrm{grad}\ \alpha \wedge \mathrm{grad}\ \beta).\,\vec{w}_1,\\
&(e)\ b_{12} \equiv \widetilde{b}_{12}(\alpha,\beta,\tau_1) \equiv \vec{w}_1\,.\,\vec{w}_2,
\end{aligned} \tag{1.36$_2$}$$

$$\mathscr{M} \equiv \widetilde{\mathscr{M}}(\alpha,\beta,\tau_1) \equiv \frac{\widetilde{V}}{\widetilde{a}} \equiv \frac{\widetilde{\xi}\,\widetilde{W}_1}{\widetilde{\rho}\,\widetilde{a}} \equiv \frac{\tau'\,\widetilde{W}_1}{\widetilde{I}_0\,\widetilde{\eta}\,\widetilde{a}}. \tag{1.36$_3$}$$

Cu ajutorul relațiilor (1.32) și (1.33) se pot elimina funcțiile $\rho = \widetilde{\rho}(\alpha, \beta, \tau_1)$ și $H = \widetilde{\widetilde{H}}(\alpha, \beta, \tau_1)$ din ecuațiile (1.35$_1$), (1.35$_2$) și (1.35$_3$).

Să presupunem că se cunosc expresiile analitice ale funcțiilor $\alpha = \alpha(x_1, x_2, x_3)$, $\beta = \beta(x_1, x_2, x_3)$, $\tau_1 = \tau_1(x_1, x_2, x_3)$ care determină familiile liniilor de forță ale cîmpurilor vectoriale $\vec{v}$ și $\vec{B}$. În acest caz, expresiile analitice ale funcțiilor definite prin relațiile (1.36$_1$), (1.36$_2$), precum și ale funcțiilor $\widetilde{W}_1$, $\widetilde{W}_2$, $\widetilde{I}_0$ și $\frac{\partial p}{\partial S}$, vor fi de asemenea cunoscute. Sistemul format de cele trei ecuații (1.35$_1$), (1.35$_2$) și (1.35$_3$) rămîne deci să fie utilizat pentru determinarea funcțiilor $\tau = \widetilde{\tau}(\tau_1)$, $\xi = \widetilde{\xi}(\alpha, \tau_1)$, $S = \widetilde{S}(\alpha, \tau_1)$,

$\eta = \widetilde{\eta}\,(\beta, \tau_1)$; reciproc, dacă se cunosc aceste funcţii, atunci sistemul de ecuaţii arătat va fi folosit pentru determinarea funcţiilor

$$\alpha = \alpha\,(x_1, x_2, x_3),\ \beta = \beta\,(x_1, x_2, x_3) \text{ şi } \tau_1 = \tau_1,\,(x_1, x_2, x_3).$$

Prin urmare, sistemul considerat exprimă dependenţa dintre parametrii geometrici $\alpha\,(x_1, x_2, x_3)$, $\beta\,(x_1, x_2, x_3)$, $\tau_1\,(x_1, x_2, x_3)$ şi variaţia celorlalte mărimi fizice ale problemei considerate, în raport cu aceşti parametri.

Sistemul format din ecuaţiile (1.35_1), (1.35_2) şi (1.35_3), din care au fost eliminate funcţiile $\widetilde{\rho}\,(\alpha, \beta, \tau_1)$ şi $\overset{\approx}{H}\,(\alpha, \beta, \tau_1)$ prin procedeul arătat mai sus, va fi numit în continuare ,,sistemul principal'' de ecuaţii cu derivate parţiale ataşat clasei de mişcări fluide definită prin grupul de ipoteze (C).

Rezultatele obţinute anterior pot fi rezumate în felul următor :

TEOREMA 2. *Studiul matematic exact al unei probleme privind mişcările fluide ce aparţin clasei definite prin grupul de ipoteze* (C) *revine la studiul ,,sistemului principal'' de ecuaţii cu derivate parţiale ataşat acestei clase de mişcări.*

§ 5. Pentru a concretiza metoda folosită şi rezultatele obţinute anterior, vom studia în continuare unele cazuri mai particulare ; vom folosi în acest scop noţiunea de ,,strictă independenţă'' introdusă în Teza noastră citată anterior ([5], cap. II, § 3).

Să adăugăm ansamblului de ipoteze (C) următoarea condiţie :

Cei trei parametri geometrici $\alpha\,(x_1, x_2, x_3)$, $\beta\,(x_1, x_2, x_3)$ şi $\tau_1\,(x_1, x_2, x_3)$ variază în mod strict independent, doi cîte doi, în raport cu variabilele carteziene ortogonale x_1, x_2, x_3.

În baza definiţiei acestei noţiuni se arată că ipoteza precedentă revine la verificarea de către aceste trei funcţii a sistemului de 3 ecuaţii cu derivate parţiale de ordinul I :

$$\begin{aligned} &\operatorname{grad} \alpha \,.\, \operatorname{grad} \beta = 0, \\ &\operatorname{grad} \beta \,.\, \operatorname{grad} \tau_1 = 0, \qquad (1.37) \\ &\operatorname{grad} \tau_1 \,.\, \operatorname{grad} \alpha = 0. \end{aligned}$$

Deoarece s-a presupus $I_0 \neq 0$ în orice punct al domeniului de existenţă al acestor trei funcţii, rezultă existenţa a două funcţii de clasă C^2 în raport cu x_1, x_2, x_3, pe care le vom nota respectiv cu ζ_1 şi ζ_2, astfel ca

$$\vec{w}_1 = \operatorname{grad} \tau_1 \wedge \operatorname{grad} \alpha = \zeta_1 \operatorname{grad} \beta, \qquad (1.38_1)$$

$$\vec{w}_2 = \operatorname{grad} \beta \wedge \operatorname{grad} \tau_1 = \zeta_2 \operatorname{grad} \alpha\ ; \qquad (1.38_2)$$

rezultă deci

$$b_{12} = \vec{w}_1 . \vec{w}_2 = 0\,. \qquad (1.39)$$

Vectorii $\vec{w}_1$ şi $\vec{w}_2$ admit deci pe $\beta\,(x_1, x_2, x_3)$ şi respectiv pe $\alpha\,(x_1, x_2, x_3)$ ca ,,funcţii pseudopotenţiale'' ; în acest caz

$$\vec{\omega}_1 = \operatorname{grad} \zeta_1 \wedge \operatorname{grad} \beta,\ \vec{\omega}_2 = \operatorname{grad} \zeta_2 \wedge \operatorname{grad} \alpha \qquad (1.40)$$

şi

$$\vec{w}_1 \,.\, \vec{\omega}_1 \equiv 0 \,,\; \vec{w}_2 \,.\, \vec{\omega}_2 \equiv 0. \tag{1.41}$$

Se deduce de asemenea

$$\vec{v} = \frac{1}{\rho}\, \xi\, \zeta_1 \,\mathrm{grad}\, \beta \,,\; \vec{B} = \eta\, \zeta_2 \,\mathrm{grad}\, \alpha \tag{1.42}$$

şi

$$\vec{v} .\, \vec{B} \equiv 0,\; \vec{v} \,.\, \vec{\omega} \equiv 0,\; \vec{B} .\, \vec{\Omega} \equiv 0. \tag{1.43}$$

Se verifică imediat că, reciproc, dacă sînt îndeplinite condiţiile (1.43), atunci există 3 funcţii $\alpha\,(x_1, x_2, x_3)$, $\beta\,(x_1, x_2, x_3)$ şi $\tau_1\,(x_1, x_2, x_3)$ care verifică sistemul de ecuaţii (1.37). Am demonstrat deci următorul rezultat:

TEOREMA 3. *Pentru o mişcare fluidă aparţinînd clasei definită de ansamblul de ipoteze* (C), *vectorul viteză* $\vec{v}$ *şi vectorul densităţii fluxului magnetic* $\vec{B}$ *sînt ortogonali şi admit fiecare cîte o funcţie pseudopotenţială, dacă şi numai dacă există un sistem de trei parametri care să definească familiile liniilor de forţă ale cîmpurilor vectoriale* $\vec{v}$ *şi* $\vec{B}$ *şi care să „varieze în mod strict independent”, doi cîte doi, în raport cu coordonatele carteziene ortogonale* x_1, x_2, x_3.

Pe de altă parte, din ecuaţiile (1.38_1) şi (1.38_2) rezultă că funcţiile $\zeta_1(x_1, x_2, x_3)$ şi $\zeta_2\,(x_1, x_2, x_3)$ sînt legate de funcţiile $\beta\,(x_1, x_2, x_3)$ şi respectiv $\alpha(x_1, x_2, x_3)$ prin ecuaţiile

$$\mathrm{div}\; \vec{w}_1 \equiv \zeta_1\, \Delta\beta + \mathrm{grad}\, \zeta_1 \,.\, \mathrm{grad}\, \beta = 0, \tag{1.44_1}$$

$$\mathrm{div}\; \vec{w}_2 \equiv \zeta_2\, \Delta\, \alpha + \mathrm{grad}\, \zeta_2 \,.\, \mathrm{grad}\, \alpha = 0. \tag{1.44_2}$$

Înlocuind valorile (1.42) ale lui $\vec{v}$ şi $\vec{B}$ în ecuaţia vectorială (1.17) obţinem

$$\vec{B} \wedge \vec{v} = \frac{1}{\rho}\, \xi\, \eta\, \zeta_1\, \zeta_2 \,\mathrm{grad}\, \alpha \wedge \mathrm{grad}\, \beta = \mathrm{grad}\, \tau,$$

de unde rezultă

$$I_0\, \xi\, \eta\, \zeta_1\, \zeta_2 = \rho\, \tau' \,|\, \mathrm{grad}\, \tau_1 \,|^2. \tag{1.45}$$

Ţinînd seama de ecuaţia (II, d), luată sub forma (1.29″), se deduce

$$\zeta_1\, \zeta_2 = |\, \mathrm{grad}\;\; \tau_1 \,|^2. \tag{1.45′}$$

Deoarece

$$\begin{aligned} I_0 &= \vec{w}_1 .\; \mathrm{grad}\; \beta = \vec{w}_2 .\; \mathrm{grad}\; \alpha = \zeta_1 \,|\, \mathrm{grad}\; \beta \,|^2 = \\ &= \zeta_2 \,|\, \mathrm{grad}\; \alpha \,|^2 = |\; \mathrm{grad}\;\; \alpha \,|\,|\; \mathrm{grad}\;\; \beta \,|\,|\; \mathrm{grad}\, \tau_1 \,|, \end{aligned} \tag{1.46}$$

obţinem pentru ζ_1 şi ζ_2 valorile următoare:

$$\zeta_1 = \frac{I_0}{|\operatorname{grad}\beta|^2} = \frac{|\operatorname{grad}\alpha||\operatorname{grad}\tau_1|}{|\operatorname{grad}\beta|} \tag{1.47$_1$}$$

$$\zeta_2 = \frac{I_0}{|\operatorname{grad}\alpha|^2} = \frac{|\operatorname{grad}\beta||\operatorname{grad}\tau_1|}{|\operatorname{grad}\alpha|}. \tag{1.47$_2$}$$

§ 6. Pe lîngă ipoteza formulată în paragraful precedent vom adăuga ansamblului de ipoteze (C) următoarele:

(C_4)
1. liniile de forţă ale cîmpurilor vectoriale $\vec{v}$ şi $\vec{B}$ sînt curbe cuprinse în planele paralele $x_3 = \text{const.}$;
2. modulele vectorilor $\vec{v}$, $\vec{B}$ nu depind de x_3;
3. entropia S şi energia mecanică H nu variază de la o linie de curent la alta.

Vom desemna prin (C^*) ansamblul tuturor ipotezelor introduse pînă acum în această lucrare.

Prima ipoteză din (C_4) ne permite să luăm

$$\tau_1 \equiv x_3; \tag{1.48}$$

în acest caz, ecuaţiile (1.37) dau

$$\alpha = \alpha(x_1, x_2), \quad \beta = \beta(x_1, x_2), \tag{1.49$_1$}$$

$$\frac{\partial\alpha}{\partial x_1}\frac{\partial\beta}{\partial x_1} + \frac{\partial\alpha}{\partial x_2}\frac{\partial\beta}{\partial x_2} = 0, \tag{1.49$_2$}$$

iar din ecuaţiile (1.38$_1$) şi (1.38$_2$) se deduce

$$\begin{aligned} &\text{(a)}\ W_1 = |\operatorname{grad}\alpha| = W_1(x_1, x_2),\ W_2 = |\operatorname{grad}\beta| = W_2(x_1, x_2),\\ &\text{(b)}\ I_0 = |\operatorname{grad}\alpha||\operatorname{grad}\beta| = W_1 W_2 = I_0(x_1, x_2). \end{aligned} \tag{1.50}$$

Din a doua ipoteză din (C_4) şi din ecuaţia (1.29″) rezultă

$$\tau' \equiv \frac{d\tilde{\tau}}{d\tau_1} = \frac{1}{\rho} I_0 \xi \eta = |\vec{v}||\vec{B}| = K\ (\text{const.}), \tag{1.51}$$

deci

$$\tau = K\tau_1 + K', \quad (K' = \text{const.}) \tag{1.52}$$

şi se va alege pentru simplificarea calculelor

$$K = 1, \ K' = 1, \ \tau = \tau_1, \tag{1.52′}$$

fără a restrînge astfel generalitatea dezvoltărilor ulterioare.

În baza celei de a doua ipoteze din (C_4) şi a ultimei relaţii din (1.50,a) rezultă

$$\eta \equiv \eta(x_1, x_2) \equiv \tilde{\eta}(\beta), \tag{1.53$_1$}$$

iar în baza ultimelor două ipoteze din (C_4) și a ecuației (1.31) se deduce succesiv

$$S \equiv S(x_1, x_2) \equiv S(\alpha), \quad H \equiv H(x_1, x_2) \equiv \widetilde{H}(\alpha),$$
$$h \equiv h(x_1, x_2) \equiv \widetilde{h}(\alpha, \beta), \quad \rho \equiv \rho(x_1, x_2) \equiv \widetilde{\rho}(\alpha, \beta), \tag{1.53$_2$}$$
$$\xi \equiv \xi(x_1, x_2) \equiv \widetilde{\xi}(\alpha), \quad \lambda \equiv \Lambda(x_1, x_2) \equiv \lambda(\alpha).$$

De asemenea, se obțin și relațiile

$$\vec{\omega}_1 = (\Delta\alpha) \operatorname{grad} \tau_1, \quad \vec{\omega}_2 = -(\Delta\beta) \operatorname{grad} \tau_1, \tag{1.54$_1$}$$

$$\vec{\omega} = \frac{\xi}{\rho}\left[\Delta\alpha - \frac{1}{I_0}\frac{\partial \widetilde{I}_0}{\partial \alpha} |\operatorname{grad} \alpha|^2\right] \operatorname{grad} \tau_1, \tag{1.54$_2$}$$

$$\vec{\Omega} = -\left[\widetilde{\eta}\,\Delta\beta + \frac{d\widetilde{\eta}}{d\beta} |\operatorname{grad} \beta|^2\right] \operatorname{grad} \tau_1 = -(\Delta\Psi) \operatorname{grad} \tau_1. \tag{1.54$_3$}$$

Prin urmare, mișcările definite mai sus aparțin clasei mișcărilor plane.

Să considerăm în continuare cele trei ecuații ale sistemului principal atașat clasei de mișcări pe care o studiem.

În baza relațiilor (1.53$_2$) avem

$$\vec{v} \cdot \operatorname{grad} H = \frac{d\widetilde{H}}{d\alpha} \vec{v} \cdot \operatorname{grad} \alpha = 0\,;$$

energia specifică $\mathcal{E}$ datorită acțiunii forțelor electromagnetice este deci nulă în acest caz și prima ecuație a sistemului principal va da

$$\vec{\Omega} \cdot \operatorname{grad} \tau_1 = 0, \tag{1.55}$$

adică

$$\vec{\Omega} \equiv 0, \quad \Delta\Psi = 0, \tag{1.55$'$}$$

funcția $\Psi(x_1, x_2)$ fiind deci armonică în domeniul considerat.

Dacă notăm cu $\Phi = \Phi(x_1, x_2)$ funcția armonică conjugată funcției Ψ în acest domeniu, atunci rezultă

$$\vec{B} = \operatorname{grad} \Phi = \operatorname{grad} \Psi \wedge \operatorname{grad} \tau_1. \tag{1.56}$$

Ținînd seama de ecuația (1.49$_2$) și de felul în care am introdus funcția $\Phi(x_1, x_2)$, deducem că este posibil întotdeauna să luăm

$$\Phi = \widetilde{\Phi}(\alpha), \quad \Psi = \widetilde{\Psi}(\beta), \quad \frac{d\widetilde{\Phi}}{d\alpha} = \widetilde{\eta}\,\zeta_2 = \varphi(\alpha), \tag{1.57}$$

de unde rezultă următoarea reprezentare a cîmpului vitezei fluidului:

$$\rho \vec{v} = \frac{\widetilde{\xi}(\alpha)\,\zeta_1}{\widetilde{\eta}(\beta)} \operatorname{grad} \Psi = \frac{\widetilde{\xi}(\alpha)}{\widetilde{\eta}(\beta)\,\zeta_2} \operatorname{grad} \tau_1 \wedge \operatorname{grad} \Phi, \tag{1.58}$$

rezultînd imediat că

$$\zeta_1 = \frac{1}{\zeta_2} = \frac{\widetilde{\eta}(\beta)}{\varphi(\alpha)} = \widetilde{\zeta}_1(\alpha, \beta).$$

De asemenea, se verifică cu uşurinţă că cea de-a treia ecuaţie a sistemului principal este identic verificată în acest caz.

Relaţiile (1.51), (1.52′) şi (1.58) conduc la ecuaţia

$$\rho = \frac{\widetilde{\xi}(\alpha)}{\varphi(\alpha)} |\operatorname{grad} \Phi|^2 \equiv \widetilde{\rho}(\alpha, \beta) \tag{1.59}$$

care reprezintă forma pe care o ia în acest caz ecuaţia (II, d) a sistemului redus.

Dacă presupunem că fluidul mediu este un gaz perfect avînd căldurile specifice constante, atunci expresiile analitice ale funcţiilor $p(\rho, S)$, $\widetilde{h}(\rho, S)$ şi $\widetilde{T}(\rho, S)$ vor fi cunoscute şi vom obţine pentru ecuaţia (II, e) a sistemului redus următoarea formă

$$H = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \rho^{\gamma-1} e^{\frac{\gamma-1}{k} S} + \frac{1}{2|\operatorname{grad} \Phi|^2} \equiv \widetilde{H}(\alpha), \tag{1.60}$$

unde am notat

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v}, \quad k = C_p - C_v;$$

eliminînd funcţia ρ între ecuaţiile (1.59) şi (1.60) obţinem

$$H \equiv \widetilde{H}(\alpha) = \frac{\gamma}{\gamma - 1}\left[\frac{\widetilde{\xi}(\alpha)}{\varphi(\alpha)}\right]^{\gamma-1} |\operatorname{grad} \Phi|^{2(\gamma-1)} e^{\frac{\gamma-1}{k}\widetilde{S}(\alpha)} + \frac{1}{2|\operatorname{grad} \Phi|^2} \cdot \tag{1.60′}$$

În sfîrşit, ţinînd seama de dezvoltările anterioare, a doua ecuaţie a sistemului principal ia în acest caz forma următoare:

$$\frac{d\widetilde{\xi}}{d\alpha} + \widetilde{I}\frac{d\widetilde{S}}{d\alpha} = \frac{d\widetilde{H}}{d\alpha}, \tag{1.61}$$

unde $\widetilde{T} = \widetilde{T}(\alpha)$ este dat de relaţia

$$\widetilde{T} = \frac{\gamma - 1}{\gamma k} \widetilde{h} = \frac{1}{k}\left|\frac{\widetilde{\xi}(\alpha)}{\varphi(\alpha)}\right]^{\gamma-1} |\operatorname{grad} \Phi|^{2(\gamma-1)} e^{\frac{\gamma-1}{k}\widetilde{S}(\alpha)} \cdot \tag{1.62}$$

Rezultă că funcţiile $|\operatorname{grad} \Phi|^2$ şi Ψ „variază în mod strict independent în raport cu variabilele carteziene ortogonale x_1, x_2", adică

$$\operatorname{grad} |\operatorname{grad} \Phi|^2 \,.\, \operatorname{grad} \Psi = 0. \tag{1.63}$$

Această condiție conduce la ecuațiile

$$\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x_1}\right)^2 \frac{\partial^2\Psi}{\partial x_1^2} + 2\,\frac{\partial\Psi}{\partial x_1}\,\frac{\partial\Psi}{\partial x_2}\,\frac{\partial^2\Psi}{\partial x_1\,\partial x_2} + \left(\frac{\partial\Psi}{\partial x_2}\right)^2 \frac{\partial^2\Psi}{\partial x_2^2} = 0, \tag{1.64}$$

$$\frac{\partial\Psi}{\partial x_1}\,\frac{\partial\Phi}{\partial x_1}\,\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_1^2} + \left(\frac{\partial\Psi}{\partial x_1}\,\frac{\partial\Phi}{\partial x_2} + \frac{\partial\Psi}{\partial x_2}\,\frac{\partial\Phi}{\partial x_1}\right)\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_1\,\partial x_2} + {} + \frac{\partial\Psi}{\partial x_2}\,\frac{\partial\Phi}{\partial x_2}\,\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_2^2} = 0, \tag{1.65}$$

cărora trebuie să le satisfacă în plus funcțiile armonice conjugate Ψ și Φ, pentru a caracteriza o mișcare fluidă din clasa considerată.

În concluzie, o asemenea mișcare poate fi determinată — după ce s-au găsit funcțiile $\Phi(x_1, x_2)$ și $\Psi(x_1, x_2)$ corespunzătoare — cu ajutorul ecuației diferențiale (1.61), în care funcțiile $\widetilde{H}$ și $\widetilde{T}$ au fost înlocuite cu expresiile lor (1.60′) și respectiv (1.62); se obține astfel o ecuație diferențială pentru funcțiile necunoscute $\widetilde{\xi}(\alpha)$ și $S(\alpha)$. Determinarea completă a problemei mai necesită deci o condiție care să poată conduce la încă o ecuație scalară pentru aceste două funcții necunoscute.

Primită la redacție la 15 august 1962, și o nouă versiune la 10 decembrie 1962

INTRODUCTION À L'ÉTUDE INTRINSÈQUE DE LA CLASSE DES ÉCOULEMENTS PERMANENTS DU PLASMA PARFAIT DANS UN CHAMP MAGNÉTIQUE STATIONNAIRE

RÉSUMÉ

L'auteur étend, à l'étude de la classe des écoulements permanents, rotationnels et tridimensionnels du plasma parfait, dans un champ magnétique stationnaire, une méthode mathématique exacte, qu'il a développée dans un travail antérieur [5].

A cette fin, il substitue, au système classique d'équations — caractérisant cette classe des écoulements fluides — , un système équivalent, où les champs vectoriels inconnus (de la vitesse $\vec{v}$ du fluide conducteur et de la densité $\vec{B}$ du flux magnétique) sont remplacés par des paires de paramètres définissant les lignes de forces de ces champs vectoriels ; l'auteur démontre que le nouveau système — appelé «système réduit» d'équations attaché à la classe considérée d'écoulements fluides — est équivalent au système classique (théorème 1).

Ensuite, il introduit le «système principal» d'équations attaché à cette classe de mouvements fluides, dont il précise le rôle (théorème 2).

En terminant la première partie de ce travail, l'auteur s'occupe de deux cas plus particuliers, à savoir, celui défini par le théorème 3 et celui des «écoulements plans».

BIBLIOGRAFIE

1. T. G. COWLING, *Magnetohydrodynamics*. Interscience Publishers, New York, 1957.
2. E. L. RESLER, W. R. SEARS, *The prospects for magnetoaerodynamics*. J. aero Sc., **25**, 235 (1958).
3. P. GERMAIN, *Introduction à l'étude de l'aéromagnétodynamique*. Cah. Phys., **13**, *103* (1959).
4. Ф. А. БАУМ, С. А. КАПЛАН, К. П. СТАНЮКОВИЧ, *Введение в космическую газодинамику*. Москва, 1958.
5. CL. IONESCU-BUJOR, *Etude intrinsèque des écoulements permanents et rotationnels d'un fluide parfait*. Cap. I şi cap. II în Rev. Math. Pures et Appl., Acad. R.P.R., **VII**, *3* (1962) ; cap. III în Bull. Math. S.S.M.F., **4 (52)**, *2* (1960) ; cap. IV în Bull. Math. S.S.M.F., **4 (52)**, *3* (1960) ; cap. V şi cap. VI în Rev. Math. Pures et Appl., Acad. R.P.R., **VIII**, *1* (1963).

En terminant la [illegible] de ce travail, l'auteur [illegible] [illegible]

BIBLIOGRAPHIE

[illegible]

STUDII

CONSIDERAȚII PRIVIND RĂSPUNSUL DINAMIC AL STRUCTURII RACHETEI ÎN TIMPUL ZBORULUI PERTURBAT

DE

AL. MARINESCU

629.136.3 : 531.3

NOTAȚII

Oxz — sistem de axe legat de racheta nedeformată,
$O\xi\eta\zeta$ — sistem de axe legat de ampenajul delta al rachetei,
u, s — variabile curente,
L — lungimea rachetei,
l — distanța centrului de presiune al ampenajului față de vîrful rachetei,
l_0 — distanța centrului de presiune al ampenajului față de axa de tangaj,
r — raza secțiunii rachetei la distanța x de vîrf,
x_0 — distanța axei de tangaj de vîrf,
$2b$ — coarda ampenajului,
θ — unghiul planului meridian al carenei rachetei cu planul vertical,
σ_a — unghiul săgeții ampenajului,
φ — unghiul dintre axul longitudinal al rachetei și orizontală,
$\Delta\varphi$ — perturbația unghiului φ,
$\overline{\alpha}$ — unghiul de incidență al rachetei în zbor de regim,
α — unghiul de incidență al rachetei variabil cu timpul,
V — viteza în zbor de regim a rachetei,
w — viteza de deplasare pe verticală variabilă cu timpul,
c — viteza sunetului,
$\Phi(x)$ — funcția formei modale,
ω — frecvența oscilațiilor rachetei,
ν_n — frecvența proprie a structurii rachetei,

M_n — masa generalizată a rachetei,
F_G — forțe generalizate,
$M = \frac{V}{c}$ — numărul Mach,
$\nu = \frac{\omega b}{V}$ — frecvența redusă,
$k = \frac{\omega b}{c\beta^2}$,
$\beta^2 = M^2 - 1$,
ρ — densitatea aerului,
S — suprafața ampenajului,
σ — suprafața secțiunii structurii rachetei într-un punct,
E — modulul de elasticitate al structurii rachetei,
I — momentul de inerție al secțiunii de lucru a structurii rachetei.

În tendința de a mări distanța de zbor a rachetelor, greutatea proprie trebuie redusă firește pe cît posibil.

De aceea, dimensionarea structurii de rezistență a rachetei se face astfel încît cu minimum de material să se asigure maximum de rezistență ceea ce nu exclude, avînd în vedere lungimea mare a rachetelor, deformări longitudinale sensibile sub acțiunea forțelor exterioare.

Deformările dinamice ale structurii rachetei, care pot duce la fenomene de rezonanță, apar în urma acțiunii unor forțe variabile cu timpul.

Apariția forțelor variabile cu timpul este cît se poate de evidentă în cazul zborului perturbat cînd apar mișcări oscilatorii (fig. 1).

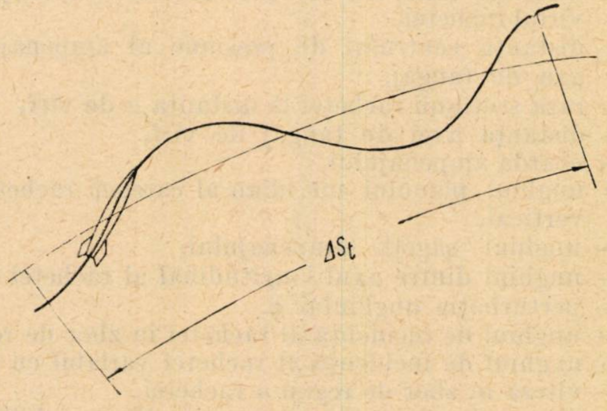


Fig. 1

Într-adevăr, studiul simplificat al stabilității dinamice a rachetei a arătat că sistemul de ecuații diferențiale al mișcării perturbate se poate transpune, notînd cu $\Delta\varphi$ perturbația unghiului φ din figura 2, ecuației de ordinul trei

$$A_0\,\Delta\dddot{\varphi} + A_1\,\Delta\ddot{\varphi} + A_2\,\Delta\dot{\varphi} + A_3\,\Delta\varphi = 0, \tag{1}$$

a cărei ecuație caracteristică

$$A_0\,\Lambda^3 + A_1\,\Lambda^2 + A_2\,\Lambda + A_3 = 0 \tag{2}$$

are în general două rădăcini complex conjugate, ceea ce confirmă prezența mișcărilor oscilatorii. Tocmai de efectul acestor mișcări oscilatorii ne vom

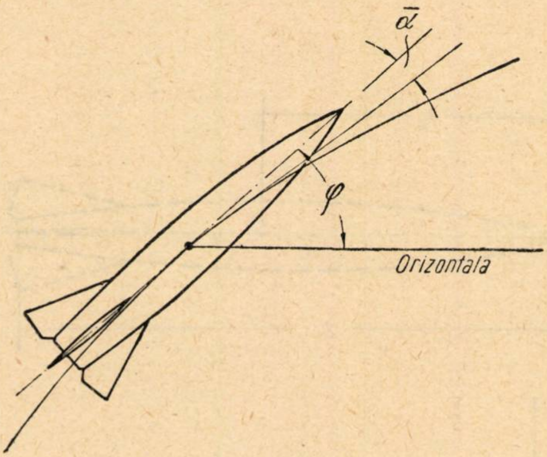


Fig. 2

ocupa, deoarece ele introduc pe rachetă forțe variabile cu timpul, fixîndu-ne atenția în special asupra fenomenului de rezonanță și asupra factorilor care-l influențează.

Vom adopta în studiul de față următoarele ipoteze simplificatoare :

Pe porțiunea de traiectorie (plană) în care urmărim fenomenul, oscilațiile rachetei cu un etaj au amplitudinea și frecvența aproape constante.

Structura de rezistență a rachetei se presupune ca o grindă de secțiune variabilă liberă la capete.

Deformația se consideră față de axa Ox a sistemului Oxz legat de racheta nedeformată.

Se neglijează amortizarea internă a structurii.

Regimul de zbor se consideră în domeniul vitezelor supersonice.

Referim racheta unui sistem Oxz astfel încît axa rachetei nedeformate coincide cu axa Ox (fig. 3 *a*).

Folosind modurile normale, potrivit cărora deflecțiunea structurii rachetei față de axa Ox (fig. 3 b) poate fi pusă sub forma

$$z = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n(x)\, \zeta_n(t), \tag{3}$$

ecuația generală de mişcare este

$$M_n \ddot{\zeta}_n + M_n \nu_n^2 \zeta_n = F_{GP} + F_{GM}, \tag{4}$$

în care ν_n este frecvența proprie în al n-lea mod, F_{GP} sînt forțele generalizate corespunzătoare forțelor perturbatoare iar F_{GM} forțele generalizate corespunzătoare forțelor care apar în urma deformației structurii rachetei.

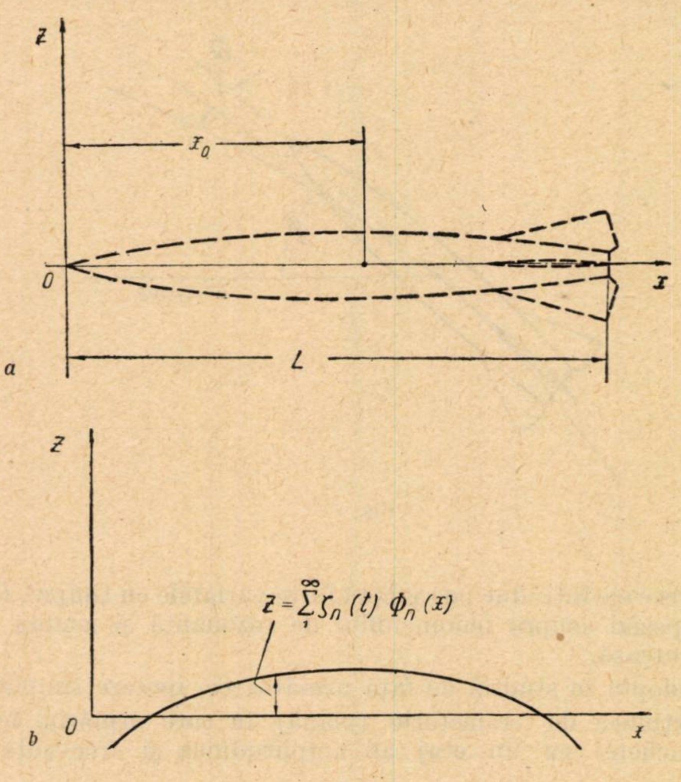


Fig. 3

Vom căuta acum, stabilind expresiile forțelor F_{GP}, F_{GM}, să punem sub forma explicită ecuația (4).

Forțele generalizate corespunzătoare forțelor perturbatoare concentrate (pe ampenaj), respectiv distribuite pe carena rachetei, constau dintr-o parte invariabilă cu timpul și alta variabilă, deci

$$F_{GP} = F'_{GP} + F''_{GP}. \tag{5}$$

Primul termen se poate scrie

$$F'_{GP} = \int_0^L \frac{\rho}{2} S\, V^2\, C_z\, \Phi_n(x)\, \delta(x - x')\, \mathrm{d}x -$$

$$-\frac{\rho V^2}{\pi} \sin\alpha \int_0^{2\pi}\int_0^L \frac{\cos^2\theta}{r}\, \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}x}\, r\, \Phi_n(x)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}\theta = \tag{6}$$

$$= \frac{\rho}{2} S V^2\, C_z\, \Phi_n(l) - \rho V^2 \sin\bar{\alpha} \int_0^L \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}x}\, \Phi_n(x)\, \mathrm{d}x,$$

unde C_z este coeficientul de portanță al ampenajului considerat ca o aripă delta cu borduri de atac supersonice iar δ funcția lui Dirac.

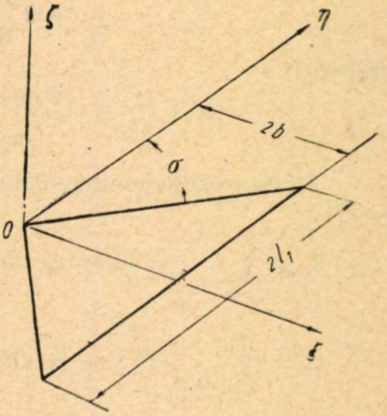


Fig. 4

În ceea ce privește partea variabilă cu timpul a lui F_{GP}, trebuie remarcat că oscilațiile constau atît din deplasări verticale periodice cît și din variații periodice ale incidenței corpului rachetei respectiv ale ampenajului. Vom scrie deci că

$$F''_{GP} = F''_{GP_a} + F''_{GP_r}\,. \tag{7}$$

În ceea ce privește primul termen, punem viteza de deplasare pe verticală, respectiv incidența ampenajului, sub forma

$$w_a = w_{0a}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t},$$

$$\alpha_a = \alpha_{0a}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}.$$

Făcînd uz de proprietatea cunoscută a integralei funcției lui Dirac de-a lungul rachetei și anume

$$\int_0^L F\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\, \delta(x - x')\, \Phi_n(x)\, \mathrm{d}x = F \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\, \Phi_n(l)$$

pentru $x' = l$, precum și de expresia portanței în regim nepermanent [4], vom putea scrie (fig. 4)

$$F''_{GP_a} = \Bigg\{ -\frac{4\rho\,\mathrm{i}\,\omega\, l_0\, \alpha_{0a} + 4\rho\, w_{0a}}{\beta \operatorname{tg}\sigma_a} \Bigg[\mathrm{i}\,\omega \int_0^{2b}\int_0^{\xi} (\xi - s)\, G(s)\, \mathrm{d}s\, \mathrm{d}\xi +$$

$$+ V \int_0^{2b}\int_0^{\xi} G(s)\, \mathrm{d}s\, \mathrm{d}\xi \Bigg] + \tag{8}$$

$$+ \frac{4\rho\, \alpha_{0a}\, V}{\beta\, b \operatorname{tg}\sigma_a} \Bigg[\mathrm{i}\,\omega \int_0^{2b}\int_0^{\xi} (\xi - s)^2\, G(s)\, \mathrm{d}s\, \mathrm{d}\xi +$$

$$+ 2V \int_0^{2b}\int_0^{\xi} (\xi - s)\, G(s)\, \mathrm{d}s\, \mathrm{d}\xi \Bigg]\Bigg\}\, \Phi_n(l)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t},$$

unde

$$G(s) = J_0\left(\frac{ks}{b}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kM\frac{s}{b}}$$

J_0 fiind funcția Bessel de ordin zero.

În ceea ce privește al doilea termen al expresiei (7), acesta se poate scrie

$$F''_{GP_r} = \frac{\rho}{2}V^2\int_0^L\int_0^{2\pi}(C_{p\alpha}-C_{pw})\,r\cos\theta\,\Phi_n(x)\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}x, \tag{9}$$

unde

$$C_{p\alpha} = \frac{2\cos\theta}{\pi}\left[\alpha\beta - \frac{\beta\dot{\alpha}x_0}{V}\right]\frac{\partial I_1}{\partial x} + \frac{\dot{\alpha}\beta}{V}\frac{\partial I_2}{\partial x} + $$
$$+ 2\frac{\dot{\alpha}\beta}{V}I_1 - \frac{\dot{\alpha}M^2 r}{V}\frac{\partial I_3}{\partial x}\Bigg]$$

respectiv

$$C_{pw} \approx \frac{2\cos\theta}{\pi}\left[\frac{\beta I_1\dot{w}}{V^2} - \frac{\dot{w}Mr}{V^2}\frac{\partial I_3}{\partial x}\right].$$

În expresiile coeficienților de presiune, mărimile I_1, I_2, I_3 au expresiile [5]:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{\mathrm{ch}^{-1}\frac{x}{\beta r}}^{0}\sigma'(x-\beta r\,\mathrm{ch}\,u)\,\mathrm{ch}\,u\,\mathrm{d}u,\\ I_2 &= \int_{\mathrm{ch}^{-1}\frac{x}{\beta r}}^{0}\sigma'(x-\beta r\,\mathrm{ch}\,u)(x-\beta r\,\mathrm{sh}\,u)\,\mathrm{ch}\,u\,\mathrm{d}u,\\ I_3 &= \int_{\mathrm{ch}^{-1}\frac{x}{\beta r}}^{0}\sigma'(x-\beta r\,\mathrm{ch}\,u)\,\mathrm{d}u. \end{aligned} \tag{10}$$

Punînd ca și în cazul precedent

$$\alpha = \alpha_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t},$$
$$w = w_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t},$$

vom putea scrie, observînd că rotirea corpului rachetei se face în jurul axei aflată la x_0 de vîrf (a se vedea fig. 3a),

$$\begin{aligned} F''_{GP_r} = \Bigg\{\rho V^2\int_0^L\Bigg[\left(\alpha_0\beta - \frac{\mathrm{i}\beta\alpha_0\omega x_0}{V}\right)\frac{\partial I_1}{\partial x} &+ \\ + \frac{\mathrm{i}\omega\alpha_0\beta}{V}\frac{\partial I_2}{\partial x} + \frac{2\mathrm{i}\omega\alpha_0\beta}{V}I_1 - \frac{\mathrm{i}\omega\alpha_0 M^2 r}{V}\frac{\partial I_3}{\partial x} &- \\ - \frac{\mathrm{i}\beta\omega w_0}{V^2}I_1 + \frac{\mathrm{i}\omega w_0 Mr}{V^2}\frac{\partial I_3}{\partial x}\Bigg]r\,\Phi_n(x)\,\mathrm{d}x\Bigg\}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}&. \end{aligned} \tag{11}$$

Să stabilim acum expresia forțelor generalizate corespunzătoare forțelor ce apar ca urmare a deformării structurii rachetei.

Începem tot cu ampenajul pentru care vom scrie forța generalizată în general

$$F_{GM_a} = 2\rho \int_0^L \int_0^{2b} \left(\frac{\partial U}{\partial t} + V \frac{\partial U}{\partial \xi} \right) \delta\,(x - x')\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\xi =$$

$$= 2\,\rho\,\Phi_n(l) \int_0^{2b} \left(\frac{\partial U}{\partial t} + V \frac{\partial U}{\partial \xi} \right) \mathrm{d}\xi. \tag{12}$$

În cazul vitezei verticale $\dot{\zeta}_n\,\Phi_n\,(l)$ rezultată din deformare avem

$$U = \frac{2\dot{\zeta}_n\,\Phi_n(l)}{\beta\,\mathrm{tg}\,\sigma_a} \int_0^{\xi} s\,G\,(\xi - s)\,\mathrm{d}s \tag{13}$$

și cum

$$\int_0^{\xi} s\,G\,(\xi - s)\,\mathrm{d}s = \int_0^{\xi} (x - s)\,G(s)\,\mathrm{d}s$$

avem

$$F_{GM_{aw}} = - \frac{4\,\rho\,\Phi_n^2\,(l)}{\beta\,\mathrm{tg}\,\sigma_a} \left[\ddot{\zeta}_n \int_0^{2b} \int_0^{\xi} (\xi - s)\,G(s)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}\xi + \right.$$

$$\left. + \dot{\zeta}_n\,V \int_0^{2b} \int_0^{\xi} G(s)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}\xi \right] \cdot \tag{14}$$

În cazul unghiului de incidență rezultat din deformare pe care-l vom considera foarte mic și luat sub forma $\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\,(\zeta_n\ \Phi_n) \right]_{x=l}$, considerațiile de mai sus ne conduc la expresia

$$F_{GM_{a\alpha}} = \frac{4\,\rho\,\Phi_n\,(l) \left(\frac{\mathrm{d}\,\Phi_n}{\mathrm{d}x} \right|_{x=l} V}{\beta\,b\mathrm{tg}\,\sigma_a} \left[\dot{\zeta}_n \int_0^{2b} \int_0^{\xi} (\xi - s)\,G(s)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}\xi + \right.$$

$$\left. + 2\,\zeta_n V \int_0^{2b} \int_0^{\xi} (\xi - s)\,G(s)\,\mathrm{d}s\mathrm{d}\xi \right] \cdot \tag{15}$$

În ceea ce privește forțele generalizate pe rachetă datorită forțelor rezultate din deformația structurii acesteia, putem scrie

$$F_{GM_{rw}} = - \frac{\rho}{2} V^2 \int_0^{2\pi} \int_0^L C_p\,\Phi_n\,(x)\,r\,\cos\,\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}x. \tag{16}$$

Cum

$$C_p \approx \frac{2\,\cos\,\theta\,\ddot{\zeta}_n\,\Phi_n\,(x)}{\pi} \left[\frac{\beta\,I_1}{V^2} - \frac{Mr}{V^2}\ \frac{\partial\,I_3}{\partial x} \right]$$

avem

$$F_{GM_{rw}} = -\rho V^2 \ddot{\zeta}_n \int_0^L \Phi_n^2(x) \left[\frac{\beta I_1}{V^2} - \frac{Mr}{V^2}\,\frac{\partial I_3}{\partial x}\right] r\,\mathrm{d}x, \tag{17}$$

deformarea corpului rachetei neaducînd din punct de vedere al unghiului de incidență forțe suplimentare. Vom putea scrie deci

$$F_{GM} = F_{GM_{aw}} + F_{GM_{a\alpha}} + F_{GM_{rw}} = -A\ddot{\zeta}_n - B\dot{\zeta}_n - C\,\zeta_n, \tag{18}$$

unde A, B și C sînt mărimi rezultînd din restrîngerea termenilor.

Cu considerațiile de mai sus ecuația răspunsului dinamic al structurii rachetei sub influența forțelor sus-menționate este

$$\ddot{\zeta}_n + a\,\dot{\zeta}_n + b\,\zeta_n = A_k\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\omega t},\ k = 0{,}1, \tag{19}$$

unde

$$a = \frac{1}{H}\left[\frac{4\,\pi\,\rho\,\Phi_n^2(l)}{\beta\,\mathrm{tg}\,\sigma_a} V \int_0^{2b}\int_0^{\xi} G(s)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}\xi - \right.$$

$$\left. - \frac{4\,\rho\,\Phi_n(l)\left(\dfrac{\mathrm{d}\,\Phi_n}{\mathrm{d}x}\right)_{x=l}}{\beta\,b\,\mathrm{tg}\,\sigma_a} V \int_0^{2b}\int_0^{\xi} (\xi - s)^2 G(s)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}\xi\right],$$

$$b = \frac{1}{H}\left[\nu_n^2 \int_0^L \Phi_n^2(x)\,m(x)\,\mathrm{d}x + \right.$$

$$\left. + \frac{8\,\rho\,\Phi_n(l)\left(\dfrac{\mathrm{d}\,\Phi_n}{\mathrm{d}x}\right)_{x=l}}{\beta\,b\,\mathrm{tg}\,\sigma_a} V^2 \int_0^{2b}\int_0^{\xi} (\xi - s)\,G(s)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}\xi\right],$$

$$A_0 = \frac{1}{H}\left[\frac{\rho}{2}\,S\,V^2\,C_z\,\Phi_n(l) - \rho\,V^2 \sin\bar{\alpha} \int_0^L \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}x}\,\Phi_n(x)\,\mathrm{d}x,\right.$$

$$A_1 = \frac{F''_{GP_a} + F''_{GP_r}}{H},$$

$$H = \int_0^L \Phi_n^2(x)\,m(x)\,\mathrm{d}x + \frac{4\,\rho\,\Phi_n^2(l)}{\beta\,\mathrm{tg}\,\sigma_a} \int_0^{2b}\int_0^{\xi} (\xi - s)\,G(s)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}\xi +$$

$$+ \rho\,V^2 \int_0^L \Phi_n^2(x)\left[\frac{\beta I_1}{V^2} - \frac{Mr}{V^2}\,\frac{\partial I_3}{\partial x}\right] r\,\mathrm{d}x.$$

Căutînd pentru ecuația (19) soluții particulare de forma

$$\zeta_n = \bar{\zeta}_n\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k\omega t + \delta_k)},$$

după ce introducem în (19) obținem

$$\bar{\zeta}_n\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta_k}\,(b - k^2\,\omega^2 + \mathrm{i}\,ak\,\omega) = A_k = \alpha_k + \mathrm{i}\,\beta_k.$$

Efectuînd calculele

$$\bar{\zeta}_n = \frac{\sqrt{[\alpha_k(b-k^2\omega^2)+\beta_k ak\omega]^2+[\beta_k(b-k^2\omega^2)-\alpha_k ak\omega]^2}}{(b-k^2\omega^2)^2+ak^2\omega^2}, \tag{20}$$

respectiv

$$\operatorname{tg}\delta_k = \frac{\beta_k(b-k^2\omega^2)-\alpha_k a k\omega}{\alpha_k(b-k^2\omega^2)+\beta_k a k\omega}. \tag{21}$$

Ecuația care dă frecvența de rezonanță se obține din condiția $\bar{\zeta}_n \to \infty$ și are forma

$$(b-k^2\omega^2)^2+ak^2\omega^2=0 \tag{22}$$

sau

$$\omega^4+\frac{a-2b}{k^2}\omega^2+\frac{b^2}{k^2}=0. \tag{23}$$

În acest fel, în funcție de caracteristicile masice, geometrice și aerodinamice ale rachetei avem posibilitatea să determinăm frecvența de rezonanță.

Să încercăm acum să verificăm dacă ecuația (23) astfel obținută este apropiată de realitate. Vom porni în acest sens de la teoria riguroasă a încovoierii dinamice a structurii rachetei considerată ca o bară de secțiune variabilă liberă la extremități. Ecuația diferențială a încovoierii dinamice în plan vertical sub acțiunea unor forțe perturbatoare de forma $\bar{A}_k e^{ik\omega t}$ este

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EI\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)+g(x)\left|\frac{z}{\frac{\partial z}{\partial t}}\right|\frac{\partial z}{\partial t}+m(x)\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}+$$
$$+R(x)\frac{\partial z}{\partial x}+D(x)\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\bar{A}_k e^{ik\omega t}, \tag{24}$$

în care $g(x)$ este coeficientul forțelor de amortizare internă, $R(x)$ este coeficientul forțelor de readucere iar $D(x)$ coeficientul de amortizare aerodinamică.

Amortizarea internă a structurii este mică fapt pentru care vom considera $g(x)\approx 0$. Cum funcția $\Phi_n(x)$ pentru scopuri practice poate fi determinată cu ajutorul metodelor variaționale sub forma în care există o funcție $K(x)$ astfel încît $\frac{d\Phi_n}{dx}\approx K\,\Phi_n(x)$, atunci putem scrie că

$$D(x)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)\approx A(x)\frac{\partial z}{\partial t}$$

şi ecuaţia încovoierii dinamice a rachetei sub acţiunea forţelor perturbatoare de forma $\bar{A}_k\, e^{ik\omega t}$ devine

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[EI\,\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right] + m\,(x)\,\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + R\,(x)\,\frac{\partial z}{\partial x} + \\ + A(x)\,\frac{\partial z}{\partial t} = \bar{A}_k\, e^{ik\omega t}. \qquad (25)$$

În studiul acestei ecuaţii vom folosi procedeul utilizat la o ecuaţie asemănătoare întîlnită la elicoptere, bineînţeles cu alte condiţii la limită şi altă semnificaţie a funcţiilor $R(x)$ şi $A(x)$.

Să punem soluţia ecuaţiei (25) sub forma

$$z = \sum_{s=1}^{\infty} \zeta_s\,(t)\,\Phi_s\,(x) = \sum_{s=1}^{\infty} A_s e^{i(k\omega t+\delta_k)}\;\Phi_s \qquad (26)$$

şi atunci

$$\frac{\partial z}{\partial t} = i\,k\,\omega\,z,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = -\,k^2\,\omega^2\,z,$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \sum_{s=1}^{\infty} \zeta_s\,\frac{\partial \Phi_s}{\partial x}.$$

Cu acestea ecuaţia (25) devine

$$\sum_{s=1}^{\infty} \zeta_s \left\{\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EI\,\frac{\partial^2\,\Phi_s}{\partial x^2}\right)\right] + R\,(x)\,\frac{\partial \Phi_s}{\partial x} + \Phi_s\,[-k^2\,\omega^2\,m^2 + \right. \\ \left. + \,i\,k\,\omega\,A\,(x)]\right\} = \bar{A}_k\, e^{ik\omega t}. \qquad (27)$$

Înmulţind cu funcţia $\Phi_n\,(x)$ ecuaţia de mai sus şi integrînd de la 0 la L obţinem

$$\sum_{s=1}^{\infty} \zeta_s \int_0^L \left\{\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EI\,\frac{\partial^2\,\Phi_s}{\partial x^2}\right)\right]\Phi_s + R\,(x)\,\frac{\partial \Phi_s}{\partial x}\,\Phi_n + \right. \\ \left. + \,\Phi_n\,\Phi_s[-k^2\,\omega^2 m + i\,k\,\omega\,A(x)]\right\} dx = \int_0^L \Phi_n\,\bar{A}_k\, e^{ik\omega t}. \qquad (28)$$

Deoarece

$$\int_0^L \left\{\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EI\,\frac{\partial^2 \Phi_s}{\partial x^2}\right)\right]\Phi_n + R\,(x)\,\frac{\partial \Phi_s}{\partial x}\,\Phi_n\right\} dx = -\,\nu_n^2 \int_0^L m\,\Phi_s\,\Phi_n\,dx \qquad (29)$$

şi cum funcţiile Φ_n, Φ_s sînt ortogonale, atunci ecuaţia de mai sus devine

$$\zeta_n \int_0^L \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EI \frac{\partial^2 \Phi_n}{\partial x^2}\right) \Phi_n + R(x)\, \frac{\partial \Phi_n}{\partial x}\, \Phi_n + \right.$$
$$\left. + \Phi_n^2 \left[- k^2\, \omega^2\, m + \mathrm{i}\, k\, \omega\, A(x) \right] \right\} \mathrm{d}x = \overline{\alpha}_k\, \mathrm{e}^{ik\omega t}, \tag{30}$$

sau ţinînd seama de condiţiile la extremităţi

$$\left(\frac{\partial^2 \Phi_n}{\partial x^2}\right)_{x=0} = \left(\frac{\partial^3 \Phi_n}{\partial x^3}\right)_{x=0} = 0,$$

$$\left(\frac{\partial^2 \Phi_n}{\partial x^2}\right)_{x=L} = \left(\frac{\partial^3 \Phi_n}{\partial x^3}\right)_{x=L} = 0,$$

atunci

$$\int_0^L \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EI \frac{\partial^2 \Phi_n}{\partial x^2}\right) \Phi_n\, \mathrm{d}x = \int_0^L EI \left(\frac{\partial^2 \Phi_n}{\partial x^2}\right)^2 \mathrm{d}x$$

şi ecuaţia (30) devine

$$\zeta_n \left[1 - \frac{k^2 \omega^2}{\nu_n^2} + \mathrm{i}\, \frac{k\omega}{\nu_n^2}\, \frac{\int_0^L A(x)\, \Phi_n^2\, \mathrm{d}x}{\int_0^L m\, \Phi_n^2 \mathrm{d}x} \right] =$$
$$= \frac{\overline{\alpha}_k\, \mathrm{e}^{ik\omega t}}{\int_0^L EI \left(\frac{\partial^2 \Phi_n}{\partial x^2}\right)^2 \mathrm{d}x + \int_0^L R(x)\, \frac{\partial \Phi_n}{\partial x}\, \Phi_n\, \mathrm{d}x}, \tag{31}$$

unde

$$\nu_n^2 = \frac{\int_0^L EI \left(\frac{\partial^2 \Phi_n}{\partial x^2}\right)^2 \mathrm{d}x + \int_0^L R(x) \frac{\partial \Phi_n}{\partial x}\, \Phi_n \mathrm{d}x}{\int_0^L m\, \Phi_n^2\, \mathrm{d}x}.$$

Notînd cu

$$\varepsilon_n = \frac{\int_0^L A(x)\, \Phi_n^2\, \mathrm{d}x}{\int_0^L m\, \Phi_n^2\, \mathrm{d}x}$$

deducem

$$\zeta_n = A_n \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k\omega t+\delta_k)} = \frac{\dfrac{\overline{\alpha}_k \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\omega t}}{\displaystyle\int_0^L EI\left(\frac{\partial^2\Phi_n}{\partial x^2}\right)^2 \mathrm{d}x + \int_0^L R(x)\,\frac{\partial \Phi_n}{\partial x}\,\Phi_n \,\mathrm{d}x}}{1 - \dfrac{k^2\omega^2}{\nu_n^2} + \mathrm{i}\,\dfrac{k\,\omega\,\varepsilon_n}{\nu_n^2}} \cdot \qquad (32)$$

Din condiția ca amplitudinea A_n a acestei mărimi să tindă către infinit sîntem conduși la ecuația frecvenței de rezonanță

$$\omega^4 + \frac{\varepsilon_n^2 - 2\,\nu_n^2}{k^2}\,\omega^2 + \frac{\nu_n^4}{k^4} = 0 \qquad (33)$$

care conține aceleași elemente ca și cea găsită pe altă cale în dezvoltările de mai sus.

Se vede că dacă în ecuția (23) vom face egal cu zero termenul de obicei neglijabil

$$\frac{8\,\rho\,\Phi_n(l)\left(\dfrac{\mathrm{d}\Phi_n}{\mathrm{d}x}\right)_{x=l}}{\beta\, b\, \mathrm{tg}\,\sigma_a}\, V^2 \int_0^{2b}\int_0^{\xi} (\xi - s)\, G(s)\, \mathrm{d}s\, \mathrm{d}\xi$$

și vom include efectul forțelor de reducere în ν_n, atunci ecuația frecvenței de rezonanță (33) este identică cu (23), ceea ce constituie o bună verificare.

În ceea ce privește determinarea formei modale $\Phi_n(x)$, în lucrarea [9] se arată că în mod riguros aceasta este foarte dificilă.

Din acest punct de vedere și mai ales pentru cerințele practice se pot utiliza metodele variaționale obișnuite cu condițiile la limită deja amintite.

În lucrarea noastră [10] se află exemple concrete de determinare a funcției formei modale utilizîndu-se metoda lui Ritz, care pot folosi și pentru cazul de față.

Ipoteza corpului subțire care se face din punct de vedere aerodinamic pentru simplificări poate fi adoptată și din punct de vedere al calculului funcției formei modale. În acest caz se consideră în mod aproximativ corpul rachetei ca un cilindru subțire.

De obicei însă, multe rachete sînt de formă cilindrică ascuțite la vîrf.

Este clar atunci că și într-un caz și într-altul racheta se poate considera ca o bară de secțiune constantă.

Așadar, pentru calcule aproximative pornind de la expresia generală a formei modale

$$\Phi_n(x) = A_{1n}(\cos k_n x + \mathrm{ch}\, k_n x) + A_{2n}(\cos k_n x - \mathrm{ch}\, k_n x) +$$

$$+ A_{3n}(\sin k_n x + \mathrm{sh}\, k_n x) + A_{4n}(\sin k_n x - \mathrm{sh}\, k_n x)$$

cu condițiile la extremități

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2\Phi_n}{\mathrm{d}x^2}\right)_{x=0} = 0, \qquad \left(\frac{\mathrm{d}^3\Phi_n}{\mathrm{d}x^3}\right)_{x=0} = 0,$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2\Phi_n}{\mathrm{d}x^2}\right)_{x=L} = 0, \qquad \left(\frac{\mathrm{d}^3\Phi_n}{\mathrm{d}x^3}\right)_{x=L} = 0,$$

din primele două condiții rezultă că pentru cazul de față funcția formei modale are expresia

$$\Phi_n(x) = A_{1n}(\cos k_n x + \mathrm{ch}\, k_n x) + A_{3n}(\sin k_n x + \mathrm{sh}\, k_n x).$$

Din ultimele două condiții deducem ecuațiile

$$A_{1n}(\mathrm{ch}\, k_n L - \cos k_n L) + A_{3n}(\mathrm{sh}\, k_n L - \sin k_n L) = 0,$$

$$A_{1n}(\sin k_n L + \mathrm{sh}\, k_n L) + A_{3n}(\mathrm{ch}\, k_n L - \cos k_n L) = 0,$$

și din condiția de a nu avea soluții toate nule obținem pentru determinarea lui k_n ecuația

$$1 - \mathrm{ch}\, k_n L \cos k_n L = 0$$

și apoi raportul coeficienților A_{1n}, A_{3n}.

În concluzie, avînd din datele calculului de stabilitate caracteristicile oscilațiilor se pot determina forțele perturbatoare respectiv cele ce rezultă din deformarea corpului rachetei.

Cu acestea putem stabili ecuațiile frecvenței de rezonanță, care ne permit determinarea acesteia, putînd astfel aprecia din stadiul de proiectare dacă pentru o structură dată oscilațiile rachetei în zbor perturbat sînt periculoase sau nu.

Este necesar deci ca frecvența oscilațiilor rachetei în zbor perturbat să fie pe cît posibil mult diferită de cea rezultată din ecuațiile frecvenței de rezonanță pentru ca acest fenomen să nu se producă.

Primită la redacție la 9 februarie 1963

К ВОПРОСУ О ДИНАМИЧЕСКОМ ОТВЕТЕ СТРУКТУРЫ РАКЕТЫ ВО ВРЕМЯ ВОЗМУЩЕННОГО ПОЛЕТА

РЕЗЮМЕ

В работе исследуется задача динамического ответа корпуса ракеты под действием сил, возникающих вследствие колебаний во время возмущенного полета, особенно выявляя условие появления явления резонанса.

Исходя из теории динамического ответа, с одной стороны, и из точной теории изгиба ракеты под действием возмущающих сил вида

$\bar{A}_k e^{ik\omega t}$, с другой стороны, приходим к двум подобным уравнениям, дающим резонансную частоту.

Следовательно, зная из данных расчета на устойчивость характер колебаний, можно определить усилия, возникающие на ракете и на их основании, а также резонансную частоту.

Таким образом, для некоторой структуры прочности и аэродинамической конфигурации можно уже из проектной стадии оценить, приводят ли к резонансу колебания в возмущенном полете или нет.

BIBLIOGRAFIE

1. Н. В. Феодосьев, Б. Г. Синярев, *Введение в ракетную технику*. Оборонгиз, Москва, 1960.
2. L. R. Bisplinghoff, H. Ashley, L. R. Halfman, *Aeroelasticity*. Addison Wesely Publishing Company, Cambridge Mass., 1955.
3. E. Carafoli, *Aerodinamica vitezelor mari*. Edit. Acad. R.P.R., București, 1957.
4. E. J. Froehlich, *Nonstationary Motion of Purely supersonic Wings*. J.A.S., May, 1951.
5. H. W. Dorrance, *Nonsteady Supersonic Flow About Pointed Bodies of Revolution*. J.A.S., August, 1951.
6. L. J. Beharrell, R. H. Friederich, *The Transfer Function of a Rocket-Type Guided Missile with consideration of its Structural Elasticity*. J.A.S., July, 1954.
7. G. A. Flax, L. Goland, *Dynamic Effects in Rotor Blade Bending*. J.A.S., December, 1951.
8. Al. Marinescu, *Teoria elicopterului*. Edit. Acad. R.P.R., București, 1960.
9. A. Bobeszko, J. Kacprzynski, S. Kaliski, *Vibration and Elastic Stability of Slender Bodies in Linearized Supersonic Flow*. Proceedings of vibration Problems, *4* (1959).
10. Al. Marinescu, *Asupra vibrațiilor consolei anticuplu la elicopterele cu un singur rotor*. St. cerc. mec. apl., *1* (1959).

O MANEVRĂ DE TRANSFER ÎNTRE DOUĂ ORBITE ELIPTICE NECOPLANARE

DE

M. M. NIŢĂ [1]

522 : 629.13.3

1. INTRODUCERE. CONSIDERAŢII GENERALE

Din clasa manevrelor de transfer de pe o orbită pe alta, care au drept scop schimbarea elementelor orbitei aparatului cosmic, un interes deosebit îl prezintă manevra destinată schimbării elementelor de poziţie ale orbitei. Acest gen de manevră asigură posibilitatea lansării unui satelit artificial cu o înclinare arbitrară, independent de latitudinea locului de lansare [4], [5], asigură posibilitatea aterizării navelor interplanetare şi a navelor satelit în orice punct de pe suprafaţa globului terestru, independent de înclinarea planului orbitei etc.

Unele din aceste manevre implică şi schimbarea formei orbitei, concomitent cu schimbarea elementelor de poziţie, iar altele păstrează neschimbată forma orbitei. Astfel, W. E. Brunk [3] a analizat o manevră de transfer destinată schimbării planului orbitei, concomitent cu transformarea orbitei eliptice într-o orbită circulară. Problema schimbării unui grup de elemente ale orbitei implică în general stabilirea regimului de funcţionare şi a programului de dirijare a axului motorului de manevră. Problema schimbării elementelor de poziţie ale orbitei satelitului artificial a fost rezolvată de V. F. Ilarionov şi L. M. Şkadov [2], manevra prezentată fiind aplicabilă numai pentru orbite circulare.

În lucrarea de faţă, prezentăm o manevră de transfer aplicabilă pentru orbite eliptice, prin care se realizează schimbarea poziţiei orbitei, lăsînd neschimbaţi parametrii care definesc forma acesteia.

---

[1] Academia Militară Generală.

Considerăm mișcarea unei rachete sub acțiunea atracției Pămîntului, cu următoarele ipoteze :

— masa rachetei variază după legea

$$m = m_0 \exp\left(- a_r \int_0^t \frac{\mathrm{d}t}{v_r}\right), \tag{1}$$

unde $a_r = \text{const.}$ este raportul dintre forța de tracțiune a motorului și masa rachetei, iar v_r reprezintă viteza jetului ;

— racheta are o orientare invariabilă în spațiu ; s-a considerat că axa rachetei este paralelă cu axa OZ a sistemului $OXYZ$ cu originea în centrul O al Pămîntului ;

— Pămîntul este perfect sferic și omogen.

Ecuația mișcării rachetei este

$$\frac{\mathrm{d}\bar{v}}{\mathrm{d}t} = -\frac{K}{r^3}\bar{r} + \bar{a}_r, \tag{2}$$

unde

$$K = fM$$

iar f este constanta atracției universale și M este masa Pămîntului.

Pentru integrarea ecuației diferențiale (2), în lucrarea [1] am introdus un sistem de coordonate curbilinii q_1, q_2, ν, definit de următoarele suprafețe (fig. 1) :

— un paraboloid de revoluție în jurul axei OZ, avînd focarul în originea O, a cărui ecuație este

$$X^2 + Y^2 = 2q_1 Z + q_1^2 ; \tag{3}$$

— un paraboloid de revoluție

$$X^2 + Y^2 = -2q_2 Z + q_2^2 \tag{4}$$

omofocal cu primul paraboloid ;

— un plan care conține axa OZ, a cărui ecuație este

$$Y = X \operatorname{tg} \nu. \tag{5}$$

În sistemul de coordonate q_1, q_2, ν, viteza rachetei este dată de

$$v^2 = \frac{1}{4}\left(\frac{q_1 + q_2}{q_1}\dot{q}_1^2 + \frac{q_1 + q_2}{q_2}\dot{q}_2^2 + 4\, q_1 q_2 \dot{\nu}^2\right) \tag{6}$$

iar ecuația cu derivate parțiale a lui Hamilton-Jacobi devine

$$\frac{4\, q_1}{q_1 + q_2}\left(\frac{\partial V}{\partial q_1}\right)^2 + \frac{4\, q_2}{q_1 + q_2}\left(\frac{\partial V}{\partial q_2}\right)^2 + \frac{1}{q_1 q_2}\left(\frac{\partial V}{\partial \nu}\right)^2 - 2\,(U + \alpha_1) = 0. \tag{7}$$

Aplicînd o teoremă a lui P. Stäckel se obține în final soluția ecuației (7):

$$\frac{q_1+q_2}{2}\cdot\frac{\mathrm{d}q_1}{\mathrm{d}t}=\sqrt{P_1(q_1)}, \tag{8}$$

$$\frac{q_1+q_2}{2}\cdot\frac{\mathrm{d}q_2}{\mathrm{d}t}=\sqrt{P_2(q_2)}, \tag{9}$$

$$q_1 q_2\cdot\frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}t}=\sqrt{2\alpha_3}, \tag{10}$$

unde

$$P_1(q_1) = -a_r q_1^3 + 2\alpha_1 q_1^2 + 2(K+\alpha_2)\,q_1 - 2\alpha_3, \tag{11}$$

$$P_2(q_2) = a_r q_2^3 + 2\alpha_1 q_2^2 + 2(K-\alpha_2)\,q_2 - 2\alpha_3, \tag{12}$$

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ fiind constante de integrare (α_1 este constanta energiei).

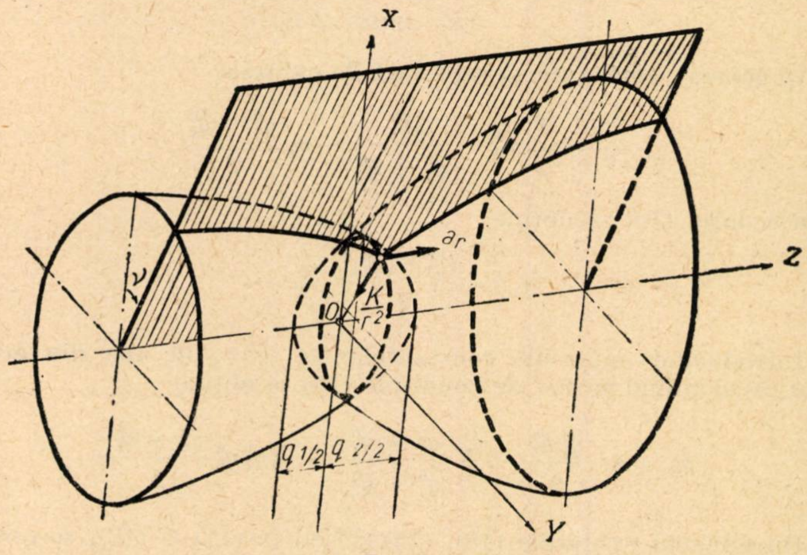


Fig. 1

Din analiza ecuațiilor (8), (9) și (10) am stabilit în lucrarea [1] clasele de traiectorii ale rachetei. În cele ce urmează ne vom ocupa numai de una din aceste clase de traiectorii obținută în cazul cînd ecuațiile

$$P_1(q_1)=0 \tag{13}$$

$$P_2(q_2)=0 \tag{14}$$

au cîte o rădăcină dublă, iar valorile inițiale q_1^0 și q_2^0 ale coordonatelor q_1 și q_2 sînt egale respectiv cu rădăcinile duble ale ecuațiilor (13) și (14).

În acest caz, rezultă că

$$\left\{\begin{aligned} &\dot{q}_1 = 0\,;\; q_1 = \text{const.} = q_1^0, \\ &\dot{q}_2 = 0\,;\; q_2 = \text{const.} = q_2^0, \end{aligned}\right. \tag{15}$$

şi prin urmare racheta se va mişca pe cercul de intersecţie a paraboloizilor $q_1 = q_1^0$ şi $q_2 = q_2^0$. Avînd în vedere condiţiile (15), din relaţia (6) rezultă că

$$v^2 = q_1^0\, q_2^0\, \dot{\nu}^2,$$

ceea ce înseamnă că racheta se mişcă într-un plan normal pe axa OZ, iar din ecuaţia (10) se obţine

$$\dot{\nu} = \text{const.} = \dot{\nu}_0 \tag{16}$$

adică

$$v = \text{const.} = v_0. \tag{17}$$

În general, constanta α_1 este dată de expresia

$$\alpha_1 = \frac{1}{2}\, v_0^2 - \frac{2K}{q_1^0 + q_2^0} - a_r \frac{q_2^0 - q_1^0}{2} \tag{18}$$

iar din ecuaţia (10) se obţine

$$\alpha_3 = \frac{(q_1^0)^2\, (q_2^0)^2}{2}\, \dot{\nu}_0^2. \tag{19}$$

Introducînd expresiile constantelor α_1 şi α_3 în una din ecuaţiile (8) sau (9) şi ţinînd seama de condiţiile (15) se obţine

$$\alpha_2 = a_r \frac{q_1^0\, q_2^0}{2} - K \frac{q_2^0 - q_1^0}{q_1^0 + q_2^0} + \dot{\nu}_0^2\, q_1^0\, q_2^0\, \frac{q_2^0 - q_1^0}{2}. \tag{20}$$

Introducînd expresiile (18), (19) şi (20) în (11) şi (12), se obţine în final că ecuaţiile (13) şi (14) au cîte o rădăcină dublă egală respectiv cu q_1^0 şi q_2^0, dacă

$$\dot{\nu}_0^2 = \frac{8K}{(q_1^0 + q_2^0)^3}, \tag{21}$$

$$a_r = 4\, K\, \frac{q_2^0 - q_1^0}{(q_1^0 + q_2^0)^3}, \tag{22}$$

$$v_0^2 = 8\, K\, \frac{q_1^0\, q_2^0}{(q_1^0 + q_2^0)^3}. \tag{23}$$

Ţinînd seama de relaţiile de transformare a coordonatelor (3), (4) şi (5), condiţiile de mai sus devin

$$\dot{\nu}_0^2 = \frac{K}{r_0^3}, \tag{24}$$

$$a_r = \frac{K}{r_0^3} Z_0 = \frac{K}{r_0^2} \sin \beta, \tag{25}$$

$$v_0^2 = \frac{K}{r_0^3} (X_0^2 + Y_0^2) = \frac{K}{r_0} \cos^2 \beta, \tag{26}$$

unde X_0, Y_0, Z_0 sînt coordonatele carteziene ale poziţiei iniţiale a rachetei, r_0 este distanţa rachetei faţă de centrul Pămîntului iar β este complementul unghiului format de raza vectoare a poziţiei iniţiale şi axa OZ.

Totodată, din relaţiile (3), (4) şi (5), avînd în vedere condiţiile (15), se obţine

$$\dot{X}_0 = - \dot{\nu}_0 Y_0, \quad \dot{Y}_0 = \dot{\nu}_0 X_0, \quad \dot{Z}_0 = 0,$$

de unde rezultă imediat

$$\bar{r}_0 \cdot \bar{v}_0 = 0. \tag{27}$$

Din cele arătate mai sus, rezultă că dacă la momentul iniţial viteza rachetei satisface condiţia (26) iar vectorul viteză este conţinut într-un plan paralel cu planul XOY, fiind perpendicular pe vectorul de poziţie $\bar{r}_0$, iar acceleraţia a_r corespunzătoare tracţiunii motorului rachetă satisface condiţia (25), atunci racheta se va mişca uniform pe un cerc conţinut într-un plan Π, paralel cu planul XOY, a cărui ecuaţie este

$$Z = Z_0. \tag{28}$$

Cercul descris de rachetă în planul Π are raza egală cu

$$R = r_0 \cos \beta$$

şi centrul în punctul O' $(0,0, Z_0)$.

Evident, în timpul mişcării raza vectoare a poziţiei rachetei descrie un con circular drept, a cărui axă coincide cu axa OZ şi al cărui unghi de deschidere este egal cu $\pi - 2\beta$. De asemenea, se observă că relaţia (24), poate fi scrisă sub forma

$$v_0^2 = v_c^2 \cos^2 \beta, \tag{29}$$

unde v_c este viteza circulară la distanţa r_0 de centrul Pămîntului.

2. SCHIMBAREA PLANULUI ORBITEI SATELITULUI ARTIFICIAL

În cele ce urmează, vom analiza manevrele posibile ale satelitului artificial, considerînd ca mişcare de manevră mişcarea analizată în paragraful anterior. Din condiţiile (27) şi (29) rezultă că manevra poate începe în momentul cînd satelitul artificial se găsește la apogeul orbitei inițiale definită de elementele i_0, Ω_0, ω_0, e_0, p_0 (fig. 2) unde :

i_0 — înclinarea orbitei față de planul ecuatorial ;
Ω_0 — longitudinea nodului ascendent ;
ω_0 — argumentul perigeului măsurat față de nodul ascendent (distanța dintre perigeu și nod) ;
e_0 — excentricitatea orbitei ;
p_0 — parametrul orbitei.

În definirea elementelor de poziție ale orbitei s-a considerat sistemul $Oxyz$, a cărui axă Ox este orientată spre punctul vernal iar axa Oz este axa polilor, orientată spre nord.

Introducem un sistem de coordonate $O\xi\eta\zeta$, definit astfel încît axa $O\xi$ este orientată pe linia apsidelor orbitei inițiale, spre apogeu, iar axa $O\zeta$ este normală pe planul orbitei (fig. 2). Este ușor de văzut că acest sistem de coordonate poate fi obținut din sistemul $Oxyz$ printr-o rotație cu unghiul Ω_0 în jurul axei polilor, o rotație în jurul liniei nodurilor cu unghiul i_0 și o rotație în jurul normalei pe planul orbitei cu unghiul $\omega_0 - \pi$.

Orientarea sistemului $OXYZ$ față de care, în condițiile stabilite în paragraful precedent, racheta are o mișcare circulară uniformă într-un plan normal pe axa OZ, este definită de orientarea vectorului forței de tracțiune a motorului de manevră. Avînd în vedere că raza vectoare a

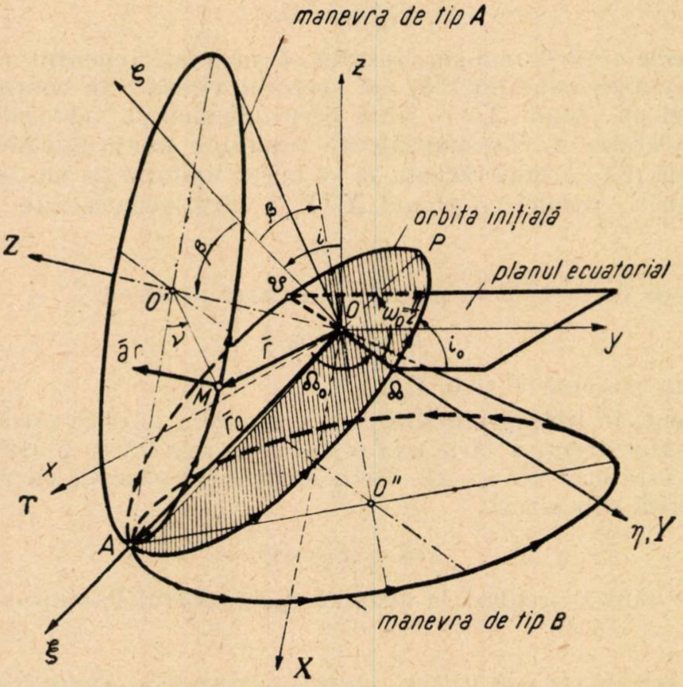


Fig. 2

poziției inițiale formează unghiul $\frac{\pi}{2} - \beta$ cu axa OZ, paralelă cu forța de tracțiune a motorului de manevră, și că manevra trebuie să înceapă în momentul cînd satelitul se găsește la apogeul orbitei inițiale, rezultă că sistemul $OXYZ$ poate fi obținut din sistemul $O\xi\eta\zeta$ printr-o rotație cu unghiul β în jurul axei $O\eta$. În acest caz, dacă viteza satelitului la apogeu v_0 satisface condiția (29) iar accelerația a_r satisface condiția (25), unde r_0 este distanța la apogeu a orbitei inițiale, fiind orientată paralel cu axa OZ, atunci în timpul manevrei satelitul artificial are o mișcare circulară uniformă într-un plan paralel cu planul XOY. Se observă că planul în care are loc manevra, formează unghiul β cu planul orbitei inițiale.

Din expresia generală a excentricității unui satelit artificial [6]

$$e_0^2 = 1 + \frac{2\, r_0 v_0^2 \sin^2 \alpha_0}{K} \left(\frac{r_0 v_0^2}{2K} - 1 \right),$$

unde α_0 este unghiul format de vectorii $\bar{r}_0$ și $\bar{v}_0$, considerînd că v_0 este viteza la perigeu sau la apogeu $\left(\alpha_0 = \frac{\pi}{2} \right)$ rezultă

$$e_0 = \pm \left(1 - \frac{v_0^2}{v_c^2} \right), \tag{30}$$

unde

$$v_c = \sqrt{\frac{K}{r_0}}.$$

În formula (30) se consideră semnul + cînd v_0 este viteza la apogeu și semnul — cînd v_0 este viteza la perigeu. În cazul de față, considerînd că v_0 este viteza la apogeu, rezultă

$$e_0 = 1 - \left(\frac{v_0}{v_c} \right)^2 \tag{31}$$

sau, ținînd seama de (29),

$$e_0 = \sin^2 \beta$$

de unde

$$\beta = \pm \arcsin \sqrt{e_0}. \tag{32}$$

De asemenea, din condiția (25) se obține

$$a_r = \pm g \sqrt{e_0}. \tag{33}$$

Se observă că pentru fiecare orbită inițială avînd o anumită excentricitate e_0, există două valori ale unghiului β care definește poziția planului în care are loc manevra față de planul orbitei inițiale ; valoarea accelerației a_r corespunzătoare tracțiunii motorului de manevră este determinată de excentricitatea și înălțimea apogeului orbitei inițiale. În cele ce urmează vom numi ,,manevră de tip A'' cazul cînd în relațiile

(32) şi (33) se consideră primul semn şi ,,manevră de tip B'' cazul cînd se consideră al doilea semn (fig. 2).

Evident, manevra descrisă poate avea loc pentru orbitele a căror excentricitate satisface inegalitatea

$$0 < e_0 < 1,$$

întrucît pentru orbite circulare ($e_0 = 0$) rezultă că tracţiunea motorului este nulă iar pentru $e_0 = 1$ punctul de începere a manevrei este la infinit. În legătură cu schimbarea planului orbitelor circulare, menţionăm metoda prezentată în [2] în care se consideră acelaşi tip de motor ($a_r = \text{const.}$), însă, spre deosebire de manevra analizată în prezenta lucrare, se consideră că axul motorului are o orientare variabilă în timpul manevrei.

În cele ce urmează, vom nota prin i, Ω, ω, p, e elementele orbitei finale, înţelegînd prin aceasta orbita satelitului artificial după încetarea manevrei.

În figura 2, s-a notat cu A poziţia iniţială a satelitului şi cu M poziţia acestuia la sfîrşitul manevrei; notînd cu O' intersecţia axei OZ cu planul orbitei de manevră, poziţia satelitului la sfîrşitul manevrei este determinată de unghiul $\nu = \dot{\nu}t = \widehat{AO'M}$, măsurat în planul de manevră. Astfel poziţia satelitului la sfîrşitul manevrei, în raport cu sistemul $OXYZ$, este dată de

$$X = r_0 \cos\beta \cos\nu,\; Y = r_0 \cos\beta \sin\nu,\; Z = r_0 \sin\beta, \tag{34}$$

iar componentele vitezei faţă de acelaşi sistem sînt

$$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} = -v_0 \sin\nu,\quad \frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}t} = v_0 \cos\nu,\quad \frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}t} = 0. \tag{35}$$

Este uşor de văzut că relaţiile de transformare între sistemele $Oxyz$ şi $OXYZ$ se prezintă sub forma

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}, \tag{36}$$

unde B este matricea

$$B = \begin{Vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{Vmatrix} \tag{37}$$

iar

$$b_{11} = -\cos\beta \cos\omega_0 \cos\Omega_0 + (\cos\beta \sin\omega \cos i_0 - \sin\beta \sin i_0) \sin\Omega_0,$$

$$b_{12} = \sin\omega_0 \cos\Omega_0 + \cos\omega_0 \cos i_0 \sin\Omega_0,$$

$$b_{13} = -\sin\beta \cos\omega_0 \cos\Omega_0 + (\sin\beta \sin\omega_0 \cos i_0 + \cos\beta \sin i_0) \sin\Omega_0,$$

$$b_{21} = -\cos\beta\cos\omega_0\sin\Omega_0 - (\cos\beta\sin\omega_0\cos i_0 - \sin\beta\sin i_0)\cos\Omega_0,$$

$$b_{22} = \sin\omega_0\sin\Omega_0 - \cos\omega_0\cos i_0\cos\Omega_0,$$

$$b_{23} = -\sin\beta\cos\omega_0\sin\Omega_0 - (\sin\beta\sin\omega_0\cos i_0 + \cos\beta\sin i_0)\cos\Omega_0,$$

$$b_{31} = -\cos\beta\sin\omega_0\sin i_0 - \sin\beta\cos i_0,$$

$$b_{32} = -\cos\omega_0\sin i_0,$$

$$b_{33} = -\sin\beta\sin\omega_0\sin i_0 + \cos\beta\cos i_0.$$

Poziția și viteza satelitului la sfîrșitul manevrei, în raport cu sistemul $Oxyz$, se determină cu ajutorul relațiilor (34), (35) și (36). Astfel, longitudinea nodului ascendent și înclinarea orbitei finale sînt date de

$$\operatorname{tg}\Omega = -\frac{C_1}{C_2}, \tag{38}$$

$$\cos i = \frac{C_3}{C}. \tag{39}$$

Aici, C_1 C_2, C_3 sînt componentele, după axele sistemului $Oxyz$, ale vectorului $\bar{C}$ dat de

$$\bar{C} = \bar{r} \times \bar{v},$$

unde $\bar{r}$ și $\bar{v}$ sînt respectiv vectorul de poziție și viteza rachetei la sfîrșitul manevrei, iar

$$C = (C_1^2 + C_2^2 + C_3)^{1/2}.$$

Astfel, din relațiile (32), (34), (35), (36), (38) și (39) se obține

$$\Omega - \Omega_0 = \operatorname{arctg}\frac{A_1\sin\nu + B_1(1-\cos\nu)}{A_2\sin\nu + B_2\cos\nu + D_2}, \tag{40}$$

unde

$$\begin{gathered} A_1 = \pm\sqrt{e_0}\sin\omega_0,\ B_1 = \pm\sqrt{e_0(1-e_0)}\cos\omega_0, \\ A_2 = \pm\sqrt{e_0}\cos\omega_0\cos i_0,\ B_2 = \pm\sqrt{e_0(1-e_0)}\sin\omega_0\cos i_0 - e_0\sin i_0, \\ D_2 = (e_0-1)\sin i_0 \mp \sqrt{e_0(1-e_0)}\sin\omega_0\cos i_0, \end{gathered} \tag{41}$$

și

$$\begin{aligned} i = \arccos\,[(1-e_0)\cos i_0 \pm \sqrt{e_0}\cos\omega_0\sin i_0\sin\nu\ \pm \\ \pm\sqrt{e_0(1-e_0)}\sin\omega_0\sin i_0(\cos\nu - 1) + e_0\cos i_0\cos\nu]. \end{aligned} \tag{42}$$

În relațiile de mai sus, cît și în cele ce urmează, la termenii cu semn ambiguu se va considera primul semn în cazul manevrei de tip A și al doilea semn în cazul manevrei de tip B.

Totodată, întrucît în cazul manevrei considerate

$$r = r_0 = \text{const.},$$

$$v = v_0 = \text{const.},$$

$$\bar{r} \cdot \bar{v} = \bar{r}_0 \cdot \bar{v}_0 = 0,$$

rezultă că

$$e = e_0, \tag{43}$$

$$p = p_0, \tag{44}$$

$$\theta^* = \theta_0^* = \pi, \tag{45}$$

unde θ^* și θ_0^* reprezintă argumentul perigeului măsurat respectiv față de vectorii $\bar{r}$ și $\bar{r}_0$. Argumentul perigeului orbitei finale, față de nodul ascendent, este dat de relația

$$\omega = \arccos \frac{1}{r} (x \cos \Omega + y \sin \Omega), \tag{46}$$

unde x și y sînt dați de (34) și (36) iar Ω este dat de (40). Deci

$$\omega = F\,(\nu,\ i_0,\ \Omega_0,\ \omega_0,\ e_0). \tag{47}$$

Din relațiile (40), (42), (43), (44), (45) și (47) se observă că manevra descrisă schimbă longitudinea nodului ascendent, înclinarea planului orbitei și distanța perigeului față de nod, lăsînd neschimbată forma orbitei; este ușor de văzut că relațiile (38), (40) și (44), cu ajutorul cărora se determină poziția orbitei finale, sînt funcții periodice de timp cu perioada

$$T = \frac{2\pi}{\dot{\nu}} = \frac{2\pi r_0}{v_c}. \tag{48}$$

Totodată, din relația (45) rezultă că poziția satelitului la sfîrșitul manevrei reprezintă apogeul orbitei finale. Prin urmare, în cadrul manevrei considerate orbita finală se obține rotind planul orbitei inițiale în jurul a trei axe și anume: o rotație cu unghiul $\Omega - \Omega_0$ în jurul axei polilor, rotație cu unghiul $i - i_0$ în jurul liniei nodurilor și o rotație cu unghiul $\omega - \omega_0$ în jurul normalei pe planul orbitei.

3. CONCLUZII

Din relația (42) se observă că în cazul cînd orbita inițială este o orbită ecuatorială iar satelitul are o mișcare în sens direct ($i_0 = 0$), înclinarea maximă a orbitei finale este

$$i_{\max} = 2 \arcsin \sqrt{e_0}, \tag{49}$$

iar dacă satelitul are o mișcare în sens retrograd ($i_0 = \pi$), înclinarea minimă a orbitei finale este

$$i_{\min} = \pi - 2 \arcsin \sqrt{e_0}. \tag{50}$$

Durata manevrei de transfer în aceste cazuri este dată de

$$t = \frac{T}{2} \tag{51}$$

unde T este perioada mișcării de manevră dată de (48).

De asemenea, în cazul cînd orbita inițială este o orbită polară $\left(i_0 = \frac{\pi}{2}\right)$ înclinarea maximă, respectiv minimă, a orbitei finale este :

$$i_{\max} = \arccos \sqrt{e_0}\,[(-1)^n \sqrt{1-e_0} \sin \omega_0 - \sqrt{(1-e_0) \sin^2 \omega_0 + \cos^2 \omega_0}], \tag{52}$$

$$i_{\min} = \arccos \sqrt{e_0}\,[(-1)^n \sqrt{1-e_0} \sin \omega_0 + \sqrt{(1-e_0) \sin^2 \omega_0 + \cos^2 \omega_0}], \tag{53}$$

unde $n = 1$ în cazul manevrei de tip A și $n = 2$ în cazul manevrei de tip B.

Se observă că valoarea cea mai mare a lui $i_{\max}$,

$$i_{\max \max} = \frac{\pi}{2} + 2 \arcsin \sqrt{e_0}, \tag{54}$$

se obține dacă $\omega_0 = \frac{\pi}{2}$, în cazul manevrei de tip A, sau $\omega_0 = \frac{3\pi}{2}$, în cazul manevrei de tip B, iar valoarea cea mai mică a lui $i_{\min}$,

$$i_{\min \min} = \frac{\pi}{2} - 2 \arcsin \sqrt{e_0}, \tag{55}$$

se obține dacă $\omega_0 = \frac{3\pi}{2}$, în cazul manevrei de tip A, sau $\omega_0 = \frac{\pi}{2}$, în cazul manevrei de tip B. Aceste valori se obțin dacă durata manevrei are valoarea dată de (51).

Din relația (40) se observă că se pot obține orbite ecuatoriale cu sens direct de mișcare ($i = 0$) dacă înclinarea orbitei inițiale și argumentul perigeului ω_0 satisfac condițiile :

$$i_0 \leqslant 2 \arcsin \sqrt{e_0}, \tag{56}$$

$$\omega_0^* = (1 + k)\, \pi \pm (1 - 2\,k) \arcsin \sqrt{\frac{1 - e_0}{e_0}}\, \operatorname{tg} \frac{i_0}{2} \quad (k = 0{,}1), \tag{57}$$

iar orbite ecuatoriale cu sens retrograd de mișcare ($i = \pi$), se pot obține dacă

$$i_0 \geqslant \pi - 2 \arcsin \sqrt{e_0}, \tag{58}$$

$$\omega_{00}^* = (1 - k)\, \pi \pm (2k - 1) \arcsin \sqrt{\frac{1 - e_0}{e_0}}\, \operatorname{ctg} \frac{i_0}{2} \quad (k = 0,\ 1). \tag{59}$$

Orbita devine ecuatorială pentru

$$\nu = \nu^\star, \tag{60}$$

unde

$$\nu^\star = 2\,(1 - k)\,\pi + (2k - 1)\arccos\frac{\cos i_0 + e_0 - 1}{e_0}. \tag{61}$$

În această formulă se va considera pentru k valoarea utilizată în formulele (57) sau (59).

Din relația (40) se observă că în cazul cînd sînt îndeplinite condițiile (56) și (57) sau (58) și (59), funcția $\Omega = \Omega(\nu)$ prezintă pentru $\nu = \nu^\star$, o discontinuitate de speța întîi și anume :

$$\Omega_{\nu^\star_{0+}} - \Omega_{\nu^\star_{0-}} = (-1)^n\,\pi$$

și

$$\Omega_{\nu^\star_{1+}} - \Omega_{\nu^\star_{1-}} = -(-1)^n\,\pi,$$

unde $n = 1$ sau $n = 2$ după cum ω_0 tinde către $\omega^\star_{00}$ sau respectiv către $\omega^\star_{01}$ prin valori crescătoare sau prin valori descrescătoare ; aici s-au notat

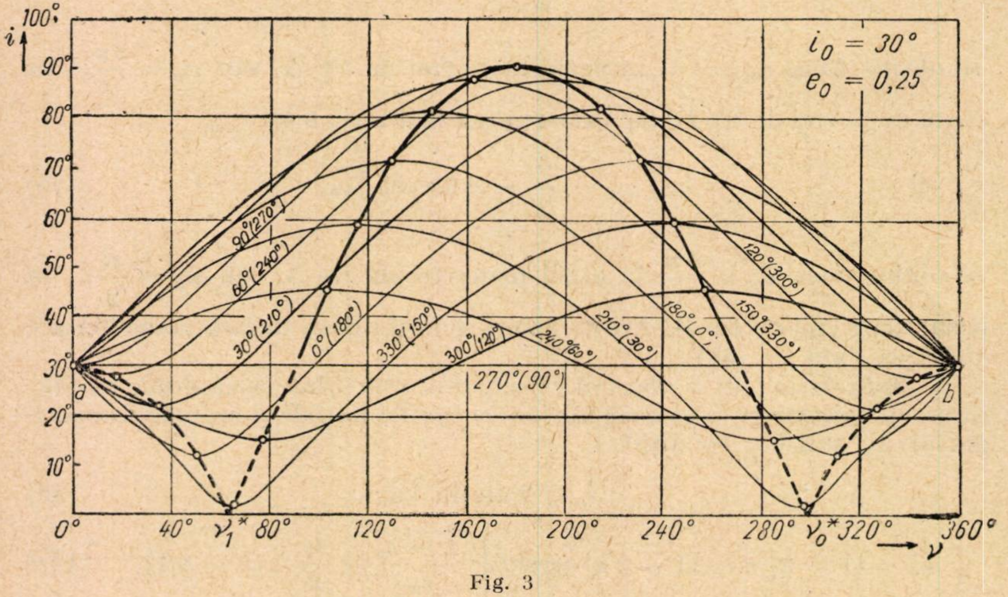


Fig. 3

prin $\nu^\star_0$, $\nu^\star_1$ și prin $\omega^\star_{00}$, $\omega^\star_{01}$, mărimile $\nu^\star$ și $\omega^\star_0$ date de (60) și (57) pentru $k = 0$ și respectiv $k = 1$.

În figurile 3 și 4 s-au reprezentat graficele funcțiilor (42) și (40) în cazul cînd $i_0 = 30°$ și $e_0 = 0{,}25$, considerînd diferite valori ale unghiului ω_0 (valorile din paranteze corespund manevrei de tip B). În figura 4 s-au trasat cu linie întreruptă funcțiile $\Omega = \Omega(\nu)$ pentru cazurile cînd $\omega_0 =$

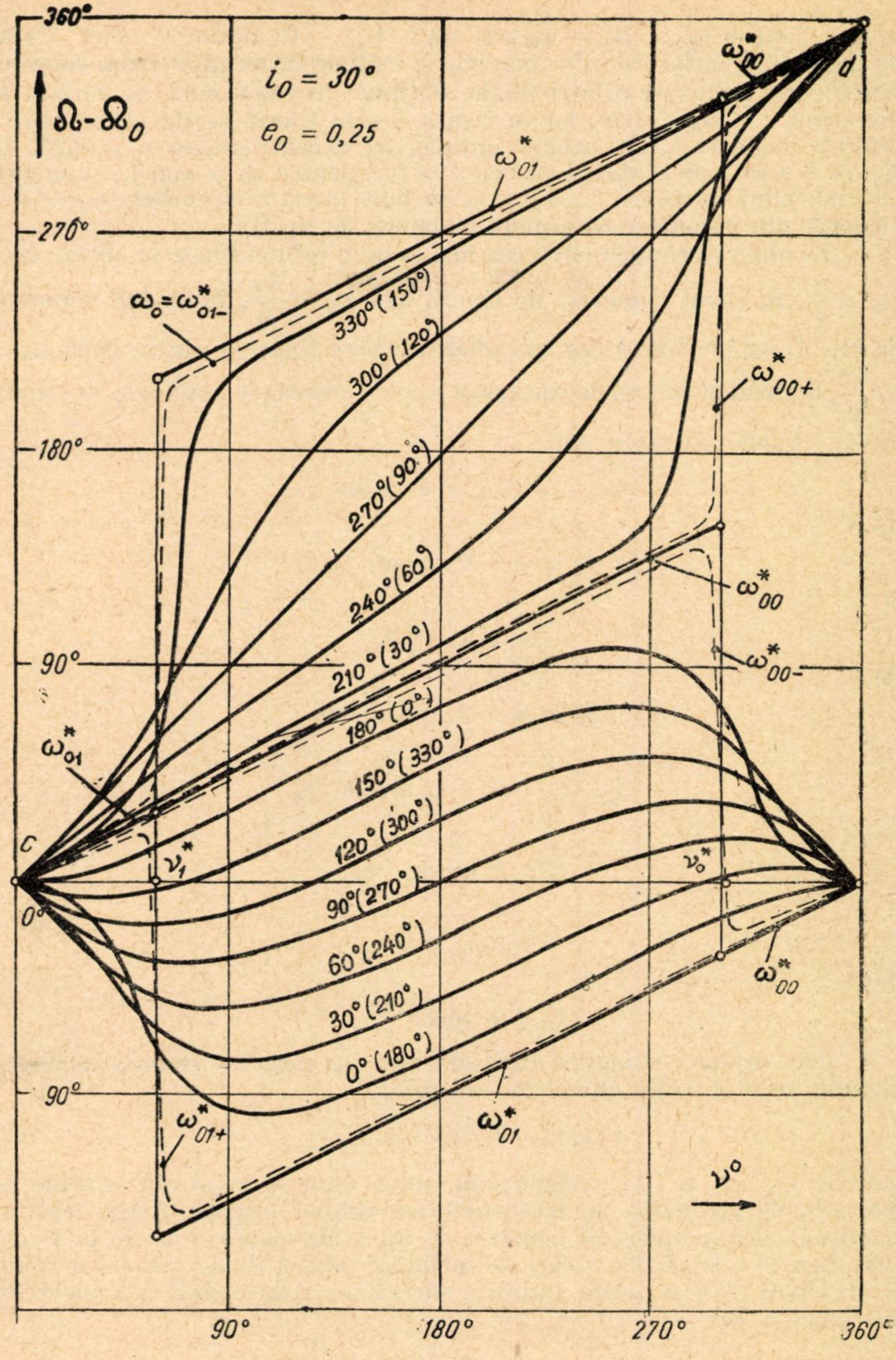

360°
$i_0 = 30°$
$e_0 = 0,25$
$\Omega - \Omega_0$
ω^*_{00}
d
ω^*_{01}
270°
$\omega_0 = \omega^*_{01-}$
330° (150°)
300° (120°)
ω^*_{00+}
180°
270° (90°)
240° (60°)
ω^*_{00}
90°
210° (30°)
ω^*_{00-}
180° (0°)
ω^*_{01}
150° (330°)
120° (300°)
c
ν^*_1
ν^*_0
0°
90° (270°)
60° (240°)
ω^*_{00}
30° (210°)
0° (180°)
90°
ω^*_{01}
ω^*_{01+}
ν^0
90°
180°
270°
360°

Fig. 4

$= \omega^*_{00+}$, $\omega_0 = \omega^*_{00-}$, $\omega_0 = \omega^*_{01+}$ şi $\omega_0 = \omega^*_{01-}$. În figura 3 s-au trasat cu linie plină curba valorilor maxime şi cu linie întreruptă curba valorilor minime ale înclinării orbitei finale, obţinute în cazul cînd ω_0 variază în domeniul $0 \leqslant \omega_0 \leqslant 360°$, iar în figura 5 s-au trasat aceste curbe pentru diferite înclinări i_0 ale orbitei iniţiale, cu excentricitatea $e_0 = 0{,}25$. În figura 5 s-au reprezentat şi curbele $i = f(\nu)$ pentru $\omega_0 =$ const., şi anume, cu linie plină curbele $i_{\max} = f(\nu)$ şi cu linie întreruptă curbele $i_{\min} = f(\nu)$ (valorile din paranteze corespund manevrei de tip B).

Se observă că înclinarea cea mai mare a orbitei finale se obţine dacă $\omega_0 = \dfrac{\pi}{2}$, în cazul manevrei de tip A, sau $\omega_0 = \dfrac{3\pi}{2}$, în cazul manevrei de tip B, iar înclinarea cea mai mică a orbitei finale se obţine dacă $\omega_0 = \dfrac{3\pi}{2}$, în cazul manevrei de tip A, sau $\omega_0 = \dfrac{\pi}{2}$, în cazul manevrei de tip B. Aceste valori extreme sînt

$$i_{\max\max} = i_0 + 2 \arcsin \sqrt{e_0},$$

dacă

$$i_0 < \pi - 2 \arcsin \sqrt{e_0}$$

şi

$$i_{\max\max} = \pi$$

dacă

$$i_0 \geqslant \pi - 2 \arcsin \sqrt{e_0},$$

iar

$$i_{\min\min} = i_0 - 2 \arcsin \sqrt{e_0}$$

dacă

$$i_0 > 2 \arcsin \sqrt{e_0}$$

şi

$$i_{\min\min} = 0$$

dacă

$$i_0 \leqslant 2 \arcsin \sqrt{e_0}.$$

Prin urmare, manevra analizată mai sus permite variaţia înclinării planului orbitei finale numai în intervalul

$$i_{\max\max} \geqslant i \geqslant i_{\min\min}, \tag{62}$$

valorile $i_{\max\max}$ şi $i_{\min\min}$ depinzînd, după cum se vede din relaţiile de mai sus, de înclinarea şi excentricitatea orbitei iniţiale. Acest rezultat se obţine dacă se aplică fie manevra de tip A, fie manevra de tip B. Eventual, pentru a se obţine valori ale înclinării orbitei finale, situate în afara intervalului (62), se poate stabili o succesiune convenabilă a manevrelor de tip A şi B.

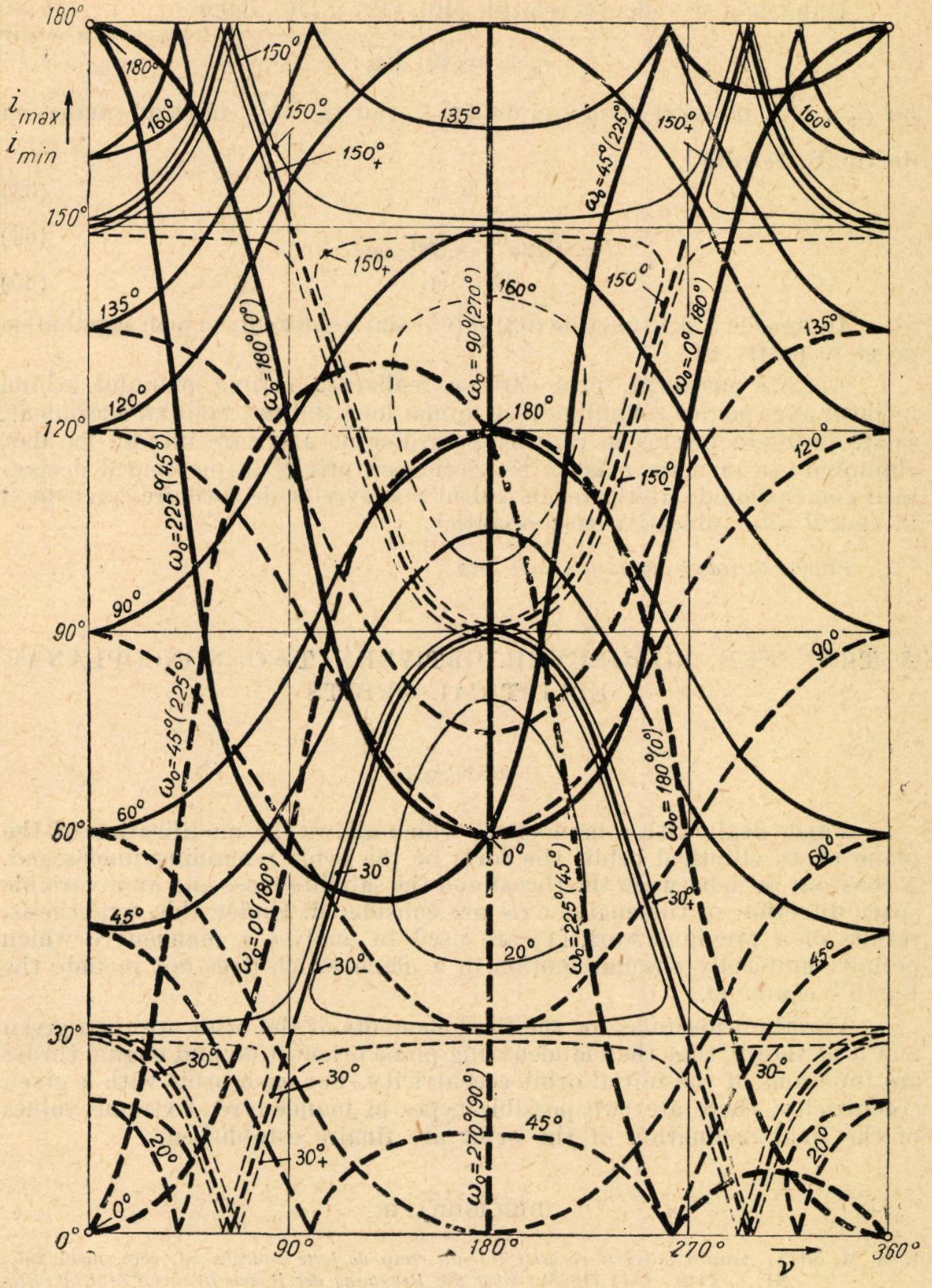

180°
i_{max}
i_{min}
150°
120°
90°
60°
30°
0°
90°
180°
270°
360°
ν
180°
160°
150°
150°−
150°+
135°
120°
90°
60°
45°
30°
30°−
30°+
20°
0°
$\omega_0=45°(225°)$
$\omega_0=90°(270°)$
$\omega_0=180°(0°)$
$\omega_0=0°(180°)$
$\omega_0=225°(45°)$
$\omega_0=270°(90°)$

Fig. 5

După cum se vede din relaţiile (40), (42) şi (46), dacă

$$i_0 = \arcsin \sqrt{e_0}$$

iar $\omega_0 = \frac{3\pi}{2}$, în cazul manevrei de tip A, sau $\omega_0 = \frac{\pi}{2}$, în cazul manevrei de tip B, rezultă

$$i = i_0, \tag{63}$$

$$\omega = \omega_0, \tag{64}$$

$$\Omega = \dot{\nu} t. \tag{65}$$

În figurile 3 şi 4 funcţiile (63) şi (65) sînt reprezentate prin segmentele *ab* şi respectiv *cd*.

Această manevră, prin care se realizează rotirea planului orbitei în jurul axei polilor schimbîndu-se numai longitudinea nodului ascendent, poate prezenta interes în cadrul operaţiilor de aterizare într-un loc dat, eliminîndu-se în mare măsură restricţiile cu privire la momentul declanşării comenzilor de aterizare, în cadrul manevrelor de întîlnire, precum şi în cadrul altor obiective cosmonautice.

Primită la redacţie la 12 februarie 1963

A TRANSFER MONOEUVRE BETWEEN TWO NONCOPLANAR ELLIPTICAL ORBITS

ABSTRACT

Paper deals with a manoeuvre which allows the modification of the plane of an elliptical orbit, the form of the orbit remaining unchanged. A constant ratio between the thrust and the satellite mass and an invariable space direction of the engine axis are considered. Under this hypothesis, results of a previous work [1] are used to analyse a manoeuvre which permits uniformly circular motion in a plane which does not include the Earth's center O.

Variation formulas for the final elements of the orbit are then given and it is shown that the manoeuvring plane orientation and engine thrust are functions of the initial orbit eccentricity. For each orbit with a given eccentricity, there are two possible types of manoeuvre. Extreme values of the final inclination of the orbit are finally established.

BIBLIOGRAFIE

1. M. M. NIŢĂ, *Asupra mişcării rachetei într-un cîmp de forţe centrale*. St. cerc. mec. apl., **XI**, *6*, 1419—1444 (1960); *Über die Bewegung der Rakete in einem Zentralkräftefeld*. Rev. Méc. Appl., **VI**, *2*, 172—190 (1961).

2. В. Ф. ИЛЛАРИОНОВ, Л. М. ШКАДОВ, *Поворот плоскости круговой орбиты спутника. Прикладная математика и механика*, **XXVI**, 15—21 (1962).
3. W. E. BRUNK, *Transfer between noncoplanar orbits with minimum requirements*. Techn. Session preprints Amer. Astronaut. Soc., *69*, 1—21 (1960).
4. R. F. HOELKER, R. SILBER, *Analysis of injection schemes for obtaining a twenty-four hour orbit*. I.A.S. Paper, *75*, 1—40 (1960).
5. R. P. HAVILAND, C. M. HOUSE, *Nonequatorial launching to equatorial orbits and general non-planar launching*. I.A.S. Paper, *147*, 1—34 (1962).
6. V. VÂLCOVICI, ST. BĂLAN, R. VOINEA, *Mecanică teoretică*. Edit. tehnică, București, 1959, 384.

STUDII

PROGRAMAREA OPTIMĂ A DIRECȚIEI TRACȚIUNII UNEI RACHETE BALISTICE CARE SE MIȘCĂ ÎN AER

DE

PETRE BRĂDEANU [1]

531.5 : 533

1. INTRODUCERE

În lucrarea de față ne ocupăm cu determinarea programului optim de dirijare a direcției tracțiunii unei rachete balistice care se mișcă în aer presupunînd că rezistența aerului este proporțională cu viteza.

În lucrarea [1] D. Lawden a dat o teorie generală a unor astfel de probleme și a studiat cazul particular al mișcării unei rachete balistice în vid. Această teorie rezultă, de altfel, direct din procedeele cunoscute ale calculului variațional.

Pentru rezolvarea problemei propuse folosim metoda indicată de D. Lawden, pe care o expunem sumar în cele ce urmează.

Se consideră că ecuațiile mișcării plane a rachetei în planul ecuatorului sînt de forma

$$\ddot{x}_i + F_i = fl_i, \quad i = 1, 2, \tag{1}$$

unde (x_1, x_2) definesc poziția rachetei pe partea activă a traiectoriei, (F_1, F_2) sînt componentele accelerației care se datorește rezistenței aerului, forței gravitaționale, forței Coriolis și unde (fl_1, fl_2) sînt componentele accelerației tracțiunii reactive. Mărimile l_1 și l_2 sînt cosinușii directori ai accelerației reactive $\vec{f}$, adică ai tracțiunii, și ele definesc regimul de dirijare a direcției tracțiunii. Funcțiile $f(t)$ și $l_i(t)$ sînt arbitrare și alegerea lor se face în raport cu necesitățile și nivelul de dezvoltare a tehnicii rachetelor. Dacă se ia $f = f(t) + \delta f(t)$, $l_i = l_i(t) + \delta l_i(t)$ atunci vor rezulta pentru mișcare funcțiile $x_i = x_i(t) + \delta x_i(t)$, unde δf, δl_i și δx_i $(i = 1, 2)$, funcții infinit mici de timp, sînt variațiile funcțiilor respective. Vom considera că funcția $f(t)$ este fixată din punct de vedere variațional.

---

[1] Universitatea „Babeș-Bolyai”, Cluj.

Considerînd prima variație a ecuației (1) (variație sincronă) obținem

$$\delta\ddot{x}_i + \sum_{j=1}^{2}\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}\delta x_j + \frac{\partial F_i}{\partial \dot{x}_j}\delta\dot{x}_j\right) = f\delta l_i, \quad i = 1,\ 2. \tag{2}$$

Dacă se notează $\delta\dot{x}_i = z_i$, $\delta x_i = y_i$ din (2) se obține sistemul

$$\begin{aligned} \dot{z}_i = \sum_{j=1}^{2}\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_i} y_j + \frac{\partial F_i}{\partial \dot{x}_j} z_j\right) &= f\ \delta l_i, \\ \dot{y}_i - z_i = 0, \qquad\qquad & (i = 1,2). \end{aligned} \tag{3}$$

Fie $z_{ik}(t)$ și $y_{ik}(t)$ $(i = 1,\ 2\ ;\ k = 1,2,3,4)$ sistemul fundamental de soluții ale ecuațiilor omogene corespunzătoare ecuațiilor (3). Se consideră că poziția inițială și viteza inițială sînt fixate și atunci avem $z_i(0) = \delta\dot{x}_i(0) = 0$, $y_i(0) = \delta x_i(0) = 0$.

Soluțiile ecuațiilor (3), care satisfac aceste condiții, sînt :

$$\begin{aligned} \delta\dot{x}_i &= \int_0^t \frac{f(s)}{D(s)} \sum_{n=1}^{2} \beta_{in}(s, t)\ \delta l_n(s)\, \mathrm{d}s, \\ \delta x_i &= \int_0^t \frac{f(s)}{D(s)} \sum_{n=1}^{2} \alpha_{in}(s, t)\ \delta l_n(s)\, \mathrm{d}s. \end{aligned} \tag{4}$$

În aceste formule, $D(s)$ este determinantul sistemului fundamental de soluții $z_{ik}(s)$, $y_{ik}(s)$ iar α_{in} și β_{in} sînt determinanți care se obțin din D prin înlocuirea liniei a n-a cu $y_{i1}(t)$, $y_{i2}(t)$, $y_{i3}(t)$, $y_{i4}(t)$ respectiv $z_{i1}(t)$, $z_{i2}(t)$, $z_{i3}(t)$, $z_{i4}(t)$.

Se aplică formulele (4) la momentul $t = t_1$ cînd tracțiunea încetează să acționeze și racheta atinge poziția finală a părții active $A(q_1,\ q_2)$. Se notează cu $\dot{q}_1$ și $\dot{q}_2$ componentele vitezei rachetei în poziția A. Formulele (4), aplicate la momentul $t = t_1$, permit să se calculeze variațiile δq_i și $\delta\dot{q}_i$ corespunzătoare variațiilor δl_i. Din poziția A racheta se mișcă, ca un corp cu masa constantă, pe partea pasivă a traiectoriei pînă cînd întîlnește Pămîntul. Distanța orizontală de zbor R va fi o funcție de q_i și $\dot{q}_i$.

Pentru ca distanța R să fie maximă va trebui ca

$$\delta\ R(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2) = \sum_{i=1}^{2}\left(\frac{\partial R}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i}\delta\dot{q}_i\right) = 0. \tag{5}$$

Ținînd seama de formulele (4), de explicațiile de mai sus și de faptul că variațiile δl_i nu sînt independente ci satisfac relația

$$l_1\,\delta l_1 + l_2\delta l_2 = 0,$$

se găseşte că

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{\sum_{i=1}^{2}\left[\frac{\partial R}{\partial q_i}\alpha_{i1}(t,t_1) + \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i}\beta_{i1}(t,t_1)\right]}{\sum_{i=1}^{2}\left[\frac{\partial R}{\partial q_i}\alpha_{i2}(t,t_1) + \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i}\beta_{i2}(t,t_1)\right]}, \tag{6}$$

$$l_1^2 + l_2^2 = 1. \tag{7}$$

Formulele (6), (7) reprezintă programul optim de dirijare a direcţiei tracţiunii rachetei balistice pentru ca bătaia să fie maximă. Pentru determinarea necunoscutelor q_i şi $\dot{q}_i$ va trebui să se integreze ecuaţiile (1) în care $f(t)$ este o funcţie dată iar l_i se înlocuiesc din formulele (6), (7).

2. CALCULUL DISTANŢEI ORIZONTALE DE ZBOR

Să presupunem că racheta balistică se mişcă într-un plan vertical al Pămîntului reperat la triedrul Ox_1x_2, că pleacă din punctul O, parcurge partea activă OA cu motorul în funcţiune şi cade în punctul C de pe Pămînt. Notăm cu q_1 şi q_2 coordonatele poziţiei finale A a părţii active a traiectoriei şi cu u_1 şi u_2 vitezele, orizontală şi verticală, ale rachetei în punctul A. Vom presupune că asupra rachetei acţionează şi rezistenţa aerului $\vec{R} = -k_1 m_1 \vec{v}$, unde m_1 este masa rachetei pe partea pasivă iar k_1 este o constantă pozitivă avînd dimensiunea inversului timpului.

Ecuaţiile mişcării rachetei pe arcul pasiv AC vor fi

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + k_1\dot{x}_1 &= 0, \\ \ddot{x}_2 + k_1\dot{x}_2 &= -g. \end{aligned} \tag{8}$$

Soluţiile acestor ecuaţii, care satisfac condiţiile iniţiale

$$x_i(0) = q_i, \ \dot{x}_i(0) = u_i, \ i = 1, 2, \tag{9}$$

sînt următoarele :

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \frac{u_1}{k_1}(1 - e^{-k_1 t}) + q_1, \\ x_2(t) &= \frac{1}{k_1}\left(u_2 + \frac{g}{k_1}\right)(1 - e^{-k_1 t}) - \frac{g}{k_1}t + q_2. \end{aligned} \tag{10}$$

Dacă notăm cu t_p timpul necesar parcurgerii părţii pasive AC atunci avem $x_2(t_p) = 0$. Din această condiţie se găseşte timpul t_p care se înlocuieşte în expresia distanţei $x_1(t_p)$. Notăm distanţa orizontală de zbor (bătaia) cu X, adică $X = x_1(t_p)$, şi din prima ecuaţie (10) se deduce

$$F(q_1, q_2, u_1, u_2, X) \equiv \frac{1}{u_1}\left(u_2 + \frac{g}{k_1}\right)(X - q_1) + \frac{g}{k_1^2}\ln\left[1 - \frac{k_1}{u_1}(X - q_1)\right] + q_2 = 0. \tag{11}$$

Problema de care ne ocupăm constă în găsirea unei valori maxime pentru bătaia X.

Condiția de maxim va fi $\delta X = 0$ adică

$$\sum_{i=1}^{2} \left(\frac{\partial F}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial F}{\partial u_i} \delta u_i \right) = 0 \tag{11'}$$

la care se adaugă (11).

Vom studia această problemă în cazul rachetelor cu tracțiune constantă și în cazul rachetelor cu accelerație reactivă constantă.

3. RACHETE CU TRACȚIUNE CONSTANTĂ

Ecuațiile mișcării rachetei, pe partea activă a traiectoriei, în cazul cîmpului gravitațional plan-paralel și constant și al unei rezistențe aerodinamice proporțională cu viteza sînt

$$m\vec{a} = \vec{P} + m\vec{g} - k\vec{v},$$

în formă vectorială, și

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + \frac{k}{m} \dot{x}_1 &= f l_1, \\ \ddot{x}_2 + \frac{k}{m} \dot{x}_2 &= f l_2 - g, \end{aligned} \tag{12}$$

în formă scalară.

Vom presupune că viteza efectivă de expulzare a gazelor are modulul constant și că masa rachetei variază după legea

$$m = m_0 (1 - \beta t), \tag{13}$$

unde β este o constantă pozitivă.

În acest caz, tracțiunea $\vec{P}$ și accelerația $\vec{f}$ sînt de forma

$$\begin{aligned} \vec{P} &= \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} \vec{u} = -m_0 \beta \vec{u}, \\ \vec{f} &= \frac{\vec{P}}{m} = -\frac{\beta}{1 - \beta t} \vec{u},\ f(t) = \frac{\beta u}{1 - \beta t}. \end{aligned} \tag{14}$$

Ecuațiile mișcării rachetei vor fi

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + \frac{\omega^2}{1 - \beta t} \dot{x}_1 &= f l_1, \\ \ddot{x}_2 + \frac{\omega^2}{1 - \beta t} \dot{x}_2 &= f l_2 - g, \end{aligned} \tag{15}$$

unde $\omega^2 = \frac{k}{m_0}$.

Ecuațiile variațiilor, deduse din (15), dacă se notează $\delta\dot{x}_j = z_j$, $\delta x_j = y_j$ sînt

$$\begin{aligned} &\dot{z}_j + \frac{\omega^2}{1-\beta t} z_j = f\delta l_j, \\ &\dot{y}_j - z_j = 0. \end{aligned} \qquad (j=1,\ 2) \qquad (16)$$

Integrala generală a sistemului omogen corespunzător sistemului (16) este

$$\begin{aligned} &z_j = c_j (1-\beta t)^\gamma, \\ &y_j = -\frac{c_j}{\beta(\gamma+1)}(1-\beta t)^{\gamma+1} + k_j, \end{aligned} \qquad (j=1,\ 2) \qquad (17)$$

unde $\gamma = \frac{\omega^2}{\beta}$ iar c_j și k_j sînt constante de integrare.

Sistemul fundamental de soluții, care satisfac condițiile

$$\begin{aligned} &z_{jk}(0) = \delta_{jk}, \\ &y_{jk}(0) = \delta_{j+2,k}, \end{aligned} \qquad (18)$$

unde δ este simbolul lui Kroneker, este următorul

$$\begin{aligned} &z_{11}(t) = (1-\beta t)^\gamma, \ z_{12}(t) = 0, \quad z_{13}(t) = 0, \quad z_{14}(t) = 0, \\ &z_{21}(t) = 0, \quad z_{22}(t) = (1-\beta t)^\gamma, \ z_{23}(t) = 0, \quad z_{24}(t) = 0, \qquad (19) \\ &y_{11}(t) = \frac{1}{\beta(\gamma+1)}[1-(1-\beta t)^{\gamma+1}], \ y_{12}(t) = 0, \ y_{13}(t) = 1, \ y_{14}(t) = 0, \\ &y_{21}(t) = 0, \ y_{22}(t) = \frac{1}{\beta(\gamma+1)}[1-(1-\beta t)^{\gamma+1}], \ y_{23}(t) = 0, \ y_{24}(t) = 1. \end{aligned}$$

Determinantul $D(s)$ al sistemului fundamental de soluții va fi

$$D(s) = \begin{vmatrix} z_{11}(s) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & z_{22}(s) & 0 & 0 \\ y_{11}(s) & 0 & 1 & 0 \\ 0 & y_{22}(s) & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1-\beta s)^{2\gamma} \neq 0, \qquad (20)$$

unde $z_{22}(s) = z_{11}(s)$ și $y_{22}(s) = y_{11}(s)$.

Determinanţii α_{in} şi β_{in} vor avea expresiile

$$\alpha_{11}(t, s) = \begin{vmatrix} y_{11}(t) & 0 & 1 & 0 \\ 0 & z_{22}(s) & 0 & 0 \\ y_{11}(s) & 0 & 1 & 0 \\ 0 & y_{22}(s) & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{(1-\beta s)^{\gamma}}{\beta(\gamma+1)}[(1-\beta s)^{\gamma+1}-(1-\beta t)^{\gamma+1}], \quad (21)$$

$$\alpha_{22}(t, s) = \alpha_{11}(t,s), \quad (22)$$

$$\alpha_{12}(t, s) = \alpha_{21}(t, s) = 0, \quad (23)$$

$$\beta_{11}(t, s) = \begin{vmatrix} z_{11}(t) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & z_{22}(s) & 0 & 0 \\ y_{11}(s) & 0 & 1 & 0 \\ 0 & y_{22}(s) & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1-\beta t)^{\gamma}(1-\beta s)^{\gamma}, \quad (24)$$

$$\beta_{22}(t, s) = \beta_{11}(t, s), \quad (25)$$

$$\beta_{12}(t, s) = \beta_{21}(t, s) = 0. \quad (26)$$

Din ecuaţia (11) deducem următoarele expresii pentru derivatele parţiale $\frac{\partial F}{\partial q_i}$ şi $\frac{\partial F}{\partial u_i}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial q_1} &= -\frac{1}{u_1}\left(u_2 + \frac{g}{k_1}\right) + \frac{g}{k_1}\,\frac{1}{u_1 - k_1(X - q_1)}, \\ \frac{\partial F}{\partial q_2} &= 1, \\ \frac{\partial F}{\partial u_2} &= \frac{1}{u_1}\,(X - q_1), \end{aligned} \quad (27)$$

$$\frac{\partial F}{\partial u_1} = -\frac{1}{u_1^2}\left(u_2 + \frac{g}{k_1}\right)(X - q_1) + \frac{g}{k_1}\,\frac{X - q_1}{u_1[u_1 - k_1(X - q_1)]} = \frac{\partial F}{\partial q_1}\,\frac{\partial F}{\partial u_2}.$$

Să observăm că formula (6) nu se modifică în cazul problemei pe care o studiem decît prin înlocuirea simbolului R cu F şi asocierea formulei (11), după cum rezultă din (11').

Aplicînd formula (6) obţinem

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{\sum\limits_1^2\left[\frac{\partial F}{\partial q_i}\,\alpha_{i1}(t, t_1) + \frac{\partial F}{\partial u_i}\,\beta_{i1}(t, t_1)\right]}{\sum\limits_1^2\left[\frac{\partial F}{\partial q_i}\,\alpha_{i2}(t, t_1) + \frac{\partial F}{\partial u_i}\,\beta_{i2}(t, t_1)\right]} = \frac{\frac{\partial F}{\partial q_1}\,\alpha_{11}(t, t_1) + \frac{\partial F}{\partial u_1}\,\beta_{11}(t, t_1)}{\frac{\partial F}{\partial q_2}\,\alpha_{22}(t, t_1) + \frac{\partial F}{\partial u_2}\,\beta_{22}(t, t_1)}. \quad (28)$$

Ținînd seama de (22), (25) și (27) din (28) obținem

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{\dfrac{\partial F}{\partial q_1}\alpha_{11} + \dfrac{\partial F}{\partial q_1}\dfrac{\partial F}{\partial u_2}\beta_{11}}{\alpha_{11} + \dfrac{\partial F}{\partial u_2}\beta_{11}} = \frac{\partial F}{\partial q_1}. \tag{29}$$

Regimul optim de dirijare a direcției tracțiunii rachetei balistice pentru obținerea unei bătăi maxime este dat de ecuațiile

$$\begin{gathered} l_1 = \frac{\dfrac{\partial F}{\partial q_1}}{\sqrt{1+\left(\dfrac{\partial F}{\partial q_1}\right)^2}}, \\ l_2 = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\dfrac{\partial F}{\partial q_1}\right)^2}}, \end{gathered} \tag{30}$$

$$F(q_1, q_2, u_1, u_2, X) = 0.$$

Ecuațiile (30) conțin mărimile necunoscute q_i și u_i. Acestea se vor determina în urma integrării ecuațiilor de mișcare (15) în care l_1 și l_2 se înlocuiesc cu ajutorul formulelor (30) și ținînd, bineînțeles, seama de faptul că l_1 și l_2 sînt independenți de timp.

Ecuațiile (15), dacă se ține seama de (14), au forma

$$\begin{gathered} \ddot{x}_1 + \frac{\omega^2}{1-\beta t}\dot{x}_1 = \frac{l_1 \beta u}{1-\beta t}, \\ \ddot{x}_2 + \frac{\omega^2}{1-\beta t}\dot{x}_2 = \frac{l_2 \beta u}{1-\beta t} - g. \end{gathered} \tag{31}$$

Se consideră că l_1 și l_2, după cum arată (30), sînt constanți și atunci soluțiile ecuațiilor (31), care satisfac condițiile inițiale $\dot{x}_i(0) = 0$, $x_i(0) = 0$ și se deduc fie cu formule de tipul (4) fie printr-o integrare directă, au forma

$$\dot{x}_2 = \left[\frac{g}{\beta(\gamma-1)} - \frac{u\,l_2}{\gamma}\right](1-\beta t)^{\gamma} - \frac{g}{\beta(\gamma-1)}(1-\beta t)\frac{u\,l_2}{\gamma}, \tag{32}$$

$$x_2(t) = \frac{1}{\beta(\gamma+1)}\left[\frac{u\,l_2}{\gamma} - \frac{g}{\beta(\gamma-1)}\right][(1-\beta t)^{\gamma+1} - 1] +$$

$$+ \frac{g}{2\,\beta^2(\gamma-1)}[(1-\beta t)^2 - 1] + \frac{u\,l_2}{\gamma}\,t. \tag{33}$$

Este evident că expresiile funcțiilor $\dot{x}_1(t)$ și $x_1(t)$ se vor deduce din (32) și (33) luînd $g = 0$ și schimbînd pe l_2 în l_1.

Avem deci

$$\dot{x}_1 = \frac{u\,l_1}{\gamma}\,[1 - (1 - \beta t)^{\gamma}\,], \tag{34}$$

$$x_1(t) = \frac{u\,l_1}{\gamma}\left\{t + \frac{1}{\beta(\gamma+1)}\,[(1 - \beta t)^{\gamma+1} - 1]\right\}. \tag{35}$$

Ecuațiile (32)—(35) se aplică în momentul $t = t_1$, momentul încetării combustiei și acțiunii tracțiunii, cînd $\dot{x}_i(t_1) = u_i$, $x_i(t_1) = q_i$ și întrucît l_i sînt dați de (30) obținem pentru parametrii mișcării rachetei, corespunzători momentului încetării funcționării rachetei, ecuațiile

$$q_1 = \frac{u\,F_{q_1}}{\gamma\sqrt{1 + F^2_{q_1}}}\left\{t_1 + \frac{1}{\beta(\gamma+1)}\,[(1 - \beta t_1)^{\gamma+1} - 1)\right\},\quad F_{q_1} = \frac{\partial F}{\partial q_1},$$

$$q_2 = \frac{1}{\beta(\gamma+1)}\left[\frac{u}{\gamma\sqrt{1 + F^2_{q_1}}} - \frac{g}{\beta(\gamma-1)}\right][(1 - \beta t_1)^{\gamma+1} - 1] +$$

$$+ \frac{g}{2\beta^2(\gamma-1)}\,[(1 - \beta t_1)^2 - 1] + \frac{u t_1}{\gamma\sqrt{1 + F^2_{q_1}}},$$

$$u_1 = \frac{u\,F_{q_1}}{\gamma\sqrt{1 + F^2_{q_1}}}\,[1 - (1 - \beta t_1)^{\gamma}], \tag{36}$$

$$u_2 = \left[\frac{g}{\beta(\gamma-1)} - \frac{u}{\gamma\sqrt{1 + F^2_{q_1}}}\right](1 - \beta t_1)^{\gamma} - \frac{g}{\beta(\gamma-1)}\,(1 - \beta t_1) + \frac{u}{\gamma\sqrt{1 + F^2_{q_1}}}.$$

Se rezolvă ecuațiile (36) în raport cu q_1, q_2, u_1, u_2 și valorile astfel găsite se înlocuiesc în formulele (30) care reprezintă regimul optim de programare a direcției tracțiunii rachetei în ipotezele admise.

Ecuațiile (35) și (33) la care se atașază formulele (36) reprezintă traiectoria pe care se mișcă racheta cu regimul optim de dirijare, (30) — (36) fiind deci ecuațiile traiectoriei optime.

4. RACHETE CU ACCELERAȚIE REACTIVĂ CONSTANTĂ

Vom presupune acum că accelerația reactivă a rachetei balistice este constantă, adică

$$f = -\frac{1}{m}\,\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\,u = \mathrm{const.} \tag{37}$$

de unde, prin integrare, rezultă că

$$m = m_0 \, \mathrm{e}^{-\frac{f}{u} t}, \tag{38}$$

unde m_0 este masa inițială a rachetei.

Vom studia problema determinării regimului optim de programare a tracțiunii, în vederea obținerii unei bătăi maxime, într-un astfel de caz.

Ecuațiile mișcării rachetei, păstrînd notațiile și ipotezele din primul caz, sînt

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + \omega^2 \mathrm{e}^{\alpha t} \dot{x}_1 &= f\, l_1, \\ \ddot{x}_2 + \omega^2 \mathrm{e}^{\alpha t} \dot{x}_2 &= f l_2 - g, \end{aligned} \tag{39}$$

unde $\alpha = \dfrac{f}{u}$ și $\omega^2 = \dfrac{k}{m_0}\cdot$

Ecuațiile variațiilor δl_i, $\delta \dot{x}_i$, $\delta \ddot{x}_i$ sînt

$$\begin{aligned} \delta \ddot{x}_1 + \omega^2 \mathrm{e}^{\alpha t}\, \delta \dot{x}_1 &= f \delta l_1, \\ \delta \ddot{x}_2 + \omega^2 \mathrm{e}^{\alpha t}\, \delta \dot{x}_2 &= f \delta l_2. \end{aligned} \tag{40}$$

Sistemul fundamental de soluții, care satisfac condițiile (18), este

$$\begin{aligned} & z_{11} = \mathrm{e}^{a(1-\mathrm{e}^{\alpha t})}, \quad z_{12} = 0, \quad z_{13} = 0, \quad z_{14} = 0, \\ & z_{21} = 0, \quad z_{22} = \mathrm{e}^{a(1-\mathrm{e}^{\alpha t})}, \quad z_{23} = 0, \quad z_{24} = 0, \\ & y_{11} = \mathrm{e}^{a}\left[t + \frac{1}{\alpha}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\cdot n\,!}a^n(\mathrm{e}^{n\alpha t} - 1)\right], \; y_{12} = 0, \; y_{13} = 1, \; y_{14} = 0, \\ & y_{21} = 0, \; y_{22} = \mathrm{e}^{a}\left[t + \frac{1}{\alpha}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\cdot n\,!}a^n(\mathrm{e}^{n\alpha t} - 1)\right], \; y_{23} = 0, \; y_{24} = 1, \end{aligned} \tag{41}$$

unde s-a folosit notația $a = \dfrac{k}{m_0\, \alpha} < 1$.

Expresia determinantului sistemului fundamental z_{ik}, y_{ik} este

$$D(s) = \begin{vmatrix} z_{11}(s) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & z_{22}(s) & 0 & 0 \\ y_{11}(s) & 0 & 1 & 0 \\ & y_{22}(s) & 0 & 1 \end{vmatrix} = z_{11}(s)\cdot z_{22}(s) = \mathrm{e}^{2a(1-\mathrm{e}^{\alpha s})} \neq 0. \tag{42}$$

Determinanții $\alpha_{in}(s, t)$ și $\beta_{in}(s, t)$, după înlocuirea lui s cu t și a lui t cu t_1, sînt următorii :

$$\begin{aligned}
\alpha_{11}(t, t_1) &= e^{a(2-e^{\alpha t})}\left[t_1 - t + \frac{1}{\alpha}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n.n!}a^n\left(e^{n\alpha t_1} - e^{n\alpha t}\right)\right],\\
\alpha_{22}(t, t_1) &= \alpha_{11}(t, t_1),\\
\alpha_{12}(t, t_1) &= \alpha_{21}(t, t_1) = 0,\\
\beta_{11}(t, t_1) &= e^{a(2-e^{\alpha t_1}-e^{\alpha t})},\\
\beta_{22}(t, t_1) &= \beta_{11}(t, t_1),\\
\beta_{12}(t, t_1) &= \beta_{21}(t, t_1) = 0.
\end{aligned} \tag{43}$$

Folosind formulele (43), (27) și (6) —(7) se obțin formulele

$$\begin{aligned}
l_1 &= \frac{F_{q_1}}{\sqrt{1 + F_{q_1}^2}},\\
l_2 &= \frac{1}{\sqrt{1 + F_{q_1}^2}},
\end{aligned} \tag{44}$$

$$F(q_1, q_2, u_1, u_2, X) = 0,$$

care determină cosinușii directori l_1, l_2 și bătaia X în raport cu q_1, q_2, u_1, u_2 (indicele q_1 indică derivarea în raport cu q_1).

Pentru dirijarea optimă a tracțiunii și pentru bătaia maximă avem deci formulele

$$\operatorname{ctg}\varphi = F_{q_1} = -\frac{1}{u_1}\left(u_2 + \frac{g}{k_1}\right) + \frac{g}{k_1}\,\frac{1}{u_1 - k_1(x - q_1)}, \tag{45}$$

$$F(q_1, q_2, u_1, u_2, X) = 0.$$

Pentru a găsi mărimile q_1, q_2, u_1, u_2 va trebui să se integreze ecuațiile mișcării (39) în care l_1 și l_2 se înlocuiesc din (44).

Această integrare se poate efectua direct asupra ecuațiilor (39), dar se pot folosi, în acest scop, și formulele (4) în care $f\delta l_1$ se înlocuiește cu fl_1, $f\delta l_2$ cu $fl_2 - g$, iar determinanții $\alpha_{in}(s, t)$ și $\beta_{in}(s,t)$ se vor obține din (43) unde t se va înlocui cu s iar t_1 cu t.

Se obțin ecuațiile

$$\dot{x}_2 = (fl_2 - g)\ H'(t), \tag{46}$$

$$\dot{x}_1 = fl_1 H'(t), \tag{47}$$

$$x_2 = (fl_2 - g)\ H(t), \tag{48}$$

$$x_1 = fl_1\ H(t), \tag{49}$$

unde

$$H'(t) = \int_0^t \mathrm{e}^{a(\mathrm{e}^{\alpha s} - \mathrm{e}^{\alpha t})} \, \mathrm{d}s, \tag{50}$$

$$H(t) = \int_0^t \frac{\alpha_{22}(s, t)}{D(s)} \mathrm{d}s = \int_0^t \mathrm{d}s \int_s^t \mathrm{e}^{a(\mathrm{e}^{\alpha s} - \mathrm{e}^{\alpha t})} \, \mathrm{d}t = \int_0^t \mathrm{e}^{a\mathrm{e}^{\alpha s}} \Bigg[t - s + \\ + \frac{1}{\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-a)^n}{n \cdot n!} (\mathrm{e}^{n\alpha t} - \mathrm{e}^{n\alpha s}) \Bigg] \mathrm{d}s. \tag{51}$$

Se aplică formulele (46)—(49) la momentul $t = t_1$ și se obțin relațiile

$$\begin{aligned} q_2 &= (fl_2 - g)\, H(t_1), & q_1 &= fl_1 \, H(t_1), \\ u_2 &= (fl_2 - g)\, H'(t_1), & u_1 &= fl_1 \, H'(t_1). \end{aligned} \tag{52}$$

Cu ajutorul formulelor (44) și (52) se determină necunoscutele q_1, q_2, u_1, u_2, l_1, l_2, X, adică regimul optim de dirijare și bătaia maximă, și în consecință aceste formule rezolvă complet problema propusă.

Mărimile $H'(t_1)$ și $H(t_1)$ au următoarele valori, deduse din (51) pentru $t = t_1$,

$$\begin{gathered} H'(t_1) = \frac{1}{\alpha} \mathrm{e}^{-a\mathrm{e}^{\alpha t_1}} \int_a^{a\mathrm{e}^{\alpha t_1}} \frac{\mathrm{e}^x}{x} \mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha} \mathrm{e}^{-a\mathrm{e}^{\alpha t_1}} [Ei\,(a\mathrm{e}^{\alpha t_1}) - Ei\,(a)], \\ H(t_1) = \frac{1}{\alpha^2} \left(DA - B - \sum_1^{\infty} \frac{(-a)^n}{n.n!} I_{n-1} \right); \end{gathered} \tag{53}$$

unde

$$D = Ei\,(-a\,\mathrm{e}^{\alpha t_1}) - C - \ln a,$$

$$A = \int_1^{\mathrm{e}^{\alpha t_1}} \frac{\mathrm{e}^{au}}{u} \mathrm{d}u = Ei\,(a\,\mathrm{e}^{\alpha t_1}) - Ei\,(a),$$

$$B = \int_1^{\mathrm{e}^{\alpha t_1}} \frac{\mathrm{e}^{au} \ln u}{u} \mathrm{d}u = \alpha t_1 \left[-\frac{1}{2} \alpha t_1 - C - \ln a + Ei\,(a\,\mathrm{e}^{\alpha t_1}) \right] + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n^2 \cdot n!} (1 - \mathrm{e}^{n\alpha t_1}), \tag{54}$$

$$I_1 = \int_1^{\mathrm{e}^{\alpha t_1}} \mathrm{e}^{au}\, u\, \mathrm{d}u = \frac{\mathrm{e}^{a\mathrm{e}^{\alpha t_1}}}{a^2} (a\,\mathrm{e}^{\alpha t_1} - 1) - \frac{\mathrm{e}^a}{a^2} (a - 1),$$

$$I_n = \int_1^{\mathrm{e}^{\alpha t_1}} \mathrm{e}^{au}\, u^n \mathrm{d}u = \frac{1}{a} (\mathrm{e}^{n\alpha t_1 + a\mathrm{e}^{\alpha t_1}} - \mathrm{e}^a) - \frac{n}{a} I_{n-1},$$

$$Ei(x) = -\int_{-x}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-z}}{z} \mathrm{d}z, \; \underset{0<x<\infty}{Ei\,(-x)} = -\int_x^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-z}}{z} \mathrm{d}z < 0, \; C = 0{,}577216,$$

$Ei(x)$ este funcția exponențială integrală care admite următoarea dezvoltare în serie, pentru valori mici ale lui x,

$$Ei(x) = C + \ln|x| + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k \cdot k!}.$$

Dacă $a = 0$, adică rezistența aerului este nulă, avem $H(t_1) = \frac{1}{2} t_1^2$ și $H'(t_1) = t_1$ și formulele (52) se reduc la formule ce coincid cu cele folosite de D. Lawden, care a studiat acest caz particular [1].

Aplicație. Este cunoscut [3] că expresia rezistenței aerului este de forma

$$R = \alpha_1 F(v),$$

unde $F(v)$ este funcția de rezistență iar

$$\alpha_1 = \frac{id^2}{g} 10^3 H(y). \tag{55}$$

În această formulă i este coeficientul de formă, d este calibrul proiectilului rachetă iar $H(y)$ este o funcție care reprezintă variația densității cu înălțimea. Pe partea activă a traiectoriei se poate considera $H(y) = H(y_m)$, unde y_m este valoarea medie a ordonatei y. Se poate deci lua $\alpha_1 = \text{const.}$

Funcția de rezistență poate fi aproximată suficient de bine printr-o funcție liniară. Pentru calculul valorilor sale există tabele [3].

Vom presupune că $F(v) = 0{,}1073\, v$ ceea ce ar corespunde, aproximativ, pentru viteze cuprinse între 1 000—2 000 m/s.

Dacă luăm $i = 0{,}6$; $H(y_m) = 1$; $d = 30$ cm, se obține

$$R(v) = \frac{id^2}{g} 10^3 H(y_m) \times 1073 \times 10^{-4} = 14{,}4 \times 1073 \times 10^{-4} v = 1{,}54512\, v. \tag{56}$$

Cu datele de mai sus am întocmit tabela.

Tabelă

t_1 [s]	$u\left[\frac{\text{m}}{\text{s}}\right]$	$f\left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right]$	$\alpha=\frac{f}{u}\left[\text{s}^{-1}\right]$	αt_1	$\frac{m_0}{m_1}=e^{\alpha t_1}$	m_1[kg]	m_0[kg]	$m_0 - m_1 = m_c$ [kg]	$a=\frac{k}{\alpha m_0}$
10	2.10^3	10.9,81	$5.9{,}81.10^{-3}$	0,490	1,6323	300	489,69	189,69	6.10^{-2}
10	2.10^3	10.9,81	$5.9{,}81.10^{-3}$	0,490	1,6323	100	163,23	63,23	2.10^{-1}
2.10^2	2.10^3	4.9,81	$2.9{,}81.10^{-3}$	3,82	45,602	200	9120,8	8920,8	8.10^{-3}

Pentru $a=6.10^{-2}$ avem $D=0{,}43$, $A=0{,}56$, $H'(10)=10{,}21$ s și $H(10)=54{,}15$ s.

Traiectoria optimală. Cunoscîndu-se mărimile l_1 și l_2 se poate găsi, cu ajutorul ecuațiilor (48)—(49), traiectoria optimală a rachetei pe perioada activă.

Din ecuațiile (48)—(49) rezultă că traiectoria optimală, pe perioada activă, este dreapta

$$x_2 = \frac{fl_2 - g}{fl_1} x_1 \tag{57}$$

cu coeficientul unghiular dat de formula

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{l_2}{l_1} - \frac{g}{fl_1}, \tag{58}$$

unde ψ este unghiul pe care traiectoria rectilinie îl face cu axa orizontală Ox_1. Din formula (58), știind că $l_2/l_1 = \operatorname{tg} \varphi$, rezultă formula

$$\sin(\varphi - \psi) = \frac{g}{f} \cos \psi \tag{59}$$

care reprezintă relația dintre direcția traiectoriei optimale și direcția optimă a tracțiunii. Dacă $f \to \infty$ se vede din (59) că $\varphi \to \psi$ adică tracțiunea tinde să coincidă cu direcția mișcării.

CONCLUZII

În lucrare se demonstrează că regimul optim de dirijare a direcției tracțiunii rachetei balistice, care se mișcă în aer (rezistența aerului proporțională cu viteza) și într-un cîmp gravitațional plan-paralel, este constant, adică independent de timp, iar traiectoria optimală (pe partea activă) este o linie dreaptă.

Rezultate similare au fost obținute de către D. Lawden, în cazul mai particular al mișcării în vid.

Se poate deci sublinia că rezistența aerului, în ipotezele admise în lucrare, nu modifică natura traiectoriei active și nici caracterul dirijării după program optim a direcției tracțiunii, că influența rezistenței tangențiale (liniare) a aerului este numai cantitativă.

Primită la redacție la 19 septembrie 1962 și o nouă versiune la 25 ianuarie 1963

OPTIMUM PROGRAMMING OF THE THRUST DIRECTION OF A BALLISTIC ROCKET MOVING IN AIR

ABSTRACT

The problem of the orientation of the thrust direction of a ballistic rocket moving in air is examined by assuming that the drag is proportional to the velocity and the motion takes place in a constant plane-parallel

gravitational field. The formula for calculating the flight horizontal distance is found. By applying D. Lawden's method, formulas (30) and (43) are obtained for the optimum thrust orientation. It is shown that for the case of constant acceleration and for that of constant thrust, this optimum regime of orientation is constant, that is independent of time, as in the more particular case of the motion in vacuum.

BIBLIOGRAFIE

1. Д. ЛАВДЕН, *Динамические проблемы межпланетного полета. Об искусственном спутнике земли.* Гос. Изд. Обор. Пром., Москва, 1959.
2. PETRE BRĂDEANU, *Asupra unei probleme variaționale în mişcarea punctului de masă variabilă. Aplicație la rachete.* Studia Univ. ,,Babeş-Bolyai'', Math.-Physica (1961).
2. F. R. GANTMAHER, L. M. LEVIN, *Teoria zborului rachetelor nedirijate.* Moscova, 1950.

O METODĂ PENTRU ETALONAREA DINAMICĂ A TRADUCTOARELOR DE PRESIUNE

DE

LUCIAN DUMITRESCU

621.317 : 533

Una din problemele fundamentale în legătură cu măsurarea variațiilor rapide de presiune în fluid este etalonarea dinamică a traductoarelor de presiune.

Necesitatea acestei etalonări poate apărea din două motive :

1. Unele traductoare de presiune, prin construcția lor, nu permit să se folosească o metodă de etalonare statică. Este vorba, în particular, de unele tipuri de traductoare capacitive cu membrană, la care, din motive tehnice, spațiul din spatele membranei comunică cu aerul exterior printr-un orificiu capilar ; de asemenea, traductoarele piezoelectrice cu titanat de bariu nu au răspuns static.

2. În alte cazuri, circuitul electronic în care este montat traductorul are o frecvență de trecere inferioară limitată și de aceea nu dă semnal în cazul cînd presiunea se aplică în mod static. Ca exemplu de asemenea circuite se pot cita repetorii catodici de intrare cu impedanță mare, folosiți la microfoanele cu condensatori. De asemenea, uneori etajele de amplificare ale semnalului dat de traductor pot să nu fie de tip de curent continuu, ceea ce are același efect.

În plus, deseori se dorește să se cunoască caracteristica de răspuns dinamic a traductorului, pentru a se putea defini domeniul de utilizare al acestuia la măsurarea variațiilor rapide de presiune.

În literatura de specialitate [1], [2], [3], se citează utilizarea tuburilor de șoc pentru etalonarea dinamică a traductoarelor de presiune. În principiu se produce o undă de șoc de intensitate cunoscută și se înregistrează răspunsul traductorului la saltul de presiune, traductorul fiind montat fie lateral în peretele tubului, în acest caz înregistrîndu-se variația de presiune statică, fie în capacul de fund al tubului de șoc, în care caz se măsoară presiunea din spatele undei de șoc reflectate.

Această metodă are avantajul că produce o variație a presiunii practic instantanee, durata de stabilire a palierului de presiune fiind sub o microsecundă. Astfel se poate determina frecvența limită de răspuns a traductorului, amortizarea sa etc.

Totuși, etalonarea cu ajutorul tubului de șoc prezintă un dezavantaj esențial care este de natură a micșora precizia etalonării și deci și a tuturor măsurătorilor ulterioare cu ajutorul traductorului astfel etalonat.

Dezavantajul constă în faptul că saltul de presiune din spatele undei de șoc, care se folosește la etalonare, nu poate fi măsurat în mod independent cu alte mijloace. Pentru determinarea acestei diferențe de presiune, trebuie să se ia ca bază raportul de presiuni existent inițial în compartimentele tubului de șoc, p_4/p_1 și să se calculeze, pe baza teoriei tuburilor de șoc, raportul de presiuni al undei de șoc p_2/p_1.

Acest mod de a proceda este însă susceptibil de erori, din următoarele motive :

— neconcordanța dintre valoarea teoretică a saltului de presiune și cea reală, din diferite motive, ca atenuarea undei de șoc datorită stratului limită, existența unui regim de scurgere nestaționar în spatele undei de șoc etc. (în special cînd se lucrează cu rapoarte de presiune reduse, deci cu viteze de propagare mici ale undei, $M_s = 1 \ldots 1{,}5$) ;

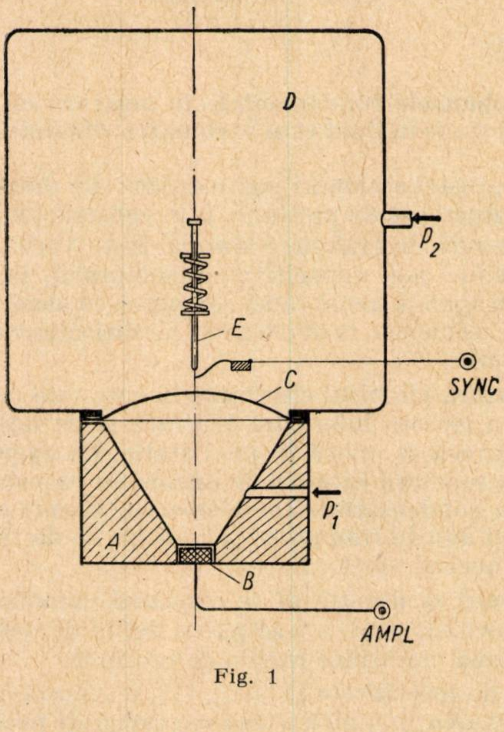


Fig. 1

— diferite erori experimentale nesistematice, cum ar fi spargerea neuniformă a diafragmei la mai multe experiențe succesive etc.

Din aceste motive, s-a căutat să se elaboreze o metodă de etalonare dinamică, la care saltul de presiune să fie cunoscut dinainte, fără a fi necesar să se aplice vreun calcul teoretic. În acest scop s-a imaginat un dispozitiv reprezentat schematic în figura 1. În esență, este vorba de un tub de șoc în miniatură A de formă conică. La un capăt se montează traductorul de presiune B, iar la celălalt capăt o diafragmă C.

Diafragma separă cavitatea tubului de șoc A de un rezervor D, care are dimensiuni sensibil mai mari decît ale tubului A. Instalația este completată de un percutor E și de un sistem de conducte și manometre cu ajutorul cărora se pot stabili diferite presiuni cunoscute, în compartimentele A (p_1) și D (p_2).

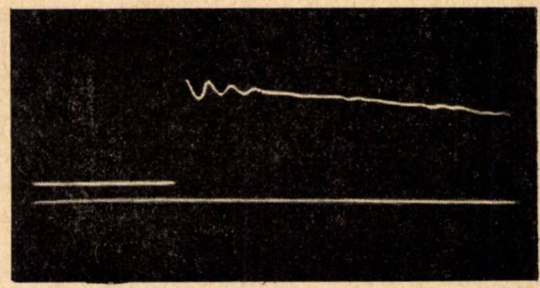


Fig. 3

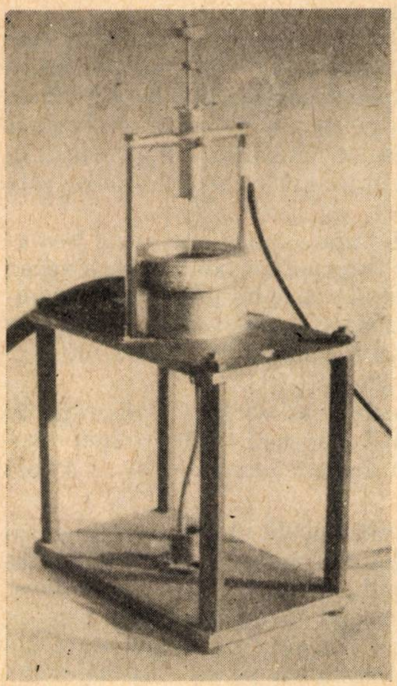


Fig. 2

Procedura de lucru este următoarea : se stabilește un raport de presiuni inițial oarecare, între fețele diafragmei și apoi se percutează diafragma. În tubul de șoc A se propagă o undă de compresiune sau de rarefiere (după cum raportul de presiuni inițial este supraunitar sau subunitar), care se reflectă apoi de mai multe ori pe fundul tubului și la gura acestuia.

Datorită lungimii reduse a tubului de șoc A, această serie de reflexii se produce într-un timp foarte scurt, la sfîrșitul lor presiunea din tubul A, deci cea care acționează asupra traductorului, rămînînd egală cu cea din rezervorul D, p_2 (presiunea din acest rezervor nu variază sensibil, deoarece dimensiunile sale sînt suficient de mari). După terminarea acestui proces nestaționar de scurtă durată, presiunea aplicată pe traductor, p_2, rămîne constantă și cunoscută. Durata de stabilire a regimului static este micșorată prin forma conică a tubului A, care reduce volumul tubului, menținînd în același timp o suprafață de trecere între cele două compartimente, suficient de mare (secțiunea din zona diafragmei).

În fond, se poate deci considera că traductorul este supus unui salt de presiune $\Delta p = p_2 - p_1$, de valoare *cunoscută*, pe baza măsurării în regim static a presiunilor inițiale p_1 și p_2. Ca urmare, la etalonarea traductorului nu mai intervin erori datorită necunoașterii directe a saltului de presiune.

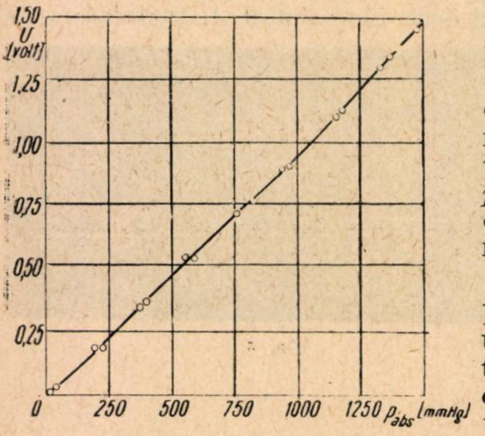


Fig. 4

Un alt avantaj al metodei este că în acest mod este posibil să se ridice diagrama de etalonare a traductorului, pentru orice presiune inițială p_1, ceea ce prezintă importanță în cazul cînd curba de etalonare este neliniară.

Metoda expusă mai sus a fost aplicată în practică pentru etalonarea unor traductoare de presiune capacitive, utilizate la măsurarea variațiilor de presiune pe modele plasate într-un tub de șoc [4], [5].

Avînd în vedere domeniul de presiuni de lucru al traductoarelor respective, s-a putut simplifica instalația, prin aceea că rezervorul D a fost înlocuit cu atmosfera.

În figura 2 se prezintă o vedere a instalației de etalonare realizată. Diafragma, confecționată din una sau două foi de celofan, este strînsă între două garnituri de cauciuc, cu ajutorul unei șaibe de metal și a unei piulițe. Camera tubului de șoc comunică printr-un racord cu un rezervor tampon, la care se leagă un compresor sau o pompă de vid, precum și manometrele respective, pentru măsurarea presiunii p_1. Presiunea p_2 este întotdeauna presiunea atmosferică. Percutorul, format dintr-un ac acționat de un resort, este comandat manual. În cursa sa către diafragmă, acul percutorului întîlnește o lamă metalică și produce astfel un contact electric care este folosit pentru declanșarea bazei de timp a oscilografului catodic, pe care se înregistrează semnalul traductorului.

În figura 3 se prezintă o oscilogramă a răspunsului unui traductor la saltul de presiune.

Durata baleiajului este de circa 10 milisecunde. Se observă că presiunea se stabilizează după o serie de fluctuații. Pentru a ușura citirea valorii palierului de presiune, în circuitul de amplificare al semnalului traductorului s-a montat un filtru trece-jos. Se constată că valoarea saltului de înălțime a oscilogramei, corespunzătoare variației de presiune, se poate citi cu ușurință.

În figura 4 se prezintă o diagramă de etalonare tipică pentru un traductor de presiune capacitiv, realizată prin metoda expusă mai sus.

În sfîrşit, în afară de avantajele enumerate mai sus se cuvine să arătăm că, datorită comodităţii de lucru, este posibil să se verifice frecvent dacă etalonarea traductoarelor folosite nu se schimbă, evitîndu-se astfel dificultăţile ce s-ar putea ivi dacă s-ar lucra cu traductoare al căror coeficient de etalonare s-ar schimba în timp.

Mai trebuie să remarcăm că metoda propusă nu înlocuieşte complet tubul de şoc, pentru studiul caracteristicii de răspuns dinamic al traductoarelor ; cele două metode se completează însă reciproc. Într-adevăr, dacă la noua metodă se menţine palierul de presiune constant cu mai bună precizie, în tubul de şoc saltul de presiune aproximează mai bine funcţia treaptă, fiind lipsit de fluctuaţiile iniţiale ce se constată la dispozitivul propus.

Primită la redacţie la 31 ianuarie 1963

A METHOD FOR THE DYNAMIC CALIBRATION OF PRESSURE TRANSDUCERS

ABSTRACT

The dynamic calibration of pressure transducers is usually performed in a shock tube [1], [2], [3], by producing weak shock waves and computing, on the basis of the shock-tube theory, the value of the pressure jump which is registered. In order to obviate the uncertainties of the above method (due to irregular bursting of diaphragms and to deviations from computed values), a device was built, used to produce a pressure jump of known intensity (see fig. 1).

A is a small, conical shock-tube, *B* the transducer, *C* a diaphragm, *D* a big reservoir (or the free atmosphere), *E* a percuter. The volume of the shock-tube *A* is small in comparison with that of reservoir *D*, so that, by bursting the diaphragm, the pressure p_2 is established on the transducer in a very short time. Since the values p_1 and p_2 may be read very accurately, the calibration is devoid of the above-mentioned sources of error. In figure 2 a view of the device is given, in figure 3 a typical oscilloscope recording is shown, while in figure 4 a calibration curve for a capacitive pressure transducer is presented.

BIBLIOGRAFIE

1. Y. T. LI, *High frequency pressure indicators for aerodynamic problems*. NACA TN 3042 (1953).
2. J. GORDON HALL, *Shock tubes*. Institute of Aerophysics University of Toronto Review, *12* (1958).
3. H. T. NAGAMATSU, *Shock tube technology and design* în „Fundamental results obtained from shock tube experiments". Pergamon Press, New York, 1961, 86.
4. L. DUMITRESCU, I. JAKAB, E. PROCOPOVICI, A. ZAHARESCU, *Probleme ale cercetării experimentale de aerodinamica vitezelor mari în tubul de şoc*. St. cerc. mec. apl., **XI**, *6* (1960).
5. E. PROCOPOVICI, L. DUMITRESCU, *Măsurarea presiunilor aerodinamice în tubul de şoc*. St. cerc. mec. apl., **XII**, *1* (1961).

CONTRIBUŢII LA DETERMINAREA PE CALE EXPERIMENTALĂ A PARAMETRILOR FUNCŢIONALI DE LA LAGĂRELE MOTOARELOR CU ARDERE INTERNĂ

II. REZULTATE EXPERIMENTALE ŞI CONCLUZII

DE

GH. VASILCA şi AL. NICA

621.43.82

a) *Regimul termic şi debitele de lubrifiant.* În prima fază a lucrărilor s-a urmărit determinarea temperaturii uleiului la intrarea în lagăre, parametru de mare importanţă în calculul caracteristicilor globale ale lagărului, după cum s-a specificat. Într-adevăr, temperatura la intrare poate fi mult mai uşor şi mai exact determinată şi apoi cu ajutorul legii de variaţie a viscozităţii în lagăr [1], [2] se obţine o imagine apropiată de realitate a acestei variaţii, calculele fiind astfel mai corecte decît atunci cînd se admite pentru viscozitate o valoare medie, şi aceea greu de determinat.

La un lagăr obişnuit, datorită căldurii dezvoltate prin frecare în lagăr, pereţii canalizaţiei de ulei sînt încălziţi prin conductibilitate, zona cu temperatura cea mai ridicată fiind situată la orificiul de intrare a lubrifiantului în suprafaţa activă. Măsurătorile efectuate la un lagăr experimental [1]) au arătat că în cazul alimentării cu un ulei răcit în baie, la trecerea lui prin canalizaţie, creşterea temperaturii poate fi de 10 ÷ 30°C.

La lagărele de la motoarele termice însă, datorită şi influenţei proceselor de ardere care afectează întreaga masă a motorului, aceste aspecte trebuie considerate în funcţie de diferitele regimuri de lucru ale motorului, sensul influenţei termice a canalizaţiei asupra temperaturii uleiului, în drumul acestuia din baie pînă la intrarea în lagăr, nemaiputînd fi atît de bine prevăzut şi precizat ca la un lagăr ferit de aceste influenţe.

---

[1]) Gh. Vasilca, Al. Nica, *Cercetări experimentale asupra aplicării soluţiilor teoretice şi de calcul la construirea lagărelor de la motoarele cu ardere internă*, Institutul de mecanică aplicată „Traian Vuia”, 1958 (lucrare nepublicată).

Cu aparatura şi metoda menţionată [2], s-a măsurat temperatura uleiului la lagărele de sprijin ale arborelui cotit din faţă şi din spate [1]). S-a măsurat concomitent şi temperatura lubrifiantului în baia de ulei a motorului, la 10 mm sub nivelul minim marcat de indicator, folosind în acest scop o sondă cu acelaşi tip de captor electrorezistiv. Temperaturile uleiului la intrare în lagăr t_i şi în baia de ulei a motorului t_b, în condiţiile specificate, s-au măsurat în mai multe cazuri :

a) în funcţie de turaţia motorului, pentru o temperatură a apei de răcire t_a = const. şi motorul antrenat din afară, cu maneta de gaze în poziţia de deschidere maximă ;

b) în funcţie de turaţia motorului, la temperatura t_a = const. şi t_b = const., motorul antrenat din afară, cu maneta de gaze în poziţia de deschidere maximă ;

c) în funcţie de sarcina motorului, păstrîndu-se turaţia pe cît posibil constantă, temperatura apei de răcire fiind menţinută de asemenea constantă.

Pentru toate cazurile specificate, temperatura apei de răcire s-a măsurat imediat în amonte de termostat, iar presiunea uleiului p_u imediat în aval de pompa de ulei. Rezultatele măsurătorilor efectuate la un motor nou, după un rodaj de 60 de ore, sînt arătate în tabela 1 pentru cazurile a) şi b) şi în tabela 2 pentru cazul c).

Din aceste date se poate constata că la motorul încercat lubrifiantul suferă o răcire pe parcursul de la baie la lagărele paliere. În condiţiile de funcţionare la stand, cu temperatura mediului ambiant t_{ma} = 24° C, temperatura uleiului în baie fiind mai mare decît la intrarea în lagărele paliere, se poate presupune deci că în general — cu excepţia anotimpurilor reci — la astfel de motoare temperatura uleiului la intrarea în lagărele paliere nu depăşeşte temperatura uleiului din baie. În aceleaşi condiţii de răcire şi la aceeaşi turaţie, temperatura uleiului din baie variază cu regimul de funcţionare.

După cum reiese din tabela 2, regimul din plină sarcină conduce la cele mai ridicate temperaturi din baie, regimul de funcţionare în gol conducînd la temperaturi cu cîteva grade mai mici, iar cînd motorul este antrenat, temperaturile sînt, evident, încă şi mai mici. Acest efect se poate atribui lucrului mecanic de frecare din lagăre, mai mare în cazul sarcinii maxime, precum şi temperaturii şi volumului diferit al gazelor arse scăpate în carter. Din tabela 1 reiese că răcirea se menţine cantitativ la acelaşi nivel, chiar dacă temperatura lubrifiantului în baie variază între 65—85°C, cu condiţia unei temperaturi constante a apei de răcire. Cantitativ, răcirea în canalizaţia lagărului palier din faţă şi în aceea a lagărului palier din spate, faţă de temperatura mai ridicată a băii, se prezintă sensibil aceeaşi. Răcirea puţin mai accentuată la palierul din spate (cu cîteva zecimi de grad, tabela 2) se poate datora unui debit de ulei ceva mai mic, lungimea canalizaţiei de la baie la intrarea în lagăre fiind aceeaşi.

---

[1]) La efectuarea lucrărilor experimentale şi-au dat contribuţia tehnicienii Gh. Marin, A. Luţescu şi V. Cubic.

Considerînd deci ca temperaturi normale de funcționare a motorului pentru apa de răcire valoarea $t_a = 80°C$ și pentru baia de ulei valoarea $t_b = 80°C$ și ținînd seama că în jurul temperaturii de 80°C viscozitatea lubrifiantului variază în general relativ puțin cu temperatura, se poate conchide că pentru calcularea lagărelor paliere ale unui astfel de motor se lucrează cu o ușoară acoperire dacă se admite temperatura uleiului la intrarea în lagăr t_i egală cu temperatura uleiului din baie t_b. Pentru calcul, sau pentru verificarea lagărelor la un motor nou asemănător, se deduce conform celor de mai sus t_i din t_a și t_b admise, iar din curba de viscozitate a uleiului în funcție de temperatură rezultă viscozitatea uleiului la intrarea în lagăr μ_1, parametru care intră în relațiile de calcul [3].

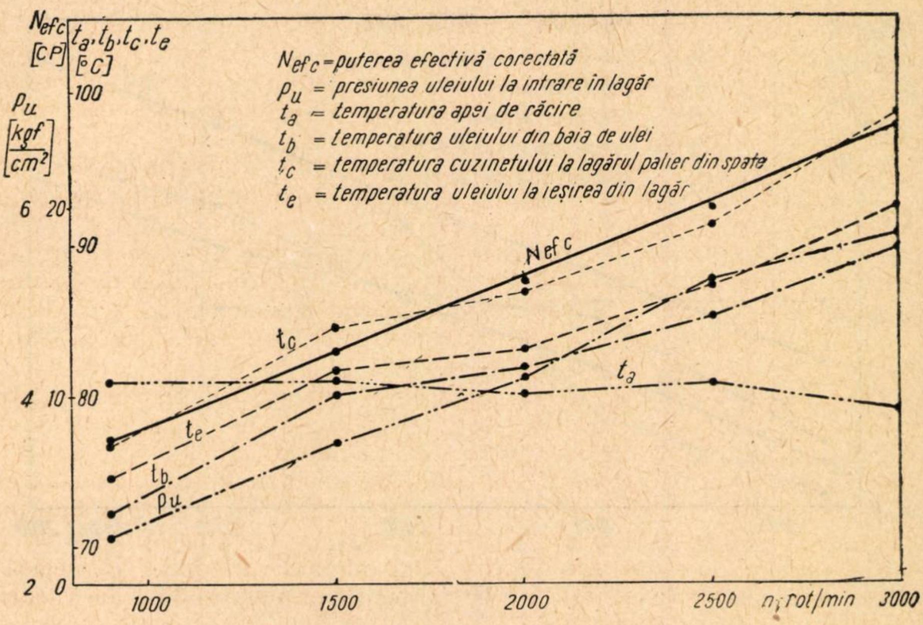


Fig. 1

Într-o a doua fază a lucrărilor privind măsurătorile de temperaturi în lagărele motorului, s-a determinat temperatura lagărului palier din spate t_c (la mijlocul cuzinetului, în zona încărcării maxime, la ~ 2 mm de suprafața activă) și temperatura uleiului la ieșirea din lagăr t_e (fig. 1). Din examinarea acestei diagrame se poate constata că aceste temperaturi cresc cu turația și puterea motorului, decalajul dintre ele accentuîndu-se de asemenea. Ținînd cont de faptul că t_i este foarte apropiată ca valoare de t_a (confirmîndu-se și în acest caz concluziile deja formulate), reiese cît este de dificilă admiterea în calcule a unei temperaturi medii a lagărului, sub această noțiune putîndu-se ascunde valori foarte diferite. Apare astfel mult mai judicioasă și precisă soluția deja amintită constînd în aprecierea lui t_i (după cum s-a văzut, cu destulă exactitate) și admiterea unei variaţii ulterioare a viscozităţii (dedusă din variaţii ale temperaturii) după o lege care se poate verifica experimental. Măsurătorile privind debitul de ulei Q_u în lagăre au stabilit variaţia acestuia cu condiţiile de lucru — turaţie, putere, presiune de alimentare etc. (fig. 2).

Alura curbei Q_u confirmă astfel în linii mari relaţiile teoretice de calcul care exprimă dependenţa debitului de viteză, presiune de alimentare etc.

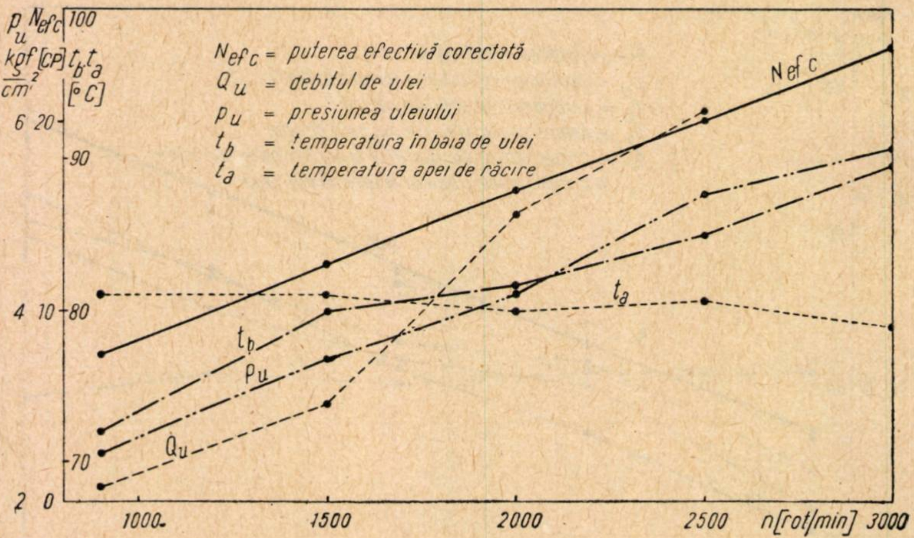


Fig. 2

b) *Pierderile prin frecări.* Pierderile prin frecare în lagăre pot fi studiate experimental din punct de vedere cantitativ, dacă se pot separa din pierderile totale de putere în motor cu suficientă precizie, sursele de frecări pe organe, precum şi celelalte procese consumatoare de energie în funcţionarea motorului. Metoda cea mai utilizată pînă în prezent pentru determinarea cuplului rezistent la un ansamblu atît de complex cum este motorul termic, şi care poate permite în acelaşi timp separarea în condiţii mai apropiate de realitate a componentelor acestui cuplu, implică antrenarea motorului din afară. Caracterul de solicitare dinamică a lagărelor nu se schimbă în acest caz, deoarece rămîn active forţele de inerţie ale sistemului. Aspectul cantitativ al solicitării nu poate fi pus însă în evidenţă în întregime, ca în cazul funcţionării normale a motorului. În schimb, se pot reproduce destul de bine condiţiile termice, lăsînd motorul să funcţioneze normal, pînă în momentul măsurării cuplului rezistent; instalaţia electrică reversibilă frînă-dinam, folosită pentru măsurători, permite această manevră.

Detaliile metodei folosite au fost deja specificate în prima parte a lucrării [2]; într-o primă fază s-a urmărit determinarea cuplului rezis-

Tabela 1

n [rot/min]	t_a [°C]	p_u [kgf/cm²]	t_b [°C]	V [m/s]	Palierul din faţă		Palierul din spate	
					t_i [°C]	$t_i - t_b$ [°C]	t_i [°C]	$t_i - t_b$ [°C]
a) Motorul ca frînă, t_a = const.								
498	78	0,30	64,3	0,63	60,8	−3,5	62,7	−1,6
1 090	80	1,0	75,5	1,37	72	−2,5	69,5	−6
1 600	79,5	1,5	78	2,01	75,5	−2,5	73,9	−4,1
2 115	80	2,0	84,1	2,66	81	−3,1	80,4	−3,7
2 505	79,5	2,5	91,4	3,15	87,7	−3,7	85,8	−5,6
b) Motorul ca frînă, t_a = const., t_b = const.								
554	79,5	0,5	79,9	0,70	76,6	−3,3	75,8	−4,1
911	79,2	1,0	80,2	1,15	76,8	−3,4	75,4	−4,8
1 548	80	1,6	79,8	1,94	76,8	−3	76	−3,8
2 000	79	2,3	80,2	2,51	76,2	−4	76,2	−4
2 516	79,2	3,0	80,3	3,16	76,8	−3,5	76	−4,3

Tabela 2

Funcţionarea	n [rot/min]	p_u [kgf/cm²]	t_a [°C]	t_b [°C]	V [m/s]	Palierul din faţă		Palierul din spate	
						t_i [°C]	t_i-t_b[°C]	t_i [°C]	t_i-t_b[°C]
În gol	2 079	2	81	84,9	2,60	81,3	−3,6	80,7	−4,2
			80	85,1		81,5	−3,6	81,2	−3,9
În plină sarcină	2 012	2	80	86,9	2,53	82,4	−4,5	81,5	−5,4
			80	86,7		81,5	−5,2	81,1	−5,6
			80	87,4		82,0	−5,4	82,0	−5,4
Ca frînă	2 058	2,3	80	84,1	2,58	78,2	−5,9	78,6	−5,5

tent global al motorului şi defalcarea momentului rezistent dat de ciclurile de pompare în cilindri. Cuplul rezistent al motorului considerat, sub forma puterii absorbite, este redat în funcţie de turaţie, la diverse temperaturi ale uleiului din baie, în tabela 3.

Se vede din studiul datelor cuprinse în această tabelă că puterea cheltuită de motor pentru învingerea rezistenţelor proprii, măsurată în condiţiile antrenării din afară, creşte cu turaţia, lucru de aşteptat, însă variaţia aceasta se constată a fi funcţie de asemenea şi de viscozitatea lubrifiantului, ceea ce este evident chiar pentru diferenţe mici ale acesteia, cum este cazul pentru temperaturile din baie variind între 70—85°C.

Tabela 3

n [rot/min]	t_a [°C]	Temp. ambiantă [°C]	Puterea absorbită N_r [CP]		
			$t_b = 70$°C	$t_b = 80$°C	$t_b = 85$°C
590	78 ÷ 80	23 ÷ 26	0,39	0,375	0,41
1 070	,,	,,	1,1	1,0	0,91
1 560	,,	,,	2,0	2,02	1,84
2 090	,,	,,	3,36	3,1	3,05
2 550	,,	,,	4,92	4,62	4,34
2 960	,,	,,	6,26	6,38	5,62

În tabela 4 se prezintă raportul dintre puterea efectivă corectată a motorului N_{efc} și puterea absorbită N_r, determinată pe calea specificată.

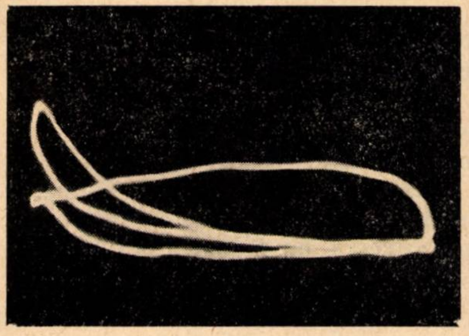
Tabela 4

n [rot/min]	t_a [°C]	t_b [°C]	Temp. ambiantă [°C]	N_r [CP]	N_{efc} [CP]	N_r/N_{efc} [%]
550	78 ÷ 80	85	24	0,32	4,7	6,8
1 100	,,	,,	,,	0,90	9,85	9,1
1 630	,,	,,	,,	1,91	15,30	12,5
1 985	,,	,,	,,	2,80	18,15	15,4
2 615	,,	,,	,,	4,50	24,76	18,2
2 960	,,	,,	,,	5,62	27,75	20,2

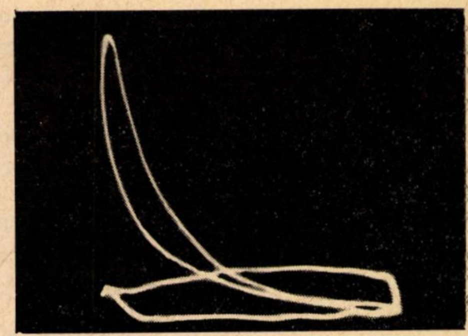
Cuplul rezistent real al motorului în funcțiune este evident mai mare, atît din cauza sarcinilor sporite sub care lucrează ansamblurile de frecare, cît și datorită condițiilor de ungere înrăutățite de pe pereții cilindrilor ca urmare a proceselor de ardere. Valoarea lui se poate determina, ridicînd diagramele indicate pentru toți cilindrii, însumînd puterea reală și scăzînd apoi puterea dată la frînă [4].

O fracțiune din cuplul rezistent total al motorului o constituie lucrul mecanic rezistent necesar pentru realizarea diagramei de pompare, în cursele de aspirație, compresie și refulare. Cantitativ, puterea absorbită de motor pentru realizarea acestor cicluri (N_p) a fost pusă în evidență, în cazul de față al antrenării motorului, cu ajutorul diagramelor indicate respective. Diagramele s-au obținut prin fotografierea imaginii ciclurilor realizate pe ecranul tubului unui oscilograf catodic (fig. 3, 4, 5, 6, 7).

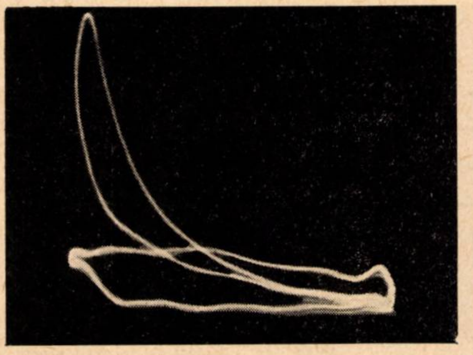
Presiunea din cilindru a fost înregistrată prin intermediul unui captor piezo-cuarț, iar cursa pistonului cu ajutorul unui captor capacitiv cu șaibă, avînd $\lambda = \frac{1}{4}\left(\text{la motorul încercat } \lambda = \frac{1}{4{,}25}\right)$. S-au ridicat diagramele de pompare la turație constantă cu maneta de accelerație în diferite poziții, precum și diagrama de pompare în funcție de turație



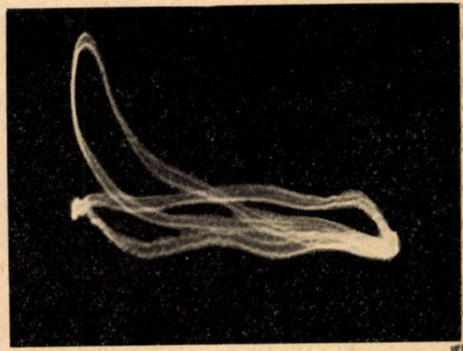
3



4



5



6

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM KÖZPONTI KÖNYVTÁRA 1848

7

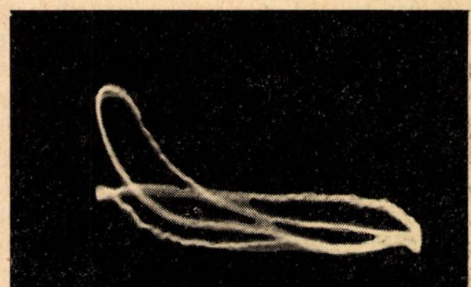


Fig. 3. — k = ralanti; n = 1 320 rot/min.

Fig. 4. — k = 33%; n = 1 320 rot/min.

Fig. 5. — k = 33%; n = 1 535 rot/min.

Fig. 6. — k = 33%; n = 2 155 rot/min.

Fig. 7. — k = 33%; n = 2 900 rot/min.

pentru o anumită valoare a deschiderii gazelor (k). S-au măsurat în acelaşi timp puterea totală absorbită de motor N_r, temperatura apei de răcire t_a şi a lubrifiantului din baie, t_b. Motorul a fost complet echipat cu excepţia carburatorului.

Rezultatele măsurătorilor sînt redate în tabelele 5 şi 6.

Din măsurătorile efectuate a rezultat că la acest motor aproximativ 50% din puterea totală absorbită se consumă în ciclurile de pompare. La aceeaşi turaţie, puterea absorbită de ciclurile de pompare este maximă pentru funcţionarea motorului la ralanti şi scade cu mărirea gradului de accelerare. La un grad de accelerare constant, puterea absorbită de ciclurile de pompare creşte cu turaţia aproape în aceeaşi proporţie. Raportul N_p/N_r scade însă cu creşterea turaţiei.

Tabela 5

Deschiderea gazelor	n [rot/min]	t_a [°C]	t_b [°C]	N_r [CP]	N_p [CP]	N_p/N_r [%]
ralanti	1 320	47	55	3,275	1,75	53,6
33%	1 320	47	55	3,10	1,59	51,3

Tabela 6

	Deschiderea gazelor = 33% = constant		
n [rot/min]	1 535	2 155	2 900
t_a[°C]	47	49	52
t_b[°C]	52	61	67
N_r [CP]	3,84	5,71	8,24
N_p [CP]	2,08	2,91	3,59
N_p/N_r [%]	54,2	51,0	43,6

În literatură se găsesc rezultate diferite în această problemă. Astfel, unii autori [5] găsesc puterea absorbită de ciclurile de pompare de numai 10—15% din puterea totală consumată în motor (datele sînt pentru un motor de avion) fără a se specifica însă condiţiile experimentale.

Alţi autori [4] au găsit, pentru o gamă variată de condiţii de funcţionare, că raportul N_p/N_r poate varia între 25—40%, în funcţie de parametrii funcţionali adoptaţi; încercările au fost făcute pe un motor experimental cu 4 cilindri. Reiese necesitatea aprofundării acestor aspecte prin stabilirea unor corelaţii mai precise între condiţiile de lucru şi valoarea frecărilor; aceasta ar putea conduce la îmbunătăţirea randamentului mecanic al motorului.

Primită la redacţie la 9 ianuarie 1963

CONTRIBUTIONS TO THE EXPERIMENTAL DETERMINATION OF THE OPERATING PARAMETERS OF THE BEARINGS OF INTERNAL COMBUSTION ENGINES

ABSTRACT

The paper presents experimental results concerning the measuring of the lubricant temperature in the oil sump and at the bearing oil inlet and outlet. It is found that the inlet temperature may be safely considered equal to that in the sump, an important premise for computations being thus established. Measurements of the oil rates of flow have shown their variation with the engine speed, oil supply pressure, etc., data which are in agreement with the theoretical conclusions. As regards the power losses in the engine, it was found that the pumping cycles represent about 50% of the total losses; a comparison with data obtained by other authors has shown the necessity of further investigations in this respect.

BIBLIOGRAFIE

1. N. Tipei, Al. Nica, *Cercetări asupra regimurilor de funcționare a lagărelor. I. Influența variației viscozității.* St. cerc. mec. apl., **X**, *3*, 737—754 (1959).
2. Gh. Vasilca, Al. Nica, *Contribuții la determinarea pe cale experimentală a parametrilor funcționali de la lagărele motoarelor cu ardere internă. I. Parametrii funcționali, metoda de lucru și instalația experimentală.* St. cerc. mec. apl., **XIII**, *3*, 773—781 (1962).
3. N. Tipei, V. N. Constantinescu, Al. Nica, O. Biță, *Lagăre cu alunecare.* Edit. Acad. R.P.R., București, 1961.
4. R. E. Gish, J. D. Mc Cullough, J. H. Retzloff, H. T. Mueller, *Determination of True Engine Friction.* SAE Transactions, **66**, 649—667 (1958).
5. M. M. Maslenikov, M. S. Rapiport, *Motoare cu piston pentru aviație.* Edit. tehnică, București, 1953.

STUDII

CU PRIVIRE LA ERORILE DE MĂSURĂ ŞI PONDEREA ACESTOR ERORI, ÎN CAZUL STUDIULUI UZURII CU IZOTOPI RADIOACTIVI

DE

DAN PAVELESCU

620.19 : 539.16

1. Importanţa cunoaşterii şi reducerii erorilor de măsură este unanim acceptată. Cu toate acestea, din examinarea literaturii de specialitate care tratează diferite probleme ce privesc studiul uzurii maşinilor, sau legate de fenomenul frecare-uzură, rezultă că nu sînt suficient abordate (de multe ori lipsind complet) şi aspectele privind exactitatea măsurătorii, şi gradul în care erorile de măsură au afectat reproductibilitatea rezultatelor publicate.

Astfel, spre exemplu, lucrări de valoare [1], [2] etc. care abordează problema uzurii, cu ajutorul izotopilor radioactivi, deşi prezintă diferite metode, sau sisteme pentru studierea uzurii, totuşi nu indică sensibilitatea, precizia, sau exactitatea respectivelor metode.

Lucrări clasice ce tratează frecarea şi uzura, mai vechi [3], [4], sau chiar recente [5], de asemenea nu consacră un capitol problemei erorilor specifice.

În majoritatea lucrărilor ce tratează frecarea şi uzura, concluziile şi exemplificările sînt ilustrate prin diferite diagrame în parte numai orientative (linii rezultante, fără punctele experimentale respective).

S-ar părea deci că problema erorilor de măsură, în cazul studiului uzurii, este bine lămurită şi că reproductibilitatea rezultatelor este deci ceva de la sine înţeles.

Considerăm totuşi că această problemă nu este suficient determinată în special în ceea ce priveşte obţinerea unor rezultate reproductibile.

Astfel, într-o lucrare [6], de altfel dintre puţinele care studiind uzura caută să abordeze şi aspectul reproductibilităţii rezultatelor prezentate, autorul recunoaşte că pentru „a asigura" reproductibilitatea nu a luat în consideraţie nici o abatere prea mare şi „a repetat" experienţele.

Sîntem de părere că în această situație rezultă că în general reproductibilitatea ansamblului de determinări lasă de dorit, dacă o anumită precizie a fost obținută prin eliminări și repetări.

De asemenea, în literatura de specialitate se publică adesea curbe de uzură ca acelea din figurile 1, 2, 3, la care apare discutabilă „varianta”

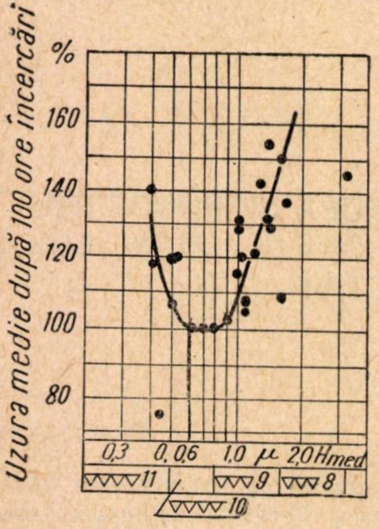


Fig. 1. — Dependența uzurii bolțului pistonului de rugozitatea suprafeței (reprod. din [1], p. 132).

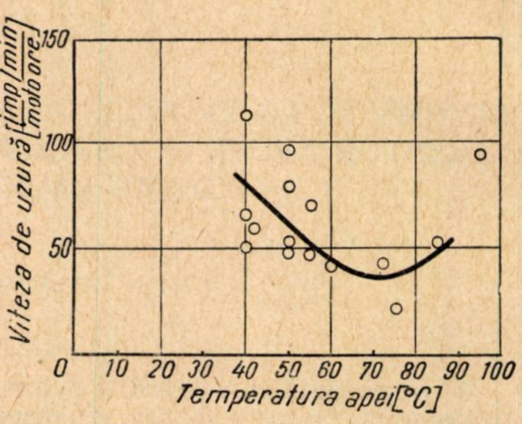


Fig. 2. — Influența temperaturii apei de răcire asupra vitezei de uzură a unui segment de piston (reprod. din [2], p. 114).

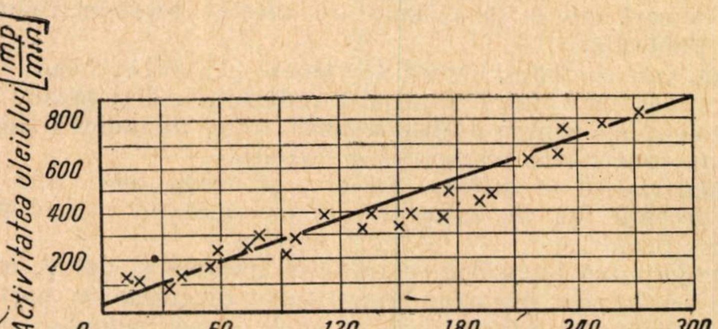


Fig. 3. — Evoluția uzurii unui segment funcție de durată (reprod. din [2], p. 130).

aleasă drept reprezentare grafică a evoluției fenomenului respectiv. În astfel de situații este întemeiată nesiguranța cu privire la reproductibilitatea respectivei curbe, și deci a preciziei și exactității obținute.

În alte cazuri, deși principial se recunoaște faptul că studiile de uzură efectuate pe agregate, ca de exemplu cele privind motoarele cu ardere internă, comparativ cu încercările pe modele, sînt afectate de o complexitate mai mare a factorilor de erori, totuşi în mare parte, lucrările publicate nu prezintă date asupra preciziei rezultatelor. Spre exemplu în lucrarea [7], deşi se expune amănunţit o metodică interesantă de măsură cu radioizotopi, se omite să se vorbească şi despre erori şi reproductibilitate. La fel, lucrarea [8] care deşi sesizează clar complexitatea fenomenelor în motor, nu abordează acest subiect. Chiar într-un manual, care şi-a propus să trateze despre teoria erorilor de măsurare, problema reproductibilităţii rezultatelor nu este just sesizată, arătîndu-se generic şi deci eronat că „··· reproductibilitatea. măsurătorilor depinde atît de calitatea cît şi de îndemînarea observatorului, dar nu caracterizează însă şi imprecizia aparatului” [9].

Aceste aspecte, cît şi studiile ce s-au făcut mai mulţi ani în cadrul laboratorului de metode radioactive al Institutului de mecanică aplicată, şi în care s-a pus accentul urmăririi şi eliminării factorilor de erori în cadrul uzurii, [10], [11], [12], [13], ne-au creat convingerea că este necesară discutarea problemei. Nu vom insista însă, decît în cazul în care considerăm absolut util, asupra factorilor de erori ce sînt cunoscuţi fiind trataţi în lucrări speciale, cum ar fi cei privind aparatura electronică de măsură, de serie [14].

Complexitatea factorilor ce condiţionează evoluţia uzurii, şi de asemenea a măsurării acesteia, pune pregnant problema ponderii factorilor de erori şi a reproductibilităţii repetate a rezultatelor pe ansamblul lor, adică a posibilităţii obţinerii repetate a aceleiaşi curbe de uzură, nu numai ca alură calitativă ci şi cantitativ, cu o abatere relativă, minimă acceptabilă. Desigur că trebuie să avem în vedere şi factorul economic; astfel este util să fie obţinută numai acea exactitate care este necesară punerii în evidenţă a fenomenului urmărit, obţinîndu-se totodată erori de acelaşi ordin de mărime în diferitele părţi componente ale sistemului de măsură utilizat.

Studiile asupra rezistenţei la uzură a unui material, faţă de altele apropiate, a calităţii de ungere a unui aditiv faţă de o gamă de alte astfel de produse etc. reclamă în mod implicit un anumit raport de selecţie, şi deci o anumită exactitate de măsură [12]. Deşi uneori precizia a fost suficientă pentru un şir mic de examinări ale probelor, ea trebuie să reconfirme rezultate repetate pe ansamblu. În cazul în care apare necesitatea unui studiu aprofundat al fenomenului fizic al frecării sau uzurii, şi deci a posibilităţii de urmărire a unor fenomene de scurtă durată [13], în afară de sensibilitatea metodei se cere o exactitate şi reproductibilitate în limite şi mai strînse.

Utilizarea trasorilor radioactivi, metodă care este acum cunoscut că permite măsurarea uzurii cu eficienţă şi sensibilitate sporită [10], nu simplifică totodată şi factorii de erori, ci din contră introduce erori specifice metodei care îngreunează rezolvarea condiţiei de reproductibilitate.

2. Dacă se pune deci problema studierii evoluţiei uzurii prin utilizarea izotopilor radioactivi, ansamblul sistemului de măsură devine

complex. Metoda fiind „indirectă", ea presupune pe lîngă sistemul mecanic propriu-zis care generează uzura (adaptat cerințelor metodei, în special cu circuitul de ulei purtător al produselor de uzură radioactive) și un lanț de celule electronice care formează sistemul radiometric (începînd de la traductori și terminînd cu potențiometrul electronic înregistrator). Un astfel de sistem de măsură complex este arătat schematic în figura 4.

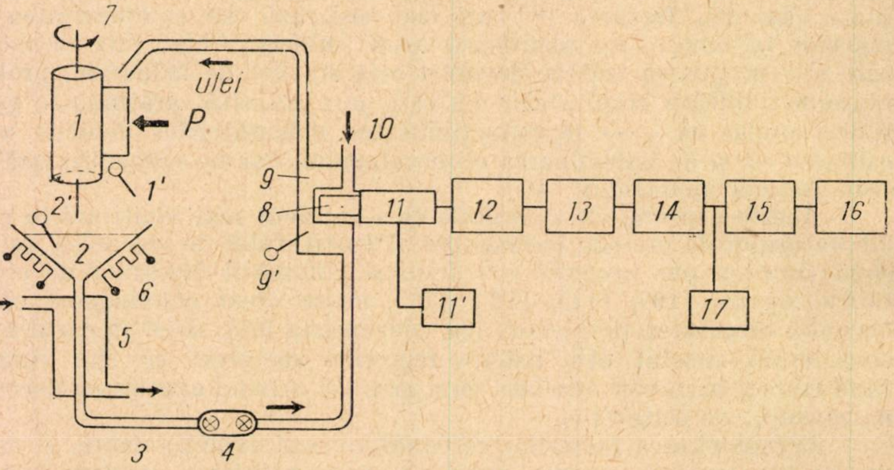


Fig. 4. — Schema sistemului de măsură pentru urmărirea evoluției uzurii cu trasori radioactivi : *1*—cuplu de frecare; *2*—baia de ulei; *3*—circuitul de ulei; *4*—pompa de ulei; *5*—sistem de răcire (termostatare); *6*— sistem de încălzire; *7*—sistemul de acționare; *8*—cristalul scintilator; *9*—camera de ulei a traductorului; *10*—sistemul de răcire al traductorului; *11*—fotomultiplicator; *12*—preamplificator; *13*—amplificator cu pas reglabil; *14*—discriminator de impulsuri; *15*—integrator; *16*—înregistrator automat; *17*—numărător; *11'*—alimentare HT; *1'*, *2'* și *9'*—termoelemente pentru măsurarea temperaturii.

În cazul studiului direct pe motor, cuplul de frecare (*1*) reprezintă cuplul piston-cilindru (eventual arbore-lagăr), iar baia de ulei (*2*) este înlocuită de carterul motorului.

Sistemul de măsură devine și mai complex atunci cînd este necesar să se urmărească simultan evoluția uzurii a două piese în frecare ; metoda utilizării a doi trasori radioactivi (asupra căreia vom reveni), presupune separarea ponderii uzurii respective prin analiză spectrometrică, circuitul de măsură fiind reprezentat schematic în figura 5.

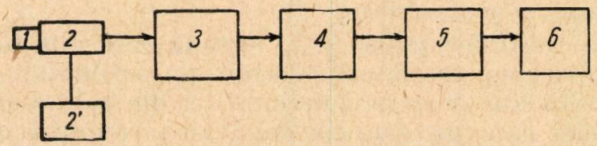


Fig. 5. — Schema unui canal electric de înregistrare spectrometrică : *1*—cristal scintilator; *2*—fotomultiplicator; *3*—amplificator liniar de bandă largă; *4*—selector de amplitudine cu canal mobil; *5*—integrator; *6*—înregistrator; *2'*—alimentare de HT.

Se cunoaşte că atît partea mecanică cît şi cea electronică a sistemului de măsură este afectată de erori sistematice şi de erori întîmplătoare. Este necesar însă să se stabilească care sînt principalii factori de erori ai sistemului de măsură şi înregistrare a uzurii, care este ponderea lor şi dacă efectele se compensează şi, în sfîrşit, care este certitudinea măsurătorii?

3. În primul rînd socotim util de relevat cîteva aspecte în legătură cu obiectul măsurătorii. Dacă în alte domenii măsurătoarea tinde să se apropie cît mai mult de o anumită ,,valoare reală", realizînd totuşi o anumită eroare absolută, în cazul uzurii care este ,,mărimea'' faţă de care trebuie să intepretăm şi să micşorăm eroarea ?

Uzura ca fenomen fizic se traduce prin pierderi în greutate. Considerăm însă că în cazul uzurii nu este suficient să se cunoască numai cantitatea de produse uzate dintr-un anumit moment; acest lucru nu spune încă nimic; este caracteristică doar evoluţia fenomenului în ansamblu, reprezentată, de exemplu, prin ,,viteza de uzură'' în diferite perioade de timp şi materializată prin curba vitezei de uzură în funcţie de timp. Uzura fiind un fenomen cumulativ, mărimea care caracterizează evoluţia ei este deci ,,viteza de uzură'' (mg/h, imp/min. h).

De asemenea, interesează variaţia vitezei de uzură, funcţie şi de alţi parametri (temperatură, sarcină, viscozitate etc.). Problema astfel privită, obiectul măsurătorii se mută de la corespondentul pierderii în greutate într-un anumit moment, la curba care materializează şirul de astfel de situaţii şi defineşte legea de evoluţie a fenomenului. În acest caz, este necesar deci *să rezulte prin măsurătoare* (*înregistrare*) *o reproductibilitate a funcţiei în ansamblu, şi nu a unui caz cu totul particular.* Stabilindu-se astfel obiectul a cărei analiză interesează în primul rînd, condiţia de reproductibilitate nu apare totuşi mai dificilă. Urmează să stabilim un minim de puncte necesar şi suficient pentru a determina curba, astfel ca interpretarea să se facă cît mai puţin subiectiv, funcţie de zona de grupare a punctelor (aşa cum am exemplificat că nu se întîmplă).

Astfel trebuie să se tindă ca un anumit număr de puncte experimentale să fie astfel obţinut ca să definească legea de evoluţie a fenomenului în mod cît mai fidel.

Să presupunem că este suficientă în primul rînd reprezentarea unei perioade de rodaj, sau a unei porţiuni de dreaptă ce caracterizează un anumit proces, ca în lucrarea [13] sau ca în alte lucrări. În această situaţie, apreciem că dacă la un număr limitat de puncte experimentale şi de repetări ale ansamblului experienţelor $\frac{n}{2}+1$ din totalul punctelor experimentale (singulare) se repetă, curba poate fi trasată ţinînd seama de aceste puncte, pentru că sistemul în ansamblu va fi reproductibil. Desigur că în acest caz sînt suficiente 4—6 puncte singulare (situaţia din figura 9).

În cazul unei curbe complexe, cu mai multe întoarceri, inflexiuni etc., precizia măsurătorii trebuie asigurată prin împărţirea în segmente de dreaptă (tangente) care să răspundă separat condiţiei enunţate, urmărindu-se cu toată atenţia părţile caracteristice.

Pentru simplificare, condiția de $\frac{n}{2} + 1$ este necesară și suficientă pentru un ansamblu finit de puncte, repartizate însă proporționat de-a lungul diferitelor regiuni de curbe, dar minimum 3, pe ramurile principale (caracteristice). Dacă însă se sesizează „cascade" — ca în figura 3 — (specifice în special uzurii tăișului uneltei așchietoare) [20], [21] este necesar să se urmărească fenomenul cu metode ce permit sesizarea unor aspecte tranzitorii [13]. O astfel de evoluție presupune însă un număr mare de puncte experimentale (uneori chiar de ordinul sutelor). Înregistrarea automată va urmări desigur mai fidel fenomenul.

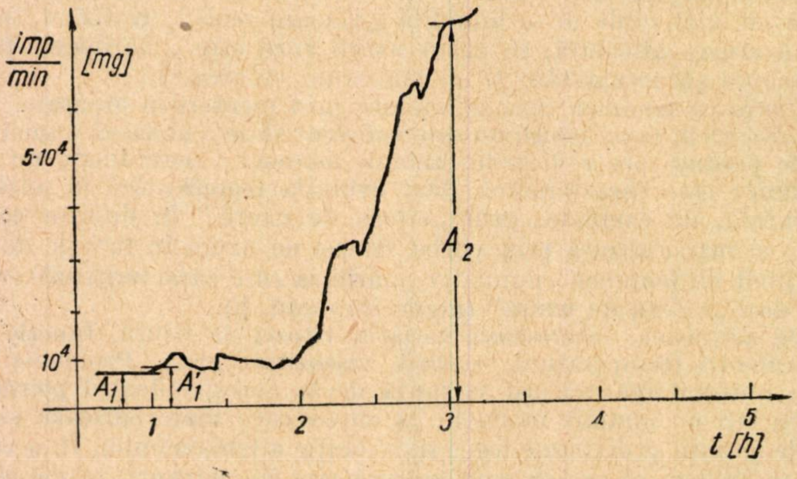


Fig. 6. — Schiță privind o diagramă înregistrată a evoluției uzurii funcție de durată.

4. Metoda utilizată fiind cea radioactivă, subliniem în plus următoarele :

a. Presupunînd numai un regim „static", în care uzura rămîne constantă în timpul determinării, este cunoscut că activitatea produselor respective de uzură, datorită evoluției anterioare, nu se poate măsura cu exactitate absolută, cu toate corecțiile, rezultatul măsurătorii depinzînd de caracterul statistic al dezintegrării radioactive (deci cu cît activitatea va fi mai mare și cu cît timpul de măsurare va fi mai lung, cu atît va fi mai mică abaterea relativă a vitezei de numărare de la valoarea medie). Dar, în general, regimul de lucru și de măsurare este dinamic ; metodica de înregistrare, presupunînd în genere o scară de timp liniară, același timp fiind afectat atît măsurării activității lor mari cît și celor reduse, eroarea statistică devine inegal repartizată de-a lungul diagramei (fig. 6). Practic nu sînt rare cazurile cînd, spre exemplu, piesa în studiu avînd o anumită activitate și un anumit regim de lucru, se trece în decursul a cîtorva ore de la un „fond" de circa 8 000—9 000 imp/min la ,,salturi'' de 120 000 imp/min, viteza de derulare a benzii de înregistrare fiind constantă. Astfel, la acest nivel de viteze de numărare, erorile relative medii ale punctelor extreme $A_1 - A_2$ sînt destul de mici ($\pm 1^0/_0$ și $\pm 3^0/_{00}$), scăzînd desigur funcție de creșterea vitezei de numărare.

Cu toate acestea, în cazul a două momente imediat vecine (A_1 și A'_1) situația nu este aceeași, intervenind pregnant abaterea medie pătratică pentru ,,fond'', care de această dată nu este altul decît valoarea A_1, ce reflectă de fapt cantitatea de produse de uzură în momentul respectiv. În situația unei viteze de uzură practic constantă, eroarea relativă medie a diferenței dintre cele două valori (spre exemplu 8 100 imp/min față de 8 000) este imensă : $\pm 178^0/_0$. Desigur că și eroarea probabilă respectivă este foarte mare ($\varepsilon_p = 0{,}67\ \varepsilon \simeq 120^0/_0$). Această situație tipică erorilor statistice în radioactivitate este totuși reală ; în mod cu totul greșit în formulele clasice, care determină abaterea standard și apoi eroarea relativă medie,

$$\delta_s = \sqrt{\frac{u}{t} + \frac{u_f}{t_f}} = \sqrt{\delta^2 + \delta_f^2}, \tag{1}$$

$$\varepsilon_s = \pm \frac{\delta_s}{n_s} \cdot 100^0/_0 = \pm \frac{\sqrt{\delta^2 + \delta_f^2}}{n - n_f} . 100^0/_0, \tag{2}$$

(cu indice f fiind notat numărul de impulsuri, și timpul respectiv, datorit fondului [16]), s-ar înlocui în acest caz valorile ,,inițiale'' ale fondului de radiație, adică cele de la începutul măsurătorii și nu valorile fondului din momentul imediat anterior măsurătorii, care însă a crescut împreună cu cantitatea produselor uzurii.

Integratorul și inerția sistemului de înregistrare, pot masca într-o măsură oarecare acest gen de fluctuații statistice.

Fenomenul de dezintegrare radioactivă (ce afectează deci astfel de erori statistice), fiind grefat pe fenomenul de uzură pe care îl pune în evidență, îi transmite totodată acestuia caracterul propriu de erori.

b. Rezultă că se impun deci ,,citiri'' separate de un timp mai lung, ele neschimbînd, ba chiar îmbunătățind aspectul general al curbei.

Trebuie însă să se țină seama că poate interveni în timpul respectiv influența unor anumiți parametri care produc sporiri considerabile ale vitezei de uzură, cauzele adevărate putînd trece neobservate, iar creșterea respectivă, fiind prezentată global pe o perioadă mai mare de timp, de multe ori nu poate fi sesizată special.

Sesizarea acestei ,,perioade'', după ce ea a trecut, conduce la explicații multiple (,,nor'' de particule în ulei, deficiență de ungere, blocare temporară a eprubetei, neomogenitate a materialului, suduri locale etc.).

Necesitatea urmăririi uneori a fenomenelor tranzitorii pe durate scurte, rezultă clar din situația prezentată în figura 7, în care prin înregistrarea simultană a trei parametri s-a surprins un moment, circa 20 minute, în care are loc o creștere a temperaturii medii a suprafeței de contact, ce produce o oarecare creștere a temperaturii din baia de ulei atenuată însă de sistemul de răcire, dar care dă naștere unei creșteri accentuate a vitezei de uzură. Printr-o măsurare, din oră în oră, așa cum se obișnuiește de multe ori, desigur că fenomenul nu ar fi fost sesizat și nici localizat în timpul producerii. Exemplificarea reflectă totodată și complexitatea fenomenului în studiu.

c. La rîndul său, evoluția în timp a fenomenului uzurii „modulează" rezultatul măsurării dezintegrărilor, prin faptul că variază cantitatea de produse radioactive ce sînt măsurate. Acest efect de modulare intervine cu erori atît sistematice cît și întîmplătoare, provenite fie chiar în momentul generării uzurii (factori locali), fie ulterior (circuitul de ulei sau în traductor). Efectul arătat este afectat apoi de erorile proprii ale sistemului electronic de traducere, transmitere și înregistrare, ce sînt în general cunoscute pentru fiecare etaj electronic în parte [14], [15].

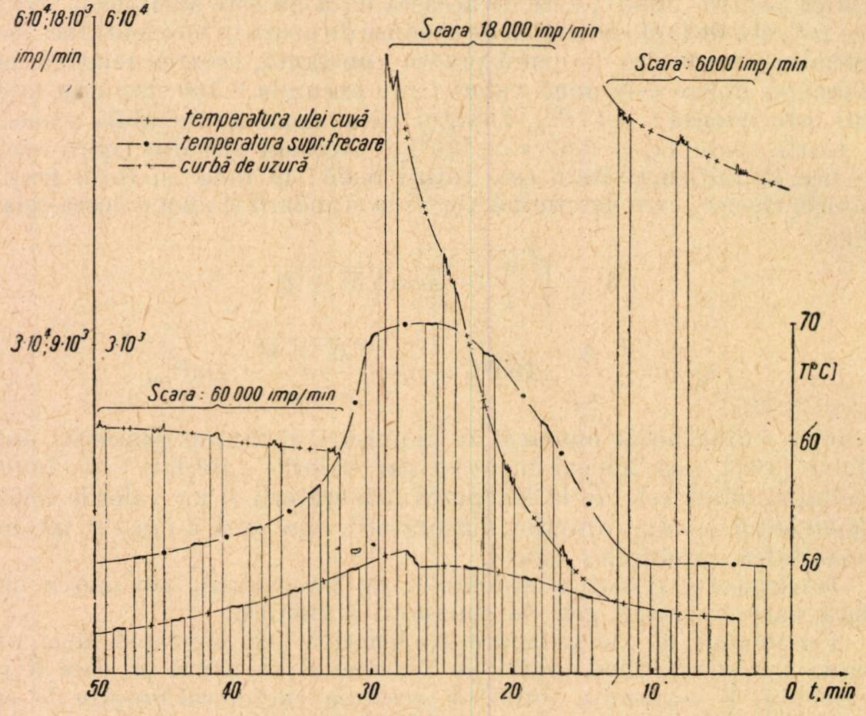


Fig. 7. — Un sector de diagramă obținută cu potențiometrul electronic privind evoluția simultană a uzurii și celor două temperaturi, în cazul unui cuplu de frecare bronz-oțel. Perioada de producere a unui „vîrf de uzură".

Dacă repetăm determinările de un număr finit de ori, asupra unuia și aceluiași moment (static), rezultatele obținute vor fi un șir de numere cu caracter aleatoriu, fiind necesară medierea ¹). Toate „punctele" componente ce constituie funcția de uzură respectivă au același caracter; curba de uzură pierde însă acest caracter statistic. Din momentul în care

---

¹) Prin valoarea medie înțelegem o valoare „stabilizată" a mediei aritmetice [22], însă fără o creștere nelimitată a numărului de determinări.

ne transpunem în regim dinamic și nu ne oprim la fiecare punct experimental luat individual, ci la ansamblul curbei, observăm că repetarea acestor ansamble conduce la configurații și poziții ce diferă una de alta cu abateri mai mari sau mai mici, după cum intervin mai mult sau mai puțin erorile întîmplătoare. Fiecare curbă de uzură în ansamblu, din familia de curbe obținute, capătă un caracter statistic ; ,,media'' unui număr mare

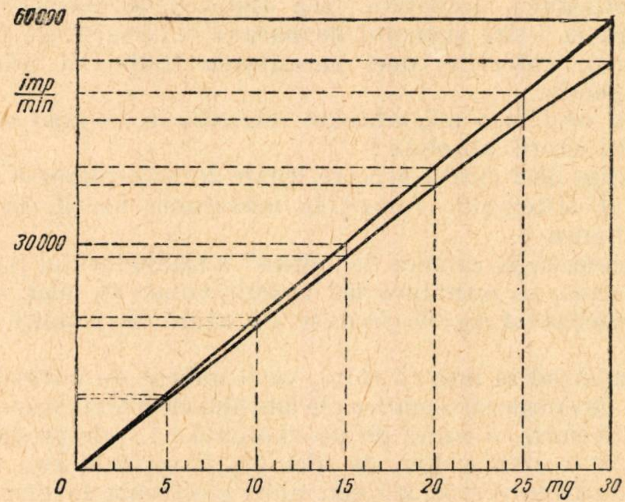


Fig. 8. — Model de diagramă de etalonare ce permite determinarea erorilor de timp mort.

de astfel de curbe prezintă o abatere din ce în ce mai mică (limitîndu-se din ce în ce mai mult atît factorul de eroare statistic cît și influența erorilor întîmplătoare).

Studiile uzurii în cazul unui agregat ar trebui să aibă în vedere tocmai acest aspect, prezentînd media rezultatelor unui număr mare de reproduceri și totodată valoarea reproductibilității.

Dacă în figura 9 este examinată fiecare curbă în parte, împrăștierea punctelor experimentale prezintă o abatere acceptabilă ($\pm 3\% \div \pm 8\%$). Interesează însă împrăștierea maximă relativă a curbelor, deci zona de împrăștiere a punctelor experimentale pentru un număr mai mare de reproduceri, și anume, pînă cînd la noi reproduceri curba se plasează în aceeași zonă de împrăștiere. În această situație, în urma unui studiu privind separarea, eliminarea sau micșorarea unor factori de erori [11], [12] s-a ajuns la abaterea de $\pm 25\%$.

d. Urmărirea fenomenului de uzură conduce deci la obținerea unor informații în relațiile dintre microstructură și macrostructură, procesul fiind cu dublu aspect. Ipoteza schimbării continue a stării de suprafață, pe care o acceptăm ca valabilă, pe baza unor confirmări experimentale, arată că acest proces cu dublu aspect este la rîndul său în continuă schimbare, după o lege statistică.

Considerăm deci că în cazul utilizării trasorilor radioactivi, ansamblul de urmărire al uzurii se aseamănă cu modelul clasic cu dublă structură al teoriei informației [17], în sensul că macrostructura este reprezentată de canalul de transmitere a informațiilor despre microstructură, transmiterea fiind afectată de o serie de factori de erori care deformează informația.

5. Nu totdeauna acceptăm însă unitatea de măsură (parametru) pe care o oferă la ieșire sistemul de măsură — înregistrare (de exemplu impulsuri/minut). Intervine deci necesitatea traducerii prin utilizarea etalonului respectiv.

Revenind deci la o măsurătoare relativă, în ce grad este ea favorabilă reducerii erorii absolute?

Să urmărim deci cîteva aspecte legate de măsurătoarea etalon, efectuată în cazul sistemului folosit la măsurarea uzurii, în felul celui prezentat în figura 4.

Presupunem că în camera de ,,citire'' a traductorului (spre exemplu a unui scintilator), se introduce un anumit volum de ulei, ce conține o cantitate cunoscută (A mg) de produse de uzură, în condiții similare de temperatură.

Corespondentul în mm (N mm), va fi indicat de înregistrator, bineînțeles afectat de erorile sistematice ale lanțului electronic respectiv.

Pe de altă parte, o cantitate necunoscută (A_x) de produse de uzură (radioactive), în același volum de ulei, va fi sesizată sub valoarea N_1 mm, afectată de aceleași erori ale sistemului electronic de măsură.

Presupunem deci că s-au luat totodată o serie de măsuri cunoscute ca : stabilizarea tensiunii, ecranarea fotomultiplicatorului etc. ; de asemenea, nu presupunem erori întîmplătoare între cele două determinări. Ar rezulta că factorul de eroare K se poate elimina, fiind constant, și deci există o riguroasă proporționalitate între valorile menționate, fapt care ar permite determinarea imediată a valorii necunoscute A_x mg, pe baza relației :

$$A_x = A \cdot \frac{N_1}{N} \text{(mg)}. \tag{3}$$

Înainte de a considera însă cantitatea A_x mg drept ,,valoarea reală'' căutată, sînt necesare următoarele observații :

a) Nu s-a ținut seama de diferite erori pe care le poate introduce un anumit tip de cameră de măsură a scintilatorului. Astfel, unele lucrări publicate prezintă interesante studii de eficacitate a camerelor de măsură, ajungînd la concluzia că forma camerei și volumul ei pot spori eficacitatea de 5 ori [2], chiar dacă volumul de ulei crește numai în raportul 1,7. Cu toate că se amintește în aceste lucrări că sistemul de răcire al cristalului poate introduce erori, nu se fac aprecieri asupra ponderii lor, mai ales pentru cazul etalonării.

În lucrările efectuate la Institutul de mecanică aplicată [10], [11], pentru a se mări eficacitatea și a se elimina totodată erorile, s-a mers pe linia reducerii acestui volum, realizîndu-se un raport egal cu unitatea între volumul total de ulei și cel din camera traductorului. Pentru etalonările legate de măsurătorile din lucrarea [13], s-a studiat în mod special o cameră de măsură adecvată scintilatorului folosit, avînd răcire dublă (apă şi aer).

Cu toate acestea, se constată că la măsurătoarea necesară stabilirii valorii etalon apare o anumită diferenţă de presiune în camera de ulei, comparativ cu cazul măsurătorii curente. Din această cauză, în funcţionarea curentă, peretele metalic din faţa cristalului scintilatorului prezintă o bombare datorită presiunii din circuitul de ulei ; această deformaţie poate introduce erori mari dacă distanţa dintre cristal şi perete este iniţial mică. Pentru stabilirea distanţei de lucru, în cazul răcirii cu aer, trebuie avut în vedere şi faptul că totodată, eficacitatea traductorului scade repede faţă de creşterea distanţei dintre suprafaţa cristalului şi peretele camerei de măsură. Astfel, la tipul de cameră studiat la I.M.A., o bombare a peretelui metalic de 4 sutimi poate introduce o eroare de $\sim 2\%$, în cazul distanţei alese convenabil pentru a nu micşora eficacitatea.

De asemenea, în funcţionarea curentă, variaţiile de temperatură produc, totuşi, fie modificări în condiţiile de funcţionare a cristalului scintilator, fie în varierea distanţei amintite.

Rezultă că mărimea distanţei afectează eficacitatea traductorului, în timp ce variaţiile ei afectează în măsură mare precizia.

b) În cazul în care se utilizează însă un grup de traductoare G-M, pentru a realiza deci o eficacitate şi o sensibilitate asemănătoare, trebuie să se ţină seama în afară de geometria sistemului traductor însuşi (distanţele între contoare şi între camera de ulei) — care s-a studiat [1], [2], şi priveşte eficacitatea traductorului respectiv — şi de faptul că, pentru a se realiza un acelaşi K în condiţii de etalonare şi de lucru curent, este necesar să se aibă în vedere puterea de rezoluţie, nu numai a traductorului ales, dar şi a întregului sistem electronic.

În acest scop, în primul rînd în funcţie de numărul contorilor, şi de timpul mort respectiv, trebuie să se utilizeze mai multe etaloane, pentru a se acoperi astfel cu valori apropiate întreaga bandă de activitate (impulsuri/minut) a evoluţiei fenomenului de uzură.

Amintim că „timpul mort'' al sistemului electronic de măsură poate varia în special funcţie de caracteristicile contorului G-M între $1{,}2.10^{-2}$ s şi 3.10^{-4} s [16]. Dacă variaţia vitezei de uzură este de felul celei din figura 6, cu valorile indicate, este necesar un număr suficient de contoare G-M. La viteze mari de numărare, eficacitatea şi puterea de rezoluţie a sistemului de contoare nu se îmbunătăţeşte proporţional cu numărul acestora. Rezultă deci că alura curbei de uzură va fi afectată nu numai de erorile statistice proprii dezintegrărilor radioactive, despre care s-a vorbit, ci şi de influenţa puterii de rezoluţie a sistemului traductor sau a sistemului electronic în ansamblu.

Ponderea acestor erori, la o anumită viteză de numărare, este funcţie directă în primul rînd de valoarea reală a puterii de rezoluţie (mărimea inversă a timpului mort) care însă variază după cum rezultă mai sus în limite largi. Astfel, cu un sistem de 12 contoare G-M, valoarea optimă arătată pentru timpul de rezoluţie ne indică o eroare de 3—4%, la o viteză de numărare de 60 000 imp/min, viteză la care sistemul s-ar bloca dacă puterea de rezoluție ar corespunde celei minim indicate mai sus. În același timp, la circa 8 000 impulsuri pe minut, funcție de limitele de rezoluție indicate, eroarea va varia între aproximativ 0,3 % și aproximativ 20 %, situație care este destul de concludentă.

Eroarea de timp mort, a întregului sistem, poate fi însă relativ ușor determinată. Astfel, în figura 8 diferențele dintre ordonatele tangentei în origine la curba de etalonare și cele ale curbei de etalonare indică (direct în impulsuri pe minut) erorile în punctele respective.

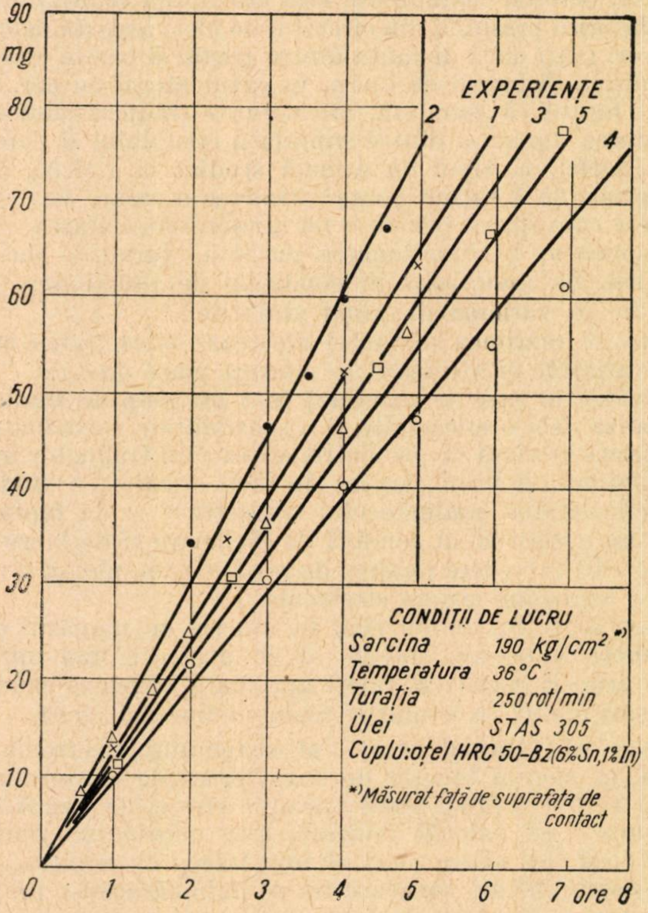


Fig. 9. — Diagramă obținută cu o instalație studiată special pentru a reduce împrăștierea punctelor experimentale (cuplu de frecare cilindru pe suprafață plană).

c) Deși între cele două caracteristici principale ale unui sistem de măsură, sensibilitatea și precizia, există părerea că nu poate fi interdependență, primul caracter nepresupunîndu-l implicit și pe cel de-al doilea, totuși acest lucru nu este întotdeauna valabil. Astfel, în cazul utilizării trasorilor radioactivi, pentru a se mări sensibilitatea, se trece adesea de la un traductor de tip G-M la un traductor de tip scintilator (cu timpul mort 10^{-9} s) şi se constată însă că în acelaşi timp sînt necesare şi o serie de prevederi ce trebuie luate pentru a nu micşora precizia de măsură faţă de factorii de eroare ce pot apărea la noul sistem traductor (influenţa temperaturii asupra cristalului, influenţa cîmpurilor electrice şi magnetice asupra fotomultiplicatorului etc.).

d) În ambele sisteme (scintilaţie sau G-M), circulaţia de ulei şi tipul camerei de ulei determină uneori depuneri şi neomogenităţi în camera respectivă de măsură, diferite de situaţia de etalonare, ce pot să conducă de asemenea la erori de ordinul $\pm 1\%$.

6. Mărimea măsurată este însă afectată şi de alte erori. Astfel valoarea A_x mg a fost afectată şi de factorii de erori întîmplătoare ale *sistemului mecanic propriu-zis* :

a) Depunerile produselor de uzură, în camera de ulei a instalaţiei (sau carterul motorului), pe conducte, sau în pompă, conduc de asemenea la erori atunci cînd aceste depuneri nu pot fi măsurate, sau cînd antrenarea lor poate da vîrfuri de viteză de numărare pînă la de 5 ori cea obişnuită [10]. Utilizarea filtrelor nu a dat satisfacţie în toate situaţiile ; ele pot totuşi ajuta la studierea acestor erori.

b) Variaţiile bruşte de temperatură, la suprafaţa de contact, care nu pot fi amortizate în timp util de sistemul de răcire, sînt alte surse de erori. Studiindu-se aceste fenomene cu instalaţia din lucrarea [13], s-au obţinut curbe de felul celei din figura 7 ; acestea arată că în anumite procese de scurtă durată, temperatura la suprafaţa de contact a cuplului de frecare creşte brusc provocînd un nor de particule care crează „salturi” pe diagrama înregistrată.

c) În cazul utilizării ştifturilor radioactive (spre exemplu la studiul uzurii segmenţilor de piston de diametru mare, sau a cămăşilor de cilindru), erorile provin atît din influenţa acestor ştifturi asupra elasticităţii segmentului cît şi prin diferenţa de duritate (spre exemplu în cazul utilizării ştifturilor de cobalt).

7. Cele mai mari erori provin însă de la condiţiile locale ale suprafeţei de frecare :

a) Variaţia în timp a suprafeţei de contact, provocată fie prin uzarea progresivă a acestei suprafeţe fie prin vibraţiile sistemului de aplicare a sarcinii şi ale pieselor cuplului în frecare, se traduce în variaţia încărcării specifice (kgf/cm^2), variaţia temperaturii, şi în cele din urmă în variaţia vitezei de uzură.

În lucrările efectuate la I.M.A. [10], [11], [12], s-a căutat să se elimine aceste erori care pot da variaţii de mai multe ordine de mărime (erori ce se transformă din sistematice în întîmplătoare). S-a studiat un cuplu de frecare şi un sistem corespunzător de aplicare a sarcinii astfel ca suprafaţa de contact să se poată menţine permanent constantă [12]. Sînt însă sisteme de măsură la care aceste erori provin din însuşi principiul cuplului de frecare utilizat [12] (de exemplu cuplul format din doi saboți și arbore, 4 bile etc.)

b) La studiul uzurii lagărului [19], uzura apare dezordonat la opriri și porniri, deci în momentul în care arborele părăsește sau atinge poziția de repaus, ungerea nefiind hidrodinamică.

În cazul cuplului piston-cilindru, cauzele de erori sînt produse de : blocările unor segmenți, uzurile locașurilor de segmenți, a bolțului bielei, ovalizarea cămășii etc., toate acestea schimbînd condițiile suprafeței de contact.

c) Variația stării de suprafață din timpul frecării produce diferite viteze de uzură. Starea de suprafață trebuie privită atît în ceea ce privește trecerea de la o rugozitate la alta, cît și prin trecerea de la un strat superficial de o anumită duritate (de exemplu format din oxizi) la un alt strat superficial, treceri produse funcție de condițiile diferite de temperatură, factorii chimici ai lubrifiantului și combustibilului, variațiile condiției de ungere etc. Toate acestea fac ca variația stării de suprafață să fie mai accentuată în cazul machetelor de laborator pentru studiul uzurii, precum și în cazul grupului piston-cilindru din motor, și mai puțin în cazul lagărelor.

8. Aspectele arătate fac ca erorile sistematice sau întîmplătoare să difere funcție de tipul instalației pentru studiul frecării și uzurii (și mai ales de geometria cuplului de frecare). Totuși, ponderea erorilor este de mai multe ordine de mărime față de cea a lanțului electronic. Astfel, în timp ce prin măsurile ce se pot lua, erorile introduse de sistemul traductor + lanțul electronic (în special integratorul și înregistratorul), pot să nu depășească ± 6%, reproductibilitatea curbelor de uzură este serios afectată de condițiile locale ale cuplului de frecare care pot da chiar abateri maxime între ± 50% pînă la ± 150% (funcție de sistemul ales).

În cazul grupului piston-cilindru, al motoarelor cu ardere internă, situația se complică mult [7] datorită evoluției și influenței reciproce a factorilor fizici și chimici care cu greu pot fi determinați, în ceea ce privește ponderea intervenției lor. Spre exemplu un anumit conținut de sulf în combustibil poate înlesni formarea unor coroziuni chimice ale pereților camerei de ardere, înlesnind scăpări de gaze care la rîndul lor au influențe diferite ca : diluări ale uleiului, zgure, depozite, micșorarea viscozității lubrifiantului etc. care accelerează uzura. Pe de altă parte, un anumit procent de sulf sau de alte elemente în ulei poate da naștere la oxizi rezistenți la uzură.

Diferențele de temperatură în cursul ciclurilor respective, cît și în diferite zone ale camerei de ardere, devin factori care complică și mai mult imaginea lanțului de fenomene și erori. Fiind posibil ca, datorită diferiților factori, erorile întîmplătoare fie să se compenseze între ele într-o anumită măsură, fie să accentueze erorile sistematice, sau să se însumeze, acestea fac ca mărimea înregistrată ,,la ieșire'' să nu reflecte în toate momentele evoluția reală a ,,uzurii locale''. Astfel, influența unor parametri externi ca : sarcină, turație, răcire etc., privită prin prisma curbei de uzură respective a unui singur agregat, considerăm că nu poate fi concludentă, ea afectînd serioase erori chiar atunci cînd există probabilitatea ca un număr redus de experimentări să pară acceptabile din punctul de vedere al reproductibilităţii. Considerăm necesară o analiză statistică mai atentă, un singur agregat putînd da abateri pînă la ± 150 % faţă de media rezultatelor obţinute pe un număr mare de agregate sau experimentări.

Trebuie avut în vedere faptul că, atît pe maşini de încercat cît şi pe motoare experimentale, nu se poate evita necesitatea înlocuirii cuplului în frecare, fapt care implică în mod obiectiv schimbarea condiţiilor de lucru (omogenitate, rugozitate, duritate, geometrie de lucru etc.) afectînd erorile întîmplătoare respective. Aceste schimbări sînt amplificate de însăşi natura complexă a procesului de uzură care, mai ales în prezenţa lubrifiantului, gazelor de ardere, variaţiei de temperatură etc. conduce la interdependenţă între factori şi efecte, predominînd erorile întîmplătoare cu caracter statistic aleator.

9. Nu întotdeauna însă poate fi elocventă numai informaţia ce o obţinem cu privire la modul de uzare a uneia din cele două suprafeţe ale cuplului în frecare. De cele mai multe ori, şi în special cînd este vorba de a studia evoluţia uzurii unui ansamblu de piese, modul de uzare a unei singure piese nu spune nimic; interesează în egală măsură să se cunoască simultan şi gradul de uzură al celeilalte piese. Astfel, deşi un aliaj de antifricţiune poate fi decelat ca avînd o mare rezistenţă la uzură, el poate fi necorespunzător dacă se constată o uzură avansată şi a arborului motor respectiv. Acelaşi lucru este valabil şi în ceea ce priveşte locaşul segmentului studiat, starea de uzură a cămăşii cilindrului, cînd segmentul este cromat, sau a fost prevăzut cu ştifturi de cobalt.

Este cunoscut faptul că utilizarea trasorilor radioactivi permite urmărirea simultană a evoluţiei uzurii a două suprafeţe în frecare. Deşi principial separarea celor doi trasori este rezolvată, ea introduce experimental diferite noi erori.

În lucrarea [2] se prezintă un exemplu de acest fel, care însă este cea mai simplă cale de a aborda problema; îl considerăm drept caz particular, deoarece presupune că cei doi trasori sînt diferiţi în ce priveşte natura, categoria radiaţiei (fiind beta şi respectiv gama activi). O astfel de pereche de trasori, mai rar întîlnită în practică, poate fi însă utilizată într-un studiu de laborator; separarea activităţilor respective (deci a ponderii uzurii celor două suprafeţe) poate fi realizată cu ajutorul unui ecran de aluminiu, avînd grosimea suficientă pentru a opri radiaţia beta.

În acest caz nu se recomandă utilizarea ca traductor a unui sistem de contoare G-M; amintim că acest tip de contor prezintă eficacităţi diferite faţă de cele două radiaţii (între 2 $^0/_0$ pînă la 1 $^0/_{00}$ pentru gama, şi aproximativ 1 pentru beta), erorile la măsurarea radiaţiei gama fiind deci mari; compensarea acestor erori prin mărirea activităţii este limitată de timpul mort al contorului, care se poate bloca. În astfel de cazuri este eficace numai contorul cu scintilaţie (eficacitate 0,2 pînă la 0,3 pentru gama, şi $\sim$ 1 pentru beta).

În cazul utilizării a doi trasori radioactivi de aceeaşi natură (spre exemplu ambii gama-activi), înregistrarea continuă a evoluţiei uzurii celor două suprafeţe se poate realiza numai prin analiza spectrometrică;

ea presupune însă utilizarea a două canale separate de tipul celui din figura 5, potențiometrul înregistrator putînd fi comun.

Nici de această dată nu vom examina erorile introduse de fiecare celulă electronică în parte, ele fiind expuse în lucrări de acest profil.

În cazul utilizării unui singur canal de analiză și înregistrare spectrometrică, apar o serie de erori sistematice și întîmplătoare de felul celor arătate deja, incluzînd însă pe cele specifice analizatorului monocanal. Acestea fac ca spectrul radioactiv ce caracterizează o anumită substanță (un singur element) — curba statică reprezintă diferite energii ale radiației respective (MeV) funcție de activitatea sursei (imp/min) — să apară deformată după redare. Totuși, ne oprim asupra faptului că traductorul (scintilatorul) transformă funcția de energie νE (spectrul sursei) într-o altă funcție μV (spectrul caracterizat de probabilitatea $p(E,V)$ pentru ca o cuantă gama de energie mare E să producă un impuls de amplitudine V). Această transformare de spectru are la baza sa o serie de fenomene multiple și fluctuații aleatorii (producere de perechi, efect fotoelectric, efect Compton, emisii pe fotocatod și pe plăcile fotomultiplicatorului). Impulsurile obținute au un dublu caracter aleator și anume : în timp și în amplitudine ; proporționalitatea impulsului cu energia cedată scintilatorului, de asemenea nu se păstrează de-a lungul circuitului electronic. Aceste aspecte, precum și lărgimea de analiză prea mare a canalului, viteza de deplasare a analizorului etc. deformează spectrul chiar în limite ce depășesc eroarea acceptabilă. Presupunînd că fiecare canal în parte este astfel pregătit încît reduce factorii de eroare la o abatere de ± 6 % și că se respectă întocmai metodologia de măsură, eliminîndu-se erorile subiective, totuși se constată că prin analiza simultană a două spectre apar factori suplimentari de eroare. Acești factori apar prin faptul că cele două spectre avînd și porțiuni comune de amplitudini diferite, curba ce trebuie să reflecte numai evoluția uzurii primei piese (evoluția amplitudinii liniei spectrale alese a trasorului respectiv) va conține implicit și o parte a spectrului celui de-al doilea trasor.

Spre exemplu, în cazul a două elemente curent întîlnite în studiul uzurii grupului segment-cămașe al motorului, și anume izotopii gama activi Fe^{59} și Cr^{51}, spectrele de energie prezintă maximele de 0,624 MeV și 0,323 MeV la Cr^{51} și 1,289 MeV, 1,098 MeV și 0,191 MeV la Fe^{59}. Deși maximele spectrale ale celor doi izotopi sînt relativ distanțate, totuși spectrele prezintă întrepătrunderi. Din păcate mai sînt și alte elemente specifice care introduc erori (timpii de înjumătățire diferiți, secțiunile eficace mult diferite etc.).

În aceste cazuri etalonarea nu poate elimina complet erorile, apărînd în plus și alte elemente radioactive obținute prin iradierea epruvetei respective. Introducerea în aliaj a unui anumit trasor radioactiv — diferit în cele două suprafețe — sau utilizarea unor știfturi radioactive, introduc erori de felul celor deja sesizate.

Terminologie

10. În ceea ce priveşte terminologia legată de aprecierea rezultatelor ce se obţin în studiul frecare-uzură, socotim necesar următoarele precizări :

— ,,reproductibilitatea'' este exprimată prin gradul de concordanţă între mai multe măsurători succesive şi exprimă abaterea rezultatelor de la valoarea lor medie ;

— ,,exactitatea'' se referă la gradul în care valoarea determinată se apropie mai mult sau mai puţin de valoarea reală.

— ,,precizia'' care este confundată fie cu reproductibilitatea fie cu exactitatea se referă în special la reproductibilitatea dintre mai multe determinări independente ale aceleiaşi mărimi, în condiţii perfect identice (gradul de reproductibilitate) ;

— ,,incertitudinea'' măsurătorii trebuie să rezulte mai ales din acţiunea, fără pondere precizabilă a erorilor întîmplătoare. Ea nu este deci o noţiune care poate exprima ,,inversul'' uneia din noţiunile precedente.

CONCLUZII

Aspectele prezentate mai sus permit să conchidem următoarele :

1) Urmărirea fenomenului de frecare şi uzură duce la obţinerea unor informaţii în relaţiile dintre microstructură şi macrostructură, procesul fiind în continuă schimbare şi afectat de o complexitate de factori de eroare.

Deşi, în studiul frecării şi uzurii, utilizarea izotopilor radioactivi permit aplicarea unor metode cu sensibilitate şi eficacitate superioară metodelor clasice, totuşi se introduc erori specifice care îngreunează condiţiile de reproductibilitate. Ansamblul sistemului de măsură, format din partea mecanică şi cea electronică, introduce o serie de erori sistematice şi întîmplătoare, ponderea cea mai mare avînd-o erorile întîmplătoare ale părţii mecanice şi în special cele datorită condiţiilor locale. Acest lucru face ca în cazul unui agregat (de exemplu motor cu ardere internă) factorii de erori să devină complecşi, să se influenţeze reciproc, uneori să se anuleze, alteori să se amplifice.

Pentru ca rezultatele studiului să fie concludente, este necesar să se asigure o reproductibilitate a funcţiei în ansamblul ei şi nu numai a unui caz cu totul particular.

2) Fenomenul de dezintegrare radioactivă fiind grefat pe fenomenul de uzură, pentru a-l pune în evidenţă, îi transmite acestuia totodată caracterul propriu de erori (de exemplu erorile statistice care se repartizează cu pondere inegală de-a lungul diagramei ce reflectă evoluţia procesului de uzură). La rîndul său, evoluţia fenomenului uzurii ,,modulează'' rezultatul măsurării dezintegrărilor, variind cantitatea de produse radioactive ce sînt măsurate.

Dacă curba ,,statică'' pierde caracterul aleator al punctelor ce au compus-o (prin mediere), în regim dinamic, fiecare curbă de uzură în ansamblul ei, față de familia de curbe obținută prin repetare, capătă un caracter statistic. Media aritmetică a unui număr mare de astfel de curbe limitează din ce în ce mai mult factorul de eroare statistic cît și influența erorilor întîmplătoare.

Studiile pe agregat trebuie deci să prezinte ca rezultate media unui număr mare de reproduceri.

3) Pentru a se putea urmări valoarea unității de bază, și anume ,,viteza pierderii în greutate'', și de asemenea pentru a se putea aprecia totodată și abaterea măsurătorii, este utilă etalonarea repetată. Deși în mod normal această măsurătoare relativă exclude un șir de erori, determinarea etalon și cea normală fiind presupuse în condiții similare, totuși datorită complexității factorilor fizici, chimici etc. ce intervin, mărimea A_x mg determinată prin etalonare este afectată de o serie de erori întîmplătoare datorită unor factori care nu au acționat în timpul determinării etalon și anume :

a) variații de presiune, temperatură și depuneri în camera experimentală a scintilatorului ; variația erorii datorită puterii de rezoluție a întregului sistem funcție de variația activității măsurate ;

b) erorile introduse de sistemul mecanic ales, ca de exemplu : depunerile radioactive și mișcarea acestora, timpul lung de răspuns al sistemului de răcire față de variațiile bruște de temperatură la suprafața de frecare, influențele de duritate și elasticitate a știfturilor radioactive etc. Ca o cauză de erori mult mai mare, a acestei părți a sistemului de măsură, sesizăm variația în timp a suprafeței de contact, schimbarea stării de suprafață etc. Necesitatea schimbării pieselor de studiu cu altele din același set este o altă cauză de erori întîmplătoare, chiar în cazul reetalonării.

4) În studiile de frecare-uzură se impune urmărirea simultană a evoluției uzurii, pe ambele suprafețe de contact (desigur că și pe mai multe). Deși în acest caz metoda radioactivă este exclusivă, totuși prin studiul spectometric respectiv ponderea fiecărei uzuri în parte este afectată de alte erori specifice.

5) Rezultă în general necesitatea ca, pentru a surprinde anumite fenomene tranzitorii ce pot trece neobservate dacă se fac ,,citiri'' din oră în oră, să se perfecteze metode de studiu în perioade scurte sau în mod continuu.

6) Pentru a se asigura o precizie de măsură cît mai mare și totodată o reproductibilitate a rezultatelor, sînt necesare reetalonări repetate atît ale aparatajului electronic cît și ale sistemului mecanic de traducere.

Aspectele de mai sus arată că studiile de frecare-uzură, sau prezentarea unor sisteme de măsură ce privesc acest domeniu trebuie însoțite de aprecieri asupra reproductibilității și exactității rezultatelor și metodelor respective.

Primită la redacție la 16 februarie 1963

ОБ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ ОШИБКАХ И ИХ ОТНОСИТЕЛЬНЫХ ВЕСАХ В СЛУЧАЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ИЗНОСА С ПОМОЩЬЮ РАДИОАКТИВНЫХ ИЗОТОПОВ

РЕЗЮМЕ

Автор исходит из констатации того факта, что работы, касающиеся разных сторон явления трения или износа, большей частью не приводят данных об ошибках измерений или о воспроизводимости кривых и создают таким образом видимость решенной главы.

Анализируя различные источники ошибок, обуславливающих воспроизводимость результатов, он приходит к выводу, что в случае применения радиоизотопических методов, явление радиоактивного распада, выявляющее явление износа, передает последнему собственный характер статистических ошибок, а в свою очередь развитие явления износа «модулирует» результат измерения распадов, изменяя количество радиоактивных продуктов.

Представлены ошибки, влияющие на относительное измерение в случае сравнения с соответствующим эталоном, и показано, что наибольший вес имеют случайные ошибки, вызванные механической системой и особенно местными факторами (изменение поверхности трения и поверхностного состояния).

Подчеркнута необходимость одновременного измерения обеих поверхностей соприкосновения и указаны ошибки, специфические для наложения спектров излучения.

Выявляется статистический характер кривых износа и необходимость того, чтобы выводы, касающиеся износа частей машин в агрегате, основывались на большом числе экспериментальных данных, так как интерес представляет воспроизводимость всей кривой.

Работа основана на опыте работ проведенных в Институте прикладной механики им Траяна Вуйи Академии РНР.

BIBLIOGRAFIE

1. П. Е. Дьяченко, *Применение радиоактивных изотопов в технике.* Машгиз, Москва, 1958.
2. А. И. Нишневич, *Применение радиоактивных изотопов для изучения долговечности деталей машин.* Гос. атом. Издат., Москва, 1962.
3. F. P. Bowden, D. Tabor, *The friction and lubrication of solids.* Oxford University Press, 1954, 10—22, 58—63.
4. R. Cazaud, *Le frottement et l'usure des métaux.* Edit. Dunod, Paris, 1955.
5. И. В. Крагельский, *Трение и износ.* Машгиз, Москва, 1962.
6. L. Tamás, *Kenöképesség vizsgálatta rádioactiv nyomjeljötehnikoval.* Magyar kémikusok Lapja, *9*, 381—389 (1960).
7. R. B. Price, V. N. Sunderman, A. W. Carey Jr., W. S. Diethorn, N. I. Beck, *Studiu cu ajutorul trasorilor radioactivi asupra uzurii segmenţilor de piston şi a cămăşilor de cilindri la motoarele Diesel.* Tehnica nucleară, *8* (1962).

8. F. A. KIRIGIN, *A new approach to the lubricating problems of internal combustion engines.* Lubric. Engineering, **16**, 315 (1960).
9. I. I. PLĂCINŢEANU, *Teoria erorilor de măsurare şi metoda celor mai mici pătrate.* Edit. tehnică, Bucureşti, 1957, 88.
10. D. PAVELESCU, I. ILIUC, SANDA BARBUL şi alţii, *Metodă pentru studiul uzurii lagărelor cu izotopi radioactivi.* St. cerc. mec. apl., *6*, 1397—1410 (1962).
11. DAN PAVELESCU, I. ILIUC, S. BARBUL, *Studiul unei metode radioactive pentru aprecierea calităţilor lubrifiante ale uleiurilor aditivate prin prisma uzurii suprafeţelor. I.* St. cerc. mec. apl., *2*, 311—231 (1961).
12. — *Studiul unei metode radioactive pentru aprecierea calităţilor lubrifiante ale uleiurilor aditivate prin prisma uzurii suprafeţelor. II.* St. cerc. mec. apl., *1*, 193—203 (1962).
13. DAN PAVELESCU, I. ILIUC, *Aspecte privind evoluţia uzurii şi temperaturii unor cupluri radioactive bronz-oţel.* St. cerc. mec. apl., *1*, 95—102 (1963).
14. A. A. SANIN, *Metode radiometrice pentru studiul radiaţiilor.* Edit. tehnică, Bucureşti, 1957.
15. E. NICOLAU, *Măsurători în radiotehnică.* Edit. tehnică, Bucureşti, 1955, 1956, **I, II**.
16. AL. SANIELEVICI, *Introducere în radioactivitate.* Edit. tehnică, Bucureşti, 1957, 101.
17. O. ONICESCU, *Numere şi sisteme aleatoare.* Edit. Acad. R.P.R., Bucureşti, 1962, 65.
18. R. H. CERNI, R. E. FORSTER, *Instrumentation for engineering measurement.* J. Wiley & Sons, New York, 1962, 23.
19. N. TIPEI, V. N. CONSTANTINESCU, AL. NICA, O. BIŢĂ, *Lagăre cu alunecare.* Edit. Acad. R.P.R., Bucureşti, 1962, 390, 426.
20. D. PAVELESCU, *Cu privire la studiul uzurii cuţitelor de strung (iradiate) pentru determinarea parametrilor optimi de aşchiere.* St. cerc. mec. apl., *1*, 265—286 (1967).
21. — *Utilizarea izotopilor radioactivi la studierea aşchierii metalelor.* Tehnica nucleară, 5, *10*, 601—608 (1962).
22. V. SERGIESCU, *Introducere în fizica solidului.* Edit. tehnică, Bucureşti, 1956, 7.

INFLUENȚA UNGHIURILOR DE AȘEZARE ASUPRA UZURII SCULEI AȘCHIETOARE

DE

M. P. POPOV, I. MITRICĂ și E. D. DECIU

621.9.02

În literatura de specialitate, unghiurile de așezare formează obiectul unui studiu special, deoarece de evoluția uzurii pe fețele de așezare depinde în mare măsură atît calitatea suprafețelor prelucrate, cît și durabilitatea acestor scule.

Experiențele efectuate în domeniul așchierii metalelor în ultimii ani la Institutul de mecanică aplicată ,,Traian Vuia'' al Academiei R.P.R. au condus la conturarea unor ipoteze care vor permite să se dea o interpretare matematică a fenomenelor sus-amintite destul de apropiată de realitate.

Este cunoscut că în timpul procesului de așchiere au loc deformații plastice și elastice în materialul piesei și chiar transformări de structură ale straturilor superficiale ale piesei. De asemenea, scula este supusă și la deformații elastice.

Pentru elucidarea fenomenelor care au loc pe suprafața de contact dintre piesă și fețele de așezare ale sculei este necesar să se precizeze anumite aspecte.

Deformațiile plastice care au loc deasupra muchiei așchietoare și care duc în mod final la desprinderea așchiei vor influența și piesa prelucrată. Astfel, pe suprafața piesei va exista un strat superficial deformat plastic. Sub acest strat, materialul piesei se află în stare de deformare elastică și după ce va trece de muchia așchietoare a sculei, va reveni elastic, apropiindu-se de fața de așezare. Datorită acestui fapt, ia naștere o suprafață de contact între sculă și piesă. Rezultă deci că pe fețele de așezare ale sculelor, materialul piesei exercită apăsări ce provin din revenirea elastică a acestuia.

În zona desprinderii așchiei, materialul piesei este solicitat pînă la rupere, iar în zona imediat apropiată materialul deformat elastic va fi supus la tensiuni apropiate de limita de curgere. Această limită de curgere va fi cea specifică temperaturilor și condițiilor de deformații create de procesul așchierii, înțelegînd prin aceasta viteze mari de deformații și temperaturi relativ ridicate, la care aceasta se produce.

Deformația elastică maximă o are materialul piesei în zona muchiei așchietoare. Este firesc deci, ca în această zonă să existe și presiunile maxime.

Trebuie reținut că în cazul sculei așchietoare, repartiția presiunilor pe suprafața de contact într-o secțiune normală pe fața de așezare a sculei se va face după o elipsă, avînd valoarea maximă pe muchia așchietoare, așa după cum este cunoscut din teoria elasticității.

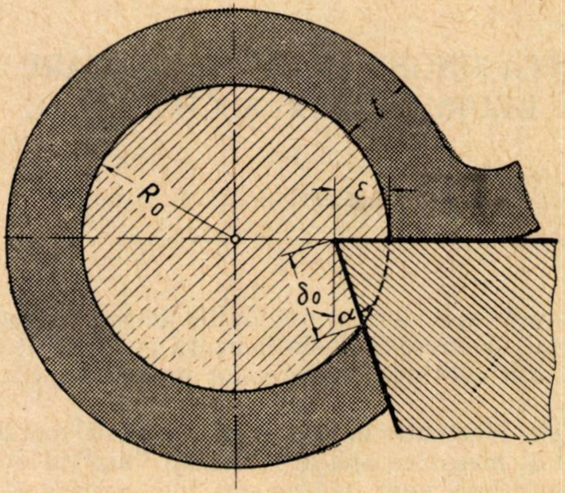


Fig. 1. — Elementele geometrice în cazul strunjirii longitudinale exterioare.

Considerînd astfel valoarea maximă a deformației elastice ε, este necesar să se calculeze lățimea suprafeței de contact δ_0 dintre sculă și piesă. Această lățime de contact o vom numi lățime inițială de contact, deoarece pe această lățime de contact vor începe să se manifeste fenomenele de uzură ale sculei.

Pentru determinarea lățimei inițiale de contact în cazul cuțitului de strung ne folosim de figura 1, unde este examinat cazul strunjirii exterioare. Se ajunge în final la următoarea valoare pentru lățimea suprafeței de contact :

$$\delta_0 = -(R_0 - \varepsilon)\sin\alpha + \sqrt{\varepsilon(2R_0 - \varepsilon) + (R_0 - \varepsilon)^2\sin^2\alpha}. \qquad (1)$$

Examinînd aceeași problemă pentru cazul strunjirii interioare, din figura 2 rezultă următoarea expresie pentru lățimea inițială de contact :

$$\delta_0 = (R_0 + \varepsilon)\sin\alpha - \sqrt{-\varepsilon(2R_0 + \varepsilon) + (R_0 + \varepsilon)^2\sin^2\alpha}. \qquad (2)$$

Se observă că lăţimea iniţială de contact δ_0 poate fi obţinută cu o singură formulă ce rezultă din reunirea relaţiilor (1) şi (2).

Considerînd că uzura progresează începînd de la această suprafaţă iniţială de contact şi că ea este proporţională cu presiunea, se poate considera, în prima aproximaţie, că pentru zona de palier a curbei de uzură lăţimea de contact variază liniar cu timpul. Această consideraţie se bazează pe faptul că în timpul prelucrării prin aşchiere, între faţa de aşezare şi piesă există o frecare uscată. De asemenea, se consideră că în aceste condiţii predominantă este uzura abrazivă. Din aceste ipoteze rezultă că lăţimea de contact dintre piesă şi sculă creşte proporţional cu timpul, ceea ce revine la a spune că ea depinde practic de intensitatea cu care se produce uzura în zona muchiei aşchietoare unde există presiunea maximă. Dacă considerăm ξ uzura radială a sculei în unitatea de timp, rezultă că într-un timp dat lungimea iniţială de contact va creşte cu valoarea

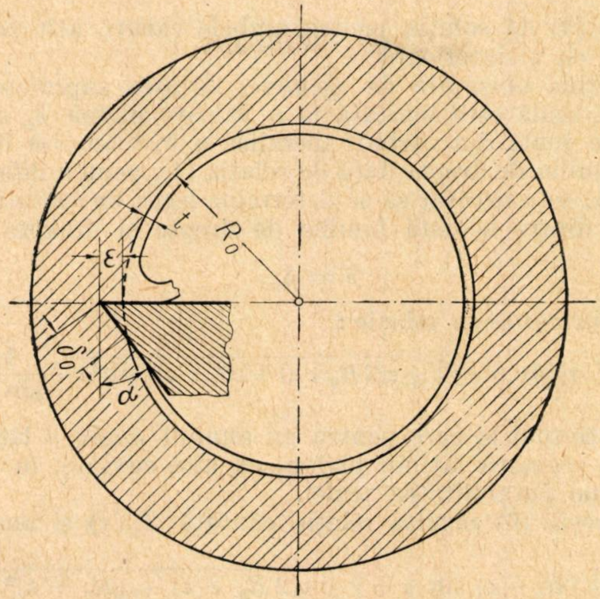


Fig. 2. — Elementele geometrice în cazul strunjirii longitudinale interioare.

$$\delta_T = \frac{\xi}{\sin \alpha} T, \tag{3}$$

unde T este timpul.

Avînd în vedere cele arătate mai sus, rezultă că variaţia lăţimii de contact între piesă şi sculă se poate exprima astfel:

$$\delta = \delta_0 + \delta_T =$$

$$\mp (R_0 \mp \varepsilon) \sin \alpha \pm \sqrt{\pm \varepsilon (2R_0 \mp \varepsilon) \sin \alpha + (R_0 \mp \varepsilon)^2 \sin^2 \alpha} + \frac{\xi}{\sin \alpha} T. \quad (4)$$

Expresia (4) dă soluţia pentru ambele cazuri, atît pentru strunjirea exterioară cît şi interioară.

În condiţiile obişnuite de aşchiere, lăţimea suprafeţei de contact dintre piesă şi sculă este limitată la o valoare plafon δ_p care în cazul materialelor de sculă din carburi metalice a fost admisă de 1 mm [3]. Considerînd familia de drepte dată de relaţia (4), pentru diferite valori ale parametrului α, este necesar să se determine legea de variaţie a punctelor de intersecţie dintre această familie de drepte şi dreapta

$$\delta = \delta_p. \quad (5)$$

Rezultă următoarea relaţie:

$$\delta_p = \mp (R_0 \mp \varepsilon) \sin \alpha \pm \sqrt{\pm \varepsilon(2R_0 \mp \varepsilon) + (R_0 \mp \varepsilon)^2 \sin^2 \alpha} + \frac{\xi}{\sin \alpha} T_p, \quad (6)$$

unde T_p este timpul la care pentru un anumit unghi α lăţimea de contact ajunge la valoarea lăţimii plafon, cu alte cuvinte, în acest caz variabila T devine durabilitatea sculei.

Din expresia (6) rezultă relaţia căutată $T_p(\alpha)$ şi anume

$$T_p = \frac{1}{\xi} [\delta_p \pm (R_0 \mp \varepsilon) \sin \alpha \mp \sqrt{\pm \varepsilon(2 R_0 \mp \varepsilon) + (R_0 \mp \varepsilon)^2 \sin^2 \alpha}] \sin \alpha. \quad (7)$$

Pe cale experimentală, s-a constatat că funcţia (7) admite un maxim pentru o valoare a lui α de aproximativ 11° în cazul prelucrării oţelului carbon.

Din analizarea funcţiei (7) rezultă că ea admite un maximum pentru $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Determinarea exactă a acestui maximum nu se poate face decît dacă se cunosc modulele de elasticitate şi coeficienţii lui Poisson pentru materialele din care sînt confecţionate scula şi piesa, stabilite pentru temperatura la care se produce procesul de aşchiere respectiv.

Pentru a exprima într-o formă mai riguroasă legătura ce există între variaţia lăţimii de contact şi timp, fiind vorba de valori foarte mici, este necesar să se ia în consideraţie şi influenţa pe care o are creşterea razei piesei pe măsură ce scula se uzează radial. Această variaţie va influenţa direct asupra mărimii ε şi deci prin aceasta şi asupra lăţimii de contact. În aceste condiţii, R_0 va creşte o dată cu creşterea uzurii radiale, de unde rezultă că la un moment dat

$$R = R_0 + \xi T. \quad (8)$$

Din ipotezele lui Hertz în legătură cu deformaţiile elastice locale rezultă că asupra mărimii maxime a deformaţiei elastice, ce se produce între două corpuri în contact sub acţiunea unei forţe, influenţează grosimea (diametrul) corpurilor luate în considerare.

Ţinînd seama de aceste precizări desigur că relaţiile (6) şi (7) sînt funcţii mai complicate. Trebuie menţionat că în cazul relaţiei (7) explicitarea durabilităţii ca o funcţie de unghiul de aşezare, de dimensiunile pieselor prelucrate şi sculelor luate în consideraţie şi de proprietăţile fizico-mecanice ale materialelor din care sînt confecţionate scula şi piesa, se face pentru fiecare caz în parte.

Rezolvarea în acest fel a problemei ridică dificultăţi de calcul mai mari, dar permite exprimarea mai riguroasă a relaţiei (8).

Se vor studia în continuare rezultatele expuse în scopul determinării valorii unghiului de aşezare şi a parametrilor de care el depinde.

Pentru aceasta s-a luat în considerare o nouă noţiune, aceea de suprafaţă iniţială de contact optimă. Se înţelege prin aceasta acea suprafaţă de contact iniţială care corespunde condiţiilor ce vor duce la uzura cea mai lentă la un regim de aşchiere dat, adică viteză de aşchiere, avans şi adîncime de aşchiere, şi pentru un anumit material al piesei şi al sculei.

Aşa cum s-a arătat experimental, unei durabilităţi maxime îi corespunde un unghi de aşezare optim, ceea ce revine la a spune că funcţia $T_p(\alpha)$ exprimată matematic în formula (7) admite un maxim pentru valori ale lui α cuprinse între 0 şi $\frac{\pi}{2}$. Acest punct de maxim corespunde punctului de intersecţie a curbelor (4) cu dreapta (5), unde $\alpha = \alpha_{\mathrm{opt}}$. Rezultă deci că unui unghi de aşezare optim îi va corespunde o suprafaţă iniţială de contact optimă. În relaţiile prezentate această suprafaţă iniţială de contact optimă este exprimată numai prin lăţimea δ_0 deoarece pentru un caz dat lungimea este constantă. Se va prezenta mai jos relaţia lui $\delta_{0\mathrm{opt}}$ pentru cazurile strunjirii exterioare şi interioare :

$$\delta_{0\mathrm{opt}} = \mp (R_0 \mp \varepsilon) \sin \alpha_{\mathrm{opt}} \pm \sqrt{\pm\varepsilon (2R_0 \mp \varepsilon) + (R_0 \mp \varepsilon)^2 \sin^2 \alpha_{\mathrm{opt}}}\,. \tag{9}$$

În această relaţie, semnul de deasupra reprezintă cazul unei prelucrări exterioare, iar cel de jos cazul unei prelucrări interioare.

Pentru a vedea dacă $\alpha_{\mathrm{opt}} = 0$ corespunde unui caz real din practică, introducem această valoare în relaţia (9) de unde rezultă că

$$\delta_{0\mathrm{opt}} = \sqrt{\pm \varepsilon(2R_0 \mp \varepsilon)} \tag{10}$$

sau explicitînd în R_0 rezultă

$$R_0 = \frac{\delta_{0\,\mathrm{opt}}^2 \pm \varepsilon^2}{\pm 2\varepsilon} = \pm \frac{\delta_{0\mathrm{opt}}^2}{2\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{2}, \tag{11}$$

unde $\delta_{0\mathrm{opt}}$ şi ε au valori subunitare foarte mici. De asemenea, este ştiut că întotdeauna

$$\delta > \varepsilon. \tag{12}$$

Rezultă în cazul prelucrărilor exterioare că R_0 ar trebui să aibă o valoare subunitară, iar în cazul celor interioare să fie negativ. De altfel, observaţia că R_0 nu corespunde unui caz real pentru strunjirile interioare reiese şi din relaţia (10) unde $\delta_{0\,\mathrm{opt}}$ devine imaginar. Atît primul rezultat cît şi al doilea nu au un sens în cazul prelucrărilor prin aşchiere. În cazul prelucrărilor pe strung sau freză, razele fizice minime ale pieselor sau sculelor au mărimi de ordinul milimetrilor şi pot creşte pînă la valori de ordinul cîtorva metri. La limită, cînd raza piesei tinde către ∞, se obţine cazul prelucrărilor prin rabotare, mortezare, broşare.

Din expresia (9), obţinem :

$$\sin \alpha_{\mathrm{opt}} = \frac{\pm\, \varepsilon(2R_0 \mp \varepsilon) - \delta_{0\,\mathrm{opt}}}{\pm\, 2\,\delta_{0\,\mathrm{opt}}(R_0 \mp \varepsilon)} \tag{13}$$

şi apoi făcînd pe R_0 să tindă către ∞ rezultă

$$\sin \alpha_{\mathrm{opt}} = \frac{\varepsilon}{\delta_{0\,\mathrm{opt}}} \tag{14}$$

aceeaşi valoare pentru ambele cazuri, ceea ce era şi firesc. Cum relaţia (12) este valabilă şi în cazul acesta, rezultă $0 < \alpha_{\mathrm{opt}} < \frac{\pi}{2}$.

Se examinează acum cazul cînd $1 < R_0 < \infty$; pentru aceasta expresia (13) se scrie sub forma :

$$\sin \alpha = \frac{\varepsilon\,(2R_0 \mp \varepsilon)}{\delta_{0\,\mathrm{opt}}(2R_0 \mp 2\varepsilon)} \mp \frac{\delta_{0\,\mathrm{opt}}}{2R_0 \mp 2\varepsilon}. \tag{15}$$

$\delta_{0\,\mathrm{opt}}$ şi ε sînt valori subunitare ; rezultă deci că valoarea

$$\mp \frac{\delta_{0\,\mathrm{opt}}}{2R_0 \mp 2\varepsilon} \tag{16}$$

poate afecta cel mult a treia zecimală a lui $\sin \alpha$, pentru $R_0 = 1$, şi pe măsură ce R_0 creşte, influenţa lui va fi din ce în ce mai mică. Aceasta revine la a spune că influenţa valorii (16) asupra unghiului α_{opt} este de cel mult cîteva minute la valorile foarte mici ale lui R_0.

Pe aceleaşi considerente, valoarea

$$\frac{\varepsilon\,(2R_0 \mp \varepsilon)}{\delta_{0\,\mathrm{opt}}\,(2R_0 \mp 2\varepsilon)}, \tag{17}$$

cu variaţia lui R_0 în limitele amintite, va influenţa asupra lui $\sin \alpha$ la a patra zecimală, la valorile mici ale lui R_0, şi cu creşterea acestuia la zecimile din ce în ce mai îndepărtate. Rezultă deci şi în acest caz că variaţia lui R_0 în limitele date nu poate afecta valoarea unghiului α_{opt} decît în limita cîtorva minute cel mult. Consideraţia aceasta este valabilă deoarece în relaţiile precedente se poate face aproximaţia evidentă

$$\frac{2R_0 \mp \varepsilon}{2R_0 \mp 2\varepsilon} \approx 1. \tag{18}$$

Din această analiză reiese că practic putem considera ca valoare optimă a unghiului de aşezare

$$\alpha_{\text{opt}} \approx \arcsin \frac{\varepsilon}{\delta_{0\,\text{opt}}}. \qquad (19)$$

Acest rezultat vine să confirme prezumpţia că expresia (7) admite un maxim în domeniul $0 < \alpha_{\text{opt}} < \frac{\pi}{2}$ care practic pentru un anumit material de prelucrat depinde de deformaţia elastică maximă în zona de contact dintre piesă şi sculă. De asemenea, se poate afirma că pentru materiale la care modulul de elasticitate E şi coeficientul Poisson μ variază foarte puţin, unghiul de aşezare optim este practic acelaşi.

Cercetările experimentale efectuate în anii precedenţi vin să confirme această afirmaţie teoretică. Într-adevăr, cercetările experimentale efectuate la Institutul de mecanică aplicată ,,Traian Vuia'' al Academiei R.P.R. pe întreaga gamă de oţeluri carbon care practic au acelaşi modul de elasticitate şi acelaşi coeficient Poisson, au demonstrat că unghiul α_{opt} este acelaşi [3]. Experimental această valoare este

$$\alpha_{\text{opt}} = 11°.$$

Rezultatul teoretic obţinut sub forma (19) confirmă de asemenea o altă constatare experimentală. În experienţele efectuate la I.M.A. a rezultat că pentru materiale de sculă, care au proprietăţi fizico-mecanice apropiate, unghiul de aşezare optim este acelaşi. Este evident că materialul sculei va suporta deformaţii elastice mult mai mici decît piesa, datorită proprietăţilor mecanice superioare ale acestuia. Acest lucru a fost confirmat în experienţele efectuate cu plăcuţe din carburi metalice şi mineralo-ceramice ca şi în cazul diferitelor oţeluri aliate de scule cercetate [4].

Datorită celor arătate anterior şi anume faptului că în condiţiile unei temperaturi diferite de a mediului înconjurător (cazul aşchierii metalelor) nu se cunosc proprietăţile elastice ale materialelor şi ca urmare nu se poate actualmente efectua calculul valorii ε şi deci nici al lui $\delta_{0\text{opt}}$ care este dependent de ε. Totuşi, acest studiu teoretic vine să justifice rezultatele experimentale şi scoate în evidenţă legăturile ce există între unghiul de degajare şi ceilalţi parametri care influenţează valoarea lui.

Toate consideraţiile teoretice făcute în această lucrare sînt valabile atît pentru unghiul de aşezare principal, cît şi pentru cel secundar al oricărei scule aşchietoare. Unghiurile sînt măsurate într-un plan perpendicular pe tăişul sculei şi cuprinse între faţa de aşezare şi planul de aşchiere.

Din această lucrare se desprind următoarele concluzii mai importante :

a. Lăţimea de contact iniţială dintre piesă şi scula aşchietoare poate fi determinată dacă se cunoaşte modulul de elasticitate şi coeficientul lui Poisson pentru materialul din care este confecţionată piesa şi scula la temperaturile la care are loc procesul de aşchiere.

b. Curba de uzură în funcţie de timp a sculei aşchietoare pe porţiunea de palier se poate exprima cu aproximaţie suficientă prin relaţia (4).

c. Unghiurile de aşezare ale sculei aşchietoare au practic o singură valoare optimă pentru un anumit material sau grupă de materiale cu modulul de elasticitate şi coeficientul lui Poisson apropiate. Este cazul sculelor din materiale care au durităţi apropiate ce prelucrează acelaşi material de piesă.

d. Verificările experimentale confirmă ipoteza că asupra feţelor de aşezare acţionează presiuni care au ca valoare maximă tensiunea de curgere a materialului.

e. Experienţa confirmă ipoteza că presiunea maximă de pe suprafaţa de contact dintre piesă şi faţa de aşezare a sculei este de-a lungul muchiei aşchietoare.

f. Valoarea unghiului de aşezare depinde de mărimea maximă a deformaţiei elastice care ia naştere în suprafaţa de contact dintre sculă şi piesă.

g. Deformaţia elastică a suprafeţei de aşezare a sculei în majoritatea cazurilor este neglijabilă, fiind mult mai mică decît cea a piesei.

Primită la redacţie la 18 decembrie 1962 şi o nouă versiune la 9 februarie 1963

ВЛИЯНИЕ ЗАДНИХ УГЛОВ НА ИЗНОС РЕЖУЩЕГО ИНСТУМЕНТА

РЕЗЮМЕ

Работа содержит теоретический анализ влияния задних углов режущих инструментов на их износ. Доказывается теоретически существование некоторых оптимальных значений этих углов, что равносильно утверждению, что существует при некотором угле максимальная стойкость.

Указывается, что оптимальные задние углы зависят от максимальной упругой деформации детали в зоне контакта между деталью и инструментом. Отсюда видно влияние физико-механических свойств обрабатываемых материалов в условиях температуры и скорости деформирования, специфических для зоны отделения стружки. Упругая деформация инструмента имеет меньший удельный вес в определении значений задних углов, т.к. инструмент претерпевает меньшие деформации.

Так объясняется, почему оптимальные значения задних углов инструментов из твердых сплавов и из минеральнокерамических пластинок равны между собой. Полученные результаты справедливы для всех типов режущих инструментов.

BIBLIOGRAFIE

1. S. TIMOSHENKO, *Théorie de l'élasticité*. Librairie Polytechnique Ch. Béranger, Paris, 1948.
2. M. P. POPOV, I. MITRICĂ, E. D. DECIU, *Studii asupra parametrilor aşchierii cu cuţite de strung din oţel rapid romînesc*. St. cerc. mec. apl., **X**, *2* (1959).
3. — *Geometria sculei aşchietoare pentru prelucrarea oţelurilor carbon*. St. cerc. mec. apl., **XII**, *6* (1961).
4. — *Studiu comparativ al parametrilor geometrici ai cuţitelor de strung armate cu plăcuţe mineralo-ceramice şi din carburi metalice*. St. cerc. mec. apl., **IX**, *4* (1958).

STUDII

COMBINAREA GENERALIZATĂ A PRĂJINILOR DE POMPARE LA OBOSEALĂ

DE

DAN BODNĂRESCU

622.323 ; 621.8

Se păstrează notațiile din lucrarea precedentă *Asupra combinării prăjinilor de pompare de adîncime din industria de petrol după criterii de rezistență la oboseală* (Studii și cercetări de mecanică aplicată, VII, *1*, 1956) cu precizarea că factorul dinamic $1+\frac{CN}{137}$ se înlocuiește cu expresia $1+m$ în care m poate fi considerat $\frac{CN}{137}$, $\frac{CN^2}{1790}$ etc.

INTERPRETARE GEOMETRICĂ

S-a utilizat schematizarea Smith-Fischer în care dreapta eforturilor unitare maxime admisibile σ_a (AB) este dată de relația :

$$\sigma_a = K_1\,\sigma_m + \sigma_w \qquad (1)$$

iar dreapta eforturilor unitare minime σ_u (AC) este dată de relația

$$\sigma_u = K_2\,\sigma_m - \sigma_w, \qquad (2)$$

în care

$$K_1 = \frac{0{,}9\,\sigma_c - \sigma_w}{0{,}9\,\sigma_c},\ K_2 = \frac{0{,}9\,\sigma_c + \sigma_w}{0{,}9\,\sigma_c} \qquad (3)$$

iar

$$K_1 + K_2 = 2. \qquad (4)$$

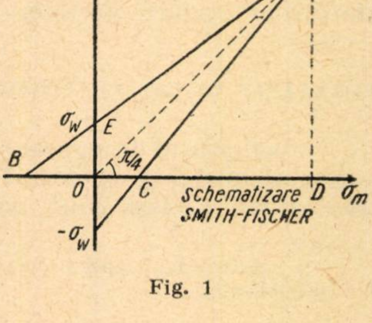


Fig. 1

Diagrama eforturilor unitare admisibile este deci reprezentată de triunghiul *AEF* în interiorul căruia trebuie să fie cuprinse ciclurile efective ale căror eforturi unitare maxime și minime σ_{0i} și σ_{ui} să nu se înscrie în afara acestui triunghi ceea ce corespunde condiției

$$\rho = \frac{\sigma_a}{\sigma_0} \geqslant 1. \tag{5}$$

Cele două laturi *AE* și *AF* ale triunghiului rezistențelor admisibile intersectează axa absciselor în punctele *B* și *C* respectiv.

Configurația *BOCD* reprezintă o diviziune armonică iar fasciculul cu vîrful în *A* (*AB*, *AO*, *AC*, *AD*) este un fascicul armonic. Dreapta *AO*, bisectoarea sistemului de referință, rămîne mediana triunghiului eforturilor unitare admisibile.

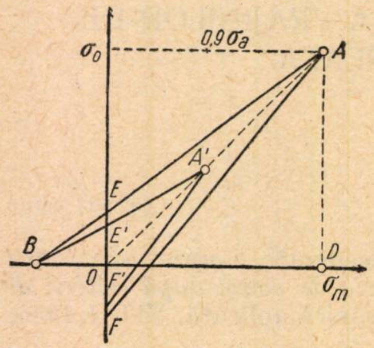


Fig. 2

Substituind pe (5) în (1) rezultă :

$$\rho\,\sigma_0 = K_1\,\sigma_m + \sigma_w \tag{6}$$

sau

$$\sigma_0 = \frac{K_1}{\rho}\,\sigma_m + \frac{\sigma_w}{\rho} \tag{7}$$

ceea ce arată că eforturile unitare maxime σ_0 ale soluției căutate se plasează pe dreapta care intersectează axa absciselor în punctul *B* în care este deci concurentă cu dreapta *AB*. Fie această dreaptă *A'B* ; pe dreapta *A'F'* cu panta *K'* :

$$K' = \frac{K_1}{\rho}. \tag{8}$$

Valorile minime σ_u se înscriu pe dreapta *A'F'*

$$\sigma_u = \left(2 - \frac{K_1}{\rho}\right)\sigma_m - \frac{\sigma_w}{\rho}. \tag{9}$$

Astfel, punctele *E'* și *F'* sînt simetrice în raport cu *O*.

Bisectoarea axelor *AO* rămîne și mediana triunghiului *A'E'F'* al eforturilor unitare efective.

FORMULELE DE CALCUL PENTRU COEFICIENTUL DE SIGURANȚĂ SODERBERG[1])

Coeficientul de siguranță ρ a fost definit ca raportul dintre σ_a efortul unitar admisibil și σ_0 efortul unitar maxim efectiv, ambele cicluri asimetrice avînd același efort unitar mediu σ_m.

---

[1]) Aceste formule apar în lucrarea N. Dragotescu, *Pompajul sondelor de țiței*, p. 213—215 (nepublicată).

În concepția modernă, după Soderberg, se compară ciclurile asimetrice avînd același grad de asimetrie $r = \frac{\sigma_u}{\sigma_0}$, deci diferă eforturile unitare medii σ_m. Astfel, coeficientul de siguranță devine

$$c = \frac{\sigma_a}{\sigma_0} = \frac{\sigma_M}{\sigma_m}, \tag{10}$$

deoarece

$$\frac{\sigma_m}{\sigma_0} = \frac{\sigma_M}{\sigma_a} = \frac{\gamma + 1}{2}. \tag{11}$$

Din (10) și (1) rezultă

$$c\,\sigma_0 = c\,K_1\,\sigma_m + \sigma_w, \tag{12}$$

sau

$$\sigma_0 = K_1\,\sigma_m + \frac{\sigma_w}{c}. \tag{13}$$

Relația (13) arată că valorile maxime pentru care există același coeficient de siguranță c se înscriu pe o dreaptă $A''F''$ și paralelă cu dreapta AE și intersectînd axa ordonatelor în punctul E'' la valoarea $\frac{\sigma_w}{c}$.

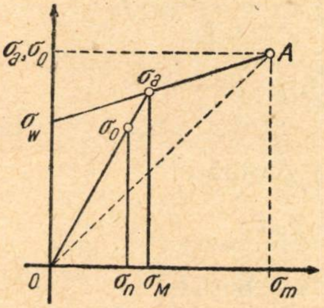


Fig. 3

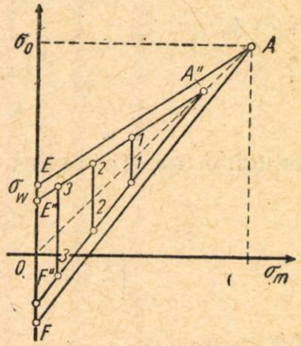


Fig. 4

Ciclurile minime σ_u se înscriu în acest caz pe dreapta $A''\ F''$ dată de relația

$$\sigma_u = (2 - K_1)\,\sigma_m - \frac{\sigma_w}{c} \tag{14}$$

care este paralelă cu AF și intersectează axa absciselor în punctul F la valoarea $-\frac{\sigma_w}{c}$ (simetric cu E'' în raport cu O).

Din relația (13) se poate deduce valoarea lui c

$$c = \frac{\sigma_w}{\sigma_0 - K_1 \sigma_m} = \text{constant} \tag{15}$$

care se mai scrie

$$c = \frac{\sigma_w}{\sigma_{0i} - K_1 \sigma_{mi}} = \frac{\sigma_w}{\sigma_{0i+1} - K_1 \sigma_{mi+1}} = \ldots = \frac{\sigma_w}{\sigma_{0n} - K_1 \sigma_{mn}} \tag{16}$$

sau

$$\sigma_{0i} - K_1 \sigma_{mi} = \sigma_{0i+1} - K_1 \sigma_{mi+1} = \ldots = \sigma_{0n} - K_1 \sigma_{mn}. \tag{17}$$

Înlocuind valorile respective din (17) și notînd

$$j_1 = \frac{(1+m)\left(1 - \frac{K_1}{2}\right)}{1 + m - B\frac{K_1}{2}} \tag{18}$$

acest sistem de ecuații se rezolvă cu aceeași metodă ca în partea I a lucrării cu rezultatele

$$\left\{\begin{array}{ll} i = n-1 & x_i = \dfrac{p_n + j_1 ds_p}{1 + p_n F} \cdot \dfrac{s_i - s_{i+1}}{s_n p_i} \cdot L, \\ i = 1 & \\ & x_n = \dfrac{1 - j_1 ds_p F}{1 + p_n F} \cdot L. \end{array}\right. \tag{19}$$

Introducînd aceste valori în (16) rezultă

$$c = \frac{\sigma_w s_n (1 + p_n F)}{\left(1 + m - B\frac{K_1}{2}\right)(p_n + j_1 ds_p)\, L}. \tag{20}$$

Ținînd seama de

$$\rho = \frac{\sigma_w s_n (1 + p_n F) + \frac{K_1}{2}\left[B p_n + (1+m) ds_p\right] L}{(1+m)(p_n + ds_p)\, L} \tag{21}$$

avem relația

$$c = 1 + \frac{(1+m)(p_n + ds_p)}{\left(1 + m - B\frac{K_1}{2}\right)(p_n + j_1 ds_p)} (\rho - 1), \tag{22}$$

de unde numai cînd $\rho=1$ există $c=\rho$
iar cînd $\rho>1$ atunci $c>\rho$
şi cînd $\rho<1$ atunci $c<\rho$
ceea ce se vede şi grafic foarte uşor.

Dreptele (7) şi (13)

$$\sigma_0 = \frac{K_1}{\rho}\sigma_m + \frac{\sigma_w}{\rho}$$

$$\sigma_0 = K_1\sigma_m + \frac{\sigma_w}{c}$$

se intersectează în punctul de coordonate

$$\sigma_0 = \frac{c-1}{c(\rho-1)}\sigma_w, \qquad \sigma_m = \frac{\sigma_w}{K_1}\cdot\frac{c-\rho}{c(\rho-1)}. \tag{23}$$

Înlocuind valorile lui c şi ρ în (23) rezultă

$$\sigma_0 = \frac{(1+m)(p_n+ds_v)}{s_n(1+p_nF)}L, \qquad \sigma_m = \frac{\frac{1}{2}[Bp_n+(1+m)ds_v]}{s_n(1+p_nF)}L. \tag{24}$$

Deci, aceste drepte trec printr-un punct din plan independent de efortul unitar admisibil pentru solicitările simetrice σ_w şi dependent de elementele combinaţiei şi L adîncimea de fixare a pompei.

SOLUŢII GENERALE

În cazul general trebuie să plecăm de la relaţiile (1) cu (5), respectiv (7), sau (1) cu (10), respectiv (13), ceea ce dă grupurile de relaţii

$$\begin{cases} \sigma_{0i} - \dfrac{K_1}{\rho}\sigma_{mi} = \dfrac{\sigma_w}{\rho_i}, \\ \vdots \\ \sigma_{0n} - \dfrac{K_1}{\rho}\sigma_{mn} = \dfrac{\sigma_w}{\rho_n}, \end{cases} \tag{25}$$

$$\begin{cases} \sigma_{0i} - K_1\sigma_{mi} = \dfrac{\sigma_w}{c_i}, \\ \vdots \\ \sigma_{0n} - K_1\sigma_{mn} = \dfrac{\sigma_w}{c_n}, \end{cases}$$

sau

$$\left\{\begin{aligned} & \begin{matrix} i=n-1 \\ i=1 \end{matrix} \qquad x_i = \frac{\dfrac{s_i}{\rho_i} - \dfrac{s_{i+1}}{\rho_{i+1}}}{\left(1 + m - B\dfrac{K_1}{2\rho_i}\right)p_i}\,\sigma_w, \\ & x_n = \frac{\sigma_w\dfrac{s_n}{\rho_n} - \left(1 + m - \dfrac{BK_1}{2\rho_n}\right)ds_p\,L}{\left(1 + m\,B\dfrac{K_1}{2\rho_n}\right)p_n}, \end{aligned}\right. \tag{26}$$

$$\left\{\begin{aligned} & \begin{matrix} i=n-1 \\ i=1 \end{matrix} \qquad x_i = \frac{\dfrac{s_i}{c_i} - \dfrac{s_{i+1}}{c_{i+1}}}{\left(1 + m - B\dfrac{K_1}{2}\right)p_i}\,\sigma_w, \\ & x_n = \frac{\sigma_w\dfrac{s_n}{c_n} - (1 + m)\left(1 - \dfrac{K_1}{2}\right)ds_p\,L}{\left(1 + m - B\dfrac{K_1}{2}\right)p_n}. \end{aligned}\right. \tag{27}$$

Din examinarea acestor grupuri rezultă că (27) este mai accesibil rezolvării. În principiu, pentru rezolvare va trebui satisfăcută condiția

$$\sum_1^n x_i = L, \tag{28}$$

care nu se poate rezolva din cauza imposibilității sumării $\sum_1^{n-1} x_i$, în mod general.

Această sumă se poate efectua în două cazuri :

1. Ipoteza c_i = constant ;
2. Ipoteza c_i = variabil după o lege oarecare sau ca o subvariantă după valori impuse.

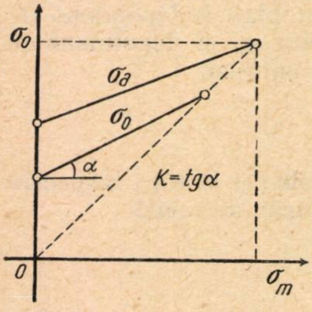


Fig. 5

În primul caz, dacă plecăm de la relațiile (27) și (28) ajungem imediat la valorile din (19).

În al doilea caz, va trebui să alegem o lege de formare a șirului de numere c_i.

Acest mod de a proceda decurge din faptul că am căutat soluționarea problemei în mod general, plecînd de la relația efortului unitar admisibil σ_a și de la definiția coeficientului de siguranță la solicitări variabile.

Vom studia însă problema din alt punct de vedere și anume cel geometric independent de definiția coeficientului de siguranță.

Astfel, vom considera că problema are soluție sigură dacă se pleacă de la ideea că valorile σ_0 se plasează pe o dreaptă oarecare $\sigma_0 = f(\sigma_m)$ avînd panta K oarecare și ordonata la origine σ_{w1}.

Rezultă

$$\sigma_{0i} = K\,\sigma_{mi} + \sigma_{w1}. \tag{29}$$

Înlocuind în această relație σ_{0i} și σ_{mi} cu valorile respective obținem

$$\begin{cases} \begin{matrix} i = n-1 \\ i = 1 \end{matrix} \quad x_i = \dfrac{s_i - s_{i+1}}{\left(1+m - B\dfrac{K}{2}\right) p_i}\,\sigma_{w1}, \\[2ex] x_n = \dfrac{\sigma_{w}\, s_n - ds_p\,(1+m)\left(1-\dfrac{K}{2}\right)L}{\left(1+m - B\dfrac{K}{2}\right)p_n}, \end{cases} \tag{30}$$

în care nu apar coeficienții de siguranță.

Din (30) și (28) rezultă

$$L = \frac{\sigma_{w1}\, s_n - ds_p\,(1+m)\left(1-\dfrac{K}{2}\right)L}{\left(1+m - B\dfrac{K}{2}\right)p_n} + \frac{\sigma_{w1}\, s_n}{1+m - B\dfrac{K}{2}} \sum_{1}^{n-1} \frac{s_i - s_{i+1}}{s_n p_i}. \tag{31}$$

După efectuarea calculelor obținem

$$\sigma_{w1} = \frac{\left(1+m - B\dfrac{K}{2}\right)(p_n + j\,ds_p)}{s_n\,(1 + p_n F)}\,L, \tag{32}$$

în care s-a notat

$$j = \frac{(1+m)\left(1-\dfrac{K}{2}\right)}{1+m - B\dfrac{K}{2}}. \tag{33}$$

Introducînd aceste valori în (30) obținem soluția generală căutată

$$\begin{cases} \begin{matrix} i = n-1 \\ i = 1 \end{matrix} \quad x_i = \dfrac{p_n + j\,ds_p}{1 + p_n F} \cdot \dfrac{s_i - s_{i+1}}{s_n p_i}\,L, \\[2ex] x_n = \dfrac{1 - j\,ds_p F}{1 + p_n F}\,L, \end{cases} \tag{34}$$

în care $j = f_1(K) = f_1(\mathrm{tg}\,\alpha) = f_2(\alpha)$.

Pentru calculele uzuale redăm o serie de formule

$$\sum_{1}^{n} p_i\, x_i = \left[\frac{p_n + j\, ds_p}{s_n(1+p_n F)}\, s_i - j\, ds_p\right] L \tag{35}$$

sau

$$\sum_{1}^{n} p_i\, x_i = \frac{p_n s_i + j\, ds_p\,(s_i - s_n - s_n p_n F)}{s_n\,(1 + p_n F)} \cdot L, \tag{36}$$

$$\sigma_{0i} = \frac{1+m}{s_i}\left[\frac{p_n + j\, ds_p}{s_n(1+p_n F)}\, s_i - ds_p\,(j-1)\right] L, \tag{37}$$

$$\sigma_{ui} = \frac{A}{s_i}\left[\frac{p_n + j\, ds_p}{s_n(1+p_n F)}\, s_i - j\, ds_p\right] L, \tag{38}$$

$$\sigma_{mi} = \frac{1}{2s_i}\left[\left(\frac{p_n + j\, ds_p}{s_n(1+p_n F)}\, s_i - j\, ds_p\right) B + (1+m)\, ds_p\right] L, \tag{39}$$

$$\sum_{1}^{n} \frac{x_i}{s_i} = \frac{1 + p_n H - j\, ds_p\,(F - H)}{1 + p_n F} \cdot \frac{L}{s_n}, \tag{40}$$

$$\begin{matrix}\text{Alungirea scurtătoare}\\ \text{a cursei de fund}\end{matrix} = \frac{d.s_p.L^2}{E} \cdot \frac{1 + p_n H - j\, ds_p\,(F - H)}{s_n\,(1 + p_n F)} \tag{41}$$

Acum se poate calcula coeficientul de siguranță. În cazul general avem șirul $c_1, c_2, \ldots, c_i, \ldots, c_n$.

Plecînd de la relațiile (25), (37) și (39) obținem

$$c_i = \frac{\sigma_w\, s_n\,(1 + p_n F)/L\left(1 + m - B\dfrac{K_1}{2}\right)}{p_n + j\, ds_p - \dfrac{s_n}{s_i}\,(1 + p_n F)\,(j - j_1)\, ds_p} \quad (i = 1, \ldots, n-1), \tag{42}$$

$$c_n = \frac{\sigma_w\, s_n\,(1 + p_n F)/L\left(1 + m - B\dfrac{K_1}{2}\right)}{p_n - j\, ds_p\, p_n F + ds_p\, j_1\,(1 + p_n F)}, \tag{43}$$

în care

$$j_1 = \frac{(1+m)\left(1 - \dfrac{K_1}{2}\right)}{1 + m - B\dfrac{K_1}{2}}. \tag{44}$$

Condiția unei bune dimensionări cere ca șirul coeficienților de siguranță să fie crescător :

$$c_1 \leqslant c_2 \leqslant \ldots \leqslant c_i \leqslant c_{i+1} \ldots \leqslant c_n. \tag{45}$$

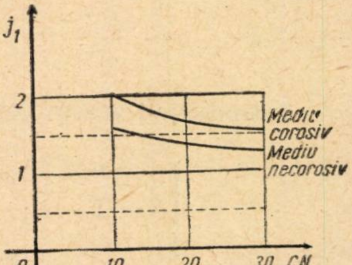


Fig. 6

Aceasta este satisfăcută de condiția

$$j > j_1, \tag{46}$$

ceea ce corespunde cu

$$\frac{2(1+m)}{B} > K > K_1. \tag{47}$$

Derivata funcției $j = f(K)$ fiind pozitivă, funcția este continuu crescătoare, datele variației fiind arătate în tabelele 1 și 2.

Tabela 1

K	$-\infty$	0	1	$\frac{2(1+m)}{B}$	2	10	$+\infty$
j	$\frac{1+m}{B}$	1	$\frac{1+m}{1+m-A}$	$\pm\infty$	0	$\frac{4(1+m)}{4(1+m+5A)}$	$\frac{1+m}{B}$

Tabela 2

$\varkappa$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\operatorname{arctg}\frac{2(1+m)}{B}$	$64°32'40''$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\pi+\operatorname{arctg}\frac{2(1+m)}{B}$	$144°32'40''$	$\frac{3\pi}{2}$	2π
K	0	1	$\frac{2(1+m)}{B}$	2	∞	-1	0	$\frac{2(1+m)}{B}$	2	∞	0
j	1	$\frac{1+m}{1+m-A}$	$\pm\infty$	0	$\frac{1+m}{B}$	$\frac{2(1+m)}{1+m+\frac{B}{2}}$	1	$\pm\infty$	0	$\frac{1+m}{B}$	1

Observații. Valoarea lui j mai este limitată de condiția existenței lungimii x_n deci de $x_n > 0$, de unde rezultă

$$1 - j\,ds_p F > 0 \tag{48}$$

deci

$$j < \frac{1}{ds_p F} \text{ sau } K \ll \frac{2(1+m)}{ds_p F A}(1 - ds_p F). \tag{49}$$

Pentru pistoanele cele mai mari în uz, ca de pildă $2^3/_4''$ (0,385 dm^2) condiția (49) devine aproximativ $j<4$ iar în cazul combinației 7/8″ cu 3/4″ $j<156$, ceea ce arată că j are un domeniu destul de mare de variație.

Șirul valorilor coeficienților de siguranță c Soderberg, rezultat mai înainte, va fi denumit și al valorilor liniare, deoarece se referă la plasarea valorilor eforturilor unitare maxime pe o dreaptă.

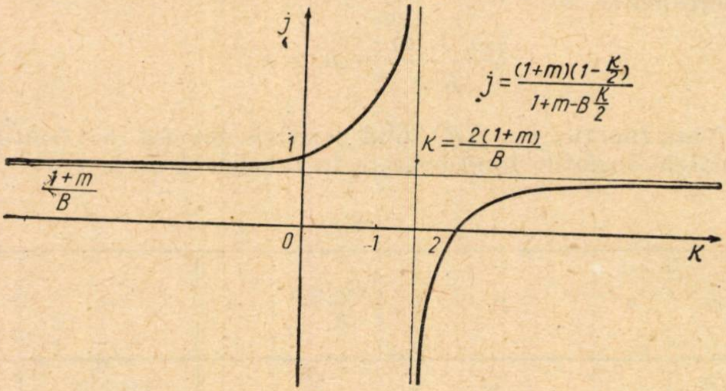


Fig. 7

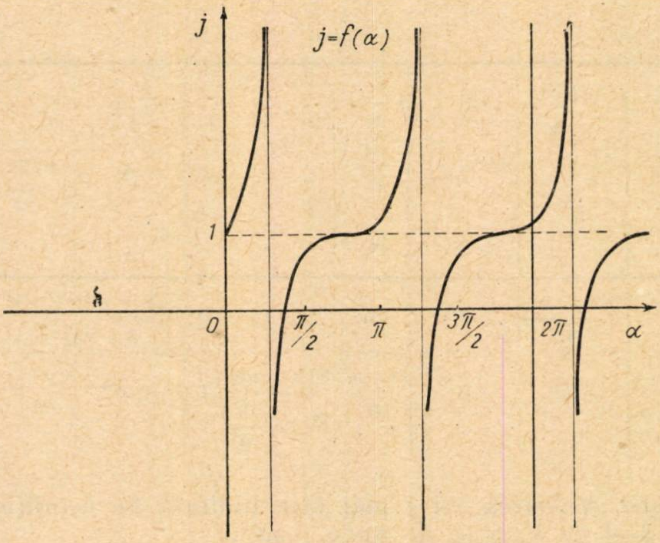


Fig. 8

Pentru valorile $K=0$ și $K=2$, j capătă valori numerice precise, respectiv 1 și zero, care nu satisfac condiția de interval de valabilitate a lui K spre a se obține șir crescător pentru c_i.

Pentru valoarea $K = 0$ eforturile unitare maxime σ_0 se situează pe o paralelă la axa absciselor și reprezintă combinarea prăjinilor astfel ca tensiunea maximă $\sigma_0 =$ constantă.

Pentru $K = 2$, eforturile unitare minime σ_u se situează pe o paralelă la axa absciselor.

Pentru calculele uzuale redăm formulele

$$j = \frac{c_n\,[p_n + j_1\,(1 + p_n F)\,ds_p\,] - \sigma_w s_n\,(1 + p_n F)/L\left(1 + m - B\,\frac{K_1}{2}\right)}{ds_p\,p_n\,F\,c_n}, \tag{50}$$

$$K = \frac{2\,(1+m)\,(j-1),}{j\,B - (1+m)}, \tag{51}$$

$$K = \frac{2(1+m)\left[c_n[p_n + ds_p j_1(1+p_n F) - p_n F] - \sigma_w s_n(1+p_n F)/L\left(1+m-B\frac{K_1}{2}\right)\right]}{B\left[c_n[p_n + ds_p j_1(1+p_n F)] - \sigma_w s_n(1+p_n F)/L\left(1+m-B\frac{K_1}{2}\right)\right] - (1+m)c_n ds_p\,F}. \tag{52}$$

Pentru dimensionarea economică a garniturilor de prăjini de pompaj interesează alegerea judicioasă a coeficientului de siguranță c_n. Coeficientul c_n minim de ales va fi determinat astfel:

20% pentru acoperirea minimală,

18% pentru combaterea efectului de încovoiere a prăjinilor în tubing la partea inferioară a garniturii,

12% pentru frecările suplimentare datorită parafinei și lipsei de verticalitate a garniturii.

Deci, c_n minimal $= 1{,}5$ sau

$$c_n \geqslant 1{,}5. \tag{53}$$

Aceste condiții se schimbă favorabil pentru coeficienții de siguranță din celelalte trepte micșorîndu-se la partea superioară atît frecările cît și efectul de încovoiere, așa că și cea mai economică orientare este pentru c_n în jurul valorii de 1,5. Precizăm că faptul de a lucra în diagramă schematizată, permite să se meargă cu coeficienții de siguranță mai ales pentru porțiunile superioare pînă la valoarea *unitatea*.

Notă. În această expunere am folosit următoarele formule de bază:

— pentru valoarea sarcinii maxime la tija polizată, formulele Slonneger sau Kemler;

— pentru valoarea sarcinii minime la tija polizată, formula inginerilor romîni Dragotescu și Dragomirescu.

Avînd în vedere că la Institutul de petrol, gaze și geologie din București se folosesc la predarea cursurilor de extracția țițeiului și gazelor alte formule în locul acestora redăm în anexa 1 calculele cu aceste formule.

Caz particular $K = 1$

$$j = \frac{1+m}{1+m-A}, \tag{54}$$

iar

$$\begin{cases} i = n-1 & \\ i=1 & x_i = \dfrac{p_n + \dfrac{1+m}{1+m-A} ds_p}{1+p_nF} \cdot \dfrac{s_i - s_{i+1}}{s_n p_i} \cdot L, \\ & x_n = \dfrac{1 - ds_p F \dfrac{1+m}{1+m-A}}{1+p_n F} \cdot L. \end{cases} \tag{55}$$

Valorile eforturilor unitare maxime σ_{0i} ale ciclurilor asimetrice efective se plasează pe o paralelă la bisectoarea axelor.

Șirul coeficienților de siguranță c_i este crescător :

$$\begin{gathered} c_i = \frac{\sigma_w s_n (1 + p_nF)/L \left(1+m - B\dfrac{K_1}{2}\right)}{p_n + \dfrac{s_n}{s_i}(1+p_nF) + ds_p \dfrac{1+m}{1+m-A}\left[1 - \dfrac{s_n}{s_i}(1+p_nF)\right]}, \\ c_n = \frac{\sigma_w s_n (1 + p_nF)/L \left(1+m - B\dfrac{K_1}{2}\right)}{p_n + (1+p_nF)j_1 - ds_p \dfrac{1+m}{1+m-A} p_nF}. \end{gathered} \tag{56}$$

Acest caz se apropie mult de teoria Raskin-Bagramov, cu diferența că șirul coeficienților de siguranță cuprinde valori diferite crescătoare [4]. Teoria Raskin-Bagramov pleacă de la ideea neadmisă a unei schematizări liniare avînd panta unitatea de unde rezultă un coeficient de siguranță constant și plasarea eforturilor unitare maxime pe o paralelă la această dreaptă. Rămînînd la noua interpretare cu coeficienți variabili, teoria Raskin-Bagramov devine valabilă și va putea fi aplicată cu eficacitate economică satisfăcătoare în cazul schematizării Smith-Fischer, pentru valori apropiate ale lui K de unitate, respectiv în cazul mediilor corosive, acolo unde $K \cong 0{,}8$ adică pentru materiale simplu laminate care au valori mici pentru σ_w.

VALORI IMPUSE ȘIRULUI COEFICIENȚILOR DE SIGURANȚĂ

Valorile șirului coeficienților de siguranță pot rezulta ca o condiție a unor condiții inițiale, cum am văzut în cazul soluțiilor liniare pentru σ_0, pot fi arbitrar alese după diverse criterii sau pot rezulta dintr-o anumită lege de formare a șirului.

Vom studia acele legi care generează șiruri crescătoare, condiție impusă de practica exploatării.

Cazul progresiei geometrice

Se consideră şirul în progresie geometrică derivaţie

$$\begin{aligned} c_1 &= c_1, \\ c_2 &= rc_1, \\ &\vdots \\ c_i &= r^{i-1}c_1, \\ c_{i+1} &= r^i c_1, \qquad \text{cu } c_1 = \frac{c_n}{r^{n-1}}, \\ &\vdots \\ c_n &= r^{n-1}c_1. \end{aligned} \tag{57}$$

Rezultă :

$$\frac{s_i}{c_i} - \frac{s_{i+1}}{c_{i+1}} = \frac{r s_i - s_{i+1}}{s_n p_i} \cdot r^{n-i-1}. \tag{58}$$

Valoarea x_i devine atunci

$$x_i = \frac{\sigma_w s_n}{c_n\left(1+m-B\dfrac{K_1}{2}\right)} \cdot \frac{r s_i - s_{i+1}}{s_n p_i}\, r^{n-i+1}. \tag{59}$$

Efectuînd suma de la 1 la $n-1$ rezultă

$$\sum_1^{n-1} x_i = \frac{\sigma_w s_n T}{c_n\left(1+m-B\dfrac{K_1}{2}\right)}, \tag{60}$$

în care :

$$T = \sum_1^{n-1} \frac{r s_i - s_{i+1}}{s_n p_i} \cdot r^{n-i+1} \tag{61}$$

este folosit şi pentru efectuarea sumei $\sum_1^n x_i = L$.

$$L = \frac{\sigma_w \dfrac{s_n}{c_n} p_n T + \sigma_w \dfrac{s_n}{c_n} - (1+m)\left(1-\dfrac{K_1}{2}\right) ds_p L}{\left(1+m-B\dfrac{K_1}{2}\right) p_n} \tag{62}$$

sau

$$\left(1+m-B\frac{K_1}{2}\right)(p_n+j_1\,ds_p)\,L=\sigma_w\,\frac{s_n}{c_n}\,(1+p_nF)\cdot \tag{63}$$

Valorile căutate ale lungimii treptelor sînt

$$\begin{cases} \begin{matrix} i=n-1 \\ i=1 \end{matrix} \quad x_i=\dfrac{p_n+j_1\,ds_p}{1+p_nT}\cdot\dfrac{r\,s_i-s_{i+1}}{s_n\,p_i}\cdot r^{n-i-1}\,L, \\ \\ \qquad\qquad x_n=\dfrac{1-j_1\,ds_p\,T}{1+p_nT}\,L. \end{cases} \tag{64}$$

Cu aceste valori se realizează șirul crescător al coeficienților de siguranță de rație r.

Dimensionarea combinației este determinată de valoarea c_n.

Cazul șirurilor exponențiale

Se consideră șirul c_i

$$\begin{aligned} c_1 &= c_1, \\ c_2 &= a^{k+\alpha}\,c_1. \\ &\;\vdots \\ c_i &= a^{k(i-1)+\alpha}\,c_1, \\ c_{i+1} &= a^{ki+\alpha}\,c_1, \qquad \text{cu } c_1=\frac{c_n}{a^{k(n-1)+\alpha}}, \\ &\;\vdots \\ c_n &= a^{k(n-1)+\alpha}\,c_1. \end{aligned} \tag{65}$$

În acest caz avem

$$\frac{s_i}{c_i}-\frac{s_{i+1}}{c_{i+1}}=\frac{s_i}{a^{k(i-1)+\alpha}\,c_1}-\frac{s_{i+1}}{a^{ki+\alpha}\,c_1}=\frac{a^k\,s_i-s_{i+1}}{c_n}\cdot a^{k(n-i+1)}. \tag{66}$$

Atunci x_i devine

$$x_i=\frac{\sigma_w\,s_n}{c_n\left(1+m-B\dfrac{K_1}{2}\right)}\cdot\frac{a^k\,s_i-s_{i+1}}{s_n\,p_i}\cdot a^{k(n-i-1)} \tag{67}$$

și

$$\sum_1^{n-1} x_i=\frac{\sigma_w\,s_n}{c_n\left(1+m-B\dfrac{K_1}{2}\right)}\,W, \tag{68}$$

în care

$$W = \sum_{1}^{n-1} \frac{a^k s_i - s_{i+1}}{s_n p_i} a^{k(n-i-1)}. \tag{69}$$

Relația $\sum_{1}^{n} x_i = L$ devine

$$\left(1+m - B\frac{K_1}{2}\right) L\,(p_n + j_1\, ds_p) = \sigma_w \frac{s_n}{c_n} (1+p_n W), \tag{70}$$

în care valorile căutate ale lungimii treptelor sînt

$$\left\{\begin{array}{ll} i = n-1 & x_i = \dfrac{p_n + j_1\, ds_p}{1 + p_n W} \cdot \dfrac{a^k s_i - s_{i+1}}{s_n p_i} \cdot a^{k(n-i-1)}\, L, \\ i = 1 & \\ & x_n = \dfrac{1 - j_1\, ds_p\, W}{1 + p_n W}\, L. \end{array}\right. \tag{71}$$

Cazuri particulare ale acestor șiruri sînt $a = 10$ și $a = e$ bazele logaritmilor zecimali și naturali.

Aceste legi au caracteristica de a da formule simple și ușor de aplicat.

PROBLEMA PRACTICII

Cel mai simplu, în șantiere, ar fi de a lucra cu trepte egale ca lungime.

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_i = \ldots = x_n. \tag{72}$$

Față de formulele de calcul cu coeficienți de siguranță variabili sînt de studiat două posibilități.

Cazul I. Primele trepte $(n-1)$ *egale în lungime*

$$\begin{gathered} x_1 = x_2 = \ldots = x_i = \ldots = x_{n-1}, \\ x_n = L - (n-1)\, x_1. \end{gathered} \tag{73}$$

Cazul II. Toate treptele egale în lungime,
ceea ce ar corespunde relației (73) și

$$L = n.x_1. \tag{74}$$

Cazul I. Pornim de la (73) care corespunde condiției

$$\frac{\dfrac{s_i}{c_i} - \dfrac{s_{i+1}}{c_{i+1}}}{p_i} = \ldots = \frac{\dfrac{s_{n-1}}{c_{n-1}} - \dfrac{s_n}{c_n}}{p_{n-1}} = \frac{\dfrac{s_1}{c_1} - \dfrac{s_n}{c_n}}{\sum\limits_{1}^{n-1} p_i}. \tag{75}$$

Din (73) și (75) rezultă

$$L = \frac{(n-1)\,\sigma_w}{\left(1+m-B\dfrac{K_1}{2}\right)} \cdot \frac{\dfrac{s_1}{c_1}-\dfrac{s_n}{c_n}}{\sum\limits_1^{n-1} p_i} + \frac{\sigma_w \dfrac{s_n}{c_n} - (1+m)\left(1-\dfrac{K_1}{2}\right) ds_p\, L}{p_n\left(1+m-B\dfrac{K_1}{2}\right)}. \tag{76}$$

Mai departe se deduce

$$c_1 = \frac{(n-1)\,\sigma_w\, s_1\, p_n}{\left(1+m-B\dfrac{K_1}{2}\right)(p_n+j_1\, ds_p)\sum\limits_1^{n-1} p_i\, L + \sigma_w \dfrac{s_n}{c_n}\left(\sum\limits_1^{n} p_i - n\,p_n\right)}, \tag{77}$$

însă șirul c_i este descrescător și astfel dimensionarea apare neeconomică.

Cazul II. Relația (74) devine:

$$\frac{\dfrac{s_i}{c_i}-\dfrac{s_{i+1}}{c_{i+1}}}{\left(1+m-B\dfrac{K_1}{2}\right)p_i}\,\sigma_w = \frac{\sigma_w \dfrac{s_n}{c_n} - j_1\, ds_p\left(1+m-B\dfrac{K_1}{2}\right)L}{\left(1+m-B\dfrac{K_1}{2}\right)p_n}, \tag{78}$$

de unde

$$c_i = \frac{\sigma_w\, s_i}{\sigma_w \dfrac{s_n}{c_n}\sum\limits_1^{n}\dfrac{p_i}{p_n} - j_1\, ds_p\, L\left(1+m-B\dfrac{K_1}{2}\right)\left(\sum\limits_1^{n}\dfrac{p_i}{p_n}-1\right)}. \tag{79}$$

Şi în acest caz şirul valorilor c_i rămîne descrescător.

Pentru rezolvarea acestei probleme singura posibilitate rămîne schimbarea standardului diametrelor prăjinilor de pompare. Astfel, pentru cazul I, dacă ne referim la soluțiile cu coeficienți constanți sau la cele cu variația liniară a eforturilor unitare maxime, rezultă condiția:

$$\frac{s_i - s_{i+1}}{p_i} = \text{const.} = k. \tag{80}$$

Într-o primă aproximație

$$p_i = d_0\, s_i \tag{81}$$

unde d_0 este greutatea specifică a oțelului prăjinilor.

Rezultă

$$\frac{s_i}{s_{i+1}} = 1 - k\, d_0. \tag{82}$$

Pornind de la primele două diametre cele mai mici în uz, 16 și 19 mm, rezultă

s [cm²]	2,01	2,83	3,98	5,60	7,88
⌀ [mm]	16	19	22,4	26,8	31,7

Dacă se consideră și greutatea mufei atunci

$$p_i = d_0 s_i + \alpha. \tag{83}$$

Pentru primele două diametre în uz rezultă $\alpha = 0{,}024$.

Cu aceste elemente se poate studia elaborarea unor noi standarde pentru prăjinile de pompare.

În cazul al II-lea

$$x_i = x_n$$

sau

$$\frac{p_n + j\,ds_p}{1 + p_n F} \cdot \frac{s_i - s_{i+1}}{s_n p_i} \cdot L = \frac{1 - j\,ds_p F}{1 + p_n F} \cdot L, \tag{84}$$

adică

$$(p_n + n\,j\,ds_p)\,k = s_n, \tag{85}$$

din care va rezulta direcția α dată de valoarea lui j și numărul de trepte pornind jos cu s_n și p_n dat de condițiile în legătură cu coeficientul de siguranță c_i și c_n :

$$j = \frac{s_n - p_n k}{n\,k\,ds_p}, \tag{86}$$

$$c_i = \frac{\sigma_w\,[s_n + p_n\,k(n-1)]/L\left(1 + m - B\dfrac{K_1}{2}\right)}{p_n + \left[1 - \dfrac{1}{s_i}\,[s_n + (n-1)\,kp_n]\right] + \dfrac{1}{s_i}\,[s_n + (n-1)\,p_n]\,j_1\,ds_p}, \tag{87}$$

$$c_n = \frac{\sigma_w\,[s_n + p_n\,k\,(n-1)]/L\left(1 + m - B\dfrac{K_1}{2}\right)}{p_n\,[s_n + kp_n\,(n-1)] + j_1 ds_p\left[1 + (n-1)\,p_n\,\dfrac{k}{s_n}\right]}. \tag{88}$$

Din valoarea impusă lui $c_n \cong 1{,}5$ va rezulta din (88) valoarea lui n a numărului de trepte.

Calculul practic se poate conduce ușor pe baza unor abace construite pentru specificul fiecărui șantier în parte.

Pentru ușurința aplicațiilor, dăm date uzuale și tabele de coeficienți F și H pentru prăjinile de pompare tip STAS în anexa 2.

În anexa 3 este redată justificarea părăsirii criteriului combinării prajinilor după σ_0 = const., astăzi încă în uz în șantiere.

CONCLUZII

Statistica ruperilor de prăjini de pompare confirmă cercetările teoretice prin care se arată că în cazul combinării prăjinilor după criteriul tensiunilor maxime egale, acestea se acumulează în secțiunea superioară a treptei inferioare din garnitura combinată (a se vedea și demonstrația din anexa 3).

Prin urmare, trebuie abandonate vechile criterii și să introducem în exclusivitate dimensionările la oboseală.

Din compararea coeficienților de siguranță din vechea concepție (notat cu ρ) cu c(Soderberg) rezultă că c ușurează și simplifică mult calculele, pe de o parte, iar pe de altă parte se evidențiază mai bine fenomenul deoarece o mică variație pe curba lui Wöhler se traduce cu o mare diferență la numărul de cicluri.

Soluțiile simple obținute se datoresc faptului că s-a lucrat cu diagrame schematizate pentru rezistențele admisibile la oboseală, deci coeficienții de siguranță nu sînt reali ci nominali și ca atare se poate merge pînă la valoarea unitate, existînd acoperire și în acest caz.

Tipul de diagramă utilizat este indiferent (Smith, Haigh etc.), important este ca schematizarea să fie liniară. Schematizările de grade superioare fac imposibilă rezolvarea generală a sistemului de ecuații.

Pentru căutarea soluțiilor, în studiul de față, s-au ales două căi.

În primul rînd, s-a căutat o soluție generală independentă de coeficienții de siguranță. Pe această cale s-a studiat soluția generală a plasării valorilor eforturilor unitare maxime din secțiunile superioare ale treptelor pe o dreaptă oarecare de pantă variabilă K. Această soluție parametrică a cuprins și toate cazurile cunoscute care se pot obține pentru diferite valori ale parametrului $j = f(K)$.

Astfel s-a determinat domeniul de valabilitate al soluțiilor căutate prin condiția obținerii unui șir crescător cu adîncimea al coeficienților de siguranță la oboseală, condiție impusă de practica exploatării.

În interiorul acestui domeniu, legea de formare a șirului coeficienților de siguranță apare ca o consecință și deci rezultă ca o soluție naturală.

Șirul de coeficienți constanți este un caz de limită și anume limită inferioară, fiind vorba de dreapta cu cea mai mică pantă, respectiv o paralelă cu dreapta rezistențelor admisibile.

Un alt caz particular interesant este soluția $K = 1$ care a permis punerea la punct a teoriei Raskin-Bagramov în sensul că se menține schematizarea liniară respectivă pentru rezistențele admisibile, în schimb valorile eforturilor unitare maxime se plasează pe o dreaptă paralelă cu bisectoarea axelor. Prin aceasta soluția Raskin-Bagramov devine un caz particular cu șir variabil crescător al coeficienților de siguranță, avînd ca domeniu de aplicabilitate sonde cu dificultăți spre talpă și lucrînd în medii corosive.

Pentru cazul general este indicată soluția cu coeficienți constanți, urmînd ca soluțiile cu coeficienți variabili să fie aplicate la sondele adînci deviate, prezentînd dificultăți de fund evidențiate prin ruperi numeroase a porțiunii superioare din treapta inferioară a garniturii. Tot sub formă de cazuri particulare se vor folosi șiruri de coeficienți variabili crescători, în cazul cînd se vor obține soluții mai bune, ca de pildă dimensiuni mai mici pentru treapta inferioară față de o valoare superioară a secțiunii acesteia în cazul combinării cu coeficienți constanți.

A doua cale a cercetării a fost tocmai inversă și anume, s-a plecat de la legi impuse șirului coeficienților de siguranță — valori exponențiale și în progresie geometrică — studiindu-se acele cazuri în care eforturile unitare maxime se plasau pe curbe de grade superioare. Aceste soluții au aplicabilitate practică tot în cazuri particulare de sonde deviate sau cu dificultăți de fund, în special în medii corosive.

Pe aceste două căi s-au stabilit deci o serie de soluții generale care înglobează și soluțiile cunoscute pînă în prezent.

S-a căutat și cea mai generală soluție, dar aceasta nu s-a obținut deoarece nu s-a găsit soluția sistemului de ecuații.

S-a răsturnat atunci problema, plecîndu-se de la soluția cea mai practică și anume dimensionarea ideală de a se alcătui garnitura combinată din trepte egale care să reprezinte totuși soluția problemei, adică să prezinte coeficienți de siguranță în șir crescător. Acest lucru este posibil numai prin schimbarea actualului standard al diametrelor prăjinilor de pompare.

Prin studiul de față s-au examinat mai multe posibilități. S-a dat o soluție în care nu se ține seama de greutatea mufelor și s-a pus baza de studiu pentru cazul cînd se ține seama de greutatea mufelor, stabilindu-se formulele teoretice generale.

Criteriul care stă la baza acestor noi propuneri de standarde este general valabil, privind constanța factorului $(s_i - s_{i+1})/p_i$ care apare în toate cazurile combinărilor prăjinilor de pompare.

Introducerea noului standard necesită colaborarea cu industria metalurgică, pentru a se ține seama de posibilitățile de fabricare, și cu industria petroliferă extractivă, pentru a se ține seama de posibilitățile de înlocuire a garniturilor vechi ca și de dotarea sondelor noi.

Studiile efectuate pînă în prezent au la bază o serie de ipoteze unanim acceptate.

Pe măsură ce economicul o va cere, aceste ipoteze vor putea fi revizuite, trecîndu-se la dimensionări mai stricte.

În situația actuală, dimensionarea garniturilor de prăjini de pompare la oboseală devine obligatorie pentru toate șantierele petrolifere, urmînd a se abandona vechile sisteme de dimensionare.

ANEXA 1

În cursul extracției țițeiului și gazelor, în cadrul Institutului de petrol, gaze și geologie din București, sînt în uz următoarele formule [1], [2], [3] :

Efortul unitar maxim $\sigma_{\max i}$

$$\sigma_{\max i} = \frac{1}{s_i}\left[(A + B)\sum_{1}^{i} l_i q_i + 2\,\Phi L\right].$$

Efortul unitar minim $\sigma_{\min.\,i}$

$$\sigma_{\min.\,i} = \frac{1}{s_i}\,[(A - B)]\sum_{1}^{i} l_i q_i .$$

Efortul unitar mediu σ_{mi}

$$\sigma_{mi} = \frac{1}{s_i}\,(A\sum_{1}^{i} l_i q_i + \Phi L).$$

Efortul unitar de amplitudine σ_{vi}

$$\sigma_{vi} = \frac{1}{s_i}\,(B\sum_{1}^{i} l_i q_i + \Phi L).$$

Gradul de asimetrie r_i

$$r_i = \frac{A - B}{A + B + \dfrac{2\,\Phi L}{\sum_{1}^{i} l_i q_i}},$$

în care:

șirul de numere se numără de jos în sus, n fiind indicele treptei celei mai de sus.

$A = b_0 + 0{,}5\,[f(1 - b_0) + m_a - m_d]$,

$B = 0{,}5\,[f(1 + b_0) + m_a + m_d]$,

$\Phi = \dfrac{\gamma F}{2}$,

l_i = lungimea treptei i,

q_i = greutatea unității de lungime,

γ = greutatea specifică a extrasului,

F = secțiunea brută a pistonului pompei,

b_0 = plutirea,

f = frecarea,

m_a și m_d factorii dinamici la cursa ascendentă și la cursa descedentă.

În acest caz:

$$j_0 = \frac{2 - K}{A + B - KA},$$

$$l_i = \frac{s_i - s_{i-1}}{s_1\,q_i},\ \frac{q_1 + j_0\,\Phi}{1 + q_1\,F}\,L,$$

$$l_1 = \frac{1 - j_0\,\Phi F}{1 + q_1\,F}\,L,$$

$$c_i = \frac{\sigma_w\,s_1\,(1 + q_1 F)/L\,(A + B - K_1\,A)}{q_1 + \Phi\,j_0 - \dfrac{s_1}{s_i}\,(1 + q_1 F)(j_0 - j_1)\,\Phi},$$

cu condiția

$$j_0 > j$$

$K > K_t$ cu domeniul de valabilitate pentru șirul crescător al coeficienților de siguranță

$$K_t < K < \frac{A + B}{A} \cdot$$

ANEXA 2

Valorile lui F

	$n=2$	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$	$n = 6$
1.1/4''	0,01492	0,06730	0,16380	0,3244	0,6267
1.1/8''	0,04858	0,13964	0,2566	0,5810	—
1''	0,07686	0,2077	0,4628	—	—
7/8	0,1032	0,3170	—	—	—
3/4	0,1699	—	—	—	—

Rezistența limită la oboseală

σ_{-1} [Kg/mm²]

Polizat	Piele de laminare	Mediu corosiv
28,8	15,84	8,64

STAS : $\sigma_R = 75-80$, $\sigma_c = 48$ kg/mm², $0,9\ \sigma_c = 43,2$ kg/mm²

diam. ∅	5/8 = 16mm	3/4 = 19	7/8 = 22	1''= 25	1.1/8=28	1.1/4 = 32
p [kg/m]	1,75	2,43	3,28	4,17	5,24	8,05
s [cm² sect.]	2,01	2,83	3,80	4,19	6,16	6,9

VALORILE $\frac{s_i - s_{i+1}}{p_i}$

tije	1.1/4—1.1/8	1.1/8—1	1—7/8	7/8—3/4	3/4—5/8
$\frac{s_i - s_{i+1}}{p_i}$	0,09191	0,23854	0,29210	0,29573	0,34156

H

1.1/4	0,01332	0,05204	0,11153	0,18935	0,30995
1.1/8	0,03872	0,09821	0,17603	0,29663	
1	0,05949	0,13731	0,25791		
7/8	0,07782	0,19824			
3/4	0,1206				

$F-H$

1.1/4	0,00160	0,01526	0,05227	0,14504	0,31675
1.1/8	0,00986	0,04143	0,08057	0,28437	
1	0,01737	0,07039	0,20439		
7/8	0,2538	0,11858			
3/4	0,0493				

ANEXA 3

De ce trebuie abandonat sistemul actual în uz de combinare al garniturilor de prăjini de pompare pe efort unitar maxim σ_0 = constant

Acest caz corespunde valorilor liniare examinate în care $\alpha = 0$ deci $K = 0$, iar din formula (33) $j = 1$; deci aceste combinații au trepte de lungimi independente de cursa la tija polizată și numărul de curse. Din (34) rezultă:

$$x_i = \frac{p_n + ds_p}{1 + p_n F} \cdot \frac{s_i - s_{i+1}}{s_n\, p_i} L,$$
$$x_n = \frac{1 - ds_p F}{1 + p_n F} L. \tag{a}$$

Șirul coeficienților de siguranță se va obține dînd valoarea $j = 1$:

$$c_i = \frac{\sigma_w\, s_n\,(1+p_n F)/L\left(1 + m - B\,\dfrac{K_1}{2}\right)}{p_n + ds_p + \dfrac{s_n}{s_i}(1+p_n F)\,(j_1-1)\,ds_p}. \tag{b}$$

Vom compara valorile c_i și c_{i+1} succesive din șir.
Dacă $c_i > c_{i+1}$ atunci

$$\frac{s_n}{s_i}(1 + p_n F)\,(j_1 - 1) < \frac{s_n}{s_{i+1}}(1 + p_n F)\,(j_1 - 1)$$

sau $s_{i+1} < s_i$, deoarece:

$$j_1 > 1 \text{ pentru valorile lui } K_1$$

pentru medii corosive și necorosive (a se vedea curba $j = f(K)$).

Deci şirul c_i este descrescător şi cum dimensionarea se face după secţiunea de sus (a primei trepte) ultima treaptă are coeficientul de siguranţă $c_n < 1$[1]) cu diferenţa de la 6–12% ceea ce explică concentrarea ruperilor în secţiunea superioară a treptei inferioare şi motivează necesitatea abandonării acestui criteriu.

Primită la redacţie la 28 septembrie 1962

EINE ALLGEMEINE ZUSAMMENSTELLUNG DER PUMPENSTANGEN AUF GRUND DER DAUERFESTIGKEIT

ZUSAMMENFASSUNG

Es wird das Studium der Kombination von Pumpenstangen nach Dauerfestigkeitskriterien fortgesetzt und es werden neue Formeln für konstante Soderbergsicherheitskoeffizienten aufgestellt, die teilweise bereits in Facharbeiten benutzt werden, obwohl sie noch nicht vom Verfasser veröffentlicht wurden. Daran anschließend werden die Lösungen mit veränderlichen Koeffizienten untersucht, in denen das Variationsgesetz aus der Bedingung hervorgeht, daß $j = f(K)$ sich linear ändert und es werden neue Formeln aufgestellt.

Die Theorie von Raskin und Bagramow wird revidiert und der Gültigkeitsbereich festgelegt. Es werden der allgemeine Fall und die Lösungen auf Grund von vorgegebenen Gesetzen in Form von geometrischer Progression und Exponentialreihen untersucht und neue Formeln aufgestellt.

Es wird eine neue Grundlage für die Normierung der Durchmesser im Hinblick auf die Erleichterung und Rationalisierung des Aufbaus der in Stufen kombinierten Pumpengestänge eingeführt.

Als Folgerung wird vorgeschlagen, das gegenwärtige System zu verlassen und zu dem neuen, auf der Dauerfestigkeit beruhenden System überzugehen.

Als Anlage werden Anweisungen für die Arbeit mit anderen Grundformeln und Daten für erleichterte Rechnungen gegeben.

BIBLIOGRAFIE

1. I. M. MURAVIEV, A. P. KRÎLOV, *Exploatarea zăcămintelor de ţiţei.* Edit. tehnică, Bucureşti, 1950.
2. GRIGORE IOACHIM, *Extracţia ţiţeiului şi gazelor.* Edit. tehnică, Bucureşti, 1961.
3. A. S. VIRNOVSKI, Neftianoe hoziaistvo, *2* (1947).
4. R. M. RASKIN, R. A. BAGRAMOV, Neftianoe hoziaistvo, *9* (1955).

---

[1]) Cînd c_i are valori apropiate de 1.

STUDII

CALCULUL LA STAREA LIMITĂ DE REZISTENȚĂ A ELEMENTELOR DE BETON PRECOMPRIMAT SOLICITATE LA ÎNCOVOIERE

DE

MARCEL TANNENBAUM [1]

539.4 : 691.3

1. GENERALITĂȚI

1.1. OBIECTUL LUCRĂRII

1.1.1. Prezenta lucrare are ca obiect elaborarea unor metode îmbunătățite de calcul la starea limită de rezistență a elementelor de beton precomprimat care să țină seama în cît mai largă măsură de realitatea fizică a fenomenelor și care să fie în același timp destul de simple pentru aplicarea în proiectarea curentă.

Lucrarea se referă la elemente de beton precomprimat solicitate la încovoiere, sub efectul unor încărcări exterioare de tipul curent întîlnit în construcții, avînd armătura pretensionată alcătuită din sîrme trase la rece din oțel carbon (de exemplu sîrmă SBP), sub formă de armătură preîntinsă sau armătură postîntinsă la care se asigură aderența cu betonul după transfer prin metode adecvate (injectare, betonare, torcretare).

1.2. PRINCIPII GENERALE DE CALCUL LA STAREA LIMITĂ DE REZISTENȚĂ PENTRU ELEMENTE DE BETON PRECOMPRIMAT SOLICITATE LA ÎNCOVOIERE

1.2.1. În figura 1 s-a reprezentat evoluția stării de eforturi și de deformații în secțiunea unui element de beton precomprimat solicitat la încovoiere.

---

[1] Institutul de cercetări în construcții și economia construcțiilor (INCERC), București.

Proprietățile deformative ale betonului zonei comprimate din secțiune sînt caracterizate prin diagrama σ_b, ε_b din figura 2, iar proprietățile deformative ale armăturii pretensionate prin diagrama σ_p, ε_p din figura 3.

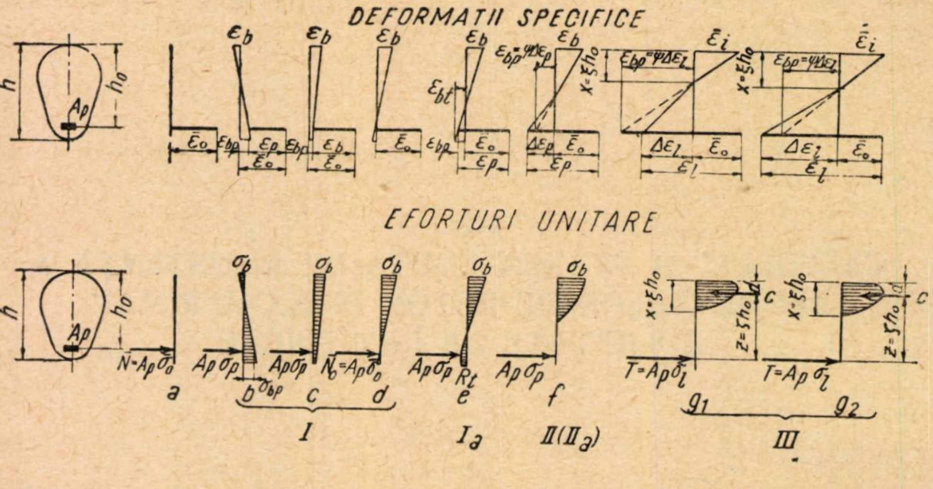

DEFORMAȚII SPECIFICE
EFORTURI UNITARE
h
h₀
Ap
ε_b
ε_bt
ε_bp = ψΔε_p
ε_bp = ψΔε_l
ε̄_i
x = ξh₀
ε̄₀
ε_p
Δε_p
Δε_l
ε̄_l
σ_b
N = Apσ₀
Apσ_p
σ_bp
N_b = Apσ̄₀
R_t
T = Apσ_l
z = ζh₀
c
a
b
c
d
e
f
g₁
g₂
I
Ia
II(IIa)
III

Fig. 1. — Evoluția stării de eforturi în secțiunile elementelor de beton precomprimat solicitate la încovoiere.

a — înainte de transfer în cazul ipotetic al forței de precomprimare cu valoarea din faza finală (armătura preîntinsă); *b* — sub efectul numai al forței de precomprimare în faza finală (fără greutate proprie); *c* — într-un stadiu oarecare de încărcare în exploatare; *d* — în stadiul de încărcare pentru care se atinge în armătura pretensionată efortul unitar de calcul; *e* — la fisurare; *f* — într-un stadiu oarecare de încărcare după fisurare; *g* — la rupere.

1. — aderență slabă între armătură și beton. 2. — aderență bună între armătură și beton.

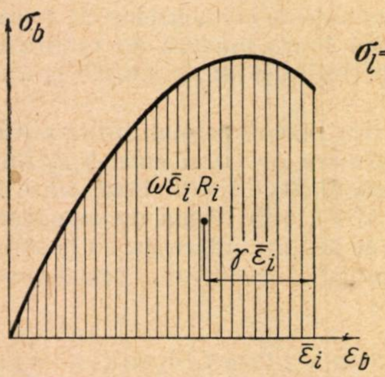


Fig. 2. — Proprietățile deformative ale betonului zonei comprimate.

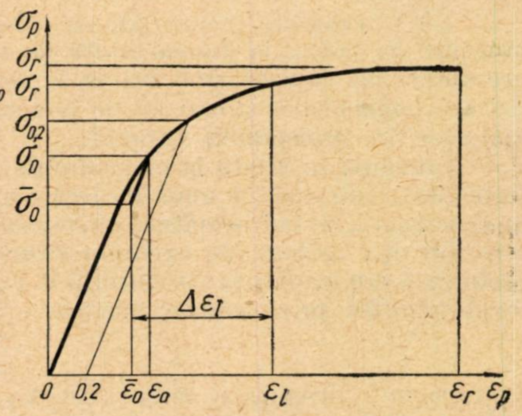


Fig. 3. — Proprietățile deformative ale armăturii pretensionate.

Efortul unitar de calcul din armătura pretensionată, notat cu σ_0 în faza inițială respectiv $\bar{\sigma}_0$ în faza finală, este definit drept efortul unitar din armătura pretensionată în acel stadiu de încărcare în care are loc anularea efortului unitar din fibra de beton de la nivelul armăturii considerate (fig. 1, *c*). Stadiul de încărcare menționat mai sus delimitează acea parte suplimentară a domeniului de comportare în stadiul I a elementului, creată prin introducerea precomprimării. Începînd din acest moment elementul poate fi considerat drept un element de beton armat, în care diagrama σ, ε a armăturii este identică cu porțiunea din diagrama σ_p, ε_p a armăturii pretensionate care are originea în punctul $(\bar{\sigma}_0, \bar{\varepsilon}_0)$ (fig. 3).

Deoarece condiția cea mai defavorabilă pentru atingerea stării limită de rezistență are loc în faza finală, după ce s-au consumat toate pierderile de tensiune în timp din armătura pretensionată — datorită relaxării armăturii, contracției și curgerii lente a betonului — această situație este pusă la baza calculului. În consecință, în diagrama σ_p, ε_p a armăturii se introduce porțiunea liniară de descărcare de la efortul unitar de calcul în faza inițială, σ_0, la efortul unitar de calcul în faza finală, $\bar{\sigma}_0$ (fig. 3).

1.2.2. Pentru determinarea eforturilor unitare din beton și armătură sub efectul unei solicitări oarecare trebuie ținut seama de faptul că ne aflăm în prezența unei structuri interior static nedeterminate. Rezolvarea problemei este posibilă numai dacă, pe lîngă relațiile de echilibru în secțiune, se face apel la o relație suplimentară de compatibilitate a deformațiilor, scriind condiția de egalitate a deformațiilor armăturii și a fibrei de beton adiacente.

În cazul elementelor de beton precomprimat nefisurate, din condiția de compatibilitate a deformațiilor rezultă posibilitatea înlocuirii secțiunii compuse din beton și armătură cu secțiunea ideală de calcul, care este alcătuită din secțiunea de beton și secțiunea armăturilor, multiplicată cu raportul dintre modulul de elasticitate al armăturii și cel al betonului $n = E_p/E_b$. Calculul eforturilor unitare se efectuează cu secțiunea ideală astfel definită aplicînd regulile rezistenței materialelor, ca pentru un corp elastic și omogen [1].

Apariția fisurilor introduce o neuniformitate în distribuția deformațiilor specifice în lungul elementului, cu valori maxime în dreptul fisurilor. Condiția de compatibilitate a deformațiilor poate fi scrisă în acest caz pentru deformațiile specifice medii, deoarece cît timp armătura lucrează solidar cu betonul elementului deformațiile medii ale armăturii și ale fibrei de beton de la nivelul acesteia trebuie să fie egale. Continuitatea geometrică a axei medii deformate a elementului presupune valabilitatea ipotezei secțiunilor plane pentru deformațiile medii ale fibrelor, fapt confirmat prin cercetări experimentale [2].

Problema se reduce astfel la stabilirea unei relații de legătură între deformația specifică medie a armăturii, calculată în conformitate cu ipotezele de mai sus, și deformația specifică maximă a acesteia în secțiunea fisurată. În acest scop se scrie, cu notațiile din figura 1, relația :

$$\Delta\varepsilon_p = \frac{\varepsilon_{bp}}{\psi}, \tag{1}$$

unde ψ este un coeficient stabilit pe cale experimentală.

1.2.3. Capacitatea portantă a secțiunii este epuizată în momentul în care unul dintre materiale, armătura sau betonul, atinge deformația sa specifică limită. Pe baza analizei teoretice și a datelor experimentale rezultă că, exceptînd elementele avînd procente reduse de armare și prevăzute cu armături care prezintă caracteristici ridicate de aderență, ruperea are loc în general prin cedarea zonei comprimate înainte ca armătura să fi ajuns la rezistența sa limită.

Starea limită de rezistență corespunde în acest caz atingerii deformației specifice limită la compresiune din încovoiere a betonului, $\bar{\varepsilon}_i$, în fibra extremă a zonei comprimate. Această ipoteză poate fi extinsă pentru comoditatea calculelor și în cazul elementelor care cedează prin ruperea armăturii, deoarece la înălțimi reduse a zonei comprimate, corespunzător procentelor mici de armare, eroarea introdusă datorită acestei aproximații este neînsemnată.

1.2.4. Relațiile de calcul în starea limită de rezistență pentru o secțiune oarecare, se scriu cu notațiile din figurile 1, 2 și 3 :

$$A_p \sigma_l = \int_0^x \sigma_b b \, \mathrm{d}x, \tag{2}$$

$$M_r = \left[\int_0^x \sigma_b b \, \mathrm{d}x \right] z = A_p \sigma_l z = m_p A_p \sigma_r z, \tag{3}$$

$$\varepsilon_{bp} = \psi \Delta \varepsilon_l = \frac{1 - \xi}{\xi} \bar{\varepsilon}_i, \tag{4}$$

$$\sigma_l = f(\varepsilon_i) = m_p \sigma_r, \tag{5}$$

$$\varepsilon_l = \bar{\varepsilon}_0 + \Delta\varepsilon_l. \tag{6}$$

În cazul secțiunii dreptunghiulare relațiile (2) și (3) capătă forma :

$$A_p \sigma_l = \omega \xi b h_0 R_i, \tag{7}$$

respectiv

$$\xi = \frac{m_p}{\omega} \alpha_p, \tag{8}$$

unde

$$\alpha_p = \frac{A_p}{b h_0} \frac{\sigma_r}{R_i} \quad \text{și} \quad m_p = \frac{\sigma_l}{\sigma_r},$$

$$M_r = \omega \xi b h_0 R_i (h_0 - \gamma x) = A_p \sigma_l (h_0 - \gamma x), \tag{9}$$

respectiv

$$m_r = \frac{M_r}{b h_0^2 R_i} = \omega \xi (1 - \gamma \xi) = m_p \alpha_p \left(1 - \frac{\gamma}{\omega} m_p \alpha_p\right) \tag{10}$$

și

$$\overline{m}_r = \frac{M_r}{h_0 A_p \sigma_r} = m_p \left(1 - \frac{\gamma}{\omega} m_p \alpha_p\right) = \frac{m_r}{\alpha_p} \cdot \tag{11}$$

Condiţia de compatibilitate a deformaţiilor (4) se poate scrie sub forma mai comodă:

$$\xi = \frac{\bar{\varepsilon}_i}{\bar{\varepsilon}_i + \psi \Delta \varepsilon_l} = \frac{1}{1 + \dfrac{\Delta \varepsilon_l}{\bar{\varepsilon}_i / \psi}}. \tag{12}$$

1.2.5. Din analiza relaţiilor de calcul rezultă că diferenţa esenţială faţă de cazul elementelor obişnuite de beton armate cu bare prezentînd palier de curgere constă în necesitatea determinării efortului unitar σ_l din armătura pretensionată în starea limită de rezistenţă. În relaţiile de mai sus s-a introdus noţiunea de coeficient al condiţiilor de lucru ale armăturii pretensionate din zona întinsă,

$$m_p = \frac{\sigma_l}{\sigma_r}, \tag{13}$$

unde σ_r este rezistenţa la tracţiune a armăturii pretensionate.

Coeficientul $m_p \leqslant 1$ are un sens fizic precis, exprimînd gradul de utilizare al armăturii pretensionate în secţiune în starea limită de rezistenţă. Acest coeficient are valori variabile, în funcţie de diferiţii factori care influenţează capacitatea portantă a secţiunilor elementelor de beton precomprimat.

Dacă se poate exprima printr-o relaţie simplă directă valoarea coeficientului m_p, evitînd scrierea explicită a condiţiei de compatibilitate a deformaţiilor, calculul secţiunilor se face numai cu ajutorul relaţiilor de echilibru, ca şi în cazul unor elemente de beton armat.

În lucrare se stabilesc valori practice de calcul pentru coeficientul m_p, corespunzătoare diferitelor condiţii de realizare ale elementelor de beton precomprimat.

2. PROPRIETĂŢILE MECANICE ALE MATERIALELOR DIN SECŢIUNILE ELEMENTELOR DE BETON PRECOMPRIMAT

2.1. ARMĂTURA PRETENSIONATĂ

2.1.1. Pentru realizarea armăturilor pretensionate în R.P.R. se utilizează curent sîrma netedă trasă la rece din oţel carbon SBP. Această sîrmă se livrează în prezent în două calităţi: SBP II şi SBP I.

Sîrma SBP II este o sîrmă de înaltă rezistenţă livrată în colaci de diametru mic, astfel încît pentru a putea fi utilizată trebuie îndreptată şi ulterior, preferabil, calibrată prin întindere pînă la un efort unitar egal cu 0,8 σ_r.

Sîrma SBP I este o sîrmă de calitate superioară care, după trefilare şi înfăşurare pe colaci de diametru mic, suferă un ciclu de operaţii suplimentare constînd din derularea de pe colaci de diametru mic, îndreptare, îmbunătățire prin tratament de revenire și înfășurare pe colaci de diametru mare de pe care se derulează rectiliniu. Ca urmare sîrma SBP I are rezistența la rupere mai mare și un domeniu elastic de deformare mai întins decît sîrma SBP II.

2.1.2. În figurile 4 și 5 se dau diagramele σ_p, ε_p construite pe baza valorilor prescrise garantate pentru caracteristicile mecanice ale sîrmelor SBP II și SBP I, $\varnothing = 5$ mm. Aceste diagrame se vor utiliza pentru calculul secțiunilor elementelor de beton precomprimat.

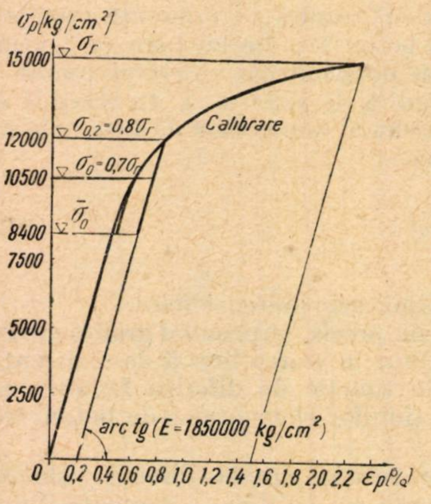


Fig. 4. — Sîrmă SBP II, $\varnothing = 5$ mm ; diagramă σ_p, ε_p de calcul.

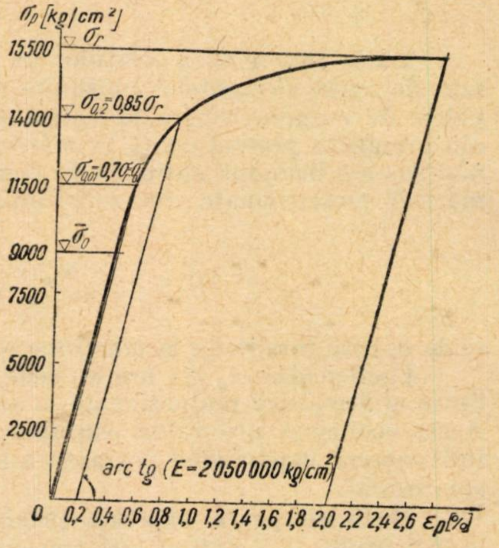


Fig. 5. — Sîrmă SBP I, $\varnothing = 5$ mm ; diagramă σ_p, ε_p de calcul.

În diagrame s-a trecut cazul tensionării pînă la valoarea maximă prescrisă $\sigma_0 = 0{,}7\ \sigma_r$ și ulterior descărcarea armăturii la valoarea $\bar{\sigma}_0$ datorită pierderilor de tensiune în timp ; pentru sîrma SBP II s-a luat în considerare și cazul calibrării inițiale pînă la 0,8 σ_r.

2.1.3. Diagramele σ_p, ε_p pentru alte diametre de sîrme sînt asemănătoare ca formă celor reprezentate pentru $\varnothing = 5$ mm.

De asemenea, sîrmele provenite din import se pot asimila din punct de vedere al formei diagramei σ_p, ε_p cu sîrmele SBP I, respectiv SBP II, după cum sînt livrate în colaci de diametru mare sau mic.

2.2. BETONUL ZONEI COMPRIMATE A SECȚIUNII

2.2.1. În urma apariției fisurilor continuitatea elementului este întreruptă, starea de eforturi și deformații pe porțiunea de moment constant prezentîndu-se aproximativ ca în figura 6 [3].

Datorită caracterului local al fisurii, fibrele de beton învecinate mai puțin solicitate asigură un fel de fretaj zonei restrînse de eforturi sporite deasupra fisurii, împiedicînd dezvoltarea liberă a proceselor de microfisurare atît pe înălțimea zonei comprimate, cît și pe lungimea acesteia. În consecință, ruperea la compresiune a betonului se dezvoltă în profunzime în fiecare dintre cele două blocuri separate de secțiunea fisurată.

Ca urmare, pentru comportarea în starea limită de rezistență a elementelor reale de beton precomprimat lucrînd cu fisuri în zona întinsă, nu sînt hotărîtoare caracteristicile mecanice locale ale betonului deasupra fisurii ci caracteristicile mecanice medii pe o porțiune destul de extinsă în jurul fisurii.

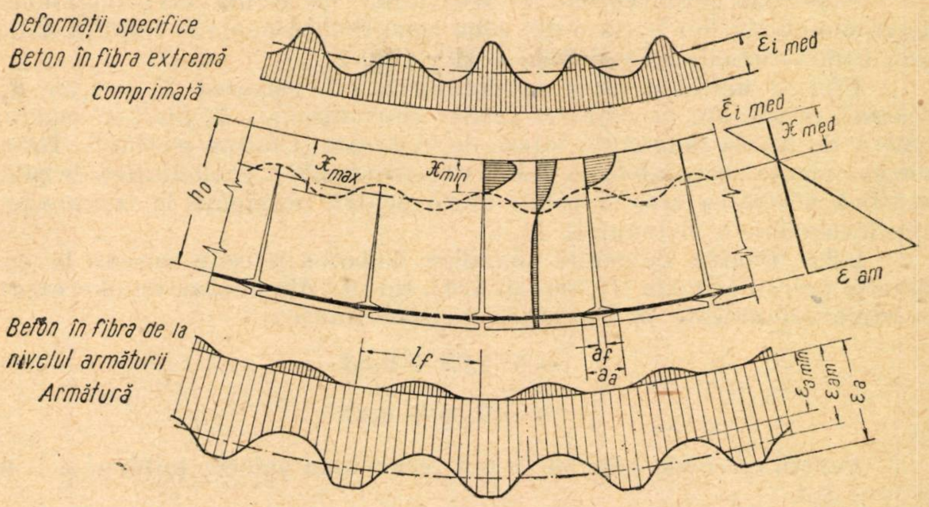

Deformații specifice
Beton în fibra extremă comprimată
$\bar{\varepsilon}_{i\,med}$
$\bar{\varepsilon}_{i\,med}$
$\mathcal{X}_{med}$
$\mathcal{X}_{max}$
$\mathcal{X}_{min}$
h_0
ε_{am}
Beton în fibra de la nivelul armăturii
Armătură
l_f
a_f
a_a
ε_{3m}
ε_{am}
ε_3

Fig. 6. — Starea de eforturi și deformații după fisurare pe porțiunea de moment constant a unui element solicitat la încovoiere.

2.2.2. Diagrama eforturilor unitare din betonul zonei comprimate este diferită de diagrama σ, ε obținută la compresiune centrică deoarece:

— viteza de deformare este diferită în fiecare punct, fiind proporțională cu distanța pînă la axa neutră; deoarece relația de legătură σ, ε este funcție de viteza de încărcare, ea va fi deci diferită în fiecare punct;

— în conformitate cu legile care guvernează comportarea ansamblurilor statistice, cu cît scade porțiunea solicitată a ansamblului crește media caracteristicii mecanice de rezistență relativă la porțiunea considerată; ca urmare, crește valoarea maximului în diagrama σ, ε față de cazul compresiunii centrice;

— fibrele mai puțin solicitate asigură un fel de fretaj pentru fibrele extreme, împiedicînd dezvoltarea liberă a microfisurilor, ceea ce are ca efect sporirea efortului maxim capabil;

— fiind vorba de o diagramă medie, forma acesteia depinde de distanța dintre fisuri și de condițiile de aderență ale armăturii din zona întinsă.

2.2.3. Nivelul actual al cunoștințelor asupra betonului nu permite încă determinarea riguroasă a formei diagramei eforturilor unitare în zona comprimată a secțiunilor încovoiate.

În relațiile de calcul (2) — (12) această diagramă intervine însă numai cu valorile sale integrale care depind în mai mică măsură de detaliile de formă ale acesteia. În consecință:

— pentru nevoile practice de calcul diagrama eforturilor unitare din zona comprimată se poate considera drept o transformare afină a diagramei σ_b, ε_b obținută pe piese prismatice solicitate la compresiune centrică;

— pentru cazul curent al secțiunilor de formă dreptunghiulară, diagrama eforturilor unitare din zona comprimată poate fi definită numai prin caracteristicile sale globale ω și γ (fig. 2).

Efortul unitar maxim se consideră cu valoarea $R_i = 1{,}25\ R_{pr}$. Această relație are un caracter relativ convențional, R_i fiind în realitate funcție de marca betonului, viteza de încărcare și forma secțiunii. Totuși, corespondența acceptabilă cu datele experimentale și comoditatea de calcul justifică păstrarea acestei valori unice pentru rezistența la compresiune din încovoiere a betonului, R_i.

2.2.4. Pentru domeniul mărcilor de beton folosite curent la construcții precomprimate (B 300—B 500), rezultă din analiza datelor experimentale comunicate în literatura de specialitate:

$$\omega = 0{,}65 \div 0{,}83,$$

$$\gamma = 0{,}39 \div 0{,}47.$$

Pentru calculele practice se pot recomanda valorile minime $\omega = 0{,}7$ și $\gamma = 0{,}4$.

2.2.5. Deformația specifică limită la compresiune din încovoiere a betonului, $\bar{\varepsilon}_i$, este definită drept acea valoare a deformației specifice din fibra extremă comprimată, la atingerea căreia momentul capabil al secțiunii trece printr-un maximum care reprezintă capacitatea portantă la încovoiere a secțiunii.

În consecință, valoarea $\bar{\varepsilon}_i$ depinde atît de forma diagramei σ, ε a betonului, cît și de caracteristicile geometrice ale secțiunii.

Pentru a urmări dependența lui $\bar{\varepsilon}_i$ de marca betonului, s-a scris condiția de maximum a momentului capabil pentru diagramele σ, ε corespunzătoare betoanelor de diferite rezistențe la secțiuni de formă dreptunghiulară. Au rezultat două tendințe clare de creștere a lui $\bar{\varepsilon}_i$, o dată cu scăderea înălțimii relative a zonei comprimate și o dată cu scăderea mărcii betonului.

Neuniformitatea distribuției deformațiilor specifice la marginea comprimată a elementelor cu fisuri în zona întinsă face dificilă precizarea valorilor experimentale pentru $\bar{\varepsilon}_i$, fiindcă înregistrările depind de lungimea bazei de măsurare și de poziția bazei în raport cu secțiunea fisurată. Deoarece capacitatea portantă a secțiunii este funcție în special de valorile medii ale deformației specifice (a se vedea 2.2.1), se pot considera în general satisfăcătoare numai valorile stabilite pe bază mai mare decît distanța dintre fisuri.

În figura 7 s-au prezentat valori experimentale $\bar{\varepsilon}_i$, extrase din lucrările [4], [5], [6] și obținute de către autor în cadrul INCERC. De asemenea, s-a reprezentat și diagrama valorilor teoretice stabilită mai sus pentru betoane de diferite rezistențe. Această diagramă se menține aproximativ la limita inferioară a datelor experimentale.

Pentru domeniul mărcilor de beton utilizate curent la construcții precomprimate, se poate lua în considerație o valoare unică a deformației specifice limită la compresiune din încovoiere a betonului. Pe baza datelor experimentale sus-menționate, se recomandă utilizarea pentru calcule practice a valorii minime acoperitoare $\bar{\varepsilon}_i^n = 0{,}002$.

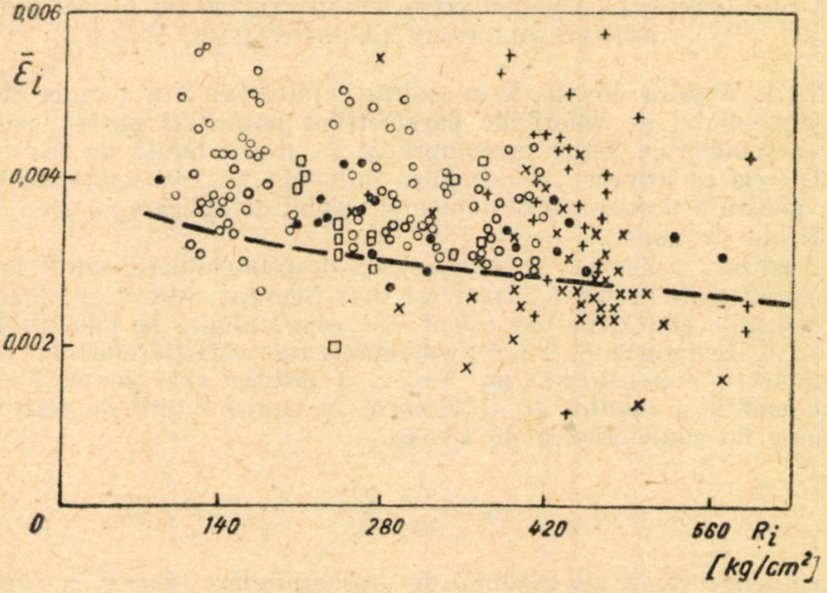


Fig. 7. — Valori experimentale $\bar{\varepsilon}_i$, obținute de diferiți cercetători pe grinzi solicitate la încovoiere: × [4]; ○ [5]; ● [6]; + [7]; □ INCERC (autor).

2.2.6. Din punct de vedere practic, efectul coeficientului ψ din relația (12), care exprimă influența neuniformității stării de deformații introduse ca urmare a apariției și dezvoltării fisurilor, se poate interpreta ca o modificare a deformației specifice limită la compresiune din încovoiere a betonului, $\bar{\varepsilon}_i$. Aceasta se înlocuiește astfel cu valoarea de calcul $\bar{\varepsilon}_i^c$ dată de relația

$$\bar{\varepsilon}_i^c = \frac{\bar{\varepsilon}_i}{\psi}. \tag{14}$$

Din datele experimentale comunicate de diferiți autori rezultă următoarele valori medii de calcul pentru ψ, în funcție de tipul armăturii, respectiv de proprietățile de aderență ale acesteia:

armătură postîntinsă...... $\psi \approx 1{,}0$,

armătură preîntinsă ...... $\psi \approx 0{,}5$.

3. CALCULUL ÎN STAREA LIMITĂ DE REZISTENȚĂ A SECȚIUNILOR ELEMENTELOR DE BETON PRECOMPRIMAT SOLICITATE LA ÎNCOVOIERE

3.1. ANALIZA FACTORILOR CARE INFLUENȚEAZĂ COMPORTAREA ÎN STAREA LIMITĂ DE REZISTENȚĂ A SECȚIUNILOR ELEMENTELOR DE BETON PRECOMPRIMAT SOLICITATE LA ÎNCOVOIERE

3.1.1. Analiza efectuată în cadrul capitolului 2 a permis delimitarea domeniului de valori ale parametrilor hotărîtori pentru comportarea secțiunilor de beton precomprimat în starea limită de rezistență. În cele ce urmează, se studiază influența relativă a acestor parametri, pentru a preciza astfel domeniul posibil de aplicare al unor relații simplificate de calcul.

Analiza s-a efectuat pentru secțiuni dreptunghiulare, sau T la care axa neutră cade în placă, cazul cel mai frecvent întîlnit în practică.

Notațiile și relațiile de calcul sînt cele stabilite la punctul 1.2.4.

3.1.2. În figurile 8, 9 și 10 s-a reprezentat variația efortului unitar din armătura pretensionată $m_p = \sigma_l/\sigma_r$, a poziției axei neutre $\xi = x/h_0$ și a momentului capabil $m_r = M_r/bh_0^2R_i$ în starea limită de rezistență, în funcție de caracteristica de armare

$$\alpha_p = \frac{A_p}{bh_0}\,\frac{\sigma_r}{R_i}, \qquad (15)$$

pentru diferite valori ale gradului de precomprimare ($\beta = \bar{\sigma}_0/\sigma_r = 0{,}4 \div 0{,}8$) și ale deformației specifice limită la compresiune din încovoiere a betonului ($\bar{\varepsilon}_i = 0{,}002 \div 0{,}004$).

S-a considerat armătură din SBP I, $\omega = 0{,}7$ și $\gamma = 0{,}4$.

Deoarece gradul de precomprimare este cuprins în general între 0,50 și 0,65, influența variației acestui parametru devine practic neglijabilă. Ca urmare, se poate efectua calculul secțiunilor precomprimate cu relații în care gradul de precomprimare intră cu valori medii, ținînd seama numai de variația lui $\bar{\varepsilon}_i$.

Lipsa precomprimării reduce în mod substanțial capacitatea portantă a elementului. De asemenea, nu este recomandabilă coborîrea gradului de precomprimare sub 0,4.

3.1.3. În figura 11 s-a reprezentat variația lui m_p, ξ și m_r funcție de α_p pentru betoane caracterizate prin valori $\omega = 0{,}6 \div 1{,}0$ și valori γ corespunzătoare.

S-a considerat armătură din SBP I, $\beta = 0{,}6$ și $\bar{\varepsilon}_i = 0{,}002$.

Deși variația lui ω influențează în mare măsură valorile m_p și ξ, influența asupra valorilor m_r este relativ redusă deoarece creșterea lui ω este parțial compensată de creșterea concomitentă a lui γ. Pentru intervalul practic de variație al coeficientului ω — între 0,6 și 0,8 — se poate deci elabora o relație de calcul unică.

3.1.4. În figura 12 s-a reprezentat variația lui m_p, ξ și m_r funcție de α_p pentru cazul armăturilor din SBP I și SBP II.

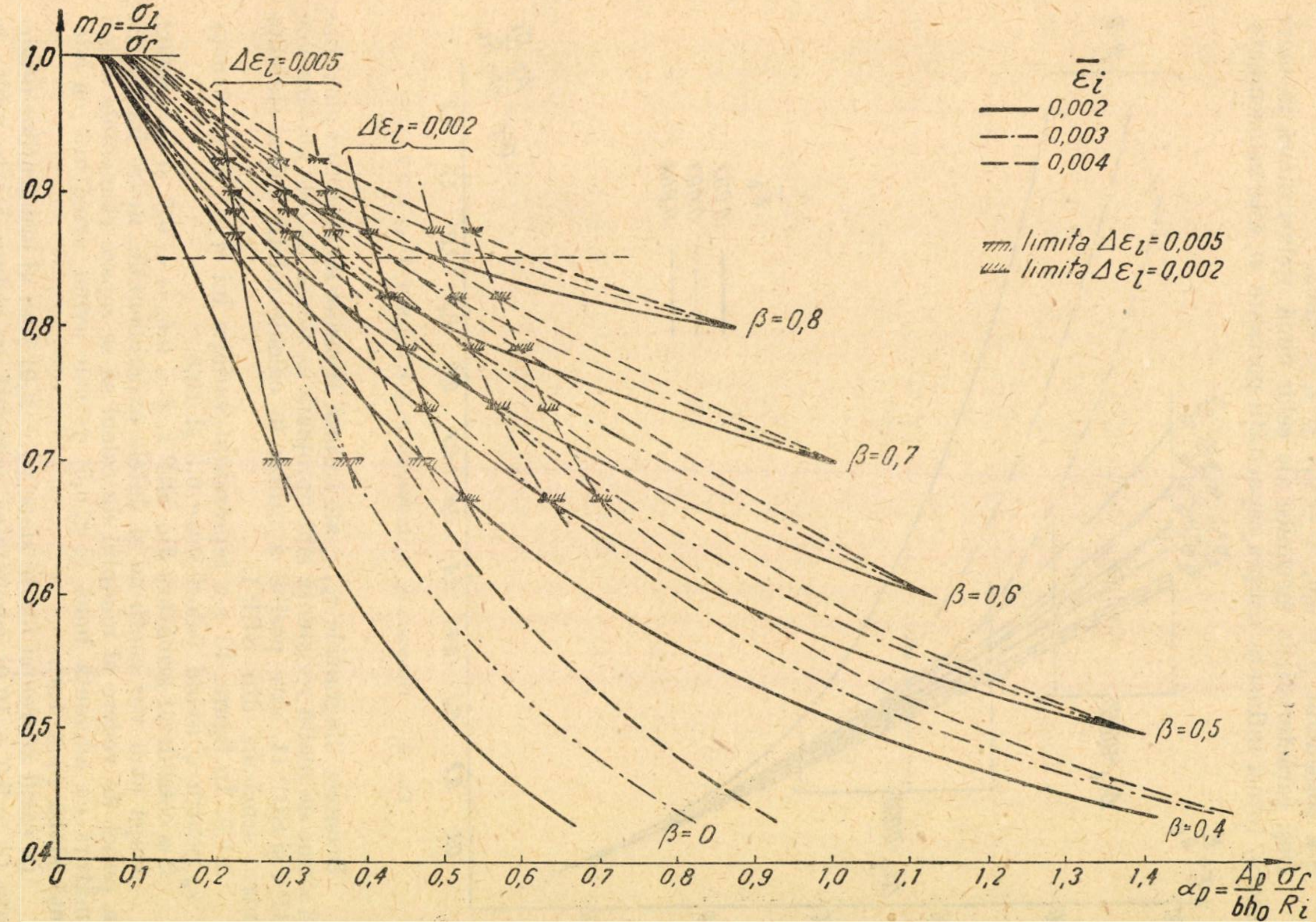


Fig. 8. — Diagrame m_p, α_p în funcție de β și $\bar{\varepsilon}_i$; SBP I: $\omega = 0{,}7$.

S-a considerat $\beta = 0{,}6$, $\omega = 0{,}7$ şi $\bar{\varepsilon}_i = 0{,}002$.

Deşi caracteristicile mecanice ale celor două oţeluri diferă în mare măsură, totuşi influenţa asupra capacităţii portante m_r este neînsemnată.

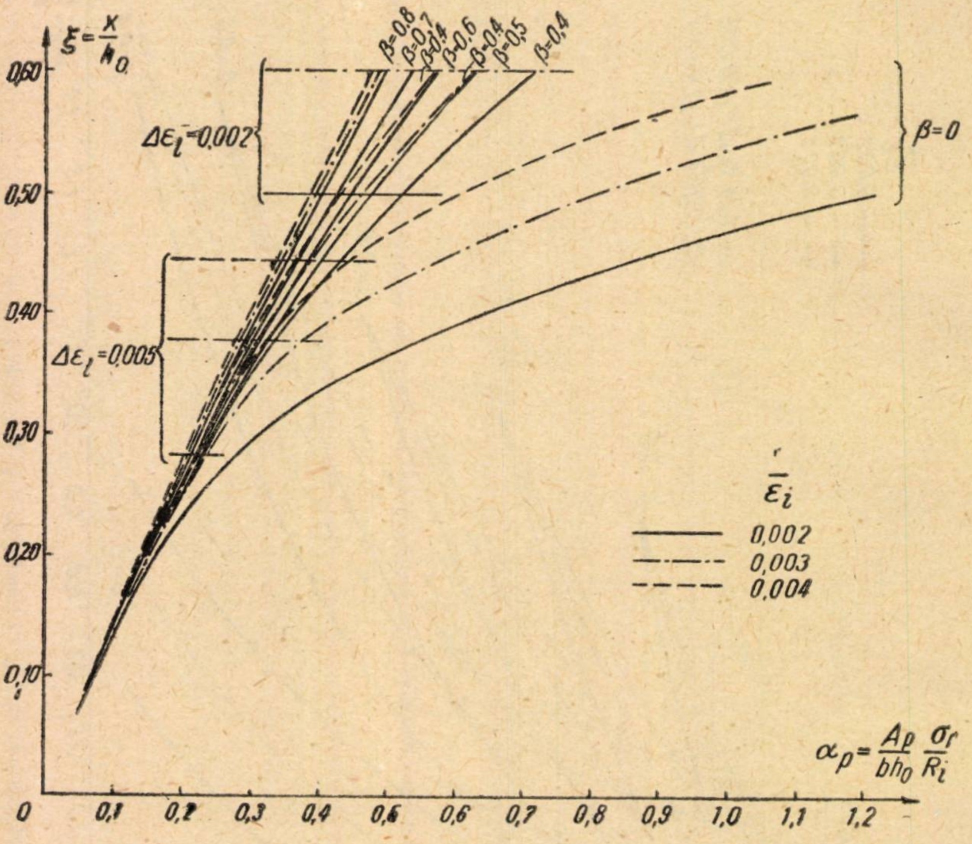


Fig. 9. — Diagrame ξ, α_p în funcţie de β şi $\bar{\varepsilon}_i$; SBP I : $\omega = 0{,}7$.

Deoarece diagramele σ_p, ε_p ale tuturor tipurilor de armături alcătuite din sîrme de înaltă rezistenţă sînt apropiate ca formă de cele ale sîrmelor SBP I şi SBP II, este posibil a utiliza în calcule relaţii unice, stabilite pentru armături din SBP I.

3.1.5. În figura 13 s-a reprezentat variaţia lui m_p, ξ şi m_r funcţie de α_p pentru ψ avînd valori între 0,5 şi 10,0.

S-a considerat armătură din SBP I, $\beta = 0{,}6$, $\omega = 0{,}7$ şi $\bar{\varepsilon}_i = 0{,}002$.

După cum vor confirma şi datele experimentale, apare indicat ca din punct de vedere al modului de calcul să se separe elementele avînd armătură cu aderenţă bună ($\psi \leqslant 0{,}5$) de cele avînd armătură cu aderenţă slabă ($\psi \geqslant 1{,}0$).

În cazul aderenţei foarte slabe ($\psi = 2{,}0$) sau al armăturilor neaderente ($\psi = 5{,}0 \div 10{,}0$) capacitatea portantă se reduce foarte mult; în

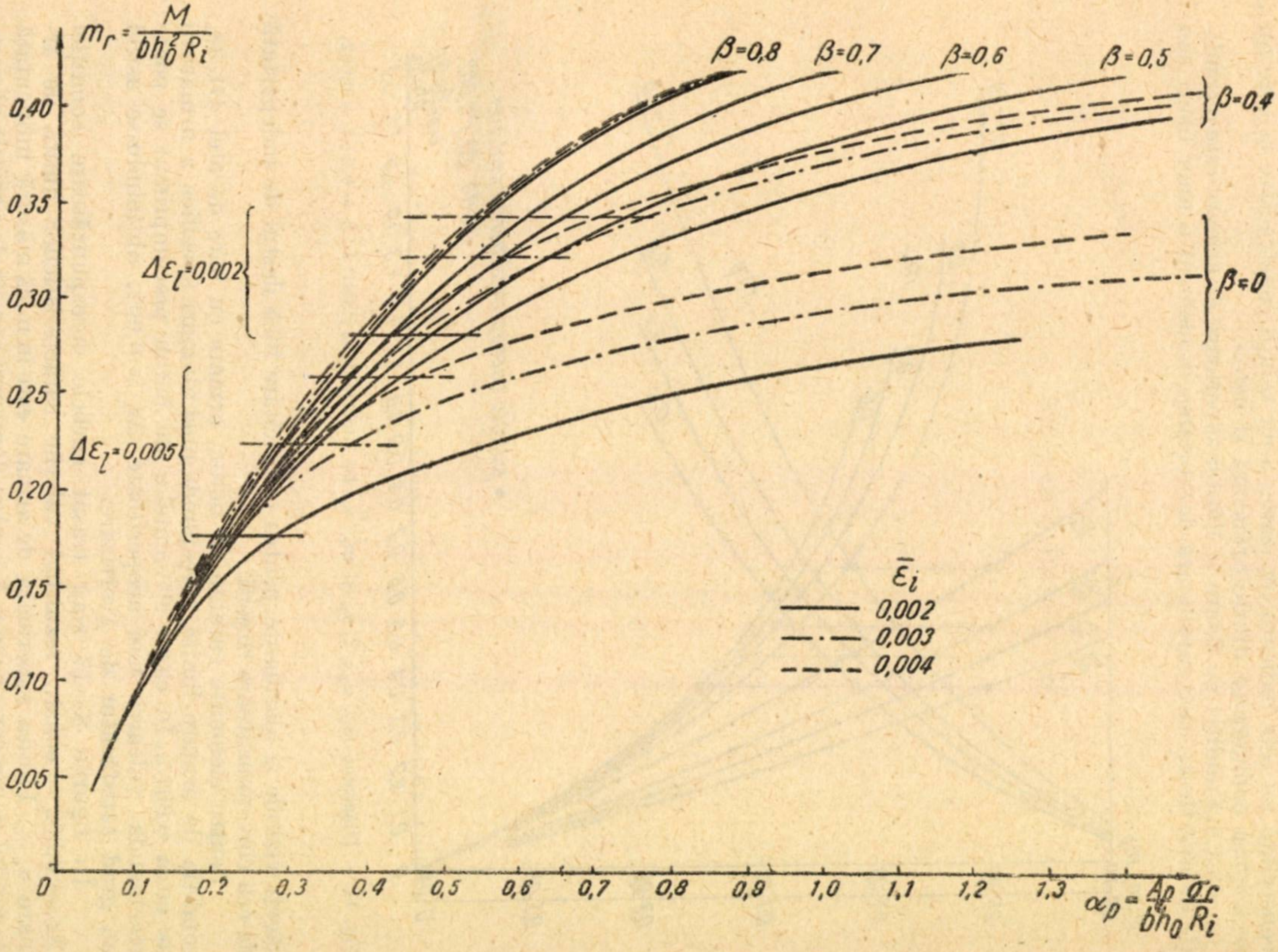


Fig. 10. — Diagrame m_r, α_p în funcție de β și $\bar{\varepsilon}_i$; SBP I: $\omega = 0,7$.

consecință nu este indicată utilizarea unor soluții constructive la care nu se asigură conlucrarea dintre armătură și beton.

3.1.6. Condiția de fixare a limitei superioare de armare este o condiție de avertizare care garantează dezvoltarea în element a unor fisuri sau săgeți vizibile și alarmante pentru o solicitare încă destul de îndepărtată de cea corespunzătoare ruperii.

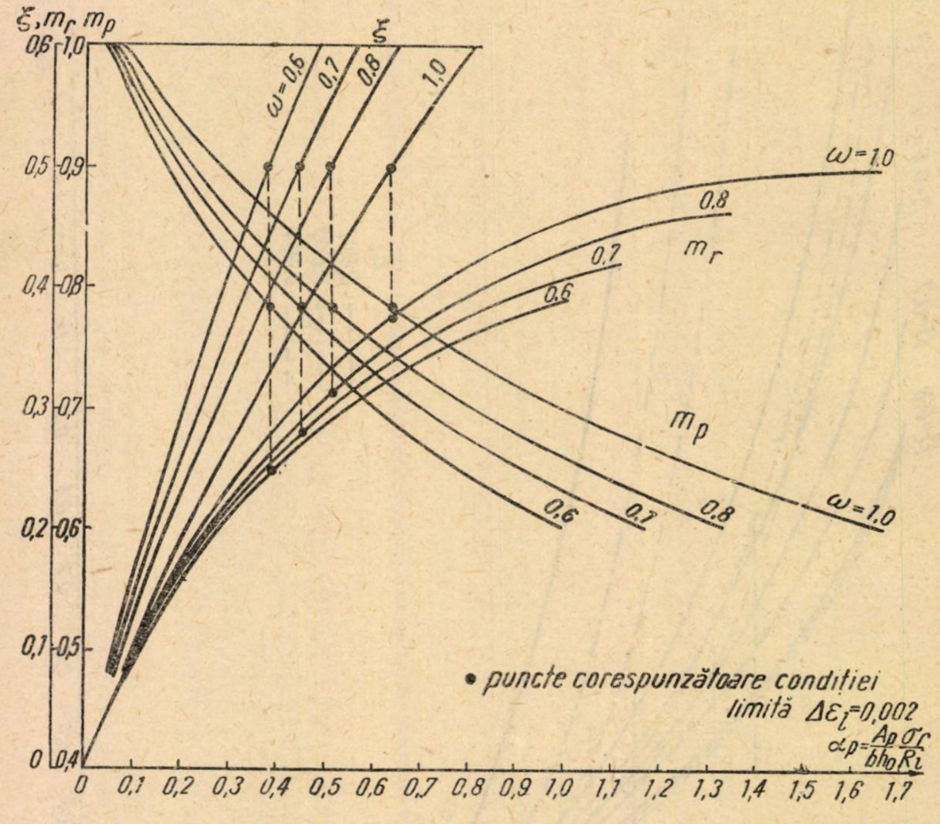


Fig. 11. — Diagrame m_p, α_p ; ξ, α_p și m_r, α_p în funcție de ω ; SBP I : $\beta = 0,6$; $\bar{\varepsilon}_i = 0,002$.

Pentru elemente curente de beton, armate cu bare de oțel OL 38, condiția de armare limită corespunde unei alungiri specifice a armăturii de circa 0,0015. În cazul elementelor de beton precomprimat se poate recomanda valoarea mai acoperitoare $\Delta\varepsilon_i \geqslant 0,002$, obținîndu-se astfel un grad satisfăcător de avertizare.

În figurile 8—13 s-au trasat curbele corespunzătoare condiției $\Delta\varepsilon_l = 0,002 =$ const., rezultînd valorile caracteristicilor limită de armare $\alpha_{p\,\mathrm{lim}}$. Limita superioară de armare este în mică măsură influențată de gradul de precomprimare β pentru domeniul curent de variație al acestuia și crește o dată cu deformația specifică limită $\bar{\varepsilon}_i$.

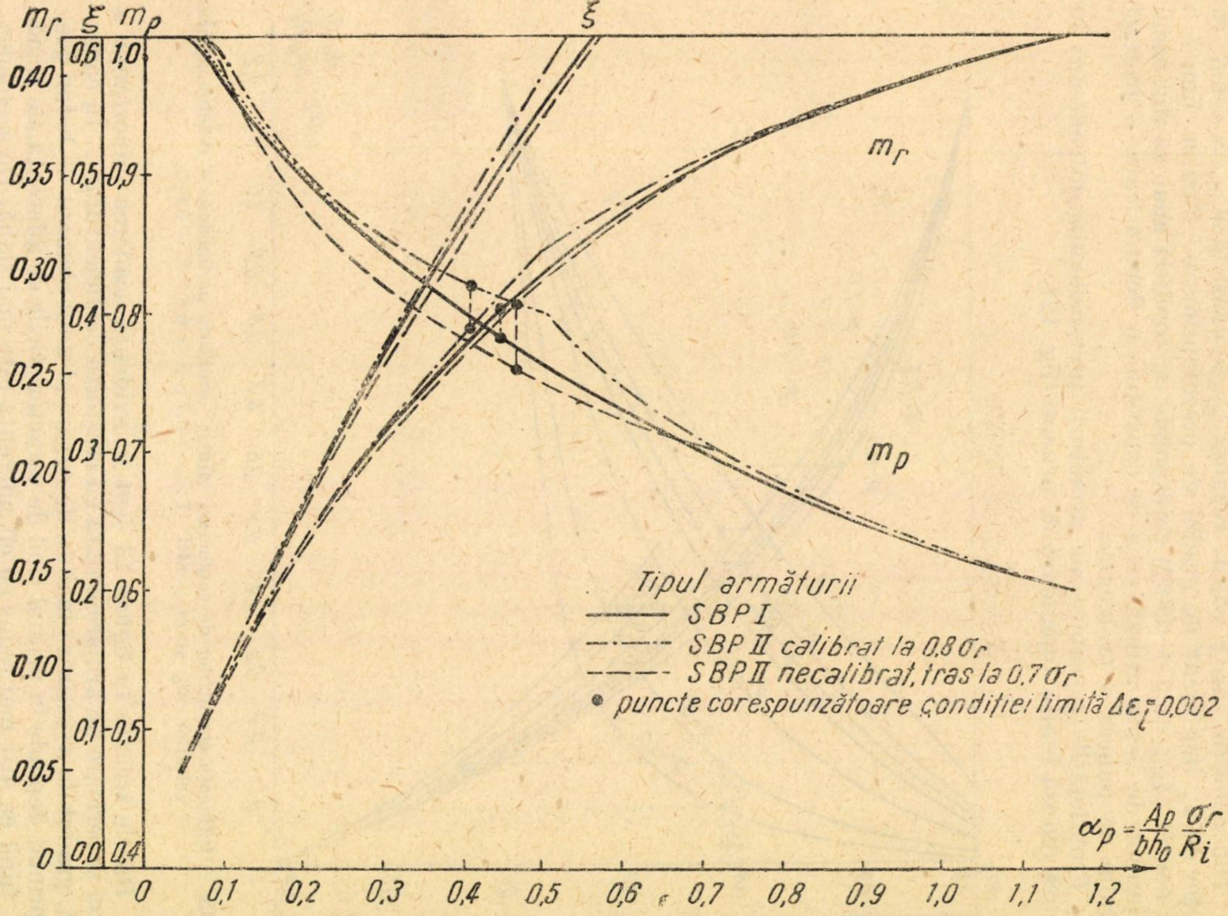


Fig. 12. — Influența caracteristicilor mecanice ale armăturii pretensionate asupra valorilor m_p, ξ și m_r; $\omega = 0{,}7$; $\beta = 0{,}6$; $\bar{\varepsilon}_i = 0{,}002$.

Din condiția $\Delta\varepsilon_i$ = const. rezultă $\xi_{\lim}$ = const. și $m_{r\,\lim}$ = const. în funcție de $\bar{\varepsilon}_i$, indiferent de gradul de precomprimare. Poziția limită a axei neutre ($\xi_{\lim}=0{,}5 \div 0{,}667$) corespunde cu condiția analogă din cazul secțiunilor de beton armat, ceea ce constituie o demonstrație a justeței modului de punere a problemei.

Proprietățile mecanice ale armăturii pretensionate influențează în măsură redusă limita superioară de armare (fig. 12).

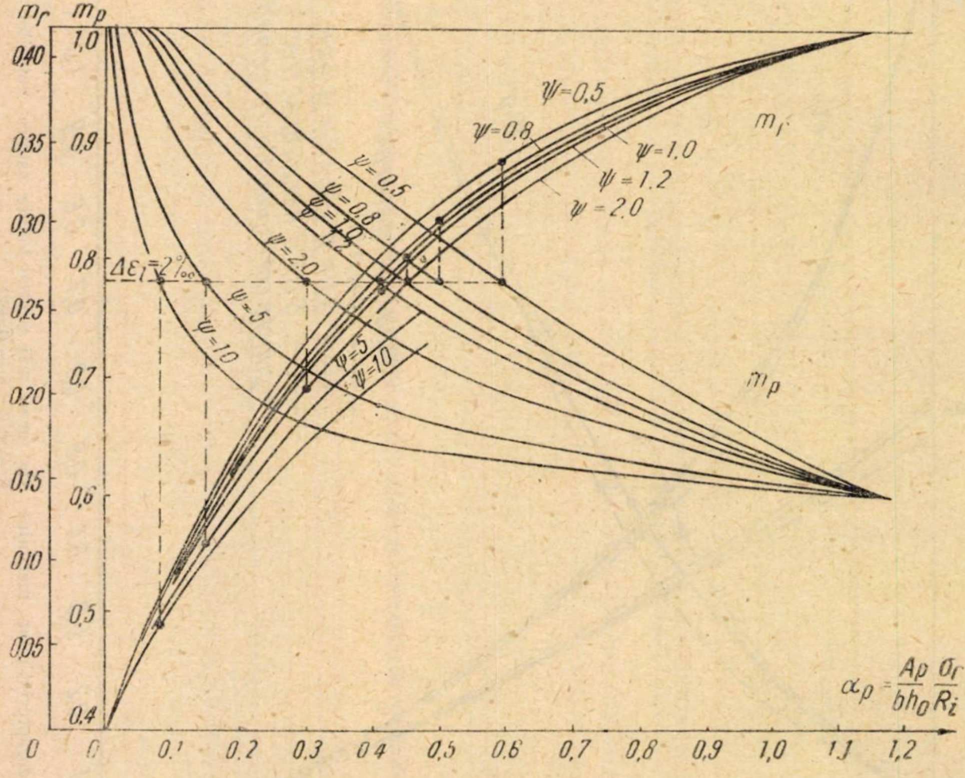


Fig. 13. — Influența condițiilor de conlucrare dintre armătura pretensionată și beton asupra valorilor m_p și m_r; SBP I : $\omega = 0{,}7$; $\beta = 0{,}6$; $\bar{\varepsilon}_i = 0{,}002$.

Datele trecute în figura 13 scot în evidență scăderea importantă a limitei superioare de armare o dată cu creșterea coeficientului ψ. În consecință, gradul de avertizare înainte de rupere al unui element de beton precomprimat depinde în primul rînd de caracteristicile de aderență ale armăturii, fiind cu atît mai redus cu cît aderența este mai slabă. De asemenea, rezultă că se poate admite în principiu procente mai mari de armare la elemente cu armătură preîntinsă decît la elemente cu armătură postîntinsă.

Drept criteriu practic de limitare a procentului de armare, pentru calculele curente de proiectare a secțiunilor se recomandă utilizarea condiției mai comode $\xi_{\lim}$ = const. în loc de $\Delta\varepsilon_i \geqslant 0{,}002$.

3.1.7. O dată cu depășirea unui anumit grad de deformație structura devine practic neexploatabilă; în consecință unii autori [8] consideră necesară limitarea momentului de calcul pe baza unei condiții de deformație limită. În acest scop se propune condiția $\Delta\varepsilon_l = 0{,}005$, ceea ce corespunde la circa 5 fisuri deschise cu cîte 1 mm pe metru liniar de element. Condiția s-a reprezentat în figurile 8–10.

Condiția de mai sus nu ține însă seama de efectul favorabil al unui grad ridicat de avertizare din punct de vedere al siguranței reale în exploatare. Într-adevăr, cu cît este mai mare gradul de avertizare al unei construcții, cu atît este mai mică probabilitatea de a se realiza încărcarea maximă.

De acest aspect favorabil se poate ține seama în mod indirect prin neglijarea diferenței (de altfel în general destul de redusă) dintre momentul de rupere și momentul calculat pe baza condiției $\Delta\varepsilon_l = 0{,}005$.

3.2. COMPARAȚIA DINTRE REZULTATELE TEORETICE ȘI DATELE EXPERIMENTALE

3.2.1. Pentru a verifica corespondența cu realitatea a concluziilor teoretice stabilite la paragraful 3.1, s-au interpretat datele experimentale comunicate în literatura de specialitate, precum și cele obținute de autor și de alți cercetători în cadrul INCERC.

Elementele experimentale au fost în general de secțiune dreptunghiulară; unele date se referă și la secțiuni T sau I. Armătura pretensionată a fost în toate cazurile alcătuită din sîrme de oțel de înaltă rezistență.

S-au analizat 169 elemente cu armătură preîntinsă sub formă de sîrme netede [9]–[15], sîrme împletite [16], sîrme amprentate [12]–[15], [17]–[19], sîrme cu profil periodic [20] și cabluri toronate din 7 sîrme [7], [21], [22].

S-au analizat 135 elemente cu armătură postîntinsă la care s-a asigurat aderența cu betonul după transfer prin injectare, pentru armăturile introduse în canale, și prin betonare, pentru armăturile dispuse în afara secțiunii [32]. Într-un singur caz s-au utilizat cabluri toronate din 7 sîrme [21], iar în rest fascicule din sîrme netede paralele. Canalele s-au executat cu teci din tablă netede [6], [21], [23]–[26], gofrate [12], [15], [16], [27]–[29], de material plastic [15], [27], [28], sau cu pereți de beton obținuți prin extragerea unui furtun de cauciuc sau a unei țevi [15], [27], [28]. La unele elemente nu se dau date asupra modului de realizare al canalelor [5], [30], [31].

Deși comportarea elementelor de beton precomprimat cu armătură postîntinsă neaderentă nu face obiectul prezentei lucrări, s-au analizat și 39 elemente de acest tip [5], [15], [16], [21], [23], [28], [31], [32], pentru a se trage concluzii cu privire la importanța conlucrării dintre armătura pretensionată și beton în starea limită de rezistență.

Date asupra efortului din armătura pretensionată în momentul cedării secțiunii $m_p = \sigma_l/\sigma_r$ se dau numai în cîteva lucrări [12], [13], [15], [17], [19], [21], [27], [28], [30]. În schimb, în lucrările [12] și [30] nu se dau indicații asupra capacității portante a elementelor.

Rezistența la rupere a armăturii pretensionate a fost cuprinsă între 13 100 și 20 000 kg/cm^2, iar diagramele caracteristice σ_p, ε_p se încadrau în general ca formă între cazurile reprezentate de sîrmele SBP II și SBP I. Gradul de precomprimare a variat între valorile extreme 0,37 și 0,83, dar pentru majoritatea elementelor nu s-a depășit intervalul $0{,}5 \div 0{,}6$. Betonul s-a executat cu agregate obișnuite, pietriș de rîu sau piatră spartă, și cu agregat ușor, șist expandat sau keramzit. Dozajul de ciment, raportul a/c și condițiile de îndesare au variat considerabil, obținîndu-se rezistențe R_i cuprinse în intervalul $139 \div 688$ kg/cm^2.

3.2.2. Pentru toate elementele experimentale s-au calculat parametrii fundamentali α_p, m_p, m_r și $\overline{m}_r$, introducînd pentru caracteristicile mecanice ale materialelor (σ_r și R_i) valorile medii experimentale.

Valorile m_p, m_r și $\overline{m}_r$ s-au reprezentat în funcție de α_p în figurile 14, 15 și 16. Valorile $\overline{m}_r$ reprezintă avantajul de a evita gruparea punctelor în cazul procentelor reduse de armare, ceea ce permite o interpretare mai clară în această zonă deosebit de importantă pentru practică.

Pe aceleași figuri s-au reprezentat diagramele teoretice stabilite în următoarele ipoteze:

$$\beta = 0{,}6\,; \quad \bar{\varepsilon}_i/\psi = 0{,}002 \text{ și } 0{,}004\,;$$

$$\beta = 0{,}4\,; \quad \bar{\varepsilon}_i/\psi = 0{,}002 \text{ și } 0{,}004.$$

De asemenea, s-au reprezentat diagramele teoretice de calcul în cazul asimilării secțiunilor de beton precomprimat cu secțiuni de beton armat ($m_p = 1{,}0$) în conformitate cu prevederile normativului CSCAS 63.159—55 [33].

3.2.3. Se remarcă ca un prim aspect răspîndirea foarte largă a punctelor experimentale. Acest lucru este însă pe deplin explicabil dacă se ține seama de modul în care s-au selecționat aceste date și de scopul cercetării.

Obiectivul prezentei lucrări nu constă în verificarea corespondenței cu realitatea a teoriei generale de calcul ca atare. Această verificare a fost deja efectuată cu rezultate satisfăcătoare de unii dintre autorii menționați pentru elementele lor experimentale [6], [7], [11], [12], [13], [17], [18], [19], [27], [28], [32].

Obiectivul prezentei lucrări constă în a stabili în ce măsură teoria generală poate servi ca metodă generală de calcul pentru proiectarea curentă, pornind de la faptul că proiectantul nu poate prevedea prin ipotezele inițiale toate condițiile reale de comportare ale structurii executate și trebuie să aibe certitudinea că abaterile inevitabile dintre proiect și construcția realizată sînt cuprinse în mod rațional în gradul de securitate pe care îl asigură metoda de proiectare folosită.

În acest scop, era indicat a avea la îndemînă un domeniu cît mai larg de variație a valorilor factorilor care influențează starea limită de rezistență, drept care s-au analizat toate datele experimentale disponibile pentru care se indicau caracteristicile materialelor folosite, astfel încît acestea să poată fi interpretate.

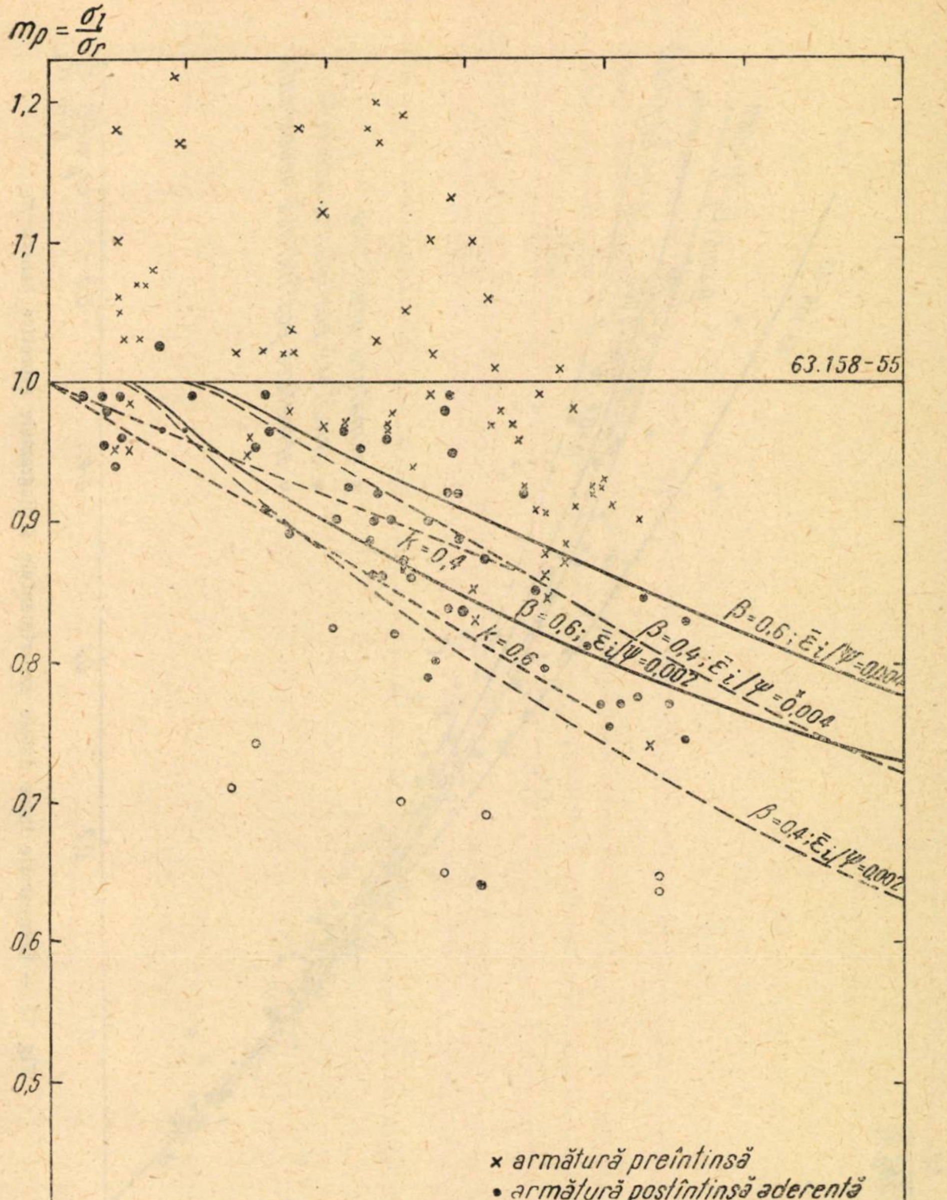


Fig. 14. — Comparație între datele experimentale și diagramele teoretice pentru m_p.

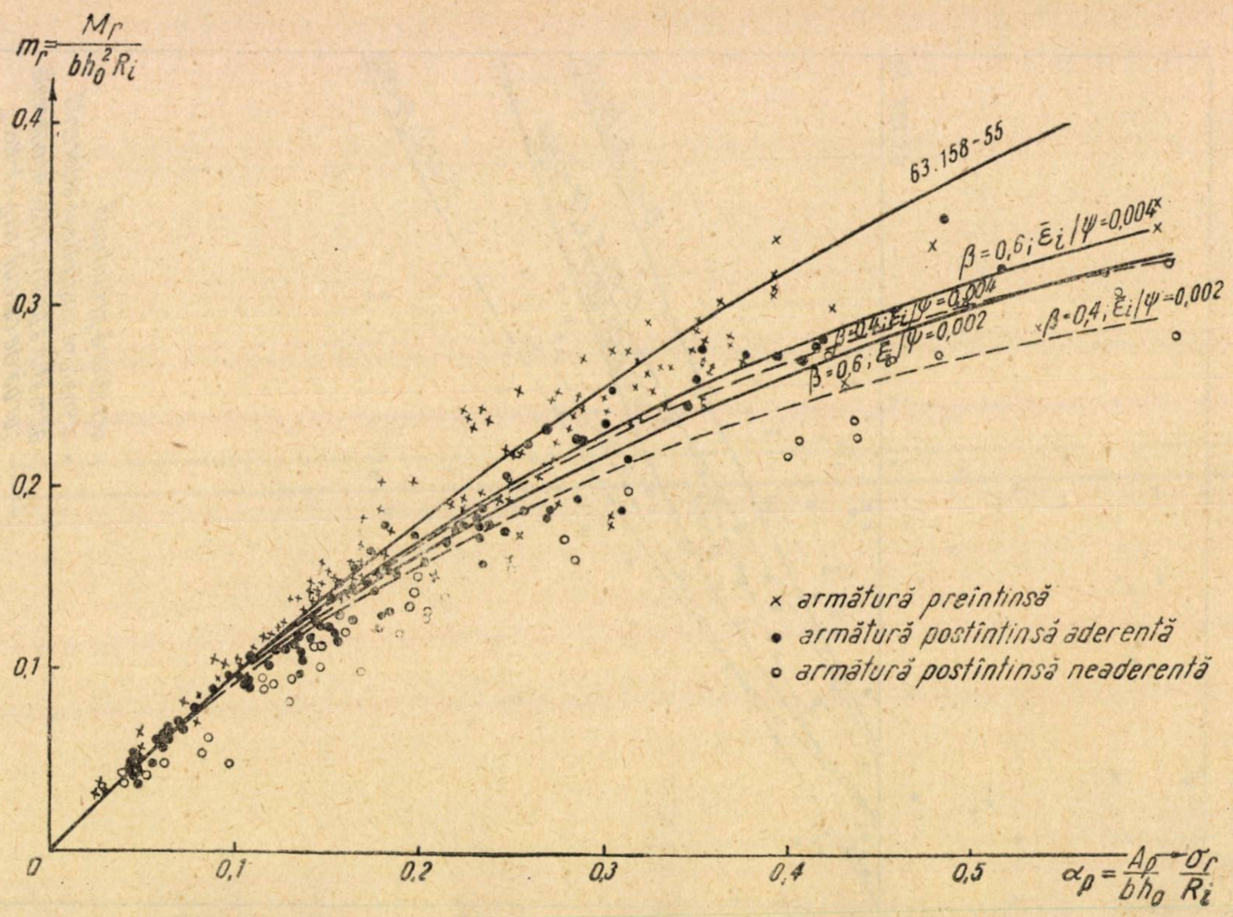


Fig. 15. — Comparaţie între datele experimentale şi diagramele teoretice pentru m_r.

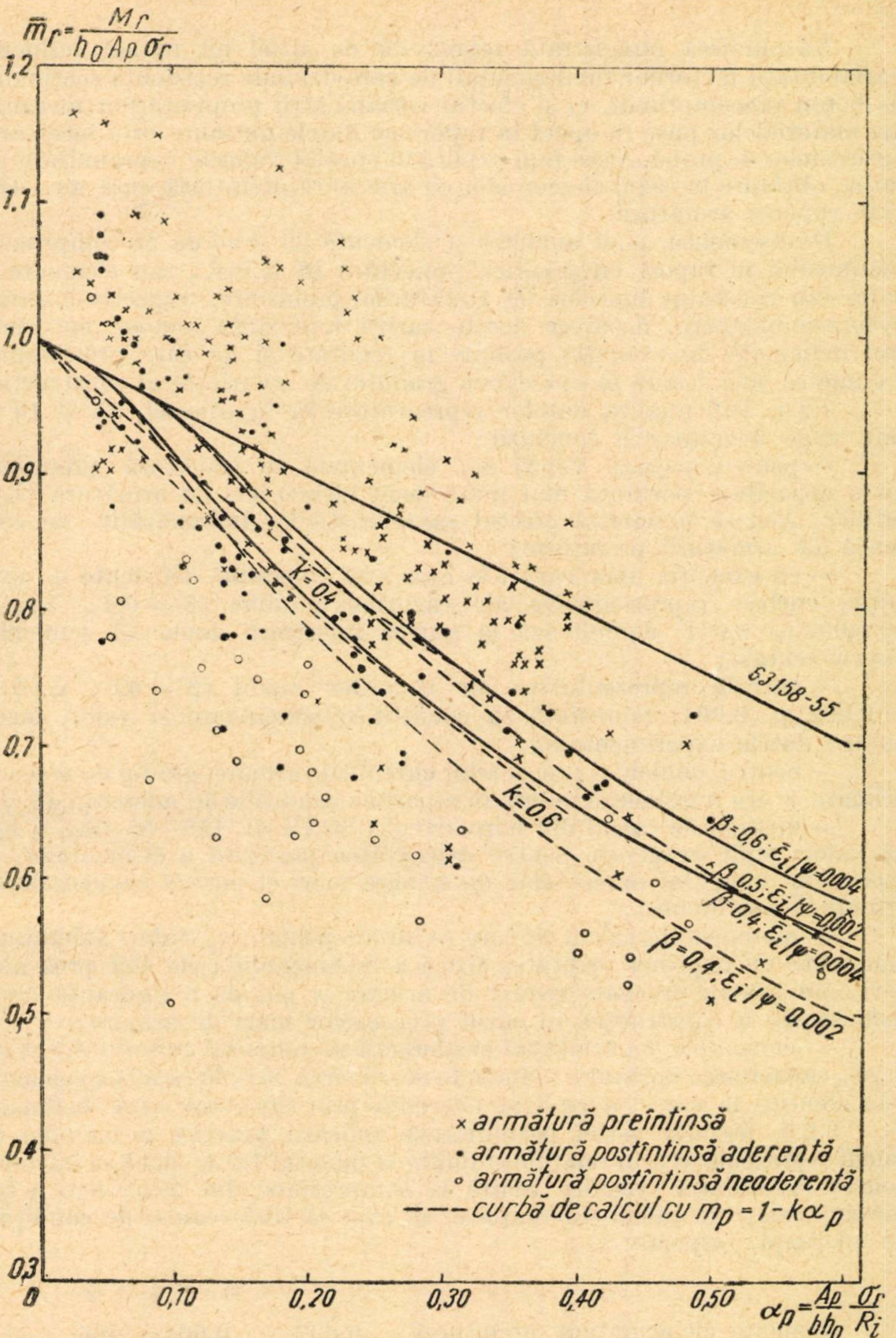


Fig. 16. – Comparație între datele experimentale și diagramele teoretice pentru $\overline{m}_r$.

Răspîndirea înregistrată reprezintă de altfel nu numai influența variabilității factorilor fundamentali de care depinde rezistența secțiunilor de beton precomprimat, ci și efectul variabilității proprietăților mecanice ale materialelor puse în operă în raport cu datele obținute prin încercarea epruvetelor de probă. Acest fapt explică în special valorile supraunitare ale lui m_p obținute în cazul elementelor cu armătură preîntinsă care au cedat prin ruperea armăturii.

De asemenea, s-au analizat și elemente cu grad de precomprimare inadmisibil în raport cu practica proiectării în R.P.R., sau elemente la care s-au constatat lunecări ale armăturilor preîntinse, respectiv injectări necorespunzătoare, deoarece aceste cazuri reprezintă abateri maximale sau deficiențe de execuție posibile în realitate și de care proiectantul trebuie să țină seama în aprecierea gradului de securitate al construcției.

3.2.4. Din analiza datelor reprezentate în figurile 14, 15 și 16 se pot trage următoarele concluzii:

— pentru aceleași valori α_p, elementele cu armătură preîntinsă au o capacitate portantă mai mare decît elementele cu armătură postîntinsă. Aici se manifestă efectul caracteristicilor îmbunătățite de aderență ale armăturii preîntinse;

— cu excepția unor cazuri la care s-au constatat deficiențe de execuție, curbele reprezentative ale cazurilor minime ($\beta = 0{,}4$; $\bar{\varepsilon}_i/\psi = 0{,}002$ și $0{,}004$) delimitează la partea inferioară domeniul punctelor experimentale;

— curbele reprezentative ale cazurilor medii ($\beta = 0{,}6$; $\bar{\varepsilon}_i/\psi = 0{,}002$ și $0{,}004$) reprezintă în condiții satisfăcătoare și valori medii pentru datele experimentale;

— pentru domeniul procentelor curente de armare, gradul de precomprimare β are o influență redusă în raport cu condițiile de aderență ($\bar{\varepsilon}_i/\psi$);

— metoda de calcul din normativul CSCAS 63. 159—55 ($m_p = 1{,}0$) dă valori mult exagerate pentru capacitatea portantă a elementelor, în special în domeniul procentelor de armare mari și pentru elementele cu armătură postîntinsă;

— metodele de calcul în care se admit pentru m_p valori subunitare constante nu exprimă realitatea fizică a fenomenului; ele sînt prea acoperitoare pentru procente reduse de armare și pot da o siguranță nesatisfăcătoare a construcției în cazul procentelor mari de armare;

— elementele cu armătură neaderentă se comportă cu totul dezavantajos, capacitatea portantă reducîndu-se cu circa 20% în raport cu elementele identice la care s-a realizat aderența prin injectare sau betonare.

3.2.5. Rezultă astfel posibilitatea aplicării practice a metodei de calcul reprezentate prin relațiile stabilite la punctul 1.2.4, dacă se introduc pentru deformația specifică limită la compresiune din încovoiere a betonului valori de calcul diferențiate, $\bar{\varepsilon}_i^c$, care să țină seama de condițiile de aderență, respectiv:

	$\bar{\varepsilon}_i^n$	$\bar{\varepsilon}_i^c = \bar{\varepsilon}_i^n/\psi$	ψ
elemente cu armătură preîntinsă	0,002	0,004	0,5
elemente cu armătură postîntinsă	0,002	0,002	1,0

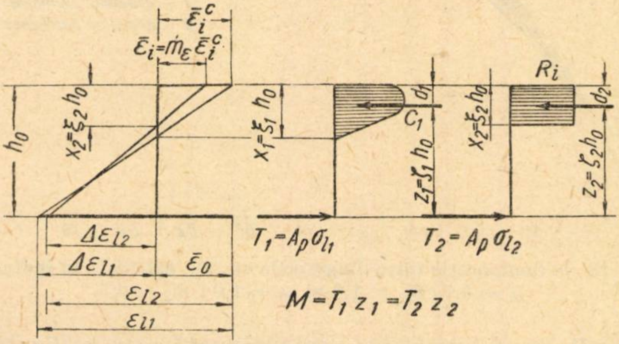
Aceste valori sînt în concordanță cu datele experimentale analizate la punctele 2.2.5 și 2.2.6.

3.3. SIMPLIFICĂRI ALE METODEI DE CALCUL

3.3.1. În proiectarea la stările limită nu se operează cu caracteristicile mecanice ale materialelor din secțiune, ci cu mărimi convenționale care reprezintă variabilitatea statistică a acestora. În consecință, este logic a se admite și pentru calcule ipoteze simplificatoare cu caracter relativ convențional, cu condiția ca rezultatul final care interesează, valoarea momentului capabil, să fie comparabil.

3.3.2. Simplificarea practică cea mai importantă se obține înlocuind distribuția reală a eforturilor unitare din betonul zonei comprimate cu o distribuție dreptunghiulară ($\omega = 1{,}0$; $\gamma = 0{,}5$).

Pentru a nu se schimba valoarea momentului capabil, se corectează poziția axei neutre de calcul prin modificarea deformației specifice limită la compresiune din încovoiere a betonului, $\bar{\varepsilon}_i^c$, care se afectează de un coeficient al condițiilor de lucru m_ε (fig. 17).



$\bar{\varepsilon}_i^c$
$\bar{\varepsilon}_i = m_\varepsilon \bar{\varepsilon}_i^c$
h_0
$x_2 = \xi_2 h_0$
$x_1 = \xi_1 h_0$
d_1
C_1
$z_1 = \zeta_1 h_0$
R_i
$x_2 = \xi_2 h_0$
d_2
$z_2 = \zeta_2 h_0$
$\Delta\varepsilon_{l2}$
$\Delta\varepsilon_{l1}$
$\bar{\varepsilon}_0$
ε_{l2}
ε_{l1}
$T_1 = A_p \sigma_{l1}$
$T_2 = A_p \sigma_{l2}$
$M = T_1 z_1 = T_2 z_2$

Fig. 17. — Înlocuirea distribuției reale a eforturilor unitare din betonul zonei comprimat cu o distribuție dreptunghiulară.

Calculul se efectuează după relațiile stabilite la punctul 1.2.4, deformația specifică limită la compresiune din încovoiere luîndu-se cu valoarea convențională de calcul $\bar{\varepsilon}_i$

$$\bar{\varepsilon}_i = m_\varepsilon \bar{\varepsilon}_i^c. \tag{16}$$

În figura 18 s-a reprezentat comparația valorilor m_r calculate cu $\omega = 0{,}7$; $m_\varepsilon = 1{,}0$ și $\omega = 1{,}0$; $m_\varepsilon = 0{,}5$, pentru elemente cu armătură preîntinsă sau postîntinsă, în cazul valorilor limită ale gradului de precomprimare $\beta = 0{,}4$; $\beta = 0{,}7$. Abaterea dintre metoda simplificată de calcul propusă și metoda exactă variază între -4% și $+7\%$.

În consecință, se pot folosi pentru $\bar{\varepsilon}_i$ următoarele valori convenționale de calcul :

elemente cu armătura preîntinsă... $\bar{\varepsilon}_i = 0{,}002$;
elemente cu armătura postîntinsă... $\bar{\varepsilon}_i = 0{,}001$.

3.3.3. S-a arătat la punctul 1.2.5 că problema fundamentală constă în exprimarea analitică simplificată a curbelor teoretice de variație ale coeficientului m_p, respectiv

$$m_p = f(\alpha_p). \qquad (17)$$

Domeniul rațional de utilizare al betonului precomprimat este limitat la valori nu prea mari ale înălțimii zonei comprimate, deoarece altfel scade mult m_p și armătura pretensionată este utilizată numai cu o fracțiune redusă a capacității sale. În consecință, s-a considerat indicat ca intervalul valorilor α_p pentru care se scrie relația (17) să fie limitat de condiția $\xi \leqslant 0,3$.

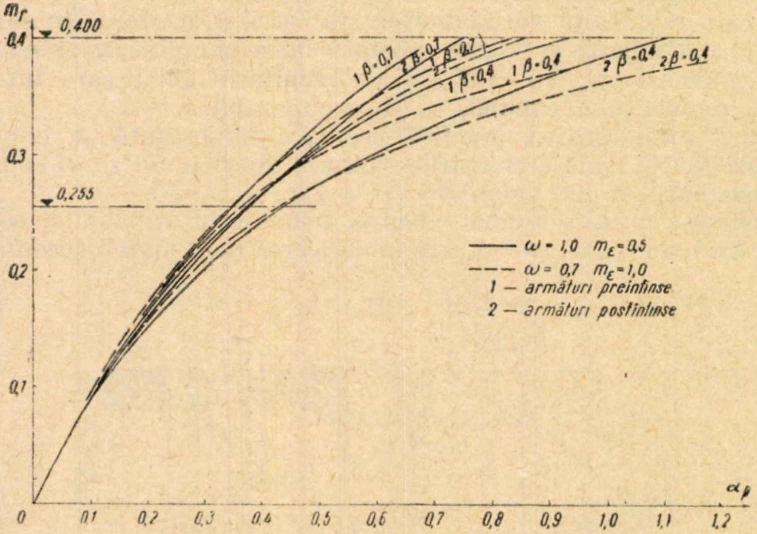


Fig. 18. — Comparație între diagramele m_r, α_p calculate în ipotezele : $\omega = 0,7$; $m_\varepsilon = 1,0$ și $\omega = 1,0$; $m_\varepsilon = 0,5$.

Cea mai indicată simplificare a curbelor teoretice se obține prin înlocuirea lor cu segmente de dreaptă

$$m_p = 1 - k\,\alpha_p \qquad (18)$$

și în consecință

$$m_r = \xi(1 - 0,5\,\xi) = m_p\,\alpha_p\,(1 - 0,5\;m_p\,\alpha_p), \qquad (19)$$

$$\overline{m}_r = m_p\,(1 - 0,5\,m_p\,\alpha_p) = \frac{m_r}{\alpha_p}. \qquad (20)$$

Coeficientul k depinde de condițiile de aderență ale armăturii. Calculele comparative au arătat că se obține corespondența optimă pentru următoarele valori :

elemente cu armătura preîntinsă... $k = 0,40$;
elemente cu armătura postîntinsă... $k = 0,60$.

În figurile 14 și 16 s-au trasat curbele reprezentative ale relațiilor (18) și (20). Abaterea față de curbele teoretice corespunzătoare nu depășește — 3,4% respectiv + 4,5%.

Pentru a se putea utiliza relațiile simplificatoare de calcul (18) — (20) elementele trebuie să satisfacă însă următoarele condiții :

a. elementul este de secțiune dreptunghiulară, secțiune T cu talpă în zona întinsă, secțiune T cu talpă în zona comprimată, secțiune I sau orice altă secțiune reductibilă la unul dintre tipurile enumerate ;

b. armătura pretensionată are rezistența la rupere σ_r mai mare de 10 000 kg/cm² ;

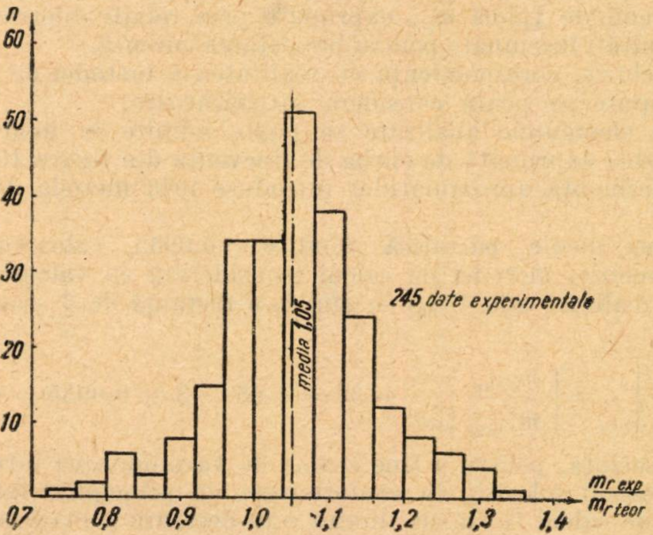


Fig. 19. — Curba de frecvență a raportului $m_{r\,\mathrm{exp}}/m_{r\,\mathrm{teor}}$ pentru 245 date experimentale.

c. armătura pretensionată din zona întinsă este repartizată pe mai puțin de 30% din înălțimea grinzii și poate fi considerată în consecință concentrată în centrul ei de greutate ;

d. efortul unitar de calcul în armătura pretensionată din zona întinsă este cuprins între (0,4 ÷ 0,7) σ_r ;

e. înălțimea zonei comprimate x este mai mică decît 0,3 h_0.

Dacă una dintre aceste condiții nu este satisfăcută, calculul trebuie făcut ținînd seama de condiția de compatibilitate a deformațiilor, în conformitate cu prevederile punctului 3.3.2.

3.3.4. Pentru aprecierea gradului de precizie al metodei simplificate de calcul propuse, s-a calculat pentru toate punctele experimentale raportul $m_{r\,\mathrm{exp}}/m_{r\,\mathrm{teor}}$. În figura 19 s-a reprezentat curba de frecvență obținută. Curba este destul de simetrică, astfel încît distribuția se poate considera de tip normal.

Media valorilor pentru 154 elemente cu armătura preîntinsă este 1,065, iar pentru 91 elemente cu armătură postîntinsă este 1,02. În total, pentru toate cele 245 elemente de beton precomprimat media este 1,05.

Ar părea că valorile de calcul sînt prea acoperitoare pentru cazul elementelor cu armătură preîntinsă, neglijîndu-se faptul că în cele mai multe cazuri cedarea are loc prin ruperea armăturii. Din acest punct de vedere trebuie însă ţinut seama de tendinţa modernă de extindere pe scară cît mai largă a armăturilor de secţiune mare, avînd deci caracteristici de aderenţă mai slabe decît sîrmele utilizate la majoritatea elementelor experimentale analizate, ceea ce va reduce în consecinţă şi cazurile de cedare prin ruperea armăturilor. De asemenea, existenţa a două domenii de valori m_p, exprimate prin relaţii diferite de calcul, ar crea dificultăţi însemnate pentru proiectarea curentă.

În concluzie, corespondenţa cu realitatea a metodei de calcul simplificate propuse se poate considera satisfăcătoare.

Pentru elementele analizate se poate admite în mod acoperitor că variabilitatea exprimată de curba de frecvenţă din figura 19 reprezintă în special influenţa aproximaţiilor introduse prin metoda de calcul folosită.

Abaterea medie pătratică fiind $\sigma = 0{,}0935$, valoarea probabilă minimă a preciziei metodei de calcul (considerată ca valoare cu probabilitatea de realizare sub $1^0/_{00}$) se află la o distanţă de 3 standarde faţă de medie

$$\left[\frac{m_{r\,\text{exp}}}{m_{r\,\text{teor}}}\right]_{\text{min}} = \left[\frac{m_{r\,\text{exp}}}{m_{r\,\text{teor}}}\right]_{\text{med}} - 3\sigma = 1{,}05 - 3 \times 0{,}0935 = 0{,}77.$$

În consecinţă, pentru a ţine seama de variabilitatea introdusă prin metoda de calcul folosită, în conformitate cu principiile fundamentale ale metodei de calcul la stările limită este necesară prevederea unui coeficient al condiţiilor de lucru ale elementului, care să afecteze rezultatele calculului teoretic. Pe baza rezultatelor analizei statistice de mai sus se poate lua $m = 0{,}8$.

4. CONSIDERENTE FINALE

4.1. Principiul de bază al metodelor elaborate pentru calculul în starea limită de rezistenţă al elementelor de beton precomprimat solicitate la încovoiere, introducerea unui coeficient variabil al condiţiilor de lucru ale armăturii, poate constitui un principiu general de calcul pentru elementele de beton armat.

Într-adevăr, pentru orice element de beton armat este necesară scrierea condiţiei de compatibilitate a deformaţiior în secţiune pentru determinarea stării de eforturi în starea limită de rezistenţă.

Elementele armate cu oţeluri avînd palier de curgere reprezintă doar un caz particular, în care existenţa unei soluţii unice pentru un domeniu larg de deformaţii specifice ale armăturii permite scrierea directă a efortului unitar din armătură, respectiv $m_p = 1{,}0$.

În cazul general al elementelor armate cu oțeluri fără palier de curgere, nu se mai poate însă evita introducerea unei relații suplimentare, pe lîngă cele două de echilibru, pentru determinarea efortului unitar din armătură.

Utilizarea coeficientului variabil al condițiilor de lucru ale armăturii asigură în acest caz o rezolvare practică a problemei, în limitele preciziei necesare pentru necesitățile calculelor curente de proiectare.

4.2. Metodele generale de calcul în starea limită de rezistență au fost particularizate pentru nevoile proiectării curente, ținînd seama de faptul că în acest caz caracteristicile mecanice ale materialelor se introduc în relațiile de calcul nu cu valorile lor medii (normate) ci cu nişte valori limită de calcul, la fixarea cărora se ține seama de răspîndirea statistică în jurul mediei [34], [35].

Sub această formă, metodele de calcul au fost cuprinse în redactarea definitivă a normativului pentru calculul și alcătuirea constructivă a elementelor de construcții din beton, beton armat și beton precomprimat.

Primită la redacție la 7 noiembrie 1962

THE ULTIMATE STRENGTH DESIGN IN FLEXURE OF PRESTRESSED CONCRETE MEMBERS

ABSTRACT

The aim of the paper is to establish practical methods for the ultimate strength design of prestressed concrete members, stressed in bending.

The main difference versus the case of ordinary reinforced concrete members, reinforced with mild steel bars, lies in the need to evaluate the ultimate stress, σ_l, in the prestressed reinforcement. Therefore the use of the concept of the "working conditions factor", m_p, for the prestressed reinforcement from the tensioned zone, is proposed as given by the relation

$$m_p = \frac{\sigma_l}{\sigma_r}$$

σ_r being the tensile strength of the prestressed reinforcement.

The factor $m_p \leqslant 1.0$ has a clear physical meaning, expressing the degree of efficiency of the prestressed reinforcement at the ultimate strength of the member. To evaluate m_p the use of a strain compatibility condition is needed, which is provided by equalizing the average values of strains in the reinforcement and in the corresponding concrete fibre.

The effect of various parameters influencing m_p and the ultimate strength of prestressed concrete members is studied. Hence the need to consider the bond conditions of the prestressed reinforcement in design

is resulting. Therefore, the use of distinct design values for the ultimate compressive strain of concrete, $\bar{\varepsilon}_i^c$, is recommended, as follows:

$$\bar{\varepsilon}_i^c = 0.004 \text{ — for pretensioning;}$$

$$\bar{\varepsilon}_i^c = 0.002 \text{ — for posttensioning.}$$

Further simplifications may be obtained by substituting a rectangular stress block instead of the actual stress block in the compressed zone. In order not to alter the design value of the ultimate moment, the use of the following conventional design values for the ultimate compressive strain of concrete, $\bar{\varepsilon}_i$, is needed:

$$\bar{\varepsilon}_i = 0.002 \text{ — for pretensioning}$$

$$\bar{\varepsilon}_i = 0.001 \text{ — for posttensioning.}$$

For usual members of rectangular, T, $\perp$ or I — shape, prestressed with high — strength wires or strands stressed up to $(0.4 \div 0.7)\, \sigma_r$ and with a depth of the compressed zone of less than 0.3 h_0, the possibility of a direct expression for m_p, without reference to a strain compatibility condition, is proved

$$m_p = 1 - k\, \alpha_p$$

where

$$\alpha_p = \frac{A_p}{bh_0}\, \frac{\sigma_r}{R_i}$$

$k = 0.40$ for pretensioning
$k = 0.60$ for posttensioning.

Applying this equation to 245 members tested by the author and others, an average value of 1.05 with a standard deviation of 0.0935 resulted for the ratio $M_{r\,\text{exp}}/M_{r\,\text{theor}}$. Since this variability primarily expresses the influence of the approximations involved in the proposed method, a working condition factor of $m = 0.8$ should be provided in design formulas.

Therefore the ultimate strength design of prestressed concrete members is recommended by means of the well-known relations for ordinary reinforced concrete members, adjusted through the correction factor m_p. which ensures a satisfactory agreement with experimental data.

BIBLIOGRAFIE

1. C. A. Дмитриев, *Уточнение формул определения предварительного напряжения бетона и арматуры. Бетон и железобетон*, 2 (1956).
2. В. И. Мурашев, *Трещиноустойчивость, жесткость и прочность железобетона.* Москва, 1950.
3. N. Nicolau, C. Ionescu, G. Enescu, G. Stănculescu, C. Damian, G. Şerbănescu. *Introducere în teoria betonului.* Bucureşti, 1957, **II**.
4. F. W. Gifford, *The Design of Simply Supported Prestressed Concrete Beams for Ultimate Loads.* Proceedings of the Institution of Civil Engineers, Part III, aprilie, 1954.

5. A. H. Mattock, L. B. Kriz, E. Hognestad, *Rectangular Concrete Stress Distribution in Ultimate Strength Design.* J. Amer. Concrete Inst., **32**, *8* (1961).
6. D. F. Billet, J. H. Appleton, *Flexural Strength of Prestressed Concrete Beams.* J. Amer. Concrete Inst., **25**, *10* (1954).
7. К. В. Михайлов, Цай Шао-Хуай, *Исследование семипроволочных прядей как арматуры предварительно напряженных железобетонных конструкций. Исследования по теории железобетона.* Труды НИИЖБ, **17** (1960).
8. H. Rüsch, H. Kupfer, *Bemessung von Spannbeton.* Betonkalender, 1958.
9. C. Cestelli-Guidi, *Cemento armato precompresso.* Milano, 1956.
10. Е. Т. Рац, *Испытание струнобетонных балок в шести-семилетнем возрасте.* Труды IV Всесоюзной Конференции по Бетону и Железобетонным Конструкциям, Москва, 1949.
11. Д. Думитреску, *Некоторые вопросы прочности предварительно напряженных железобетонных изгибаемых элементов.* Диссертация. Ленинград, 1953.
12. S. C. C. Bate, *Some Experimental Data Relating to the Design of Prestressed Concrete.* Civil Engineering and Public Works Review, **53**, 627—629 (1958).
13. — *The Relative Merits of Plain and Deformed Wires in Prestressed Concrete Beams under Static and Repeated Loading.* Proceedings of the Institution of Civil Engineers, **10** (1958).
14. К. В. Михайлов, *Предварительно напряженные струнобетонные балки, армированные проволокой различной пластичности.* Бетон и железобетон, *8* (1960).
15. E. W. Bennet, J. D. O'Keefe, *The Influence of Bond on the Flexural Strength of Prestressed Concrete Beams.* Civil Engineering and Public Works Review, **53** 630 (1958).
16. I. Mihai, *Încercări pe pane de acoperiș.* Studiu, ISCS, 1957.
17. J. N. Prentis, *The Effect of Varying the Pretension and Area of Reinforcement on the Ultimate Bending Strength of Concrete Beams.* Magazine of Concrete Research, **7**, 21 (1955).
18. S. Revesz, *Factors Governing the Ultimate Bending Moment of Normal Reinforced and Prestressed Concrete Beams, with Reference to a Plastic Theory.* Magazine of Concrete Research, **5**, 13 (1953).
19. А. В. Ашралов, А. Н., Добродеев, *Керамзитобетон в несущих конструкциях.* Ташкент, 1959.
20. I. Lyse, *Tests of Full-Sized Prestressed Concrete Bridge Beams.* J. Amer. Concrete Inst. **29**, *11* (1958).
21. I. R. Janney, E. Hognestad, D. McHenry, *Ultimate Flexural Strength of Prestressed and Conventionally Reinforced Concrete Beams.* J. Amer. Concrete Inst., **27**, *6* (1956).
22. S. M. Nordby, W. J. Venuti, *Fatigue and Static Tests of Steel Strand Prestressed Beams of Expanded Shale Concrete and Conventional Concrete.* J. Amer. Concrete Inst., **29**, *2* (1957).
23. G. Magnel, *Prestressed Concrete.* New York, London, 1954.
24. Gh. Călin, *Încercarea unei grinzi din beton pretensionat de 9,90 m deschidere la poduri de cale ferată.* Industria construcţiilor şi a materialelor de construcţii, *5* (1955).
25. Е. А. Троицкий, *Исследование под воздействием пульсирующей нагрузки работы предварительно напряженных железобетонных конструкций с мощными арматурными пучками.* Вопросы проектирования и строительства железобетонных мостов, Труды, **3** (1951).
26. — *Экспериментальные исследования работы опытной мостовой балки и эксплуатируемых мостовых пролетных строений из предварительно напряженного железобетона с мощными арматурными пучками.* Исследования железобетонных мостовых конструкций, Труды ЦНИИС, **19** (1956).
27. F. Damian, M. Tannenbaum, *Grinzi pentru căi de rulare din beton precomprimat.* Studiu, INCERC, 1961.
28. N. Găină, M. Tannenbaum, *Folosirea tecilor din material plastic la lucrările din beton precomprimat.* Studiu, INCERC, 1961.
29. Y. Guyon, *Béton précontraint.* Paris, 1953, **I**.

30. F. R. KHAN, A. J. BROWN, *Load Test of 120-ft Precast, Prestressed Bridge Girder.* J. Amer. Concrete Inst., **30**, *1* (1958).

31. A. PÀEZ, *Test to Destruction, by Bending, of Prestressed Concrete Beams.* 3rd Congress FIP, Berlin, 1958, Session I, paper 4.

32. I. MIHAI, *Comportarea sub sarcină a construcţiilor cu pereţi subţiri asamblate prin precomprimare.* Referat, ICML, 1958.

33. * * * *Normativ pentru proiectarea elementelor din beton precomprimat la construcţii civile şi industriale.* CSCAS 63.159–55.

34. M. TANNENBAUM, *Unele probleme în legătură cu calculul la starea limită de rezistenţă a elementului de beton precomprimat.* St. cerc. mec. apl., **XII**, *5* (1961).

35. D. DUMITRESCU, M. TANNENBAUM, *Les principes des normes roumaines concernant le béton précontraint.* Comunicare la Congresul IV F.I.P., Roma-Napoli, iunie, 1962.

PRINCIPIILE CALCULULUI PLASTIC AL CADRELOR DE BETON ARMAT

DE

VALERIU PETCU [1]

539.3 : 691.3

Studiile experimentale efectuate pînă în prezent, privind comportarea cadrelor simple de beton armat sub acţiunea încărcărilor, au pus în evidenţă, fără excepţie, capacitatea acestor structuri de a redistribui plastic eforturile pînă la transformarea lor în mecanisme.

Această proprietate remarcabilă, stabilită în condiţii diferite de distribuţie a materialelor (betonului şi armăturii) de-a lungul elementelor componente ale cadrelor şi pentru scheme de încărcare suficient de variate, a determinat orientarea cercetărilor teoretice pe calea elaborării unor metode adecvate de calcul plastic care să reflecte, cu suficientă exactitate, particularităţile comportării plastice a acestor structuri.

Printre lucrările recente efectuate în acest domeniu se remarcă în mod deosebit cele ale lui A. L. L. Baker [1], [2] şi ale prof. M. D. Hangan [3], [4].

Studiul ce urmează, avînd la bază cercetările anterioare ale autorului, are scopul de a prezenta particularităţile comportării plastice a cadrelor de beton armat, precum şi principiile şi metodele de calcul plastic ale acestei categorii de structuri.

Examinarea problemelor ce apar precum şi interpretarea rezultatelor obţinute au la bază metoda de calcul la stări limită.

I. PARTICULARITĂŢILE COMPORTĂRII PLASTICE A CADRELOR DE BETON ARMAT

În teoria plastică simplă, ruperea structurilor static nedeterminate poate fi consecinţa formării unuia din următoarele tipuri de mecanisme elementare :

— mecanism de grindă,

---

[1] Institutul de cercetări în construcţii şi economia construcţiilor (INCERC), Bucureşti.

— mecanism de etaj,
— mecanism de nod,
sau a unei combinații a acestora.

În cazul cadrelor de beton armat trebuie luate în considerație numai primele două tipuri de mecanisme elementare, întrucît ruperea plastică datorită formării unui mecanism de nod poate fi evitată totdeauna prin măsuri constructive simple.

Elementul comun al mecanismelor de rupere plastică este articulația plastică : toate mecanismele apar ca rezultat al procesului de formare succesivă a articulațiilor plastice, pe măsura creșterii intensității încărcărilor.

Deosebirea dintre mecanismele de grindă și cele de etaj constă în tipurile de articulații plastice pe care le conțin.

În timp ce mecanismele de grindă conțin numai articulații plastice la încovoiere simplă (fig. 1, *a*), mecanismele de etaj cuprind, pe lîngă acestea, și articulații plastice la compresiune excentrică (fig. 1, *b*), sau numai articulații plastice la compresiune excentrică (fig. 1, *c*).

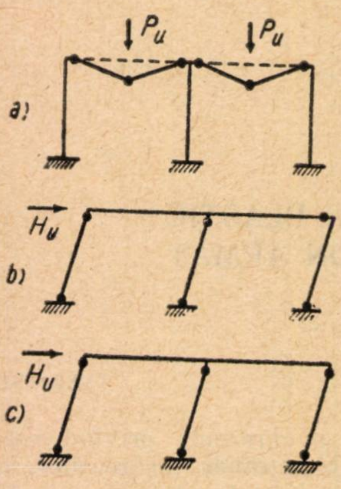


Fig. 1

1. CARACTERISTICILE ARTICULAȚIEI PLASTICE ÎN BETONUL ARMAT

Prin definiție, *articulația plastică în betonul armat este regiunea unei bare sau a unei plăci, în lungul căreia efortul unitar în armătura întinsă este mai mare sau cel puțin egal cu limita de curgere.*

Observații. 1. Secțiunea din această regiune, în care se atinge pentru prima dată limita de curgere în armătura întinsă, se numește *secțiune critică.*

2. Lungimea acestei regiuni variază în funcție de gradul de solicitare a barei sau plăcii.

Valoarea maximă a acestei lungimi, numită *lungimea articulației plastice*, corespunde momentului în care are loc distrugerea secțiunii critice.

3. Momentul încovoietor din secțiunea critică, corespunzător atingerii limitei de curgere în armătura întinsă a acestei secțiuni, se numește *moment plastic.*

4. Momentul încovoietor din secțiunea critică, corespunzător distrugerii acesteia, se numește *moment de rupere.*

Caracteristica principală a articulației plastice este capacitatea ei de rotire.

În cazul betonului armat, *capacitatea de rotire a articulației plastice este mărimea rotirii acesteia din momentul atingerii limitei de curgere în toată armătura întinsă a secțiunii critice pînă în momentul distrugerii acestei secțiuni.*

Studiul capacității de rotire a articulației plastice la încovoiere, precum și influența acestei caracteristici asupra calculului plastic al structurilor încovoiate de beton armat, au făcut obiectul unui studiu anterior [5].

În ceea ce privește capacitatea de rotire a articulației plastice la compresiune excentrică, se face, în prealabil, observația că în cazul structurilor de beton armat compresiunea excentrică se prezintă sub două aspecte și anume:

- compresiunea excentrică cu excentricitate mică, la care ruperea se caracterizează prin distrugerea zonei comprimate a betonului din secțiunea cea mai solicitată, înainte de atingerea limitei de curgere la întindere în armătură;
- compresiunea excentrică cu excentricitate mare, la care ruperea secțiunii celei mai solicitate este precedată de atingerea limitei de curgere în armătura întinsă.

Primul caz de compresiune excentrică nu permite formarea de articulații plastice în sensul definiției date mai sus.

Din această cauză, prin articulație plastică la compresiune excentrică se înțelege întotdeauna articulația plastică produsă de compresiunea excentrică cu excentricitate mare.

Capacitatea de rotire a acestui tip de articulație este diminuată de următorii factori:

— de mărimea forței de compresiune în momentul formării articulației plastice;

— de creșterea forței de compresiune după formarea articulației plastice, pe măsura creșterii intensității sarcinilor.

Pînă în prezent, caracteristicile articulației plastice la compresiune excentrică nu au făcut încă obiectul unor studii sistematice.

Întrucît rezultatele studiilor experimentale joacă un rol hotărîtor în soluționarea problemelor calculului plastic al structurilor de beton armat, este necesar ca cercetarea proprietăților articulației plastice la compresiune excentrică să devină una din preocupările principale ale lucrărilor experimentale ulterioare.

2. RIGIDITATEA ELEMENTELOR DE BETON ARMAT

În prezent, calculul static al structurilor de beton armat, atît în domeniul elastic cît și în domeniul plastic, se face pe baza admiterii unor rigidități convenționale ale elementelor componente, rezultate din considerarea betonului armat ca fiind un material elastic, omogen și izotrop.

În realitate, rigiditatea elementelor de beton armat este influențată de o serie de factori, printre care se disting: neomogenitatea betonului armat, fisurarea betonului întins, comportarea elasto-plastică a betonului comprimat și gradul de aderență dintre beton și armătură.

Față de distribuția de eforturi obținută pe baza rigidităților convenționale, factorii de mai sus determină o redistribuire a eforturilor atît în domeniul elastic cît și în domeniul plastic.

Din punctul de vedere al calculului plastic, acest fenomen influențează asupra momentului de apariție a fiecărei articulații plastice. Din această cauză, rotirile reale ale articulațiilor plastice, corespunzătoare transformării structurii în mecanism, diferă într-o măsură mai mică sau mai mare, în plus sau în minus, față de cele deduse pe cale teoretică. Această situație prezintă o deosebită importanță în special în cazurile în care mecanismele de rupere cuprind articulații plastice la compresiune excentrică, datorită capacității limitate de rotire a acestora în raport cu capacitatea de rotire a articulațiilor plastice la încovoiere.

II. PRINCIPIILE CALCULULUI PLASTIC AL CADRELOR DE BETON ARMAT

1. TIPUL ÎNCĂRCĂRILOR

După natura lor, încărcările care solicită construcțiile se împart în două categorii : încărcări statice și încărcări dinamice.

În mod obișnuit, încărcările statice care solicită cadrele de beton armat cuprind sarcinile permanente și utile aplicate static și acțiunile produse de temperatură, de contracție și de tasarea reazemelor.

Din categoria încărcărilor dinamice fac parte : sarcinile utile, verticale sau orizontale, aplicate dinamic, precum și acțiunile vîntului și cutremurului.

Studiile experimentale efectuate pînă în prezent, referitoare la comportarea plastică a cadrelor de beton armat, au avut în vedere exclusiv sarcinile aplicate static.

Pe de altă parte, experiențele efectuate în vederea stabilirii particularităților comportării elementelor de beton armat la acțiunea sarcinilor dinamice au pus în evidență fenomene nefavorabile din punctul de vedere al calculului plastic.

Avîndu-se în vedere necesitatea realizării unor structuri rezistente și durabile, din analiza stadiului actual al cunoștințelor privind comportarea elementelor și structurilor de beton armat la acțiunea sarcinilor statice și dinamice, rezultă următoarea concluzie fundamentală :

Soluția plastică a unui cadru de beton armat trebuie să asigure comportarea elastică a acestuia pentru toate schemele posibile de încărcare rezultate din combinarea sarcinilor utile de exploatare (*normate*), *aplicate static, cu toate celelalte tipuri de încărcări luate cu valorile lor de calcul.*

Adoptarea acestei concluzii ca principiu al calculului plastic al cadrelor de beton armat reduce comportarea plastică a acestor structuri exclusiv la aceea corespunzătoare variației sarcinilor utile, aplicate static, de la valorile lor normate la valorile lor de calcul.

2. TIPUL ARTICULAŢIILOR PLASTICE

Particularitățile comportării plastice a cadrelor de beton armat conduc la următoarele concluzii privind articulația plastică la compresiune excentrică :

— pentru același procent de armare al armăturii întinse, articulația plastică la compresiune excentrică are, în general, o capacitate de rotire mai mică decît cea a articulației plastice la încovoiere, datorită forței axiale de compresiune;

— în mod obișnuit, încărcările orizontale, cărora le corespund articulațiile plastice la compresiune excentrică, se aplică dinamic;

— redistribuția de eforturi produsă de variația rigidității barelor în funcție de intensitatea încărcărilor este, în general, defavorabilă comportării articulației plastice la compresiune excentrică.

La aceste concluzii se mai adaugă și faptul că ruperea locală a unui element comprimat excentric reprezintă, pentru structură, o situație mult mai gravă decît cea care apare în urma ruperii locale a unui element încovoiat.

De asemenea, în multe cazuri cadrele conțin elemente comprimate excentric cu excentricitate mică, de-a lungul cărora nu pot apare articulații plastice.

Ținîndu-se seama de cele de mai sus, rezultă:

Soluția plastică a unui cadru de beton armat trebuie să asigure comportarea elastică a tuturor elementelor comprimate excentric (stîlpilor) pentru toate schemele de încărcare rezultate din toate combinațiile posibile ale tuturor încărcărilor statice și dinamice de calcul.

Adoptarea acestui principiu reduce comportarea plastică a cadrelor de beton armat la aceea rezultată exclusiv din formarea articulațiilor plastice la încovoiere. Ca urmare a acestui fapt, ruperea cadrelor are loc numai prin formarea mecanismelor de grindă.

În consecință, soluțiile acestor structuri vor conține pe de o parte momentele plastice din secțiunile critice ale elementelor încovoiate, iar pe de altă parte momentele elastice maxime și minime ale elementelor comprimate excentric, produse de încărcările de calcul.

Ansamblul format de aceste două categorii de momente se denumește *soluție elasto-plastică.*

O proprietate remarcabilă a acestui principiu este asigurarea îndeplinirii prin exces a ecuației de mecanism de nod, această verificare ne mai fiind necesară în practică.

Cele două principii prezentate mai sus reflectă stadiul actual al studiilor teoretice și experimentale privind comportarea plastică a cadrelor de beton armat. Ele constituie punctul de plecare în aplicarea metodelor calculului plastic la proiectarea acestei categorii de structuri.

Studiile experimentale ulterioare vor arăta măsura în care se poate admite reducerea restricțiilor impuse de aceste principii.

III. METODELE DE CALCUL PLASTIC AL CADRELOR

În calculul plastic al structurilor static nedeterminate de beton armat există două metode generale și anume [6], [7]:

— metoda directă,

— metoda indirectă.

Avîndu-se în vedere principiile enunțate, în cele ce urmează se prezintă particularitățile aplicării acestor metode în cazul cadrelor de beton armat.

1. METODA DIRECTĂ

Metoda directă constă în mărirea momentelor plastice obținute în condițiile transformării structurii în mecanism astfel încît noile momente plastice să asigure satisfacerea limitărilor impuse fiecărei secțiuni critice de condițiile de rupere și de exploatare [6].

În cazul cadrelor de beton armat, la care se admite numai formarea mecanismelor de grindă, aplicarea metodei directe constă în următoarele operații :

— determinarea momentelor elastice maxime și minime produse de încărcările statice și dinamice de calcul, fără luarea în considerație a sarcinilor utile aplicate static;

— determinarea momentelor plastice provenite exclusiv din acțiunea sarcinilor utile aplicate static, efectuată pe baza principiului redistribuției optime [8];

— sumarea momentelor elastice maxime, respectiv minime, produse de încărcările statice și dinamice de calcul, exclusiv sarcinile utile aplicate static, cu momentele plastice optime corespunzătoare sarcinilor utile aplicate static, obținîndu-se în acest mod, momentele plastice totale;

— stabilirea momentelor plastice de calcul prin luarea în considerație a limitărilor impuse de condițiile de rupere și de exploatare [6], [9].

Operațiile de mai sus se referă exclusiv la determinarea momentelor plastice de calcul din secțiunile critice ale elementelor încovoiate ale cadrelor.

Determinarea momentelor încovoietoare maxime și minime din secțiunile de calcul ale elementelor comprimate excentric, a forțelor axiale din aceste elemente și a forțelor tăietoare maxime și minime ale elementelor încovoietoare, ținînd seama de formarea articulațiilor plastice la încovoiere, reprezintă o operație deosebit de laborioasă, întrucît necesită calcule „biografice" pentru fiecare schemă de încărcare în parte.

De aceea, pentru activitatea practică se recomandă ca *determinarea momentelor încovoietoare din secțiunile de calcul ale elementelor comprimate excentric, a forțelor axiale din aceste elemente și a forțelor tăietoare ale elementelor încovoiate să se facă în ipoteza comportării elastice a cadrelor pentru toate schemele de încărcare rezultate din toate combinațiile posibile ale tuturor încărcărilor de calcul.*

Recomandarea acestui procedeu aproximativ se bazează pe faptul că redistribuția de eforturi produsă de diferențele dintre rezultatele obținute în acest mod și cele corespunzătoare luării în considerare a formării articulațiilor plastice la încovoiere sînt neînsemnate și nu periclitează rezistența elementelor comprimate excentric.

Se menționează că forțele tăietoare determinate prin acest procedeu sînt totdeauna mai mari decît cele reale, fapt care conduce la realizarea unei siguranțe suplimentare în ce privește ruperea secțiunilor critice de pe reazemele elementelor încovoiate la acțiunea combinată a momentelor încovoietoare și forțelor tăietoare.

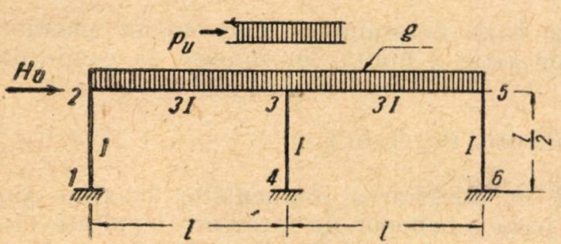


Fig. 2

Pentru ilustrare, în cele ce urmează se prezintă determinarea momentelor plastice totale din secțiunile critice ale elementelor încovoiate ale unui cadru cu două deschideri, solicitat de sarcini verticale uniform distribuite aplicate static și de o sarcină orizontală concentrată provenită din vînt (fig. 2).

Se fac următoarele notații :

g — sarcina permanentă de calcul, uniform distribuită pe metru liniar ;
p_u — sarcina utilă de calcul uniform distribuită pe metru liniar ;
H_u — sarcina concentrată de calcul, dată de vînt ;
$k_u = \frac{p_u}{g}$; $h_u = \frac{H_u}{gl}$;
I — momentul de inerție de referință ;
l — valoarea deschiderilor cadrului ;
M_{ij} — momentul elastic în capătul i al barei i—j ;
M_{pij} — momentul plastic în capătul i al barei i—j ;
M_c — momentul elastic în mijlocul deschiderii grinzilor ;
M_{pc} — momentul plastic în mijlocul deschiderii grinzilor.

Calculul elastic al cadrului, efectuat pentru schemele de încărcare rezultate din combinarea sarcinii permanente de calcul cu sarcina de calcul dată de vînt, conduce la următoarele valori ale momentelor maxime, în valoare absolută, din secțiunile critice ale grinzii *2—3* :

$$\begin{aligned} M_{23} &= (0{,}033 \;\; + 0{,}067\, h_u)\, gl^2, \\ M_{32} &= (0{,}1084 + 0{,}0468\, h_u)\, gl^2, \\ M_c &= (0{,}0542 + 0{,}0101\, h_u)\, gl^2. \end{aligned} \tag{1}$$

Momentele plastice optime corespunzătoare sarcinii utile au valorile :

$$\begin{aligned} M^0_{p23} &= 0{,}0221\; k_u\, gl^2, \\ M^0_{p32} &= 0{,}0627\; k_u gl^2, \\ M^0_{pc} &= 0{,}0403\;\; k_u gl^2. \end{aligned} \tag{2}$$

Momentele plastice totale rezultă din sumarea valorilor date de relațiile (1) și (2) :

$$\begin{aligned} M_{p23} &= (0{,}033 + 0{,}067\ h_u + 0{,}0221\ k_u)\ gl^2, \\ M_{p32} &= (0{,}1084 + 0{,}0468\ h_u + 0{,}0627\ k_u)\ gl^2, \\ M_{pc} &= (0{,}0542 + 0{,}0101\ h_u + 0{,}0403\ k_u)\ gl^2. \end{aligned} \tag{3}$$

Aceste momente stau la baza determinării momentelor plastice de calcul, prin luarea în considerație a limitărilor impuse de condițiile de rupere și de exploatare.

2. METODA INDIRECTĂ

Metoda indirectă constă în micșorarea momentelor maxime (în valoare absolută) stabilite pe baza schemelor de încărcare rezultate din toate combinațiile posibile ale tuturor încărcărilor de calcul, în ipoteza comportării elastice a structurii, astfel încît momentele plastice obținute în acest mod să asigure satisfacerea limitărilor impuse fiecărei secțiuni critice de condițiile de rupere și de exploatare [6].

În cazul cadrelor de beton armat, aplicarea metodei indirecte constă în următoarele operații :

— determinarea momentelor elastice maxime și minime produse de încărcările statice și dinamice de calcul, fără luarea în considerație a sarcinilor utile aplicate static;

— determinarea momentelor elastice maxime (în valoare absolută) produse de sarcinile utile de calcul aplicate static;

— reducerea momentelor elastice maxime produse de sarcinile utile de calcul aplicate static, în măsura permisă de condițiile de rupere și de exploatare ale fiecărei secțiuni critice, precum și de satisfacerea de către momentele reduse a ecuației de echilibru a tuturor elementelor încovoiate sub acțiunea sarcinilor utile de calcul aplicate static;

— determinarea momentelor plastice de calcul din secțiunile critice ale elementelor încovoiate prin sumarea momentelor elastice maxime (în valoare absolută) produse de încărcările statice și dinamice de calcul, exclusiv sarcinile utile aplicate static, cu momentele reduse stabilite pe baza sarcinilor utile de calcul aplicate static.

Pentru exemplificare, în cele ce urmează se prezintă aplicarea metodei indirecte la calculul cadrului din figura 2.

Momentele elastice maxime produse de sarcina permanentă de calcul și de sarcina de calcul dată de vînt sînt date de relațiile (1).

Momentele elastice maxime produse de sarcinile utile de calcul au valorile :

$$\begin{aligned} M_{23} &= 0{,}0382\ k_u gl^2, \\ M_{32} &= 0{,}1084\ k_u gl^2, \\ M_c &= 0{,}0697\ k_u gl^2. \end{aligned} \tag{4}$$

Momentele plastice de calcul au expresiile :

$$\begin{aligned} M_{p23} &= (0{,}033 + 0{,}067\ h_u + 0{,}0382\ \beta_{23}k_u)\ gl^2, \\ M_{p32} &= (0{,}1084 + 0{,}0468\ h_u + 0{,}1084\ \beta_{32}k_u)\ gl^2, \\ M_{pc} &= (0{,}0542 + 0{,}0101\ h_u + 0{,}0697\ \beta_c k_u)\ gl^2, \end{aligned} \tag{5}$$

în care coeficienţii subunitari β_{23}, β_{32} şi β_c se obţin din condiţia ca momentele reduse

$$\begin{aligned} \overline{M}_{23} &= 0{,}0382\ \beta_{23}k_u g l^2, \\ \overline{M}_{32} &= 0{,}1084\ \beta_{32}k_u g l^2, \\ \overline{M}_c &= 0{,}0697\ \beta_c k_u g l^2, \end{aligned} \tag{6}$$

să satisfacă limitările impuse de condiţiile de rupere şi de exploatare ale fiecărei secţiuni critice precum şi ecuaţia de echilibru a grinzii *2—3* sub acţiunea exclusiv a sarcinii utile de calcul.

Primită la redacţie la 24 noiembrie 1962

ПРИНЦИПЫ ПЛАСТИЧЕСКОГО РАСЧЕТА ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ РАМ

РЕЗЮМЕ

В работе изложены два принципа, стоящие в основе пластического расчета железобетонных рам, а именно:

1. *Пластическое решение железобетонной рамы должно обеспечивать его упругое поведение для всех возможных схем нагружения, получаемых из сочетания полезных (нормированных) нагрузок при эксплуатации приложенных статически, со всеми остальными типами нагружений, взятыми со своими расчетными значениями.*

2. *Пластическое решение железобетонной рамы должно обеспечивать упругое поведение всех элементов, внецентрально сжатых, (коллон), для всех схем нагружения получаемых из всех возможных сочетаний всех статических и динамических расчетных нагрузок.*

В последней части работы изложены особенности применения прямого и косвенного методов в пластическом расчете железобетонных рам, результирующих из принятия этих принципов.

BIBLIOGRAFIE

1. A. L. L. BAKER, *The ultimate load theory applied to the design of reinforced and prestressed concrete frames.* Concrete publications Ltd., London, 1956.
2. — *Note for discussion at Monaco.* Comité Européen du Béton, Bulletin d'information, **30** (1961).
3. M. D. HANGAN, *Une méthode de calcul des structures hyperstatiques dans le domaine élasto-plastique.* Rev. Méc. Appl., Acad. R.P.R., **IV**, *4* (1959).
4. — *The order of occurrence and the rotation of plastic hinges in a static structure subjected to a permanent load and a group of proportionally increasing loads.* Rev. Méc. Appl., Acad. R.P.R., **VI**, *2* (1961).

5. V. PETCU, *Articulația plastică în calculul plastic al structurilor de beton armat.* St. cerc. mec. apl., **XIV**, *1* (1963).

6. — *Metodele directă și indirectă în calculul plastic al structurilor de beton armat.* St. cerc. mec. apl., **X II**, *5* (1962).

7. — *Generalizarea metodei indirecte de calcul plastic al structurilor de beton armat*, St. cerc. mec. apl., **XIV**, *2* (1963).

8. — *Un principiu fundamental în proiectarea structurilor static nedeterminate de beton armat în domeniul plastic.* St. cerc. mec. apl., **XII**, *5* (1961).

9. — *Limitări în calculul plastic al grinzilor static nedeterminate de beton armat.* Buletinul INCERC-ISCAS, **III**, *4* (1962).

RELAȚIILE GENERALIZATE ALE METODEI DE RECURENȚĂ A CELOR TREI NECUNOSCUTE, PENTRU STUDIUL SISTEMELOR ELASTICE

DE

M. BLUMENFELD [1]

539.4 : 517.9

1. INTRODUCERE

În lucrările anterioare [1], [2], [3] s-a prezentat rezolvarea unor probleme din rezistența materialelor (calculul deformației barelor drepte, calculul eforturilor unitare în discurile în mișcare de rotație, calculul momentelor încovoietoare în plăci circulare de grosime constantă sau variabilă) printr-o metodă numită „a celor trei necunoscute”. În articolul de față autorul prezintă o generalizare a ecuațiilor metodei propuse care pot fi aplicate — în afara domeniilor arătate mai sus — și la alte probleme, cum ar fi : calculul plăcilor plane simetric încărcate întărite cu nervuri circulare, calculul deformației grinzilor drepte sub sarcini axiale și transversale etc.

Toate acestea pot fi rezolvate printr-o metodă de calcul unitară, deoarece soluția se reduce la integrarea unor ecuații diferențiale cu coeficienți constanți. În cazul cînd elementul studiat are dimensiunile transversale și caracteristicile elastice constante și este supus unei încărcări simple, integrarea ecuațiilor diferențiale nu este legată de dificultăți de ordin matematic. Dificultățile apar atunci cînd elementul studiat are porțiuni cu încărcări diferite, dimensiunile sale transversale au variații continue sau în trepte, sau cînd caracteristicile elastice variază în lungul elementului [2]. Desigur că aceste dificultăți cresc atunci cînd toate elementele sînt variabile (de exemplu, fundul unui piston, considerat ca placă circulară de grosime variabilă, neuniform încălzită). Ele provin din faptul că integrarea ecuațiilor diferențiale trebuie efectuată pe mai multe porțiuni în care mărimile menționate (sarcină, dimensiuni, caracteristici elastice) sînt variabile continuu sau pot fi considerate — într-o primă aproximație — constante[1]). Dacă elementul studiat se împarte în n porțiuni distincte, din integrarea ecuațiilor diferențiale vor apare $2n$ constante de integrare. Determinarea acestor constante de integrare a făcut, încă de mult, obiectul unor studii vaste, care au dus la elaborarea de metode de rezolvare adecvate fiecărei probleme în parte [7], care duc la relații diferite pentru fiecare tip de problemă.

---

[1] Institutul politehnic, București.

[2] De exemplu, în cazul unei încălziri neuniforme.

Metoda celor trei necunoscute este o metodă unitară, bazată pe o singură relație generală, care va fi stabilită mai departe, ce se aplică la fel la toate problemele amintite. Ea se bazează pe împărțirea elementului studiat în grupe de cîte două porțiuni consecutive, pentru care se pot scrie relații de recurență între trei necunoscute consecutive convenabil alese. În aplicații metoda prezintă asemănare cu ,,ecuația celor trei momente'' cu a cărei aplicare inginerii sînt obișnuiți pentru studiul grinzilor continue.

2. RELAȚIA DE RECURENȚĂ A CELOR TREI NECUNOSCUTE

Pentru stabilirea relației de recurență a celor trei necunoscute, se va presupune că integrarea uneia din ecuațiile diferențiale cu coeficienți constanți, care apar la problemele amintite, permite obținerea a două funcții oarecare, ce depind de constantele de integrare. Aceste funcții pot fi : săgeata și unghiul de deformație la grinzile drepte, eforturile unitare radial și circumferențial la discurile în mișcare de rotație, momentele încovoietoare radial și circumferențial la plăcile plane circulare simetric încărcate etc. Funcțiile vor fi de forma :

$$\begin{aligned} \varphi &= A \cdot a(x) + B \cdot b(x) + c(x), \\ \psi &= A \cdot d(x) + B \cdot e(x) + f(x), \end{aligned} \tag{1}$$

unde A și B sînt cele două constante de integrare iar $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$, $d(x)$, $e(x)$ și $f(x)$ sînt funcții continue de x care depind de tipul problemei studiate și care sînt cunoscute.

În cazurile simple, constantele A și B se determină prin două condiții la limită impuse funcțiilor φ și ψ, condiții ce depind de sarcină, mod de rezemare a elementului studiat etc.

În cazul în care elementul studiat are n porțiuni de încărcare, numărul constantelor de integrare este $2n$. De remarcat este faptul că *pe o anumită porțiune de încărcare, în funcțiile φ și ψ intervin aceleași două constante de integrare.*

În figura 1 s-au reprezentat separat două funcții oarecare, φ în figura 1, *a* și ψ în figura 1, *b*. În punctele de trecere de la un interval la cel următor, funcțiile pot avea discontinuități. Astfel, în punctul i funcția φ va avea valorile φ_i^{st} la stînga punctului i și $\varphi_i^{dr} = \varphi_i$ la dreapta; analog ψ_i^{st} și $\psi_i^{dr} = \psi_i$ pentru funcția ψ.

---

[1]) Desigur că aproximația este cu atît mai mică cu cît numărul de porțiuni în care se împarte elementul studiat este mai mare, dar evident că aceasta sporește dificultatea rezolvării problemei.

Se va presupune că între valorile celor două funcții la stînga și la dreapta punctului i există relațiile:

$$\begin{aligned} \varphi_i^{st} = K_1 \varphi_i^{dr} = K_1 \varphi_i, \quad \varphi_{i+1}^{st} = K_4 \varphi_{i+1}^{dr} = K_4 \varphi_{i+1}, \\ \psi_i^{st} = K_2 \psi_i^{dr} + K_3 \varphi_i^{dr} = K_2 \psi_i + K_3 \varphi_i, \end{aligned} \tag{2}$$

unde K_1, K_2 K_3 și K_4 sînt patru constante cunoscute, iar pentru simplificare s-a notat $\varphi_i^{dr} = \varphi_i$ și $\psi_i^{dr} = \psi_i$.

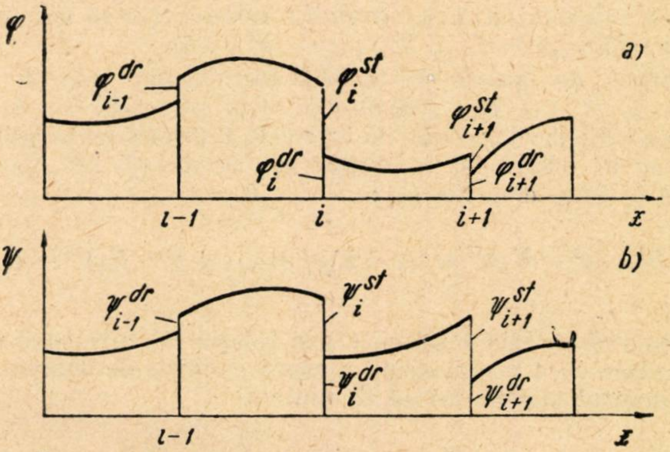


Fig. 1

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM KÖZPONTI KÖNYVTÁRA 1848

După cum se vede, s-a presupus că saltul funcției ψ poate depinde în punctul i și de valoarea funcției φ în acel punct.

Pentru stabilirea relației de recurență a celor trei necunoscute, se vor studia două porțiuni consecutive $i-1$, i și i, $i+1$. Notînd funcțiile cunoscute a, b, c etc. cu indicele I pentru intervalul $i-1$, i și cu indicele II pentru intervalul i, $i+1$, funcțiile φ și ψ se pot scrie sub forma:

— intervalul $i-1$, i

$$\varphi = A_{i-1,\,i}\, a^I(x) + B_{i-1,\,i}\, b^I(x) + c^I(x), \tag{3}$$

$$\psi = A_{i-1,\,i}\, d^I(x) + B_{i-1,\,i}\, e^I(x) + f^I(x); \tag{4}$$

— intervalul i, $i+1$

$$\varphi = A_{i,\,i+1}\, a^{II}(x) + B_{i,\,i+1}\, b^{II}(x) + c^{II}(x), \tag{5}$$

$$\psi = A_{i,\,i+1}\, d^{II}(x) + B_{i,\,i+1}\, e^{II}(x) + f^{II}(x). \tag{6}$$

Se notează cu x_{i-1}, x_i și x_{i+1} abscisele punctelor $i-1$, i și $i+1$.

Înlocuind x_{i-1} și x_i în relația (3), funcția φ va căpăta valorile φ_{i-1}^{dr} și φ_i^{st}, iar în relația (5) se va obține $\varphi_i^{dr}=\varphi_i$ și φ_{i+1}^{st}, dacă se va înlocui x_i și x_{i+1}:

$$\begin{aligned}
\varphi^{dr}(x_{i-1}) &= \varphi_{i-1}^{dr} = A_{i,\,i-1}a_{i-1}^{I} + B_{i,\,i-1}b_{i-1}^{I} + c_{i-1}^{I} = \varphi_{i-1},\\
\varphi^{st}(x_i) &= \varphi_i^{st} = A_{i,\,i-1}a_i^{I} + B_{i,\,i-1}b_i^{I} + c_i^{I} = K_1\varphi_i,\\
\varphi^{dr}(x_i) &= \varphi_i^{dr} = A_{i+1,\,i}a_i^{II} + B_{i+1,\,i}b_i^{II} + c_i^{II} = \varphi_i,\\
\varphi^{st}(x_{i+1}) &= \varphi_{i+1}^{st} = A_{i+1,\,i}a_{i+1}^{II} + B_{i+1,\,i}b_{i+1}^{II} + c_{i+1}^{II} = K_4\varphi_{i+1}^{dr} = K_4\varphi_{i+1},
\end{aligned} \tag{7}$$

unde φ_i^{st} s-a înlocuit cu $K_1\varphi_i$ conform relației (2) și s-a notat pentru simplificare $a^I(x_{i-1})=a_{i-1}^I$, $b^I(x_{i-1})=b_{i-1}^I$ etc.

În afară de aceste 4 relații, care leagă cele 4 necunoscute $A_{i-1,\,i}$, $B_{i-1,\,i}$, $A_{i,\,i+1}$, $B_{i,\,i+1}$ de funcția φ în punctele $i-1$, i și $i+1$, se mai poate scrie o relație care să lege cele 4 necunoscute prin funcția ψ. Înlocuind x_i în relația (4) se obține ψ_i^{st}, iar din (6) ψ_i^{dr}, care sînt legate între ele de a doua condiție (2):

$$A_{i-1.\,i}d_i^I + B_{i-1,\,i}e_i^I - K_2d_i^{II}A_{i,\,i+i} - K_2e_i^{II}B_{i,\,i+1} + f_i^I - K_2f_i^{II} - K_3\varphi_i = 0. \tag{8}$$

Se observă că cele 4 relații (7) și relația (8) formează un sistem de 5 ecuații liniare cu 4 necunoscute a cărui condiție de compatibilitate este ca determinantul sistemului să fie nul:

$$\begin{vmatrix}
d_i^I & e_i^I & -d_i^{II}K_2 & -e_i^{II}K_2 & f_i^I - f_i^{II}K_2 - K_3\varphi_i\\
a_{i-1}^I & b_{i-1}^I & 0 & 0 & c_{i-1}^I - \varphi_{i-1}\\
a_i^I & b_i^I & 0 & 0 & c_i^I - K_1\varphi_i\\
0 & 0 & a_i^{II} & b_i^{II} & c_i^{II} - \varphi_i\\
0 & 0 & a^{II}_{+1} & b_{i+1}^{II} & c_{i+1}^{II} - K_4\varphi_{i+1}
\end{vmatrix} = 0. \tag{9}$$

Se notează:

$$\begin{cases}
a_{i-1}^I b_i^I - a_i^I b_{i-1}^I = M,\\
a_i^{II}b_{i+1}^{II} - b_i^{II}a_{i+1}^{II} = N\\
a_i^I e_i^I - d_i^I b_i^I = P,\\
a_{i-1}^I e_i^I - d_i^I b_{i-1}^I = R,\\
e_i^{II}a_{i+1}^{II} - b_{i-1}^{II}d_i^{II} = S,\\
e_i^{II}a_i^{II} - b_i^{II}d_i^{II} = T.
\end{cases} \tag{10}$$

Dezvoltînd determinantul, ordonînd termenii şi împărţind cu MN se obţine:

$$\begin{aligned} &-\varphi_{i-1}\frac{P}{M}+\varphi_i\left(K_2\frac{S}{N}+K_1\frac{R}{M}-K_3\right)-\varphi_{i+1}\frac{T}{N}= \\ &=-c_{i-1}^{I}\frac{P}{M}+c_i^{I}\frac{R}{M}+c_i^{II}K_2\frac{S}{N}-c_{i+1}^{II}K_2\frac{T}{N}-(f_i^{I}-f_i^{II}K_2). \end{aligned} \tag{11}$$

În această relaţie, termenii M, N, ..., T, K_1, K_2, K_3 se calculează în funcţie de problema studiată, iar φ_{i-1}, φ_i şi φ_{i+1} sînt necunoscute a căror mărime urmează a fi determinată.

Această condiţie de compatibilitate leagă între ele printr-o relaţie trei necunoscute aflate în trei secţiuni consecutive ale sistemului studiat, ea stînd la baza metodei de recurenţă.

3. DETERMINAREA RELAŢIEI DE RECURENŢĂ PRIN ELIMINAREA CONSTANTELOR DE INTEGRARE

Relaţia de recurenţă a celor trei necunoscute se determină pentru cazurile particulare pornind de la relaţia (11) şi utilizînd, pentru definirea termenilor M, N, ..., T, K_1, K_2, K_3 relaţiile (10) şi (2).

În unele cazuri poate fi mai simplă deducerea relaţiei de recurenţă care, aşa cum s-a arătat, nu este decît condiţia de compatibilitate a sistemului de ecuaţii (7)—(8), prin eliminarea celor 4 constante de integrare între cele 5 ecuaţii ale sistemului.

Se pot determina $A_{i-1,i}$ şi $B_{i-1,i}$ din primele două ecuaţii (7) (respectiv $A_{i,i+1}$ şi $B_{i,i+1}$ din ultimele două), în funcţie de necunoscutele φ_{i-1}, φ_i, φ_{i+1}. Înlocuind apoi expresiile obţinute în (8) se obţine, pe altă cale, condiţia de compatibilitate reprezentînd relaţia de recurenţă a celor trei necunoscute. Acesta este modul în care a fost dedusă relaţia de recurenţă în [1], [2] şi [3].

4. APLICAREA RELAŢIEI DE RECURENŢĂ A CELOR TREI NECUNOSCUTE LA STUDIUL UNUI SISTEM CU MAI MULTE PORŢIUNI DE INTEGRARE

În cazul studierii sistemelor elastice care cuprind n porţiuni de încărcare, relaţia de recurenţă (11) se aplică astfel: se împarte sistemul în grupuri de cîte două porţiuni consecutive, aplicîndu-se pentru fiecare grup relaţia de recurenţă cu indici schimbaţi.

Se pot scrie în acest fel $n-2$ relaţii, cuprinzînd n necunoscute. Pentru ca sistemul să fie determinat se adaugă încă două relaţii reprezentînd — ca fenomen fizic — condiţii la limită pentru problema elastică dată. Aceste două condiţii pot fi: săgeţile nule la capetele unei grinzi, eforturile unitare nule sau cunoscute la extremităţile unui disc în mişcare de rotație, momentele încovoietoare circumferențiale nule la interiorul și exteriorul unei plăci plane simplu rezemate, cu gaură în mijloc etc. Sistemul de n ecuații cu n necunoscute se rezolvă, obținîndu-se astfel valorile funcției φ în cele n puncte.

Pentru determinarea necunoscutelor ψ se reiau primele două ecuații ale sistemului (7) din care se determină constantele de integrare în funcție de $\varphi_{i-1}^{dr} = \varphi_{i-1}$ și φ_i^{st} care acum sînt cunoscute:

$$A_{i-1,i} = \frac{\varphi_{i-1}\, b_i^I - b_{i-1}^I\, \varphi_i^{st} + b_{i-1}^I\, c_i^I - c_{i-1}^I\, b_i^I}{a_{i-1}^I\, b_i^I - a_i^I\, b_{i-1}^I},$$

$$B_{i-1,i} = \frac{\varphi_i^I\, a_{i-1}^I - \varphi_{i-1}\, a_i^I + a_i^I\, c_{i-1}^I - a_{i-1}^I\, c_i^I}{a_{i-1}^I\, b_i^I - a_i^I\, b_{i-1}^I}.$$

Acestea se înlocuiesc în relația (4) care se poate pune sub forma

$$\psi = \frac{(b_{i-1}^I\, c_i^I - c_{i-1}^I\, b_i^I)\, d^I(x) + (a_i^I\, c_{i-1}^I - a_{i-1}^I\, c_i^I)\, e^I(x)}{a_{i-1}^I\, b_i^I - a_i^I\, b_{i-1}^I} + f^I(x) +$$

$$+ \varphi_{i-1}\frac{b_i^I\, d^I(x) - a_i^I\, e^I(x)}{a_{i-1}^I\, b_i^I - a_i^I\, b_{i-1}^I} + \varphi_i\frac{a_{i-1}^I\, e^I(x) - b_{i-1}^I\, d^I(x)}{a_{i-1}^I\, b_i^I - a_i^I\, b_{i-1}^I}. \tag{12}$$

Înlocuind x cu x_{i-1} și x_i se obțin relații pentru calculul lui ψ_{i-1} și ψ_i care pot fi utilizate, dînd lui i valori de la 1 la n, pentru determinarea tuturor valorilor lui ψ.

În acest fel, prin cunoașterea valorilor funcțiilor φ și ψ în toate punctele, problema este complet rezolvată. Determinarea valorilor funcției φ este legată de rezolvarea unui sistem de $n - 2$ ecuații cu $n - 2$ necunoscute, cu matrice Jacobi, pentru a cărui rezolvare s-a indicat o metodă în [1].

5. STABILIREA RELAȚIEI DE RECURENȚĂ PRIN METODA GENERALĂ, PENTRU DISCURI DE GROSIME VARIABILĂ ÎN MIȘCARE DE ROTAȚIE ȘI PLĂCI CIRCULARE SIMETRIC ÎNCĂRCATE

A. În [2] s-a stabilit relația de recurență pentru discuri de grosime variabilă în mișcare de rotație, prin metoda eliminării succesive a constantelor de integrare. Stabilirea ecuației se poate face mai repede utilizînd relațiile generale date mai înainte.

Expresia eforturilor unitare radial σ_r și circumferențial σ_t pentru discuri uniform încălzite, este dată de relațiile [4]

$$\begin{aligned} \sigma_r &= A - \frac{B}{r^2} - \frac{m(3+\mu)}{2}\, r^2 = \sigma, \\ \sigma_t &= A + \frac{B}{r^2} - \frac{m(1+3\mu)}{2}\, r^2, \end{aligned} \tag{13}$$

unde s-a notat pentru simplificare $\sigma_r = \sigma$, $m = \dfrac{\gamma\omega^2}{4g}$ (γ — greutatea specifică, ω — viteza unghiulară a discului).

Înlocuind pe σ cu φ şi pe σ_t cu ψ se obţine, identificînd termenii relaţiilor (1) şi (13) (aici variabila se înlocuieşte cu r),

$$\begin{aligned} a(r) &= 1, \quad & b(r) &= -\frac{1}{r^2}, \quad & c(r) &= -\frac{m(3+\mu)r^2}{2}, \\ d(r) &= 1, \quad & e(r) &= \frac{1}{r^2}, \quad & f(r) &= -\frac{m(1+3\mu)r^2}{2}. \end{aligned} \tag{14}$$

Valorile acestor funcţii, necesare determinării coeficienţilor ecuaţiei (11) se calculează direct în tabela 1.

Tabela 1

Indice		$i-1$	i	$i+1$
Rază		$r = R_{i-1}$	$r = R_i$	$r = R_{i+1}$
Coeficienţi pe intervalul $i-1, i$	a^I	1	1	—
	b^I	$-\dfrac{1}{R_{i-1}^2}$	$-\dfrac{1}{R_i^2}$	—
	c^I	$-\dfrac{m(3+\mu)}{2}R_{i-1}^2$	$-\dfrac{m(3+\mu)}{2}R_i^2$	—
	d^I	—	1	—
	e^I	—	$\dfrac{1}{R_i^2}$	—
	f^I	—	$-\dfrac{m(1+3\mu)}{2}R_i^2$	—
Coeficienţi pe intervalul $i, i+1$	a^{II}	—	1	1
	b^{II}	—	$-\dfrac{1}{R_i^2}$	$-\dfrac{1}{R_{i+1}^2}$
	c^{II}	—	$-\dfrac{m(3+\mu)}{2}R_i^2$	$-\dfrac{m(3+\mu)}{2}R_{i+1}^2$
	d^{II}	—	1	—
	e^{II}	—	$\dfrac{1}{R_i^2}$	—
	f^{II}	—	$-\dfrac{m(1+3\mu)}{2}R_i^2$	—

Se calculează coeficienții (10) și apoi rapoartele:

$$\frac{P}{M}=\frac{2\,R_{i-1}^2}{R_i^2-R_{i-1}^2},\quad \frac{R}{M}=\frac{R_i^2+R_{i-1}^2}{R_i^2-R_{i-1}^2},$$
$$\frac{S}{N}=\frac{R_{i+1}^2+R_i^2}{R_{i+1}^2-R_i^2},\quad \frac{T}{N}=\frac{2\,R_{i+1}^2}{R_{i+1}^2-R_i^2}. \tag{15}$$

În punctul aflat la raza R_i în care grosimea discului variază de la h_i la h_{i+1} (fig. 2), se pot scrie relațiile următoare între eforturi unitare [2]:

$$\sigma_i^I=\sigma_i^{II}\frac{h_{i+1}}{h_i}=\sigma_i\eta_i,$$

$$\sigma_{i+1}^I=\sigma_{i+1}^{II}\frac{h_{i+2}}{h_{i+1}}=\sigma_{i+1}\eta_{i+1},\quad \sigma_{t_i}^I=\sigma_{t_i}+\mu\sigma_i(\eta_i-1),$$

unde $\eta_i=\dfrac{h_{i+1}}{h_i}$.

Identificînd aceste relații, cu condițiile (2) impuse funcțiilor φ și ψ se obține imediat

$$K_1=\eta_i,\ K_2=1,\ K_3=\mu\,(\eta_i-1),\ K_4=\eta_{i+1}. \tag{16}$$

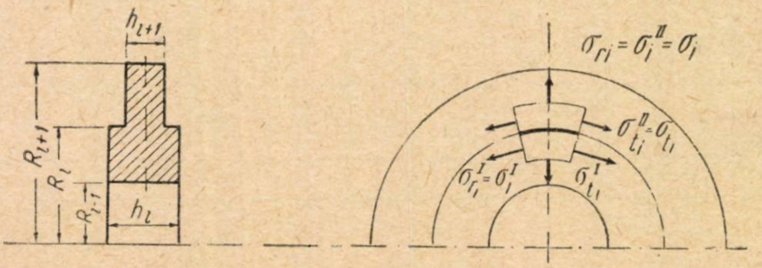

h_{i+1}
R_{i+1}
R_i
R_{i-1}
h_i
$\sigma_{ri}=\sigma_i^{II}=\sigma_i$
$\sigma_{t_i}^{II}=\sigma_{t_i}$
$\sigma_{r_i}^{I}=\sigma_i^{I}$
$\sigma_{t_i}^{I}$

Fig. 2

Înlocuind valorile (15) și (16) în ecuația generală (11) și înlocuind φ cu σ se obține relația de recurență a celor trei necunoscute, aplicată la calculul discurilor în mișcare de rotație, sub forma în care a fost dedusă și în [2]:

$$-\sigma_{i-1}\cdot\frac{2\,R_{i-1}^2}{R_i^2-R_{i-1}^2}+\sigma_i\left[\frac{R_{i+1}^2+R_i^2}{R_{i+1}^2-R_i^2}+\mu+\eta_i\left(\frac{R_i^2+R_{i-1}^2}{R_i^2-R_{i-1}^2}-\mu\right)\right]-$$
$$-\sigma_{i+1}\eta_{i+1}\frac{2\,R_{i+1}^2}{R_{i+1}^2-R_i^2}=\frac{\gamma\omega^2}{4g}(3+\mu)(R_{i+1}^2-R_{i-1}^2). \tag{17}$$

O aplicație a relației este dată în lucrarea citată [2].

B. Izolînd dintr-un element al unei plăci plane circulare simetric încărcate, un element ca în figura 3, *a*, asupra sa vor acționa momentele încovoietoare ca în figura 3, *b* (forţele tăietoare nu au fost reprezentate). Pentru simplificarea expresiilor obţinute se utilizează notaţia $M_t = M$ şi $M_r = m$. În [3] s-au stabilit expresiile celor două momente încovoietoare la o rază oarecare r:

$$
\left.
\begin{aligned}
M &= A - \frac{B}{r^2} - \frac{F_{i-1.i}}{8\pi}\left[2(1+\mu)\ln r + 1 - \mu\right] - \frac{p_{i-1.i}(3+\mu)}{16} r^2,\\
m &= A + \frac{B}{r^2} - \frac{F_{i-1.i}}{8\pi}\left[2(1+\mu)\ln r - (1-\mu)\right] - \frac{p_{i-1.i}(1+3\mu)}{16} r^2,
\end{aligned}
\right\} \quad (18)
$$

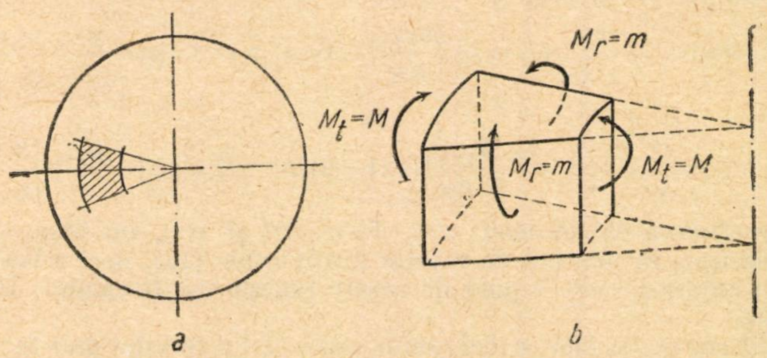


Fig. 3

unde s-a notat (fig. 4) $p_{i-1.i}$ sarcina uniform distribuită care acţionează asupra inelului i (cuprins între razele R_{i-1} şi R_i) şi]

$$F_{i-1.i} = F_i - \pi R_i^2 \, p_{i-1.i},$$

în care F_i reprezintă suma tuturor forţelor ce acţionează asupra plăcii, în interiorul cercului de rază R_i.

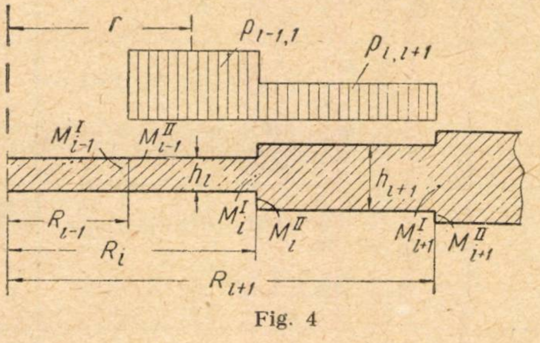


Fig. 4

Se izolează din placă două inele alăturate i şi $i+1$ de grosime h_i şi h_{i+1}.

Notînd m_i^I momentul încovoietor radial la exteriorul inelului i, m_i^{II} la interiorul inelului $i+1$ şi M_i momentul încovoietor tangenţial în punctul de trecere dintre cele două inele la raza R_i, între ele există relațiile [3]

$$M_i^I = M_i^{II} = M_i, \quad M_{i+1}^I = M_{i+1}^{II} = M_{i+1}, \qquad (19)$$
$$m_i^I = \lambda_i m_i^{II} + M_i \mu (1 - \lambda_i),$$

unde

$$\lambda_i = \left(\frac{h_i}{h_{i+1}}\right)^3.$$

Înlocuind M cu φ și m cu ψ se obține, prin identificarea termenilor relațiilor (1) și (18)

$$a(r)=1,\; b(r) = -\frac{1}{r^2},\; c(r) = -\frac{F_{i-1,i}}{8\pi}[2(1+\mu)\ln r+1-\mu]-\frac{p_{i-1,i}(3+\mu)}{16}r^2,$$
$$(20)$$
$$d(r)=1,\; e(r)=\frac{1}{r^2},\; f(r) = -\frac{F_{i-1,i}}{8\pi}[2(1+\mu)\ln r-(1-\mu)]-\frac{p_{i-1,i}(3+\mu)}{16}r^2.$$

Se observă că termenii $a(r)$, $b(r)$, $d(r)$ și $e(r)$ sînt identici cu cei de la discurile în mișcare de rotație din relațiile (14), deci relațiile (15), stabilite anterior, care depind de aceste funcții vor fi valabile și pentru acest caz.

Valorile expresiilor ce mai rămîn, adică $c(r)$ și $f(r)$ sînt date în tabela 2.

Tabela 2

Indice		$i - 1$	i	$i + 1$
Rază		$r = R_{i-1}$	$r = R_i$	$r = R_{i+1}$
Coeficientul pe intervalul $i-1,\ i$	c^I	$-\frac{F_{i-1,i}}{8\pi}[2(1+\mu)\ln R_{i-1}+$ $+1-\mu]-\frac{p_{i-1,i}(3+\mu)}{16}R_{i-1}^2$	$-\frac{F_{i-1,i}}{8\pi}[2(1+\mu)\ln R_i+1-\mu]-$ $-\frac{p_{i-1,i}(3+\mu)}{16}R_{i-1}^2$	—
	f^I	—	$-\frac{F_{i-1,i}}{8\pi}[2(1+\mu)\ln R_i-(1-\mu)]-$ $\frac{p_{i-1,i}(1+3\mu)}{16}R_i^2$	—
Coeficientul pe intervalul $i,\ i+1$	c^{II}	—	$-\frac{F_{i,i+1}}{8\pi}[2(1+\mu)\ln R_i+1-\mu]-$ $-\frac{p_{i,i+1}(3+\mu)}{16}R_i^2$	$-\frac{F_{i,i+1}}{8\pi}[2(1+\mu)\ln R_{i+1}+$ $+1-\mu]-\frac{p_{i,i+1}(3+\mu)}{16}R_{i+1}^2$
	f^{II}	—	$-\frac{F_{i,i+1}}{8\pi}[2(1+\mu)\ln R_i-(1-\mu)]-$ $-\frac{p_{i,i+1}(3+\mu)}{16}R_i^2$	—

Pentru stabilirea constantelor K_1, K_2, K_3, K_4 se identifică relațiile (2) cu (19) și se obține:

$$K_1 = 1, \quad K_2 = \lambda_i, \quad K_3 = \mu(1 - \lambda_i), \; K_4 = 1. \tag{21}$$

Înlocuind valorile (15), (21) și cele obținute în tabela 2 în ecuația (11), se obține relația de recurență a celor trei necunoscute, aplicată plăcilor circulare simetric încărcate:

$$\begin{aligned}
&- M_{i-1} \frac{2\,R_{i-1}^2}{R_i^2 - R_{i-1}^2} + M_i \left[\frac{R_i^2 + R_{i-1}^2}{R_i^2 - R_{i-1}^2} - \mu + \lambda_i \left(\frac{R_{i+1}^2 + R_i^2}{R_{i+1}^2 - R_i^2} + \mu \right) \right] - \\
&- M_{i+1} \lambda_i \frac{2\,R_{i+1}^2}{R_{i+1}^2 - R_i^2} = - \frac{F_{i-1,i}}{4\pi} \left[\frac{2\,R_{i-1}^2 (1+\mu) \ln \dfrac{R_i}{R_{i-1}}}{R_i^2 - R_{i-1}^2} + 1 - \mu \right] - \\
&- \frac{p_{i-1,i}}{8} \left[R_i^2 (1 - \mu) + R_{i-1}^2 (1 + 3\mu) \right] + \\
&+ \lambda_i \frac{F_{i,i+1}}{4\pi} \left[\frac{2\,R_{i+1}^2 (1 + \mu) \ln \dfrac{R_{i+1}}{R_i}}{R_{i+1}^2 - R_i^2} + 1 - \mu \right] + \\
&+ \lambda_i \frac{p_{i,i+1}}{8} \left[R_{i+1}^2 (3 + \mu) + R_i^2 (1 - \mu) \right].
\end{aligned} \tag{22}$$

Unele aplicații ale acestei relații de recurență sînt date în [3].

Primită la redacție la 19 noiembrie 1962

ОБОБЩЕННЫЕ СООТНОШЕНИЯ РЕККУРЕНТНОГО МЕТОДА ТРЕХ НЕИЗВЕСТНЫХ, ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ УПРУГИХ СИСТЕМ

РЕЗЮМЕ

В предыдущих статьях [1], [2], [3] было изложено решение некоторых задач из сопротивления материалов (расчет деформации прямых брусьев, расчет напряжений во вращающихся дисках, расчет изгибающих моментов в круглых пластинках постоянной или переменной толщины) методом, названным «метод трех неизвестных». В настоящей статье автор дает обобщение уравнений предназначаемого метода, которые можно применять — кроме вышеуказанных областей — и в других задачах, как например: расчет симметрично нагруженных

плоских пластин, укрепляемых круговыми ребрами, расчет деформаций прямых балок под аксиальным и поперечным нагружением и т.д.

Обобщенное соотношение (11) применяется затем при нахождении реккурентных уравнений для расчета вращающихся дисков (17) и симметрично нагруженных плоских круглых пластин (22).

BIBLIOGRAFIE

1. M. BLUMENFELD, *Calculul deformaţiilor barelor drepte prin metoda celor trei necunoscute.* Buletinul Institutului politehnic, Bucureşti, **XXIV**, *1* (1962).
2. — *Calculul discurilor de grosime variabilă în mişcare ae rotaţie, prin metoda celor trei necunoscute.* St. cerc. mec. apl., **XIV**, *1* (1963).
3. — *Circular symmetrically loaded plates, of constant and variable thicknees, calculated by the three unknowns method.* Buletinul Institutului politehnic, Bucureşti, **XXIV**, *3* (1962).
4. Gh. BUZDUGAN, *Rezistenţa materialelor.* Edit. tehnică, Bucureşti, 1960, **II**.
5. VIORICA IONESCU, *Curs de algebră.* Editura de Stat didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1960.
6. A. G. KUROŞ, *Curs de algebră superioară.* Edit. tehnică, Bucureşti, 1956.
7. С. Д. ПОНОМАРЕВ, В. Л. БИДЕРМАН, К. К. ЛИХАРЕВ, В. М. МАКУЩИН, Н. Н. МАЛИНИН, В. И. ФЕОДОСЬЕВ, *Расчеты на прочность в машиностроении.* Машгиз, Москва, 1958, **II**.

RECENZII

A. BELEŞ, M. IFRIM, *Elemente de seismologie inginerească*. Edit. tehnică, Bucureşti, 1962, 248 p.

Dezvoltarea în ultimul timp a ştiinţei construcţiilor a necesitat atacarea problemei privind alcătuirea şi calculul acestora, astfel încît ele să fie capabile să reziste la un eventual cutremur. Problema este deosebit de dificilă, deoarece elementele mecanice care stau la baza solicitărilor pe care cutremurul le exercită asupra construcţiilor sînt foarte greu de stabilit. În unele regiuni ale globului pămîntesc, des bîntuite de cutremure, în Japonia de exemplu, au început să se facă încercări în această direcţie încă de la sfîrşitul secolului trecut; problema nu a putut fi însă clarificată din cauza lipsei unei aparaturi necesară pentru înregistrări corespunzătoare.

La început, metodele de calcul atacau şi soluţionau problema reducînd solicitarea produsă la o acţiune statică. Aspectul dinamic al problemei a început să fie prins în calcul, întîi în U.R.S.S., apoi în S.U.A., Japonia etc. În ţara noastră, se întreprind studii în această direcţie în cadrul unor institute de cercetare ştiinţifică sau în cadrul unor catedre de specialitate, iar în 1959 a avut loc o consfătuire internaţională de seismologie la Bucureşti. În cadrul acestor preocupări, această lucrare vine să umple un gol resimţit în literatura noastră originală de specialitate. Ea se bazează, pe lîngă o bogată literatură (bibliografia cuprinde 198 titluri), pe rezultatele cercetărilor efectuate de primul dintre autori după cutremurul din 1940 şi, mai ales, pe deosebit de valoroasa experienţă acumulată de acesta cu ocazia proiectării şi execuţiei multor construcţii civile şi industriale.

Lucrarea este împărţită în 9 capitole, urmate de o anexă cu diferitele scări de apreciere a intensităţii unui cutremur.

Capitolul I cuprinde unele noţiuni generale de seismologie. După un scurt istoric al cutremurelor în întreaga lume şi în ţara noastră, se arată etapele de dezvoltare ale seismologiei inginereşti. Se trece apoi la o prezentare, mai mult calitativă, a originii şi cauzelor cutremurelor: primele concepţii, dezvoltarea modernă a teoriei corespunzătoare, mecanismul producerii cutremurelor. Se dau apoi cîteva date în legătură cu undele seismice (unde Rayleigh, Love etc.), se arată modul de înregistrare a acestora, precum şi posibilitatea de interpretare a seismogramelor. O atenţie specială este acordată diferitelor scări de intensitate a efectelor produse de cutremure şi relaţiei dintre acestea.

În capitolul al II-lea se dau cîteva noţiuni generale de dinamica sistemelor elastice, scoţîndu-se în evidenţă elementele principale care caracterizează un sistem oscilant: frecvenţa şi amplitudinea. Se dau întîi cîteva rezultate clasice privitoare la sistemele cu un singur grad de libertate (oscilaţii longitudinale ale unui resort, oscilaţii pendulare, oscilaţii transversale ale unei bare), punîndu-se în evidenţă oscilaţiile libere şi forţate cu sau fără amortizare. Se trece apoi la un sistem cu mai multe grade de libertate dinamică (cadru etajat) şi în sfîrşit la sisteme cu o infinitate de grade de libertate dinamică; se consideră astfel oscilaţiile transversale libere şi forţate ale barei drepte. Un paragraf special este dedicat solicitărilor dinamice provenite din şoc (şocuri transversale ale barei drepte, metoda masei reduse etc.).

Acţiunea mişcării seismice asupra structurilor este considerată în capitolul al III-lea. După ce se prezintă mecanismul transmiterii mişcării seismice, se trece la efectul acestei mişcări asupra sistemelor cu un singur grad de libertate ; o atenţie deosebită se acordă noţiunii de spectru de răspuns a construcţiei. Se studiază apoi efectul mişcării seismice asupra sistemelor cu mai multe grade de libertate şi se introduce noţiunea de masă echivalentă (sistem cu un singur grad de libertate, echivalent cu primul) pentru sisteme cu un număr finit sau infinit de grade de libertate ; aceasta are o deosebită importanţă practică în calculul antiseismic. Se arată de asemenea modul de a obţine spectrele seismice prin integrare directă (analitic) sau pe cale experimentală, cu ajutorul modelelor dinamice sau prin analogii electrice.

În capitolul al IV-lea se prezintă modul de determinare a caracteristicilor dinamice ale structurilor : gama frecvenţelor sau perioadelor proprii de oscilaţie, totalitatea formelor proprii de oscilaţie, factorii critici de amortizare a diferitelor tipuri de structuri ; pentru acestea se dau metode exacte şi aproximative de calcul, grupînd construcţiile în construcţii masive şi construcţii zvelte. Din punct de vedere al comportării dinamice se dau rezultate pentru construcţii flexibile, construcţii semirigide şi construcţii rigide.

Capitolul al V-lea cuprinde influenţa proprietăţilor fizico-mecanice ale terenurilor asupra efectului seismic. Se analizează astfel influenţa naturii terenului asupra solicitărilor produse de cutremur şi asupra comportării corespunzătoare a construcţiilor, dîndu-se cîteva exemple de construcţii avariate ; se pune în special accentul pe interacţiunea dintre construcţie şi teren în timpul cutremurului.

Unele metode moderne privind calculul forţelor seismice se dau în capitolul al VI-lea ; se arată evoluţia acestora şi metodele actuale de calcul, punîndu-se accentul pe utilizarea spectrelor de răspuns în calculul antiseismic. Se dau şi coeficienţii seismici spectrali, după diferite standarde şi prescripţii.

În capitolul al VII-lea se face o analiză a prescripţiilor pentru calculul construcţiilor situate în zone seismice, oficializate în 19 ţări supuse la asemenea fenomene ; menţionăm în special prescripţiile din U.R.S.S., S.U.A. şi Japonia.

Capitolul al VIII-lea cuprinde elemente generale de proiectare şi execuţie pentru construcţiile rezistente la cutremur. Se discută astfel acţiunea seismică asupra construcţiilor : transmiterea mişcării terenului la construcţii şi reacţiunea construcţiei asupra fundaţiei. Urmează apoi o caracterizare, mai mult calitativă, a unor elemente de bază : caracteristici geometrice, comportare elastică, concentrări de eforturi, flexibilitate şi rigiditate, torsiune etc. Se dau apoi cîteva date generale privind metodele statică şi dinamică de calcul. În acest capitol se insistă asupra principiilor privind concepţia de alcătuire a construcţiilor rezistente la cutremure : probleme de rigiditate şi flexibilitate, forme şi dimensiuni, materiale. În ceea ce priveşte problemele de alcătuire şi execuţie se dau date în legătură cu fundaţiile, zidăria, planşeele, scheletul de rezistenţă ; se consideră şi unele construcţii de beton armat din elemente prefabricate şi construcţii din panouri mari, larg utilizate în ţara noastră.

Unele probleme legate de dezvoltarea seismologiei inginereşti în ţara noastră sînt prezentate pe scurt în capitolul al IX-lea.

Lucrarea de mai sus conţine o sinteză valoroasă a stadiului actual al seismologiei inginereşti, în lumina celor mai noi rezultate obţinute din cercetările efectuate în principalele ţări de pe glob, precum şi în ţara noastră.

Scrisă la un înalt nivel ştiinţific şi într-un limbaj accesibil, lucrarea pune la dispoziţia inginerilor, arhitecţilor şi studenţilor din institutele de învăţămînt superior un material deosebit de util în proiectarea şi execuţia construcţiilor în regiuni seismice ; prin problemele ridicate, prin sugestiile pe care le dă şi prin bogăţia de material prezentat, acest volum poate fi folosit cu succes şi de cercetătorii ştiinţifici din domeniul mecanicii construcţiilor.

P. P. Teodorescu

V. NICOLAU, *Betonul armat.* Edit. tehnică, Bucureşti, 1962, 478 p., 351 fig.

Activitatea de pregătire a introducerii metodelor de calcul la stările limită în construcţii în ţara noastră s-a reflectat slab în publicaţii pînă în prezent, materialele celor două simpozioane organizate de către Institutul de construcţii din Bucureşti avînd un caracter mai restrîns şi o circulaţie limitată.

Apariţia lucrării prof. V. Nicolau suplineşte această lipsă şi creează premise pentru rapida şi concreta asimilare a „Normativului condiţionat pentru calculul şi alcătuirea constructivă a elementelor de beton, beton armat şi beton precomprimat".

Acest tratat se deosebeşte în mod substanţial de alte lucrări în domeniul betonului armat publicate pînă în prezent în ţara noastră. Într-adevăr, au apărut unele lucrări cu caracter strict limitat de îndrumător pentru aplicarea normelor de calcul, precum şi alte lucrări de analiză a problemelor fundamentale ale teoriei betonului armat. Tratatul prof. V. Nicolau prezintă însă pentru prima dată o împletire a acestor două aspecte principale, relaţiile practice de calcul fiind pretutindeni aplicate pe baza analizei fundamentale a fenomenului real pe care urmăresc să-l descrie. Astfel, cititorul simte permanent legătura dintre problemele teoretice şi comportarea concretă a materialului în condiţiile pentru care se efectuează proiectarea construcţiilor. Acest aspect este deosebit de important astăzi deoarece, ca urmare a lipsei unor cursuri periodice de perfecţionare a inginerilor, majoritatea proiectanţilor calculează la starea limită de rezistenţă sau de deschidere a fisurilor fără să fi văzut vreodată ruperea sau fisurarea unui element de beton armat sub încărcare. Înţelegerea mecanică a unei metode de calcul atît de strîns legată de realitate, cum este cea la stările limită, poate duce la erori şi soluţii tehnice necorespunzătoare sau neeconomice.

Lucrarea cuprinde 20 de capitole.

Primele nouă capitole prezintă bazele noii teorii a betonului.

Capitolul I trece pe scurt în revistă modul de formare şi structura pietrii de ciment şi prezintă cimenturile fabricate în R.P.R. cu indicarea domeniului de folosire.

Capitolul II se referă la structura betonului şi la modificările de volum ale acestuia în absenţa încărcărilor exterioare. Se analizează în special factorii care influenţează contracţia betonului, accentuîndu-se în continuare importanţa eforturilor iniţiale din structura betonului ca fenomene generatoare de microfisuri. Aspectele teoretice se valorifică în concluzie prin reliefarea rolului factorului *a/c* şi indicarea pe scurt a metodelor tehnologice moderne pentru obţinerea unei structuri compacte a betonului.

Capitolul III se ocupă cu deformațiile betonului sub încărcare. Se insistă asupra importanței și naturii deformațiilor elasto-plastice și a curgerii lente, arătîndu-se interdependența dintre deformațiile de contracție și curgere lentă ale betonului. Se indică la sfîrșit metodele practice pentru luarea în considerație în calcule a efectului curgerii lente.

Capitolul IV este mai dezvoltat, fiind consacrat analizei fenomenelor de rupere a betonului simplu sub diferite solicitări. Se arată că orice rupere trebuie analizată ca un proces istoric, ruperea macroscopică propriu-zisă fiind precedată și reprezentînd rezultatul dezvoltării ruperilor microscopice, materializate sub formă de microfisuri în structura betonului. Acest mod de prezentare, la nivelul celor mai moderne rezultate din teoria rezistenței betonului, permite o justă înțelegere a gradului de securitate al construcțiilor.

Capitolul V se referă la durabilitatea și impermeabilitatea betonului. Acest capitol are rolul în special de a atrage atenția asupra necesității studierii aprofundate a tehnologiei betonului în funcție de condițiile de exploatare ale acestuia.

Capitolul VI prezintă diferitele tipuri de oțeluri utilizate în R.P.R. pentru armături în elemente de beton armat.

Capitolul VII analizează cel mai important aspect al comportării betonului armat — conlucrarea dintre beton și armătură. Pe baza unui material experimental succint, dar foarte reprezentativ, se scoate în evidență repartiția eforturilor unitare de aderență în lungul armăturii și influența diferiților factori asupra aderenței și ancorajului armăturii în beton.

Capitolul VIII prezintă eforturile inițiale din contracția și curgerea lentă a betonului în elemente de beton armat. Se analizează apoi cele 3 stadii de lucru ale betonului la diferite solicitări și influența eforturilor inițiale asupra comportării în fiecare stadiu, lămurind astfel modul de stabilire a valorii de calcul pentru rezistența la întindere a betonului.

Capitolul IX prezintă dezvoltarea metodelor de calcul al betonului armat. Se justifică principiile fundamentale ale metodei de calcul la stări limită. Se demonstrează superioritatea acesteia în raport cu metoda rezistențelor admisibile și metoda de calcul la rupere.

În capitolele următoare se tratează comportarea elementelor de beton simplu și armat la diferite solicitări și metodele practice de calcul. Autorul folosește în acest scop o prezentare istorică, analizînd în mod succesiv dezvoltarea celor trei stadii de lucru în cursul procesului de încărcare progresivă și oprindu-se în etapele care constituie stări limită de calcul : deschiderea fisurilor, deformație, rezistență sau stabilitate.

Capitolul X prezintă metodele de calcul la stări limită ale elementelor de beton simplu.

Capitolul XI trece în revistă dezvoltarea istorică a formelor constructive ale betonului armat. Se dau în special exemple din practica construcțiilor din țara noastră, insistînd asupra dezvoltării prefabricării ca procedeu modern de realizare a construcțiilor de beton armat.

Capitolul XII se referă la elementele de beton armat întinse centric. Se insistă asupra importanței limitării deschiderii fisurilor la tiranți justificînd teoretic și pe bază de date experimentale necesitatea reducerii la minim a secțiunii de beton.

Capitolul XIII se referă la elemente de beton armat comprimate centric. Din analiza redistribuirii eforturilor sub încărcări de exploatare datorită curgerii lente a betonului, rezultă lipsa de valabilitate a metodelor de dimensionare în stadiul elastic. Un bogat material ilustrativ experimental servește pentru justificarea relațiilor de calcul a capacității portante.

Capitolul XIV este cel mai voluminos, referindu-se la problema principală în tehnica betonului armat — calculul elementelor la acțiunea momentelor încovoietoare. Pentru calculul deschiderii fisurilor și a săgeților se indică o metodă originală bazată pe interpretarea încercărilor efectuate la INCERC. Graficele date în lucrare ușurează în mod esențial munca de proiectare.

Pentru calculul capacității portante se efectuează o analiză aprofundată a rolului condițiilor de aderență dintre armătura întinsă și beton pe baza rezultatelor experimentale obținute a INCERC pe modele fotoelastice. Se arată că starea limită de rezistență corespunde de fapt unei condiții de compatibilitate a deformațiilor specifice limită, de unde rezultă în mod concludent armarea minimă și maximă în cazul secțiunilor, prevăzute cu bare din oțel prezentînd palier de curgere, ca limite ale domeniului în care calculul capacității portante se poate rezolva utilizînd numai ecuațiile de echilibru în secțiune. În completare se dau tabelele necesare pentru calculul secțiunilor armate cu diferite tipuri de oțeluri de acest tip.

Capitolul XV este dedicat calculului elementelor la acțiunea combinată a momentului încovoietor și a forței tăietoare. Metoda de calcul la rupere în secțiuni înclinate este expusă în detaliu, cuprinzînd toate problemele care pot surveni practic în proiectare. La acest punct ar fi fost utilă o prezentare mai largă a calculului pentru grinzile de înălțime variabilă.

Capitolul XVI tratează elemente de beton armat comprimate excentric. Delimitarea celor două cazuri de rupere este exemplificată cu date experimentale.

Capitolul XVII se referă la elemente de beton armat întinse excentric. În afara relațiilor de calcul la stările limită de fisurare și de rezistență date în tratat, ar fi trebuit menționată și influența defavorabilă a forțelor axiale de întindere asupra rezistenței în secțiuni înclinate.

Capitolul XVIII extinde, pentru cazul general al secțiunilor armate cu oțeluri care nu prezintă palier distinct de curgere, concluziile stabilite la capitolul XIV asupra relației dintre momentul de rupere și deformația limită a betonului. Pentru a rezolva dificultățile întîmpinate la scrierea condițiilor de compatibilitate a deformațiilor — în special datorită neuniformității acestor deformații în lungul elementului — se propune introducerea unui coeficient variabil al condițiilor de lucru pentru armătura din zona întinsă. Această soluție prezintă un pas înainte față de metodele de calcul la stări limită utilizate în alte țări, atît ca precizie cît și ca simplitate a relațiilor de calcul obținute.

Capitolul XIX tratează elemente de beton armat supuse torsiunii. Pentru prima dată se prezintă în țara noastră metodele de calcul la rupere pentru asemenea elemente.

Capitolul XX se referă la oboseala betonului armat, justificînd principiile calculului la oboseală prevăzute în noile prescripții romînești de calcul la stările limită.

Tratatul se încheie cu exemple de calcul pentru principalele cazuri de solicitare ale elementelor de beton și beton armat, ceea ce constituie o exemplificare foarte utilă a metodelor noi pe care le prezintă lucrarea și ușurează asimilarea lor pentru aplicarea imediată în practică.

Bibliografia cuprinde, în 163 titluri, principalele lucrări teoretice și experimentale în domeniul betonului și betonului armat, apărute pe plan mondial în ultimii ani. Se remarcă larga utilizare a lucrărilor științifice efectuate în R.P.R.

Exprimarea este deosebit de clară, fiind foarte accesibilă, fără a pierde nimic din rigurozitatea prezentării.

Trebuie menționată și prezentarea grafică îngrijită a lucrării, care nu este totuși lipsită de erori tipografice.

Betonul armat este o lucrare de înalt nivel științific și teoretic, reprezentînd o sinteză a nivelului actual al cunoștințelor asupra fenomenelor complexe de fisurare, deformare, oboseală și rupere a elementelor de beton și beton armat. Apariția acestui tratat, care se adresează inginerilor din institutele de proiectare și cercetări, de pe șantierele de construcții și studenților facultăților de construcții, va avea un rol hotărîtor pentru introducerea și generalizarea metodei de calcul la stări limită.

M. Tannenbaum

AL. STOENESCU, *Elemente de cosmonautică*. Edit. tehnică, Bucureşti, 1962, 143 p.

În epoca actuală de mari cuceriri ştiinţifice şi tehnice, zborul navelor cosmice în spaţiul interplanetar constituie, desigur, una dintre cele mai însemnate realizări. Dacă problema zborului la mici altitudini şi la viteze reduse a fost un vis milenar al omului, căruia acesta i-a consacrat o parte importantă din munca sa creatoare, cu atît mai mult mişcarea rachetelor şi a navelor cosmice actuale a avut darul de a capta interesul nu numai al oamenilor de ştiinţă sau al inginerilor, dar şi al marilor mase de pretutindeni. Este de aceea o cerinţă justificată de a se răspîndi cît mai mult cunoştinţele din acest domeniu nou al ştiinţei, corespunzînd unui număr foarte mare de cititori, cu grade de pregătire foarte diferite. Din această cauză, întocmirea unei lucrări care să păstreze un nivel destul de înalt pentru a nu pierde caracterul riguros ştiinţific, dar totuşi suficient de accesibilă, este foarte grea.

Profesorul Al. Stoenescu a reuşit, în volumul său, să reţină ceea ce este esenţial din complexul problemelor cosmonauticii şi să prezinte sub o formă clară, concisă şi elegantă soluţiile care au condus la ultimele realizări. După cum arată autorul în prefaţa sa, zborul cosmic este legat de progresele actuale ale numeroaselor ştiinţe, iar o expunere cuprinzătoare a tuturor elementelor care au contribuit la realizarea navelor cosmice este cu neputinţă într-o singură lucrare, chiar de proporţii vaste. Pentru tratarea unui asemenea subiect se impune de la început, deci, o alegere destul de grea. Fiecare latură a problemei, pe lîngă interesul intrinsec, completează pe celelalte şi ajută la formarea unei idei asupra ansamblului. În faţa acestei dificultăţi, autorul a ales problemele centrale legate de zborul însuşi al rachetelor şi navelor cosmice, mai ales din punctul de vedere al mecanicii cereşti şi al mişcării reactive. Fără a renunţa complet la celelalte capitole, de un caracter tehnic, le-a prezentat uneori sub o formă mai mult informativă dar totdeauna corectă şi scoţînd în evidenţă ceea ce este esenţial.

Primul capitol cuprinde consideraţii asupra legii atracţiei universale, forţelor centrale şi vitezelor de revoluţie în jurul corpurilor cereşti. Capitolele II şi III se referă mai ales la sateliţii artificiali, la caracteristicile mişcării pe orbitele respective şi la efectele rotaţiei Pămîntului. Al patrulea capitol arată condiţiile de mişcare a navelor orbitale pentru călătoriile spre Lună şi alte planete, iar capitolul V se ocupă cu condiţiile de lansare spre o ţintă dată, cu bătaia maximă a unei rachete şi cu proprietăţile generale ale traiectoriilor cu viteză iniţială constantă, dar unghi de lansare variabil. Următoarele două capitole (VI şi VII) prezintă calculul timpului necesar străbaterii unei porţiuni de traiectorie şi precizia la lansarea rachetelor intercontinentale. Capitolele VIII—XI expun problema celor trei corpuri, problema circulară restrînsă şi studiul traiectoriilor Pămînt—Lună, apoi consideraţii asupra sferelor de atracţie ale corpurilor cereşti. În capitolele XII—XIV se tratează succint mişcarea reactivă, corpul de masă variabilă şi forţa de tracţiune corespunzătoare, ecuaţia lui Meşcerski, dinamica corpului de masă variabilă, conform rezultatelor obţinute de prof. V. Vâlcovici, şi mişcarea rachetei pe traiectoria activă (cu tracţiune). De un caracter descriptiv, următoarele şase capitole prezintă tipurile de rachete, dirijarea acestora prin metode giroscopice, revenirea navelor cosmice pe pămînt, condiţii fiziologice ale zborului în cosmos, importanţa zborurilor cosmice şi istoricul marilor realizări ale U.R.S.S. în domeniul cosmonauticii.

Deşi de proporţii reduse, volumul prof. Al. Stoenescu este prima carte scrisă în limba romînă care, consacrată exclusiv zborului în cosmos, păstrează tot timpul un caracter riguros ştiinţific şi o prezentare corectă a problemelor din punct de vedere fizic şi matematic. Astfel, ea face, fără a-şi propune în mod special acest lucru, o operă utilă de popularizare, ajutînd la înţelegerea justă a fenomenelor, mai mult chiar decît volumele, destul de numeroase în ultimul timp, scrise exclusiv în acest scop. Aceasta constituie însă numai una din calităţile lucrării ;

ţinuta ei depăşeşte sensibil acest cadru şi o recomandă ca o carte de o valoare ştiinţifică certă, dar cu avantajul de a fi uşor accesibilă studenţilor, sau acelora care au o pregătire în această direcţie.

N. Tipei

SOLOMON G. MICHLIN, *Variationsmethoden der mathematischen Physik* (Metode variaţionale ale fizicii matematice). Akademie-Verlag, Berlin, 1962, X+ 464 p., 21 fig.

Traducerea în limba germană a cunoscutei cărţi a lui S. G. Mihlin este făcută după a doua ediţie apărută în limba rusă cu acelaşi titlu. Prima ediţie rusă din anul 1950 purta titlul *Metode directe ale fizicii matematice* şi prin schimbarea acestuia autorul a intenţionat să marcheze faptul că a introdus o serie de schimbări esenţiale prin care s-a modificat însăşi structura cărţii. Prin efectuarea acestor schimbări, autorul a urmărit să facă mai accesibil materialul prezentat unui cerc larg de cititori şi bineînţeles să aducă şi unele îmbunătăţiri. În acest scop, S. G. Mihlin a renunţat la introducerea de la început a teoriei pe baza noţiunilor de analiză funcţională, tratînd în prima parte a cărţii, din punct de vedere elementar, metoda energetică, foarte importantă pentru aplicaţii. Abia mai tîrziu a introdus generalizările care comportă utilizarea teoriei operatorilor în spaţiul Hilbert, lucru care era făcut de la început în prima ediţie. Dintre îmbunătăţiri, cele mai demne de semnalat sînt tratarea într-un capitol special a teoriei valorilor proprii şi considerarea în amănunt a problemei evaluării erorilor soluţiilor aproximative.

După o privire istorică asupra problemelor tratate, urmează primul capitol în care se arată cum se pun problemele la limită pentru ecuaţiile fizicii matematice şi se prezintă unele noţiuni matematice utilizate în continuare precum şi proprietăţile operatorilor. Al doilea capitol, care are de asemenea un caracter introductiv, tratează problema convergenţei, introducîndu-se noţiunea de convergenţă în medie şi aceea de convergenţă referitor la energie, precum şi proprietăţile seriilor ortogonale. Precizăm că prin energia unei funcţii u, care în sens fizic reprezintă o deplasare, se înţelege produsul scalar (Au, u), A fiind un operator pozitiv.

Capitolul al treilea conţine prezentarea metodei energetice care constă în integrarea ecuaţiei diferenţiale $Au = f$ cu condiţii la limită date, astfel ca funcţionala pătratică $F(u) = (Au, u) - 2(u, f)$ să fie minimă. Ca principal procedeu de rezolvare este tratat acela al lui Ritz, fiind însă indicate şi altele aparţinînd lui R. Courant şi lui L. V. Kantorovici. În capitolul următor sînt cuprinse mai multe aplicaţii ale acestei metode, pentru ecuaţii diferenţiale obişnuite şi cu derivate parţiale.

Capitolul al cincilea este consacrat problemei valorilor proprii şi în cadrul lui se prezintă şi procedeul lui Ritz aplicat la această problemă.

Generalizarea rezultatelor obţinute este obiectul capitolului următor care conţine în esenţă noţiunile de bază ale teoriei operatorilor în spaţiul Hilbert.

Urmează capitolul dedicat evaluării erorilor soluţiilor aproximative. Dintre metodele care permit astfel de evaluări, sînt tratate mai amănunţit aceea a proiecţiilor ortogonale şi în special procedeul lui Trefftz.

Capitolul al optulea conţine aplicaţiile numerice ale procedeelor expuse în capitolele precedente. Problemele sînt luate din teoria elasticităţii şi rezolvate în paralel prin mai multe metode.

În capitolul următor este prezentat în amănunt procedeul lui Bubnov-Galerkin, împreună cu o serie de aplicaţii. Urmează apoi capitolul consacrat metodei celor mai mici pătrate şi, în încheierea cărţii, metodele cu diferenţe şi în special metoda reţelelor cu cazul ei limită, metoda dreptelor.

Prezentînd un material bogat şi de actualitate, într-o expunere clară şi accesibilă, cartea lui S. G. Mihlin este de real folos pentru cei ce se ocupă cu problemele fizicii matematice.

T. Oroveanu

О. А. ЛАДЫЖЕНСКАЯ, *Математические вопросы динамики несжимаемой жидкости* (Probleme matematice ale dinamicii fluidelor vîscoase incompresibile). Физматгиз, Москва, 1961, 200 p.

Problema integrării ecuaţiilor Navier-Stokes, atît în cazul mişcării permanente cît şi în cazul mişcării nepermanente, a constituit obiectul a numeroase lucrări, dar o monografie care să conţină rezultatele obţinute în special prin utilizarea unor metode matematice moderne, ca de exemplu analiza funcţională, încă nu se scrisese. Lucrarea pe care o recenzăm umple acest gol din literatura ştiinţifică mondială. Autoare a cîtorva articole fundamentale asupra integrării ecuaţiilor Navier-Stokes şi bună cunoscătoare a lucrărilor consacrate studiului mişcării laminare a fluidelor, O. A. Ladîjenskaia a reuşit să prezinte într-un volum restrîns (200 p.) rezultate de o mare importanţă ştiinţifică şi practică.

Vom caracteriza pe scurt conţinutul fiecăruia din cele şase capitole ale lucrării pentru ca viitorul cititor să-şi poată face o idee asupra acestei valoroase cărţi.

Prezintă interes şi introducerea lucrării, în care pe 6 pagini autoarea analizează problemele matematice ale mişcării laminare a fluidelor, metodele utilizate pînă în prezent pentru rezolvarea lor precum şi rezultatele obţinute în acest domeniu.

Unul dintre procedeele de studiere a mişcării laminare utilizat de autoare constă în aplicarea analizei funcţionale. Pentru a înlesni lectura lucrării, O. A. Ladîjenskaia a consacrat capitolul 1 expunerii noţiunilor de analiză funcţională folosite în cuprinsul cărţii, ceea ce permite rezolvarea problemelor legate de integrarea ecuaţiilor Navier-Stokes sub o formă succintă, sistematică şi modernă.

Capitolul al II-lea reprezintă o primă aplicaţie a aparatajului matematic expus în capitolul anterior. Sînt demonstrate teoremele de existenţă şi unicitate a soluţiilor pentru cazul mişcării laminare permanente a unui fluid vîscos într-un domeniu mărginit precum şi în cazul mişcării plane.

Metodele matematice de studiu al mişcării laminare permanente utilizate în literatură, şi anume teoria potenţialelor hidrodinamice, a ecuaţiilor integrale şi metoda funcţiei lui Green sînt prezentate în capitolul al III-lea al lucrării. Totodată sînt expuse şi soluţiile problemei mişcării laminare permanente liniarizate obţinute de Odquist şi de Lichtenstein.

Formularea corectă a problemei matematice referitoare la mişcare laminară nepermanentă a unui fluid vîscos este expusă în capitolul al IV-lea al monografiei. O. A. Ladîjenskaia s-a ocupat în mod special de această problemă în rezolvarea căreia are contribuţii importante şi în consecinţă a acordat un spaţiu larg teoremelor de existenţă şi unicitate a soluţiei atît pentru un domeniu finit cît şi pentru unul nemărginit. Este de remarcat paragraful care conţine teorema ce defineşte condiţiile necesare şi suficiente pentru utilizarea metodei Fourier în rezolvarea problemei liniarizate a mişcării laminare nepermanente.

Cazul mai complex al problemei neliniare a mişcării laminare nepermanente este tratat în capitolul al V-lea. Autoarea demonstrează că în cazul general ecuaţiile diferenţiale Navier-Stokes admit o soluţie unică pentru numere Reynolds mici şi condiţii la limită oarecare.

Utilizîndu-se condiţii la limită omogene, sînt prezentate soluţiile pentru mişcarea într-un domeniu mărginit precum şi într-un spaţiu infinit.

Ultimul capitol al lucrării, care este şi cel mai amplu dezvoltat, este consacrat expunerii şi interpretării rezultatelor obţinute pînă în prezent în studierea cazului general al mişcării laminare a fluidelor. Sînt de remarcat paragrafele referitoare la : teorema de existenţă şi unicitate a soluţiei, proprietăţile diferenţiale ale soluţiilor, cercetarea influenţei condiţiilor iniţiale asupra soluţiei precum şi comportarea asimptotică a acesteia. Ultimul paragraf este consacrat studierii problemei Cauchy pentru sistemul general de ecuaţii Navier-Stokes.

O particularitate a lucrării o constituie cele două categorii de comentarii anexate la sfîrşitul monografiei. Prima categorie de comentarii conţine o apreciere generală asupra rezultatelor expuse în fiecare capitol şi o completare a lor cu citate bibliografice care nu se puteau prezenta în cuprinsul cărţii. A doua categorie de comentarii conţine o analiză succintă a lucrărilor referitoare la mişcarea laminară a fluidelor, lucrări publicate în timp ce monografia era sub tipar.

Prin conţinutul său bogat în rezultate de mare importanţă, dintre care unele reprezintă contribuţii ale autoarei, prin metodele de cercetare utilizate cît şi datorită analizei critice a materialului bibliografic, lucrarea recenzată prezintă mult interes şi o mare importanţă pentru hidrodinamicieni.

St. Zarea

А. И. ТАЙНОВ, *Механизмы плоской системы с одними поступательными парами* (Mecanisme ale sistemelor plane avînd numai cuple de translaţie). Издательство Академии Наук БССР, Минск, 1961, 180 p., 85 fig.

Dezvoltarea continuă a industriei constructoare de maşini, impune de asemenea dezvoltarea teoriei mecanismelor şi a maşinilor şi specializarea în cadrul acestei discipline. Acest lucru îl face lucrarea lui A. I. Tainov care alegînd grupa mecanismelor plane ce au numai cuple de translaţie, realizează un studiu structural, cinematic şi dinamic al lor, dînd numeroase exemple teoretice.

Partea întîia a cărţii tratează structura grupelor assurice şi sinteza şi analiza structurală a mecanismelor. Se face o împărţire a mecanismelor plane, avînd cuple numai de translaţie, în grupe izotope — la care gradul de mobilitate $W>0$, avînd deci grade de libertate suplimentare, sau $W<0$, avînd condiţii de legătură suplimentare — şi grupe de aspect normal, pentru $W=0$.

Se tratează apoi clasificarea grupelor în clase şi ordine, după criteriile assurice.

Se introduce, prin analogie, în studiul acestor mecanisme plane numai cu cuple de translaţie, noţiunea de manivelă de translaţie, ca grupă de prima clasă, ordinul 1, fiind formată dintr-un element şi o cuplă de translaţie.

Analiza structurală a mecanismelor duce la :

— determinarea numărului gradelor de libertate ale mecanismelor, utilizînd formula corespunzătoare

$$W = 2\ n - p_1$$

în care : W = numărul gradelor de libertate ale mecanismului, n = numărul elementelor mobile, p_1 = numărul cuplelor cinematice de clasa 1 ;

— împărţirea mecanismului în grupe cinematice ;

— clasificarea grupelor, determinînd clasa şi ordinul ;

— clasificarea mecanismelor după scop.

Partea a doua a cărţii studiază cinematica mecanismelor. Paragraful 1 tratează despre determinarea poziţiei elementelor mecanismelor. Se descriu metodele întrebuinţate pentru aceste determinări. Paragraful doi — analiza cinematică a mecanismelor — tratează două metode : prima este metoda grafo-analitică a planurilor deplasărilor, vitezelor şi acceleraţiilor pentru a cărei prezentare se studiază o serie de exemple de grupe cinematice simple şi apoi unele mai complexe. A doua metodă este cea a analizei cinematice a mecanismelor cu ajutorul diagramelor cinematice ; se studiază întîi cea mai simplă grupă, elementul manivelă de translaţie, trecîndu-se apoi la mecanisme compuse, cu mai multe grade de libertate. Paragraful trei tratează probleme privind sinteza cinematică a mecanismelor.

Partea a III-a a cărţii se ocupă de dinamica mecanismelor. În paragrafele 2 şi 3 se tratează probleme privind reducerea forţelor care acţionează asupra unui mecanism la o forţă rezultantă, precum şi determinarea reacţiunilor normale în cuplele cinematice ale mecanismelor. Paragraful 4 prezintă calculul mecanismelor, luîndu-se în consideraţie şi frecarea. Atît reducerea forţelor şi determinarea reacţiunilor normale în cuplele cinematice, cît şi calculul mecanismelor ţinîndu-se seama de influenţa frecării, au fost tratate întîi pentru elementul simplu, manivela de translaţie, şi apoi extinse la grupe cinematice de prima clasă, aspect normal, şi la grupe de clase şi ordine superioare. Paragraful 5 al părţii de dinamică cuprinde caracteristicile mecanice ale sistemelor cinematice, tratînd despre uniformizarea mişcării mecanismelor (sau maşinilor) ; de asemenea, despre coeficientul de randament al mecanismelor, cu care ocazie, pentru exemplificare, se studiază mecanismul cu pană.

În încheierea lucrării, sinteza dinamică a mecanismelor accentuează din nou asupra factorilor ce influenţează coeficientul de randament, asupra importanţei ungerii în fenomenul de frecare şi asupra importanţei pe care o prezintă însăşi forma constructivă a mecanismului. Ca probleme ce se pun, sînt : alegerea unei juste repartizări a cuplelor de translaţie, alegerea unor orientări raţionale a axelor cuplelor de translaţie şi înlocuirea frecării de alunecare, în elementele cuplelor, prin frecări de rostogolire (construirea de lagăre cu role).

Lucrarea lui A. I. Tainov constituie o sistematizare a problemelor privind mecanismele plane ce au numai cuple de translaţie, fiind folositoare atît inginerului proiectant cît şi în munca de cercetare ştiinţifică.

Tudor Vasile Hunker

С. А. ЧЕРКУДИНОВ, *Синтез плоских шарнирно-рычажных механизмов* (Sinteza mecanismelor plane cu pîrghii articulate). Издательство Академии Наук СССР, Москва, 1959, 320 p.

În lucrările de teoria mecanismelor din ultimul timp, o atenţie deosebită s-a acordat mecanismelor cu pîrghii articulate, acestea fiind utilizate pe o scară largă în construcţia de maşini.

Metodele generale de proiectare cinematică a mecanismelor cu pîrghii articulate sînt metodele de sinteză aproximativă care permit să se găsească mecanismele cu care se realizează condiţiile prescrise în mod aproximativ, dar cu o precizie suficientă pentru practică.

Problemele de sinteză aproximativă a mecanismelor se împart în două grupe :

— probleme de sinteză după poziţii ;

— probleme de reproducere a funcţiei, continuă pe segmentul dat.

În primul grup de probleme, parametrii schemei cinematice a mecanismului se determină din condiţia ca la cîteva poziţii prescrise ale elementului conducător să le corespundă poziţiile prescrise ale elementului condus.

În grupa a doua de probleme, parametrii schemei cinematice a mecanismului se determină din condiţia ca mecanismul să reproducă în mod aproximativ , dar cu precizia necesară, funcţia prescrisă, continuă pe un anumit segment.

În această lucrare, aşa după cum arată şi autorul, sînt prezentate numai problemele din cea de-a doua grupă. Problemele sintezei după poziţii sînt expuse numai în măsura în care sînt necesare pentru rezolvarea problemelor sintezei de reproducere aproximativă a funcţiei, continuă pe segmentul considerat.

Baza teoriei sintezei aproximative a mecanismelor o constituie lucrările fundamentale ale lui P. L. Cebîşev şi L. Burmester care au determinat două orientări principale în sinteza mecanismelor. În timp ce P. L. Cebîşev şi discipolii săi dezvoltau în general metodele algebrice, L. Burmester şi discipolii săi dezvoltau metodele geometrice.

Autorul acestei lucrări a căutat să găsească procedee de transformare succesivă a aproximării de interpolare căutate pe baza teoriei lui L. Burmester, într-o aproximare uniformă optimă, aproximarea lui Cebîşev. În acest fel, S. A. Cercudinov pune în contact direct lucrările celor doi autori, deschizînd drumul elaborării unor metode complexe în care să se folosească procedee geometrice şi analitice la rezolvarea problemelor privind proiectarea mecanismelor.

În prima parte a lucrării este expusă tratarea generală a problemei sintezei mecanismelor cu pîrghii articulate, trecîndu-se în revistă principalele lucrări care se ocupă cu această problemă (cap. I şi II), precum şi noţiunile de bază din geometria cinematică şi sinteza mecanismelor patrulatere pe bază de poziţii (cap. III şi IV).

În continuare, autorul tratează problema sintezei aproximative a mecanismului patrulater articulat. La început (cap. V), rezolvă această problemă pe cale analitică, iar apoi (cap. VI) reia aceeaşi problemă pe care o rezolvă pe cale grafo-analitică. Din analiza rezultatelor obţinute prin cele două metode, autorul ajunge la concluzia că cea de a doua metodă este mai bună deoarece reduce simţitor volumul de calcul şi în acelaşi timp are avantaje legate de baza lor geometrică, cum sînt claritatea grafică a rezolvării şi simplitatea controlului asupra desfăşurării rezolvării.

Folosind acelaşi procedeu de calcul, autorul trece apoi la problema sintezei mecanismului bielă-manivelă (cap. VII) pe care îl consideră ca un caz particular al mecanismului patrulater la care elementul fix este considerat de lungime infinită, precum şi la sinteza mecanismului cu culisă (cap. VIII).

În capitolele următoare (cap. IX şi X) autorul determină parametrii schemei cinematice pentru aceleaşi mecanisme, pe baza condiţiilor de aproximare optimă. Pornind de la teorema lui Gheronimus care determină condiţiile suficiente de aproximare optimă şi folosind metoda egalizării abaterilor limită, autorul caută să mărească precizia primei aproximări de interpolare.

În ultima parte a lucării (cap. XI—XIII) sînt rezolvate o serie de probleme ale sintezei mecanismelor cu 4 şi 6 elemente, pe baza unui număr incomplet al parametrilor schemei cinematice. Aici sînt studiate probleme ale proiectării mecanismelor, ţinîndu-se seama de unghiul de transmitere, precum şi probleme de sinteză a mecanismelor pentru mişcarea aproximativ uniformă şi a mecanismelor cu opriri.

Se remarcă, în mod deosebit, modul de expunere de către autor al materialului prezentat în această lucrare. Astfel, la începutul fiecărui capitol sînt expuse noţiunile de bază ale problemelor care sînt puse în discuţie, şi apoi se dau etapele succesive după care se face calculul unei probleme de sinteză. Pe baza acestui calcul pe etape se rezolvă cîteva exemple numerice. În felul acesta, toate problemele prezentate de autor pot fi urmărite şi înţelese mai uşor şi ajută pe acei ce lucrează în acest domeniu la calculul unor probleme asemănătoare. Acolo unde este cazul, autorul încheie capitolul respectiv cu cîteva concluzii în care sînt sintetizate problemele pe care le-a avut în vedere, precum şi concluziile care se desprind din calculele făcute.

De asemenea, trebuie scos în evidență faptul că drept procedeu de aproximare a fost ales un tip special de interpolare cu centre duble, care în ceea ce privește precizia nu se deosebește de interpolarea cu centre simple, dar simplifică calculul parametrilor schemei cinematice și trecerea ulterioară la o aproximare optimă.

Lurarea *Sinteza mecanismelor plane cu pîrghii articulate*, prin nivelul științific și prin bogatul material pe care îl prezintă, se situează printre lucrările de bază în domeniul sintezei mecanismelor.

C. Paraschiv

R. H. CERNI, L. E. FOSTER, *Instrumentation for engineering measurement*. (Aparatajul de măsură în construcția de mașini). John Wiley & Sons, New York — London, 1962, 456 p.

Materialul lucrării este expus în cadrul a 7 capitole principale, fiecare cu subîmpărțiri.

În primul capitol sînt prezentate diferite probleme legate de măsurarea sistemelor fizice. Astfel sînt prezentate aspecte generale privind obiectivele măsurătorilor, compunerea sistemelor de măsurare etc. Se insistă apoi asupra problemelor legate de erorile de măsură, precizie și incertitudine, și de sursele de erori.

Capitolul al doilea tratează (destul de dezvoltat) problemele diferitelor tipuri de traductoare electrice (piezoelectrice, fotoelectrice, rezistive, capacitive, inductive, cu frecvență modulată și generatoare de frecvență etc.).

Prin componența sa, acest capitol interesează pe inginerii și tehnicienii ce practică măsurătorile electronice într-o gamă variată de domenii.

În capitolul al treilea sînt prezentate diferite aspecte legate de amplificatoare, ca spre exemplu modificările de intrare, amplificatoare de curent continuu, de curent alternativ de frecvență foarte joasă, convertoare analogice și digitale etc.

Capitolul al patrulea prezintă diferite sisteme de indicare și înregistrare, spre exemplu osciloscoape catodice, înregistratoare grafice, înregistratoare magnetice (cu modulare de frecvență și cu modulare prin impulsuri). În acest capitol sînt prezentate sisteme digitale, de perforare și imprimare.

Un capitol mai redus este cel privind telemetria și transmiterea datelor (cap. V), care însă conține și aspecte ce se adresează proiectării sistemelor de telemetrie.

Capitolul al șaselea, *Folosirea și prelucrarea datelor*, indică anumite limite pentru cazul cînd este util să se urmărească manual sau semiautomat datele experimentale. Acest capitol interesează în mod deosebit prin aceea că prezintă numeroase aparaturi de analizare, măsurare, înregistrare și sisteme de transformare („analog-analog", „analog-digital"), sisteme de calcul etc.

Ultimul capitol prezintă de asemenea (în linii mari) diferite aparaturi speciale, ca cele radar privind încercările de zbor și de aterizare a rachetelor și navelor aeriene, aparatură electrică și electronică pentru sateliți artificiali, aparatură meteorologică și aparatură nucleară.

Paragraful ce cuprinde sistemele de măsură nucleară este general și la un nivel de primă informare.

Fiecare capitol al lucrării are o scurtă bibliografie proprie, ce se bazează numai pe materiale apărute în occident, cele mai recente lucrări citate fiind din 1959.

Consultarea lucrării este ușurată și de un index cu principalele probleme, aparate sau terminologii folosite.

Lucrarea deși nu se caracterizează ca fiind un pretext de expunere de aparatură de măsură, produsă de anumite firme comerciale (în această privință sînt relativ puține exemplificări).

totuşi, bazîndu-se numai pe anumite lucrări este unilaterală în ceea ce priveşte nivelul de prezentare a tehnicii noi de măsură.

Cu toate că sînt alternate, în capitolele menţionate, anumite incursiuni teoretice cu scheme de principiu şi cu imagini ale aparaturii speciale respective, în ansamblul ei, lucrarea rămîne numai la nivelul unui manual de informare generală ce se adresează inginerilor şi tehnicienilor ce au preocupări din domeniile expuse ale tehnicii măsurătorilor. Pentru personalul de cercetare, lucrarea nu aduce lucruri noi.

Expunerea este sistematizată şi clară, condiţiile editoriale de prezentare fiind de asemenea corespunzătoare.

D. Pavelescu

PUBLICAŢII PRIMITE PRIN SCHIMB LA REDACŢIE

L. A. RIABINKIN, *Teoria i praktika seismiceskogo metoda RNP*. Trudî Instituta Neftehimiceskoi i gazovoi promîşlenosti, **39** (1962).

— *Sbornik trudov*. Ukrainskii gossudarstvennîi proektno-izîskatelskii i naucino-issledovatelskii institut ,,Ukrghiprovodhoz'', Kiev, 1962.

— *Sbornik naucinîh trudov*. Beloruskii politehniceskii institut, Minsk, *75*, *76*, *88*, *89* (1960—1962).

— Trudî Gruzinskogo politehniceskogo instituta, Tbilisi, *1* (1962).

— Trudî Instituta Energhetiki Gruzinskoi Akademii Nauk, Tbilisi, **XIV**, **XV** (1961).

N. S. SATÎBALDIN, *Ekonomiceskaia effektivnost novîh tehnologhiceskih proţessov v ţvetnoi metallurghii*. Izd. AN Kazahskoi SSR, Alma Ata, 1962, 167 p.

I. S. FIŞMAN, *Metodî kolicestvennogo spektralnogo analiza*. Izd. Kazanskogo Universiteta, Kazan, 1961.

G. P. MALKOVSKI, *O masse i energhii v sovremennoi fizike*. Izd. Kazanskogo Universiteta, Kazan, 1961.

— *Trudî pervoi naucinoi konferenţii pe obşcei ţirkulaţii atmosferî, 14—18 martie 1960*.
Ghidromet Izdat., Moskva, 1962.

— Trudî Leningradskogo politehniceskogo instituta. Maşinostroenie, Leningrad, *219* (1962).

— Dokladî Akademii Nauk Armianskoi SSR, *1*, *2*, *3*, *4* (1962).

— Izvestia Akademii Nauk Armianskoi SSR, *4* (1962).

— Problemî procinosti v maşinostroenii, *8* (1962).

— Prikladnaia matematika i mehanika, *6* (1962); *1* (1963).

— Izvestia Akademii Nauk Kazahskoi SSR, Seria energheticeskaia, *2* (1962).

— Soobşcenia Akademii Nauk Gruzinskoi SSR, **XXVIII**. *5*, *6* (1962); **XXIX**, *1*, *2* (1962).

— Freiberger Forschungsheft, *A 205* (1962).

— Prace Instytutu Techniki Cieplnej, Lodz, **IX**, *18* (1962); **X**, *19* (1962).

— Prace Instytutu Lotnictwa, Warszawa, *17* (1962).

— Hochschul-Führer der Universität Rostock, 1962.

— Prace Matematyczne, Univ. Jagiellonskiego, Krakowia, *6*, *7* (1962).

G. P. MALKOVSKI, Hochschulschriften, Hochschule für Maschinenbau, Karl-Marx-Stadt, *5*, *6* (1962).
— Zprava Vzlu, Praha, *2* (1962).
— Zpravodaj Vzlu, Praha, *3*, *4* (1962).
— Mitteilungen der Forschungsanstalt für Schiffahrt, Wasser- und Grundbau, Berlin, *1* (1961); *2* (1962).
— Veröffentlichungen der Forschungsanstalt für Schiffahrt, Wasser- und Grundbau, Berlin, 9 (1961).
— Acta Mathematika Sinica, *1*, *2*, *3* (1962).
— Scientia Sinica, *1—12* (1962).
— Vermessungs Informationen, *13* (1962).
— Wissenschaftliche Zeitschrift der Humboldt-Universität zu Berlin, Mathematisch-Naturwissenschaftliche Reihe, *1*, *2*, *3*, *4*, *5* (1961); *1*, *2*, *3* (1962).
— *Plasma Hydromagnetics.* The sixth Lockheed Symposium on Magnetohydrodynamics, Edited by Daniel Bershader, Stanford University Press, 1962, 146 p.
W. KAUFMANN, *Technische Hydro- und Aeromechanik.* Springer-Verlag, Berlin 1962, 417 p. -
G. KAMIMOTO, *Effect of shock attenuation on reflected shock waves.* Department of Aeronautical Engineering, Kyoto University, Current Papers, 1962.
— Wissenschatliche Abhandlungen der Physikalisch-Technischen Bundesanstalt, Braunschweig, 1961, partea 1 şi 2.
— Publications de l'Ecole Polytechnique de l'Université de Lausanne, *57*, *58*, *65*, *66*, *67* (1962).
— College of Aeronautics, Cranfield, CoA Note *127*, *130*, *131*, *133*, *134* (1962); CoA Report *156* (1962).
— Engineering Research Institute, Kyoto University, Technical Report *6*, *7*, *8*, *9* (1962).
— Bulletin of the Purdue Engineering Experiment Station, Lafayette, *147*, *148* (1962).
— Aeronautical Research Council, Teddington, Reports and Memoranda *3282*, *3290*, *3294*, *3297*, *3299* (1962).
— The Institution of Mechanical Engineers, Proceedings of the Automobile Division, *1*, *2*, *3*, *4*, *5* (1962).
— DVL — Deutsche Versuchsanstalt für Luftfahrt, Bericht *151*, *168*, *175*, *189* (1962).
— Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, **175**, p. 1—85 (1961).
— Ohio State University, Engineering Experiment Station Bulletin, *191*, *192* (1962)

Aeronautical Research Council, Teddington
Reports & Memoranda

Nr. 3204 — E. L. Goldsmith, *Internal contaction effect, initial rate of subsonic diffusion and core and centrebody shape on the pressure recovery of a conical-centrebody intake at supersonic speeds.*
Nr. 3244 — H. C. Garner, *Pressure distribution and surface flow on 5% and 9% thick wings with curved tip and 60° sweepback.*
Nr. 3254 — D. S. Whitehead, *Force and moment coefficients for vibrating aerofoils in cascade.*
Nr. 3268 — D. R. B. Webb, *Effects of wing stiffness and inertia changes on the modes and frequencies of a model Delta aircraft.*

Nr. 3280 — J. E. Nethaway, *Measurement of aerodynamic reacting on the nose of a Delta aircraft at speeds up to $M = 1.65$.*

Nr. 3284. — E. G. Broadbent, *Flutter of an all-moving tailplane.*

Nr. 3287 — T. E. B. Bateman, *A comparison of results in the A. R. A. transonic tunnel on a small and a large model of the slender wing.*

Transactions of Chalmers University of Tehnology, Gothenburg

Nr. 260 — I. Fernlund, *Critical speeds of a shaft with thin discs.*

Nr. 261 — I. Fernlund, *On solving Reynolds' equation for bearings of finite width with Fourier sine transforms.*

— National Physical Laboratory, London, Report for 1961.

— Hydraulic Research, Wallingford, 1961, 80 p.

— Year Book of American Iron & Steel Institute, New York, 1962, 350 p.

— Memorie e studi dell Istituto di idraulica e costruzioni idrauliche del Politecnico di Milano, *184—193* (1961).

LUCRĂRI APĂRUTE ÎN EDITURA ACADEMIEI R.P.R.

N. TIPEI, V. N. CONSTANTINESCU, AL. NICA şi O. BIŢĂ, **Lagăre cu alunecare (calcul, proiectare, ungere)**, 436 p., 23,70 lei.

P. P. TEODORESCU, **Probleme plane în teoria elasticităţii**, 996 p. + 6 pl., 42,80 lei.

N. N. PATRAULEA, **Studii de aerodinamica hipersustentaţiei** (**Zborul cu decolare şi aterizare scurtă sau la verticală**), 1962, 627 p. + 3 pl., cartonat, 32,70 lei.

E. ZAHARESCU, **Contribuţii la studiul capacităţii portante a fundaţiilor**, 200 p. + 4 pl., 16,40 lei.

M. SOARE, **Application des équations aux différences finies au calcul des coques**, 460 p., 33,30 lei.

V. VISARION, **Elemente pentru calculul plăcilor curbe subţiri elastice**, 386 p., 16,80 lei.

* * * **Probleme de automatizare** II **Folosirea maşinilor electronice de calcul în industrie şi economie** (**Consfătuirea asupra maşinilor electronice de calcul — ianuarie 1960**), 171 p., 8,55 lei.

* * * **Probleme de automatizare** III, **Sesiunea asupra problemelor teoretice şi practice privitoare la automatizările industriale** — 13 octombrie 1960, 188 p., 8,80 lei.

* * * **Probleme de automatizare** IV, **Sesiunea asupra problemelor teoretice şi practice privitoare la automatizările industriale** (noiembrie 1961), 264 p. + 3 pl., 13,50 lei.

C. PENESCU, **Automatica şi telemecanica sistemelor energetice**, vol. III, 417 p. + 9 pl., 30,20 lei.

GR. C. MOISIL, **Circuite cu tranzistori**, vol I, 142 p., 8,25 lei, vol. II, 156 p., 8,55 lei.

A. CĂLUŞARU, **Depunerea electrolitică a metalelor în formă dispersă** 320 p. + 3 pl., 21,40 lei.

A. MORARU, **Amplidina (maşina electrică amplificatoare de curent continu transversal)**, 328 p. + 2 pl., 14,90 lei.

T. OROVEANU, **Scurgerea fluidelor prin medii poroase neomogene**, 329

TR. SĂLĂGEAN, **Fenomene fizice şi metalurgice la sudarea cu arcul elect** 219 p., 12,10 lei.

C. A. VASILESCU şi colab., **Exploatarea raţională a gazelor naturale** 26,40 lei.

* * * **Tehnica nucleară în sprijinul producţiei, Unele realizări ale In atomică**, 253 p., + 1 pl., 14,30 lei.

* * * **Sesiunea ştiinţifică jubiliară a Institutului de mecanică ap al Academiei R.P.R.**, 445 p. + 1 pl., 23,30 lei.

F 2557

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

INSTITUTUL DE MECANICĂ APLICATĂ „TRAIAN VUIA"

R

67

1458

4
ANUL XIV
1963

1963 DEC 6

STUDII ȘI CERCETĂRI DE
MECANICĂ APLICATĂ

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

COMITETUL DE REDACŢIE

Redactor responsabil:

ACADEMICIAN E. CARAFOLI

Membri:

ACADEMICIAN N. PROFIRI;
ACADEMICIAN A. BELEŞ;
CR. MATEESCU, membru corespondent al Academiei R.P.R.;
N. TIPEI, membru corespondent al Academiei R.P.R.;
R. BOGDAN, conferenţiar la Institutul de petrol, gaze şi geologie, Bucureşti;
M. ARCAN, şef secţie, Institutul de cercetări în construcţii şi economia construcţiilor (INCERC), Bucureşti.

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ
APARE DE 6 ORI PE AN
Redacţia: INSTITUTUL DE MECANICĂ APLICATĂ „TRAIAN VUIA"
Str. Const. Mille 15, tel. 17.34.09

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÎNE
INSTITUTUL DE MECANICĂ APLICATĂ „TRAIAN VUIA"

STUDII ȘI CERCETĂRI DE
MECANICĂ APLICATĂ

4

ANUL XIV

1963

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

574/1964
F
2557
1989

Revista

STUDII ȘI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

publică:

- Studii originale *de înalt nivel cu caracter fundamental de interes general științific și reflectare în practică.*
- Note (*lucrări mai scurte*) *cu caracter original sau constituind o punere la punct a unei numite chestiuni.*
- Referate științifice și tehnice *în care se expune: stadiul actual al unei anumite probleme, subliniindu-se aspectul nou, observații și discuții asupra unor lucrări de mecanică aplicată.*
- Recenzii *asupra cărții și studiilor romîne sau străine.*

Domeniile de specialitate ale revistei sînt:

- *Astrodinamică (optimizarea traiectoriilor, calculul orbitelor sau al segmentelor de orbite, optimizarea transferului interorbital, impactul vehiculelor spațiale cu meteoriții, orbite sincrone, astrorelativitate, zborul în atmosfera rarefiată, reintrarea în atmosfera densă, frînarea și captarea aerodinamică a unui vehicul cosmic).*
- *Aeromecanică (mecanica fluidelor, aerodinamică, dinamica gazelor, mecanica avionului, aeroelasticitate, aerodinamica motoarelor cu ardere internă, termo-aerodinamica motoarelor cu reacție, ventilație, aeromotori).*
- *Hidromecanică (hidraulică, construcții hidrotehnice, irigație, turbine și pompe, amenajări hidraulice).*
- *Construcții de mașini (cinematica și dinamica mecanismelor, frecare, ungere, uzură, metode moderne de calculul mașinilor, automatizare, studiul suprafețelor, tehnologia mediilor solide continue).*
- *Mecanică generală (rezistența materialelor, elasticitate, plasticitate, vibrații și șocuri, stabilitate, analogii electrice și hidraulice).*
- *Statica și dinamica construcțiilor (metode pentru calculul static și dinamic al construcțiilor, studiul materialelor neomogene, geotehnică, stabilitatea terenurilor, metode de executarea lucrărilor de construcții).*
- *Tehnica măsurătorilor (aparate electronice pentru măsurarea mărimilor mecanice, utilizarea ultrasunetului și a izotopilor radioactivi în tehnică).*

Revista urmărește stimularea activității științifice precum și difuzarea lucrărilor valoroase, primind în acest scop spre publicare articole de la toți specialiștii din țară și de la colaboratorii din străinătate.

★

Articolele vor fi redactate într-o formă concisă și clară, evitîndu-se introduceri lungi referitoare la părțile cunoscute ale problemei.

Manuscrisele se vor preda în trei exemplare, dactilografiate la două rînduri, iar formulele vor fi scrise clar și citeț cu cerneală. Figurile și graficele se vor desena în tuș și hîrtie de calc.

Se vor utiliza figuri numai cînd este absolut necesar și în număr cît mai mic.

Literatura citată în text se va insera la sfîrșitul lucrării sub formă de bibliografie. Se va indica numele autorului, titlul lucrării, tomul, pagina, locul, editura, anul de apariție, iar pentru revistă se va indica și numărul respectiv. Trimiteri la lucrări nepublicate nu se admit.

Pe lîngă text se vor înainta pentru fiecare exemplar rezumate în limba romînă, eventual în rusă, franceză, engleză și germană. Rezumatele vor fi în medie una pagină dactilografiată la 20 pagini de text.

Aceleași norme sînt valabile și pentru colaborările din străinătate, care pot fi redactate în limbile rusă, engleză, franceză și germană.

Manuscrisele se vor trimite la sediul Institutului de mecanică aplicată, București, str. C. Mille nr. 15, raionul „16 februarie”.

Budapesti Műszaki Egyetem Központi Könyvtára 1848

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÎNE
INSTITUTUL DE MECANICĂ APLICATĂ „TRAIAN VUIA"

STUDII ȘI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

Tomul XIV, nr. 4 1963

SUMAR

STUDII Pag.

E. CARAFOLI și C. BERBENTE, Caracteristicile aerodinamice ale profilelor în regim supersonic-hipersonic, în cazul neglijării pierderilor de sarcină datorite undelor de șoc 751
D. PANTAZOPOL și C. S. IOAN, O metodă pentru studiul jeturilor plane incompresibile mărginite de pînze de jet subțiri 769
T. OROVEANU, Aplicații ale unui procedeu aproximativ de determinare a valorilor proprii în problema Sturm-Liouville 781
I. VLADIMIRESCU și R. BĂDESCU, Unde de translație cu pierderi pe traseu prin infiltrație. Mișcarea frontului undei și variația debitului 793
PETRE BRĂDEANU și ION PĂVĂLOIU, Regimuri optime de dirijare a tracțiunii unor rachete 805
RADU PRIȘCU și GHEORGHE OLTEANU, Studiu asupra barajelor de greutate cu paramentul amonte negativ 817
GH. BUZDUGAN, O nouă metodă pentru calculul coeficientului de siguranță la solicitări variabile prin cicluri asimetrice 827
MIRCEA SOARE, Teoria încovoierii simetrice a paraboloidului de rotație pleoștit pe contur circular 837
V. MANEA, Considerații asupra teoriei plăcilor plane elastice subțiri 851
NICOLAE S. PÎRVULESCU, Asupra flambajului superelastic al barelor de oțel . . . 867
EDUARD NICOLAU, Microbeton cu liant epoxidic pentru modele ale construcțiilor 885
FL. DINCĂ, Vibrațiile disipative ale autovehiculelor. I. 909
FL. DUDIȚĂ, Turații critice la încovoiere în transmisia cardanică a automobilului 925

NOTE

P. A. LEBEDEV, Despre o aplicare a integralelor curbilinii în mecanică 937

MANIFESTĂRI ȘTIINȚIFICE PESTE HOTARE

D. MANGERON, A doua conferință asupra vibrațiilor neliniare organizată de Academia poloneză de științe împreună cu Academia cehoslovacă de științe, Varșovia, 18—21 septembrie 1962 947
D. MANGERON, A IV-a sesiune politehnică a universității tehnice din Dresda (7—9 noiembrie 1962) 955

ANIVERSĂRI ȘTIINȚIFICE DE SEAMĂ

D. MANGERON, Un deceniu de activitate centralizată de informație științifică în domeniul mecanicii teoretice și aplicate 963
RECENZII 967
PUBLICAȚII PRIMITE PRIN SCHIMB LA REDACȚIE 983

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

Le périodique

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ
(ÉTUDES ET RECHERCHES DE MÉCANIQUE APPLIQUÉE)

publie:

● *des* études originales *à caractère hautement scientifique, recherches fondamentales d'intérêt général, orientées vers l'activité pratique*;

● *des* notes (*communications brèves*) *à caractère général, ou constituant une mise au point d'une certaine question*;

● *des* exposés scientifiques et techniques *où l'on expose*: *l'état actuel d'un certain problème, en soulignant son aspect nouveau*; *des remarques et discussions concernant certains travaux de mécanique appliquée*;

● *des* notes bibliographiques *au sujet des livres et des études roumains et étrangers.*

Les domaines de spécialité de la revue sont les suivants:

● *astrodynamique* (*réalisation des trajectoires optimums, calcul des orbites, ou des segments d'orbites, obtention du transfert interorbital optimum, impact des véhicules spatiaux avec les météorites, orbites synchrones, astrorelativité, vol en atmosphère raréfiée, retour dans l'atmosphère dense, freinage et saisie aérodynamique d'un véhicule cosmique*).

● *aéromécanique* (*mécanique des fluides, aérodynamique, dynamique des gaz, mécanique de l'avion, aéroélasticité, aérodynamique des moteurs à combustion interne, thermo-aérodynamique des moteurs à réaction, ventilation, aéromoteurs*);

● *hydromécanique* (*hydraulique, constructions hydrotechniques, irrigation, turbines hydrauliques et pompes*);

● *constructions mécaniques* (*cinématique et dynamique des mécanismes, frottement, lubrification, usure, méthodes modernes de calcul des machines, automation, étude des surfaces, technologie des milieux solides continus*);

● *mécanique générale* (*résistance des matériaux, élasticité, plasticité, vibrations et chocs, stabilité, analogies électriques et hydrauliques*);

● *statique et dynamique des constructions* (*méthodes de calcul statique et dynamique des constructions, étude des matériaux hétérogènes, mécanique des sols, stabilité des terrains, méthodes d'exécution des travaux de construction*);

● *technique des mesures* (*appareils électroniques pour la mesure des grandeurs mécaniques, utilisation des ultra-sons et des isotopes radioactifs en technique*).

La revue tend à stimuler la recherche scientifique et la diffusion des travaux méritoires en publiant, dans ce but, les articles scientifiques des collaborateurs roumains et étrangers.

★

Les articles seront rédigés dans un style concis et clair, étant évitées les introductions trop longues concernant les données connues des problèmes.

Les manuscrits seront envoyés en trois exemplaires, dactylographiés, aux formules écrites, de manière lisible, à l'encre. Les figures, ainsi que les diagrammes, seront tracés à l'encre de Chine sur du papier calque. On utilisera le nombre de figures strictement indispensable.

Les références bibliographiques seront mentionnées à la fin de l'article. On y indiquera le nom de l'auteur, le titre de l'ouvrage, le tome, la page, le lieu de la parution et, pour les périodiques on ajoutera le numéro auquel on se réfère. On ne fera pas mention des travaux non publiés.

Les manuscrits seront accompagnés d'un résumé en roumain ou, éventuellement, en russe, français, anglais ou allemand (environ une page pour 20 pages dactylographiées de texte).

Les mêmes normes sont valables pour les collaborateurs étrangers, qui peuvent rédiger leurs travaux en russe, anglais, français ou allemand.

Les manuscrits seront envoyés à l'adresse suivante: Institut de Mécanique Appliquée «Traian Vuia», 15, str. Constantin Mille, Bucarest, Roumanie.

Журнал

„ТРУДЫ И ИССЛЕДОВАНИЯ ПО ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКЕ"

публикует:

- Оригинальные исследования *высокого уровня, представляющие общий научный интерес, связанный с практикой.*
- Заметки (*краткие работы*) *оригинального характера, представляющие уточнение некоторого вопроса.*
- Научные и технические рефераты, *в которых излагаются*: *современное состояние определенной задачи с выявлением нового подхода к ней, замечания и обсуждения некоторых работ по прикладной механике.*
- Рецензии на *румынские или зарубежные книги и исследования. В журнале публикуются работы по следующим специальностям*:
- *Астродинамика* (*оптимальные траектории, расчет орбит или отрезков орбит, оптимальная междорбитальная теплопередача, удар космических экипажей о метеориты, полет в разреженной атмосфере, возвращение в плотную атмосферу, торможение и аэродинамическое улавливание космического экипажа*).
- *Аэромеханика* (*механика жидкостей и газов, аэродинамика, газодинамика, механика самолета, аэроупругость, аэродинамика двигателей внутреннего сгорания, термоаэродинамика реактивных двигателей, вентиляция, ветродвигатели*).
- *Гидромеханика* (*гидравлика, гидромеханические сооружения, орошение, гидравлические турбины и насосы, гидравлические устройства.*
- *Машиностроение* (*кинематика и динамика механизмов, трение, смазка, износ, современные методы расчета различных машин, автоматизация, исследование поверхностей, механика сплошных твердых сред*).
- *Общая механика* (*сопротивление материалов, упругость, пластичность, вибрация и удары, устойчивость, электрические и гидравлические аналогии*).

— *Статика и динамика сооружений* (*методы статистического и динамического расчета сооружений, исследование неоднородных материалов, механика грунтов, устойчивость грунтов, методы производства строительных работ.*

— *Техника измерений* (*электронные приборы для измерения механических величин, применение ультразвука и радиоактивных изотопов в механике*).

Журнал предназначен для стимулирования научной деятельности, а также для распространения выдающихся работ и принимает с этой целью к опубликованию статьи всех отечественных специалистов и зарубежных сотрудников.

★

Статьи должны быть написаны в сжатой и ясной форме, избегая длинных введений (*относящихся к уже известным частям проблемы*).

Рукописи следует направлять в трех экземплярах, напечатанных на машинке через два интервала, формулы должны быть вписаны чернилами четко и ясно. Рисунки и графики следует делать китайской тушью на кальке. Присылать рисунки следует только в случае совершенной необходимости и в ограниченном количестве.

Литература, цитированная в тексте, должна даваться общим списком в конце статьи. Нужно указывать инициалы и фамилию автора, заглавие, том, страницу, место издания, издательство, год издания, а для журналов — и соответствующий номер. Ссылки на неопубликованные работы не допускаются.

Кроме текста, для каждого экземпляра, нужно представлять резюме на румынском языке или же на русском, французском, английском или немецком языках. Резюме должно составлять 1 страницу, написанную на машинке, на 20 страниц текста. Эти же нормы относятся и к работам зарубежных сотрудников, редактированным на русском, английском, французском или немецком языках.

Рукописи препровождаются по адресу: *Институт прикладной механики, Бухарест, ул. Константин Милле, № 15, район 15 февраля.*

STUDII

CARACTERISTICILE AERODINAMICE ALE PROFILELOR ÎN REGIM SUPERSONIC-HIPERSONIC, ÎN CAZUL NEGLIJĂRII PIERDERILOR DE SARCINĂ DATORITE UNDELOR DE ȘOC

DE

E. CARAFOLI și C. BERBENTE

1. CONSIDERAȚII INTRODUCTIVE

În general, studiul caracteristicilor aerodinamice ale profilelor se face separat pentru regimul supersonic și pentru cel hipersonic.

Formulele unitare ale coeficientului de presiune, pentru ambele regimuri, supersonic-hipersonic, se mărginesc pe de o parte la un interval mic de incidențe, neputîndu-se aplica la incidențe mari, iar pe de altă parte, pentru compresiunea și expansiunea care au loc pe conturul continuu al unui profil la incidențe și numere Mach mai mari se utilizează două formule diferite.

Pentru a evita acest inconvenient, am stabilit într-o lucrare anterioară [1], o formulă generală unitară care se aplică pe un larg interval de incidențe și încadrează în expresia coeficientului de presiune ambele fenomene de compresiune și expansiune, astfel încît această expresie poate servi la integrarea presiunilor pe profilele aerodinamice cu contur continuu în regim supersonic și hipersonic moderat.

Într-adevăr, pornind de la ecuația generală rezultată din teoria undelor de șoc oblice, o vom pune sub forma :

$$\frac{\left(1-\frac{C_p}{2}\right)\operatorname{tg}\delta}{\left(1-\frac{\gamma+1}{2}\,\frac{M_\infty^2}{M_\infty^2-1}\,\frac{C_p}{2}\right)^{1/2}}=\frac{1}{2}\,C_p\,\frac{\sqrt{M_\infty^2-1}}{\left(1+\frac{\gamma+1}{2}\,M_\infty^2\,\frac{C_p}{2}\right)^{1/2}}, \qquad (1)$$

unde C_p este coeficientul de presiune, δ este deviația curentului, pozitiv în cazul undei de șoc ($\delta > 0$) și negativ în cazul expansiunii ($\delta < 0$), M_∞

numărul Mach al curentului liber la infinit şi γ raportul căldurilor specifice ($\gamma = 1{,}4$ pentru aer).

Punînd mai departe

$$m = \frac{M_\infty}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}}, \tag{2}$$

se obţine, după unele operaţii simple,

$$\frac{C_p}{m^2 \sin^2\delta} = \frac{\gamma+1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^2 + \frac{4}{K^2}} = \frac{\gamma+1}{2} + $$

$$+ \frac{2}{K}\sqrt{1 + \left(\frac{\gamma+1}{4}\right)^2 K^2} = P, \tag{3}$$

expresie pe care am notat-o cu P (P_+ pentru compresiune şi P_- pentru expansiune, corespunzător semnelor plus şi minus (din membrul al doilea din formula de mai sus) şi unde

$$K = mM_\infty \sin\delta \tag{4}$$

este noul parametru unitar de similaritate pentru întregul regim supersonic-hipersonic. În membrul al treilea, această distincţie de semne este cuprinsă în K. Vom face mai departe următoarele consideraţii :

1. Formula (3) se poate aplica, atît pentru regimul supersonic cît şi pentru cel hipersonic moderat, pe un larg interval de unghiuri (pînă la 30°), considerînd bineînţeles cazul în care în spatele undei de şoc regimul este mereu supersonic [1].

2. Această formulă este valabilă atît pentru compresiune, după unda de şoc ($\delta > 0$), cît şi pentru expansiune ($\delta < 0$).

Într-adevăr, pentru unghiuri mici şi M_∞ moderat se demonstrează că expansiunea şi compresiunea au aproximativ aceeaşi dezvoltare pînă la termenul în $\sin^3\delta$, următorii fiind neglijabili.

Pe de altă parte, expansiunea la un unghi oarecare δ şi M_∞ suficient de mare ne va da :

$$C_p = \frac{p - p_\infty}{p_\infty} \frac{2}{\gamma M^2_{\infty_{\gamma\to 1}}} \approx -\frac{2}{M_\infty^2}, \tag{5}$$

valoare care se obţine direct din formula (3), luînd semnul minus în membrul al doilea şi dezvoltînd radicalul.

Faptul că expansiunea după formula undelor de şoc, în care se schimbă semnul lui δ ($\delta < 0$), este în foarte bun acord cu cea dată de Prandtl-Meyer se poate explica foarte simplu : în expansiune, presiunea finală este mică faţă de cea de la infinit şi deci o abatere, chiar mare, faţă de valorile exacte se traduce într-un procent mic faţă de presiunea de referinţă de la infinit.

3. Cînd $M_\infty \to \infty$ şi $\gamma \to 1$ formula (3) se reduce la expresia coeficientului de impact (formula lui Newton),

$$C_p = 2\sin^2\delta. \tag{6}$$

4. În cazul cînd incidența este mare, fie la profile frînte, fie la profile arcuite, cu vîrf ascuțit, din cauza pierderilor de sarcină prin unda de șoc s-ar putea introduce erori apreciabile. Într-o lucrare viitoare vom face o aplicație directă la profilele aerodinamice, considerînd cazul undelor de șoc de mare intensitate.

În lucrarea de față ne vom limita la cazul undelor de șoc de mică intensitate cînd toate aceste pierderi sînt neglijabile, considerînd că incidențele și numerele Mach sînt moderate; de asemenea, vom presupune că se neglijează efectul undelor reflectate și mișcarea turbionară care are loc în spatele undei de șoc, atunci cînd profilul este curb, precum și influența stratului limită care, după cum se știe, are drept efect o ușoară modificare a profilului.

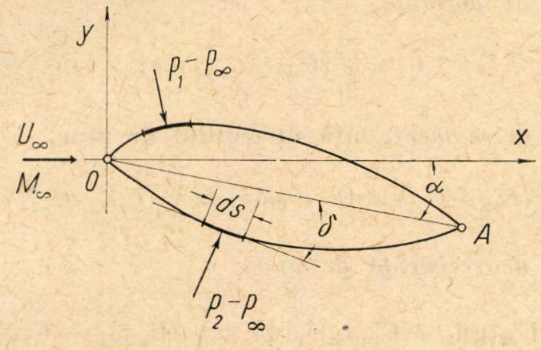


Fig. 1

În această ipoteză, așa cum am spus mai sus, incidențele vor trebui considerate mici, ceea ce ne permite să simplificăm formulele de calcul. Astfel, pentru $K \leqslant 1{,}5$, expresia (3) a distribuției de presiuni se poate dezvolta în serie și limita, cu o bună aproximație, la primii trei termeni. Vom obține în acest fel

$$C_p = \frac{\gamma+1}{2} m^2 \sin^2\delta + \frac{2}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\gamma+1}{4}\right)^2 m^2 M_\infty^2 \sin^2\delta\right] \sin\delta \approx$$

$$\approx \frac{\gamma+1}{2} m^2 \delta^2 + \frac{2\delta}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\gamma+1}{4}\right)^2 m^2 M_\infty^2 \delta^2\right]. \qquad (7)$$

Vom trece acum la stabilirea, pe baza formulei (7), a expresiilor pentru calculul caracteristicilor aerodinamice ale diverselor forme de profile în regim *supersonic-hipersonic moderat.*

Vom considera un profil de formă generală (fig.1) și vom scrie că pe un element ds al conturului se exercită, respectiv, forțele elementare:

$$(p - p_\infty)\,\mathrm{d}s.\cos\delta = (p - p_\infty)\,\mathrm{d}x, \qquad (8a)$$

după direcția axei Oy și

$$(p-p_\infty)\,\mathrm{d}s\cdot\sin\delta=(p-p_\infty)\,\mathrm{tg}\,\delta\,\mathrm{d}x, \tag{8b}$$

după direcția axei Ox.

Adoptînd acum indicii 1 și 2 respectiv pentru extrados și intrados și luînd coarda profilului egală cu unu $(\overline{OA}=1)$, vom obține în mod corespunzător:

coeficientul de portanță,

$$C_z=\int_0^1 (C_{p2}-C_{p1})\,\mathrm{d}x\,; \tag{9}$$

coeficientul de moment, față de bordul de atac,

$$C_m=\int_0^1 (C_{p2}-C_{p1})\,(x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y)\approx\int_0^1 (C_{p2}-C_{p1})\,x\,\mathrm{d}x\,; \tag{10}$$

coeficientul de rezistență de undă,

$$C_x=\int_0^1 (C_{p2}\mathrm{tg}\,\delta_2+C_{p1}\,\mathrm{tg}\,\delta_1)\,\mathrm{d}x\approx\int_0^1 (C_{p2}\,\delta_2+C_{p1}\,\delta_1)\,\mathrm{d}x. \tag{11}$$

2. CALCULUL PROFILELOR FRÎNTE

Aplicarea formulelor de mai sus este mai simplă și nu prezintă nici o dificultate de calcul. Vom avea astfel succesiv:

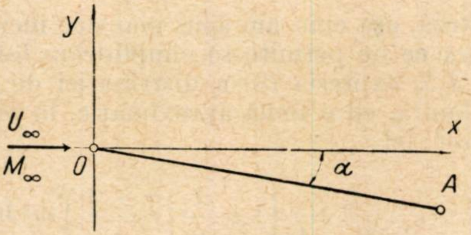


Fig. 2

a) *Placa plană* (fig. 2). Prin aplicarea directă a formulei (7), vom obține caracteristicile aerodinamice ale plăcii plane,

$$C_z=\frac{4\alpha}{\sqrt{M_\infty^2-1}}\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{\gamma+1}{4}\right)^2 m^2\,M_\infty^2\,\alpha^2\right], \tag{12a}$$

$$C_m=1/2\;C_z, \tag{12b}$$

$$C_x=\alpha C_z, \tag{12c}$$

unde m este dat de (2).

b) *Profilul frînt subțire* (fig. 3). Vom considera coarda egală cu unitatea ($\overline{OA} = 1$) și vom observa că, notînd cu k partea din coardă pînă la punctul de frîntură iar cu ε săgeata, vom avea

$$\tau_0 k = \tau_a (1-k) = \varepsilon, \tag{13}$$

ceea ce ne va permite să scriem rezultatele în funcție de ε.

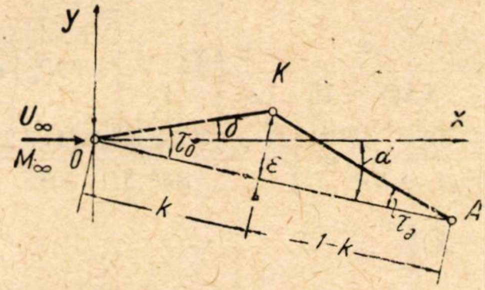


Fig. 3

Aplicînd formulele (7), (9), (10) și (11) pe porțiuni ($\overline{OK}$, $\overline{KA}$), vom obține după unele operații simple,

$$C_z = \frac{4}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \left\{ \alpha + \frac{1}{2} \left(\frac{\gamma+1}{4} \right)^2 m^2 M_\infty^2 \left[k \left(\alpha - \frac{\varepsilon}{k} \right)^3 + (1-k) \left(\alpha + \frac{\varepsilon}{1-k} \right)^3 \right] \right\}, \tag{14a}$$

$$C_m = \frac{2}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \left\{ \alpha + \varepsilon + \frac{1}{2} \left(\frac{\gamma+1}{4} \right)^2 m^2 M_\infty^2 \left[k^2 \left(\alpha - \frac{\varepsilon}{k} \right)^3 + (1-k^2) \left(\alpha + \frac{\varepsilon}{1-k} \right)^3 \right] \right\}, \tag{14b}$$

$$C_x = \frac{4}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \left\{ \alpha^2 + \frac{\varepsilon^2}{k(1-k)} + \frac{1}{2} \left(\frac{\gamma+1}{4} \right)^2 m^2 M_\infty^2 \left[k \left(\alpha - \frac{\varepsilon}{k} \right)^4 + \right. \right.$$
$$\left. \left. + (1-k) \left(\alpha + \frac{\varepsilon}{1-k} \right)^4 \right] \right\}. \tag{14c}$$

c) *Profile frînte de grosime simetrică* (fig. 4). Notînd cu k porțiunea de profil pînă la grosimea maximă pe care o vom nota cu ε, vom scrie

$$k\tau_0 = (1-k)\tau_a = \frac{\varepsilon}{2}\cdot \tag{15}$$

Integrînd pe porțiuni vom obține, după unele simplificări, următoarele expresii pentru caracteristicile aerodinamice:

$$C_z = \frac{4\alpha}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\gamma + 1}{4} \right)^2 m^2 M_\infty^2 \left(\alpha^2 + \frac{3\varepsilon^2}{4k(1-k)} \right) \right], \tag{16a}$$

$$C_m = \frac{2\alpha}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\gamma + 1}{4} \right)^2 m^2 M_\infty^2 \left(\alpha^2 + \frac{3\varepsilon^2}{2(1-k)} \right) \right] - \frac{\gamma + 1}{2} m^2 \varepsilon \alpha, \tag{16b}$$

$$C_x = \frac{4}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \left[\alpha^2 + \frac{\varepsilon^2}{4k(1-k)} + \frac{1}{2} \left(\frac{\gamma + 1}{4} \right)^2 m^2 M_\infty^2 \left(\alpha^4 + \frac{3\alpha^2\varepsilon^2}{2k(1-k)} + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{\varepsilon^4(1 - 3k + 3k^2)}{16k^3(1-k)^3} \right) \right] + \frac{(\gamma + 1) m^2 \varepsilon^3 (1 - 2k)}{8k^2(1-k)^2}. \tag{16c}$$

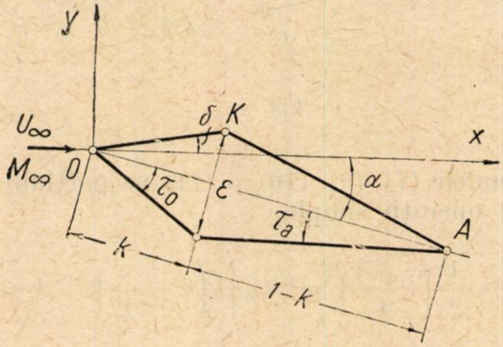


Fig. 4

Pentru $k = 1/2$ se obține profilul rombic cu următoarele caracteristici:

$$C_z = \frac{4\alpha}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\gamma + 1}{4} \right)^2 m^2 M_\infty^2 (\alpha^2 + 3\varepsilon^2) \right], \tag{17a}$$

$$C_m = 1/2\ C_z - \frac{\gamma + 1}{2} m^2 \varepsilon \alpha \approx \frac{1}{2} \left[1 - \frac{\varepsilon}{4} \frac{(\gamma + 1) M_\infty^2}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \right] C_z, \tag{17b}$$

$$C_x = \frac{4}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \left[\alpha^2 + \varepsilon^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\gamma + 1}{4} \right)^2 m^2 M_\infty^2 (\alpha^4 + 6\alpha^2\varepsilon^2 + \varepsilon^4) \right]. \tag{17c}$$

d) *Profile frînte de grosime antisimetrică* (fig. 5). În acest caz, aplicînd formulele cunoscute și ținînd seama că avem

$$k\tau_a = (1 - k)\,\tau_0 = \frac{\varepsilon}{2}, \tag{18}$$

vom obține succesiv:

$$C_z = \frac{4}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}}\left[\alpha + \frac{1}{2}\left(\frac{\gamma+1}{4}\right)^2 m^2 M_\infty^2 \left(\alpha^3 + \frac{3\alpha\varepsilon^2}{4k(1-k)} - \frac{\varepsilon^3(1-2k)}{8k^2(1-k)^2}\right)\right], \tag{19a}$$

$$C_m = 1/2\ C_z - \frac{(\gamma+1)\, m^2\varepsilon}{2}\left[\alpha - \frac{\varepsilon(1-2k)}{4k(1-k)}\right], \tag{19b}$$

$$C_x = \frac{4}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}}\left[\alpha^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\gamma+1}{4}\right)^2 m^2 M_\infty^2 \left(\alpha^4 + \frac{3\,\alpha^2\varepsilon^2}{2k(1-k)} - \frac{\alpha\,\varepsilon^3(1-2k)}{2\,k^2(1-k)^2} + \frac{\varepsilon^4\,(1-3k+3k^2)}{16k^3(1-k)^3}\right)\right]. \tag{19c}$$

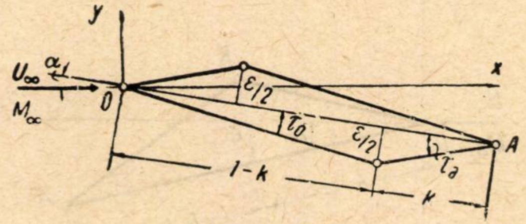


Fig. 5

e) *Profile frînte cu intradosul plan* (fig. 6). Păstrînd aceleași notații ca mai sus, vom obține în mod analog, cu aproximațiile obișnuite în cazul incidențelor mici,

$$C_z = \frac{2}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}}\left\{2\alpha + \frac{1}{2}\left(\frac{\gamma+1}{4}\right)^2 m^2 M_\infty^2 \left[\alpha^3 + k\left(\alpha - \frac{\varepsilon}{k}\right)^3 + (1-k)\left(\alpha + \frac{\varepsilon}{1-k}\right)^3\right]\right\} - \frac{\gamma+1}{2}\, m^2\, \frac{\varepsilon^2}{k(1-k)}, \tag{20a}$$

$$C_m = \frac{1}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}}\left\{2\alpha + \varepsilon + \frac{1}{2}\left(\frac{\gamma+1}{4}\right)^2 m^2 M_\infty^2 \left[\alpha^3 + k^2\left(\alpha - \frac{\varepsilon}{k}\right)^3 + (1-k^2)\left(\alpha + \frac{\varepsilon}{1-k}\right)^3\right]\right\} - \frac{\gamma+1}{2}\, m^2\varepsilon\left(\alpha + \frac{\varepsilon}{1-k}\right), \tag{20b}$$

$$C_x = \frac{2}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}}\left\{2\,\alpha^2 + \frac{\varepsilon^2}{k(1-k)} + \frac{1}{2}\left(\frac{\gamma+1}{4}\right)^2 m^2 M_\infty^2 \left[\alpha^4 + k\left(\alpha - \frac{\varepsilon}{k}\right)^4 + (1-k)\left(\alpha + \frac{\varepsilon}{1-k}\right)^4\right]\right\} - \frac{(\gamma+1)\, m^2\,\varepsilon^2}{2\,k\,(1-k)}\left[3\alpha - \frac{\varepsilon(1-2k)}{k(1-k)}\right]. \tag{20c}$$

f) *Profile de rezistență minimă.* Pentru un profil de forma indicată în figura 4 așezat la incidența α, ne propunem să determinăm valoarea lui k cînd $\varepsilon = \text{const.}$, astfel încît să obținem o valoare minimă pentru C_x.

Folosind expresia (16c) pentru C_x, condiția $\frac{\mathrm{d}C_x}{\mathrm{d}k} = 0$ duce la

$$2\,(1-2k)\left[1+\frac{3}{2}\left(\frac{\gamma+1}{4}\right)^2 m^2 M_\infty^2\left(2\alpha^2+\frac{\varepsilon^2}{4}\,\frac{1-2k+2k^2}{k^2(1-k)^2}\right)\right]+$$

$$+\frac{(\gamma+1)\,mM_\infty\varepsilon}{2k\,(1-k)}\,(1-3k+3k^2)=0. \tag{21}$$

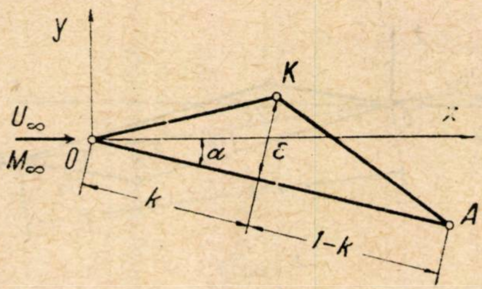


Fig. 6

Presupunînd acum că poziția grosimii maxime pentru profilul de rezistență minimă nu este prea depărtată de mijlocul corzii, vom putea pune

$$k=\frac{1+\nu}{2}, \tag{22}$$

ν reprezentînd o cantitate mică în raport cu unitatea, și vom găsi astfel

$$\nu\approx\frac{0{,}25\,(\gamma+1)\,\varepsilon m\,M_\infty}{1+3\left(\dfrac{\gamma+1}{4}\right)^2 m^2M_\infty^2\,(\alpha^2+\varepsilon^2)}\,. \tag{23}$$

Poziția optimă este, prin urmare, dată de expresia

$$k=\frac{1}{2}\left[1+\frac{\varepsilon}{4}\;\frac{(\gamma+1)\,m\,M_\infty}{1+3\left(\dfrac{\gamma+1}{4}\right)^2 m^2M_\infty^2\,(\alpha^2+\varepsilon^2)}\right]. \tag{24}$$

Din relația (24) rezultă că poziția optimă a grosimii maxime este influențată destul de puțin de incidența profilului, ea depinzînd în special de numărul Mach și de grosimea profilului.

Drept exemplu să considerăm un profil de grosime maximă $\varepsilon = 0,10$ așezat într-un curent cu $M_\infty = 4$ la incidența $\alpha = 0$; vom găsi imediat $k = 0,602$.

Dacă incidența devine $\alpha = 10°$, k variază foarte puțin, atingînd valoarea $k = 0,571$.

3. CALCULUL PROFILELOR CURBE

În cele ce urmează vom stabili formulele pentru calculul caracteristicilor aerodinamice ale profilelor parabolice și ale unor forme speciale

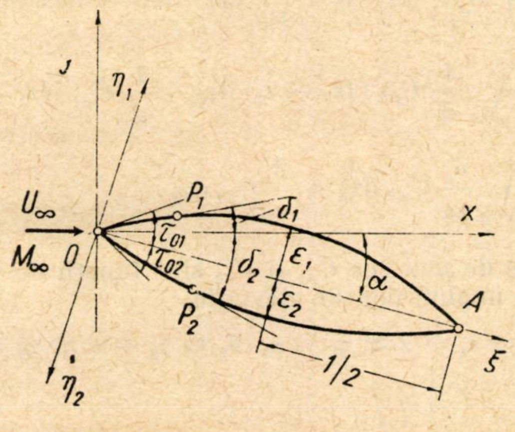


Fig. 7

de profile. În acest caz, așa cum vom vedea mai jos, reies clar în evidență avantajele aplicării formulelor (3) sau (7) care dau distribuția de presiuni, atît pentru expansiune cît și pentru compresiune, în funcție de semnul unghiului de deviație δ. Pentru simplificarea calculelor vom face aproximațiile obișnuite care, în ipotezele în care lucrăm, introduc erori neglijabile.

Pentru calculele care urmează este mai avantajos să lucrăm în sistemul $\xi O \eta$ rotit cu unghiul α față de sistemul xOy. În acest sistem, considerînd ca mai înainte coarda egală cu unitatea, ecuațiile conturului profilului parabolic se scriu sub forma:

$$\eta_1 = 4\varepsilon_1 \xi (1-\xi), \quad \eta_2 = 4\varepsilon_2 \xi (1-\xi), \tag{25}$$

unde ε reprezintă înălțimea profilului față de coardă, indicii 1 și 2 referindu-se, respectiv, la extradosul și intradosul profilului (fig. 7).

Vom remarca acum că putem înlocui dx şi xdx pe extrados, respectiv pe intrados, în funcţie de coeficientul unghiular al tangentei, după cum urmează:

$$\mathrm{d}x \approx -\frac{\mathrm{d}\eta_1'}{8\varepsilon_1}, \quad x\mathrm{d}x \approx -\frac{4\varepsilon_1 - \eta_1'}{64\ \varepsilon_1^2}\,\mathrm{d}\eta_1' \left(\eta_1' = \frac{\mathrm{d}\eta_1}{\mathrm{d}\xi}\right), \tag{26a}$$

$$\mathrm{d}x \approx -\frac{\mathrm{d}\eta_2'}{8\varepsilon_2}, \quad x\mathrm{d}x \approx -\frac{4\varepsilon_2 - \eta_2'}{64\ \varepsilon_2^2}\,\mathrm{d}\eta_2' \left(\eta_2' = \frac{\mathrm{d}\eta_2'}{\mathrm{d}\xi}\right). \tag{26b}$$

În acest fel, din relaţiile (9), (10) şi (11) vom obţine expresiile pentru calculul caracteristicilor aerodinamice ale profilelor parabolice:

$$C_z = -\frac{1}{8}\int_{OA} \frac{1}{\varepsilon_2}\,C_{p2}\,\mathrm{d}\eta_2' - \frac{1}{\varepsilon_1}\,C_{p1}\,\mathrm{d}\eta_1', \tag{27a}$$

$$C_m = -\frac{1}{64}\int_{OA} \frac{1}{\varepsilon_2^2}\,C_{p2}\,(4\varepsilon_2 - \eta_2')\,\mathrm{d}\eta_2' - \frac{1}{\varepsilon_1^2}\,C_{p1}\,(4\varepsilon_1 - \eta_1')\,\mathrm{d}\eta_1', \tag{27b}$$

$$C_x = -\frac{1}{8}\int_{OA} \frac{\delta_2}{\varepsilon_2}\,C_{p2}\,\mathrm{d}\eta_2' + \frac{\delta_1}{\varepsilon_1}\,C_{p1}\,\mathrm{d}\eta_1'. \tag{27c}$$

În expresiile de mai sus C_{p1} şi C_{p2} sînt funcţii de η'_1, respectiv η'_2, prin intermediul unghiurilor de deviaţie

$$\delta_1 = \tau_1 - \alpha \approx \eta_1' - \alpha, \quad \delta_2 = \tau_2 + \alpha \approx \eta_2' + \alpha. \tag{28}$$

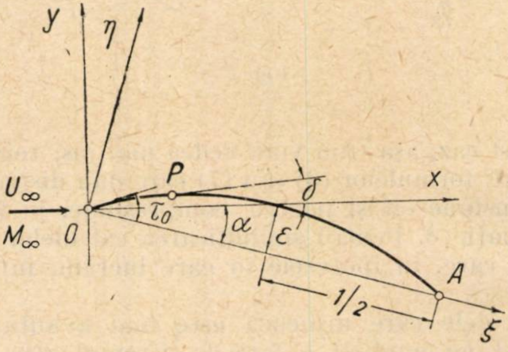


Fig. 8

a) *Profile parabolice subţiri* (fig. 8). Aplicînd relaţiile (7) şi (27) şi ţinînd seama că

$$\varepsilon_1 = -\varepsilon_2 = \varepsilon, \ \eta_1 = -\eta_2 = \eta, \ \delta_1 = -\delta_2 = \delta, \tag{29}$$

integralele se efectuează fără dificultăți și obținem:

$$C_z = \frac{4\alpha}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}}\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\gamma+1}{4}\right)^2 m^2 M_\infty^2 (\alpha^2 + 16\varepsilon^2)\right], \tag{30a}$$

$$C_m = \frac{2}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}}\left[\alpha + \frac{4}{3}\varepsilon + \frac{1}{2}\left(\frac{\gamma+1}{4}\right)^2 m^2 M_\infty^2 \left(\alpha^3 + 4\alpha^2\varepsilon + 16\alpha\varepsilon^2 + \frac{64}{3}\varepsilon^3\right)\right], \tag{30b}$$

$$C_x = \frac{4}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}}\left[\alpha^2 + \frac{16}{3}\varepsilon^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\gamma+1}{4}\right)^2 m^2 M_\infty^2 \left((\alpha^4 + 32\alpha^2\varepsilon^2 + \frac{256}{5}\varepsilon^4\right)\right]. \tag{30c}$$

b) *Profile dublu parabolice groase* (fig. 7). Aplicînd direct formulele (27) vom obține în mod corespunzător:

$$C_z = \frac{4\alpha}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}}\left\{1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\gamma+1}{4}\right)^2 m^2 M_\infty^2 \,[\alpha^2 + 8(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2)]\right\} -$$

$$- \frac{8}{3}(\gamma + 1)\, m^2 (\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2), \tag{31a}$$

$$C_m = \frac{2}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}}\left\{\alpha + \frac{2}{3}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) + \frac{1}{2}\left(\frac{\gamma+1}{4}\right)^2 m^2 M_\infty^2 \left[\alpha^3 + 2\alpha^2(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + 8\alpha(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2) + \frac{32}{5}(\varepsilon_1^3 - \varepsilon_2^3)\right]\right\} - \frac{2}{3}(\gamma + 1)\, m^2 \,[2(\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2) + \alpha(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)], \tag{31b}$$

$$C_x = \frac{4}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}}\left\{\alpha^2 + \frac{8}{3}(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2) + \frac{1}{2}\left(\frac{\gamma+1}{4}\right)^2 m^2 M_\infty^2 \left[\alpha^4 + \right.\right.$$

$$\left.\left. + 16\alpha^2(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2) + \frac{128}{5}(\varepsilon_1^4 + \varepsilon_2^4)\right]\right\} - 8(\gamma + 1)\, m^2 (\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2)\alpha. \tag{31c}$$

Notînd cu ε grosimea totală a profilului,

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2, \tag{32}$$

și considerînd un profil dublu-parabolic simetric $\left(\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \frac{\varepsilon}{2}\right)$ vom obține:

$$C_z = \frac{4\alpha}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}}\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\gamma+1}{4}\right)^2 m^2 M_\infty^2 (\alpha^2 + 4\varepsilon^2)\right], \tag{33a}$$

$$C_m = 1/2\, C_z - \frac{2}{3}(\gamma + 1)\, m^2 \varepsilon\alpha \approx \frac{1}{2}\left[1 - \frac{\varepsilon}{3}\frac{(\gamma+1)M_\infty^2}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}}\right] C_z, \tag{33b}$$

$$C_x = \frac{4}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}}\left[\alpha^2 + \frac{4}{3}\varepsilon^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\gamma+1}{4}\right)^2 m^2 M_\infty^2 \left(\alpha^4 + 8\alpha^2\varepsilon^2 + \frac{16}{5}\varepsilon^4\right)\right]. \tag{33c}$$

c) *Profile plan-parabolice* (fig. 9). Caracteristicile respective se pot obține din profilele dublu-parabolice, făcînd $\varepsilon_1 = \varepsilon$ și $\varepsilon_2 = 0$.

În acest mod formulele (29) devin respectiv

$$C_z = \frac{4\alpha}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}}\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\gamma+1}{4}\right)^2 m^2 M_\infty^2 (\alpha^2 + 8\varepsilon^2)\right] - \frac{8}{3}(\gamma+1)\, m^2\varepsilon^2, \tag{34a}$$

$$C_m = \frac{2}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}}\left[\alpha + \frac{2}{3}\varepsilon + \frac{1}{2}\left(\frac{\gamma+1}{4}\right)^2 m^2 M_\infty^2 \left(\alpha^3 + 2\alpha^2\varepsilon + 8\alpha\varepsilon + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{32}{5}\varepsilon^3\right)\right] - \frac{2}{3}(\gamma+1)\, m^2\varepsilon(\alpha + 2\varepsilon), \tag{34b}$$

$$C_x = \frac{4}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}}\left[\alpha^2 + \frac{8}{3}\varepsilon^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\gamma+1}{4}\right)^2 m^2 M_\infty^2 \left(\alpha^4 + 16\,\alpha^2\varepsilon^2 + \frac{128}{5}\right)\right] -$$

$$-8\,(\gamma+1)\, m^2\, \varepsilon^2\alpha. \tag{34c}$$

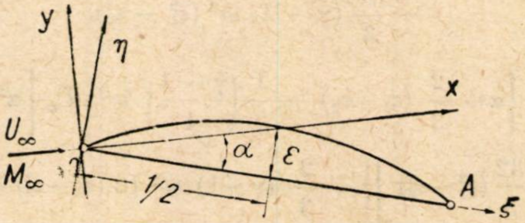


Fig. 9

d) *Profile speciale*. Formula închisă stabilită pentru distribuția de presiuni (7) ne permite să stabilim expresii de calcul și pentru caracteristicile aerodinamice ale unor profile cu forme mai complicate. Un interes deosebit îl prezintă profilele de forma

$$\eta = a_n\, \xi\, (1 - \xi^{1/n}), \tag{35}$$

unde a_n reprezintă o constantă care se poate determina cunoscînd grosimea profilului ε iar n este un număr oarecare. Astfel, pentru un profil de grosime simetrică punînd condiția $\mathrm{d}\eta/\mathrm{d}\xi = 0$ pentru $\eta = \varepsilon/2$ rezultă

$$a_n = \varepsilon\frac{(n+1)^{n+1}}{2\,n^n}. \tag{36}$$

Din expresia (35) se observă că pentru $n = 1$ se obțin profilele parabolice; pentru $n > 1$, caz de care ne vom ocupa în cele ce urmează, grosimea maximă a profilului se deplasează spre bordul de atac, așa cum se arată în figura 10 (punctele în care $\mathrm{d}\eta/\mathrm{d}\xi = 0$).

Ținînd seama de ecuația conturului (35) și făcînd aproximațiile obișnuite, vom putea scrie :

$$\mathrm{d}x \approx -\frac{n^{n+1}}{a_n\,(n+1)^n}\left[1-(n-1)\frac{\eta'}{a_n}\right]\mathrm{d}\eta', \tag{37a}$$

$$x\mathrm{d}x \approx -\frac{n^{2n+1}}{a_n\,(n+1)^{2n}}\left[1-(2n-1)\frac{\eta'}{a_n}\right]\mathrm{d}\eta', \tag{37b}$$

expresii care vor fi introduse în formulele (9), (10) și (11).

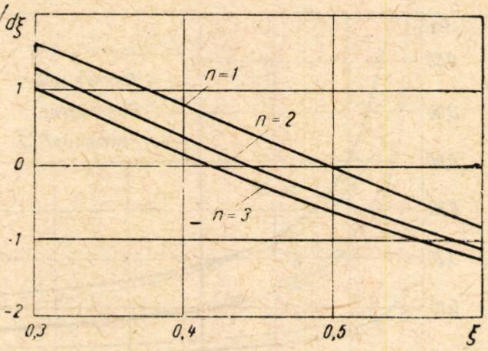


Fig. 10

În cazul *profilelor de grosime simetrică* aplicarea acestor formule ne conduce la următoarele expresii pentru calculul caracteristicilor aerodinamice :

$$C_z = \frac{4\alpha}{\sqrt{M_\infty^2-1}}\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{\gamma+1}{4}\right)^2 m^2 M_\infty^2\left(\alpha^2+\frac{a_n^2}{n^2}\cdot\frac{1+n^3}{1+n}\right)\right]\frac{\varepsilon\,(n+1)^2}{2\,a_n} - \\ -\frac{(\gamma+1)\ m^2\,(n^5-n^3+n^2-1)\ \varepsilon}{3n^2}\,\alpha, \tag{38a}$$

$$C_m = \frac{\varepsilon\,(n+1)}{2a_n}\,C_z - \frac{(\gamma+1)\ m^2\,(n+1)^2\,(n^3+1)\varepsilon^2}{6\,n\,a_n}\,\alpha, \tag{38b}$$

$$C_x = \frac{4}{\sqrt{M_\infty^2-1}}\left[\alpha^2+\frac{a_n^2}{3\,n^2}\cdot\frac{1+n^3}{1+n}+\frac{1}{2}\left(\frac{\gamma+1}{4}\right)^2\left(\alpha^4+\frac{2\alpha^2 a_n^2}{n^2}\cdot\frac{1+n^3}{1+n}+\right.\right. \\ \left.\left.+\frac{a_n^4}{5\,n^4}\cdot\frac{1+n^5}{1+n}\right)\right]\frac{\varepsilon(n+1)^2}{2a_n} - \frac{(\gamma+1)\ m^2\,(n^2-1)}{2}\left(\alpha^2\cdot\frac{1+n^3}{n^2}+\right. \\ \left.+\frac{a_n^2}{5}\cdot\frac{1+n^5}{n^4}\right). \tag{38c}$$

4. COMPARAŢII CU ALTE FORMULE. VERIFICĂRI EXPERIMENTALE

În diagramele din figurile 11 şi 12 s-a reprezentat variaţia coeficientului de portanţă C_z în funcţie de numărul Mach al curentului neperturbat M_∞, pentru incidenţe $\alpha = \pm 2°$, $\pm 6°$, $10°$ şi diverse forme de profile.

Reprezentarea obişnuită se face în funcţie de coeficientul de similaritate $K = m\ M_\infty \sin \delta$; dat fiind însă că nu se poate alege o valoarea medie pentru unghiul δ, am preferat reprezentarea în funcţie de M_∞.

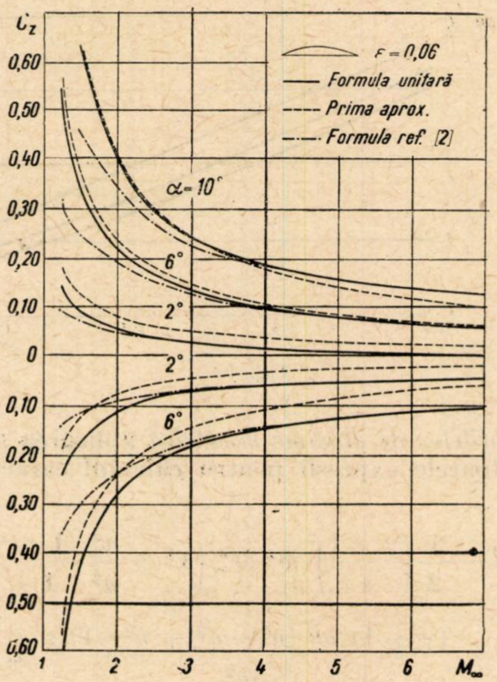


Fig. 11

Formula unitară este comparată pe de o parte cu formulele obţinute în primă aproximaţie, folosind expresia coeficientului de presiune (7) în care neglijăm termenii în δ^2 şi δ^3, formule care sînt identice cu cele date de teoria liniarizată (Ackeret) şi care sînt, deci, valabile pentru incidenţe şi numere Mach mici; pe de altă parte se face comparaţie cu rezultatele teoriei hipersonice [2] valabilă pentru numere Mach mari ($M_\infty > 3,2$). Din diagrame reiese clar că formula unitară este aplicabilă pe un interval larg de numere Mach care începe cu $M_\infty = 1,2$ şi acoperă întregul domeniu supersonic-hipersonic moderat. Mai mult decît atît, aşa cum am arătat la începutul lucrării, făcînd $\gamma \to 1$ şi adăugînd, bineînţeles, efectul forţei centrifuge în cazul cînd profilul este curb, formulele obţinute sînt valabile şi pentru regimul newtonian de scurgere.

În cazul profilului plan-parabolic (diagramele din figura 11) se observă că pentru incidențe pozitive ($\alpha > 0$) rezultatele date de teoria liniarizată se pot apropia destul de mult de formulele exacte, chiar pentru numere Mach mari. Acest lucru se explică prin aceea că, la incidențe pozitive, efectul grosimii profilului și al termenului în M_∞^2 care devine important la numere Mach mari, ambii neluați în considerație de teoria liniarizată, se compensează reciproc. În schimb, la incidențe negative ($\alpha < 0$) eroarea va fi dimpotrivă mare, întrucît cele două efecte se adună.

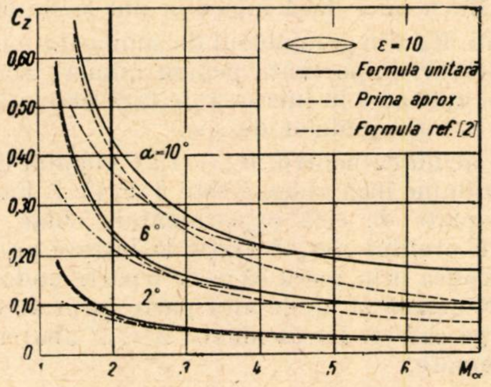


Fig. 12

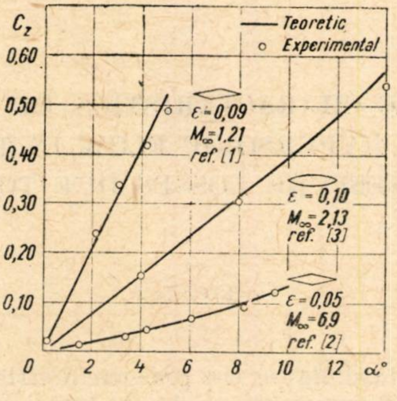


Fig. 13

Aplicabilitatea formulei unitare pe întregul interval supersonic-hipersonic moderat reiese și mai clar în evidență din comparațiile cu experiența (diagramele din figura 13). Într-adevăr, experiențele efectuate de diverși autori atît pentru numere Mach mici [3], [4], cît și la numere Mach mari [2] confirmă formula unitară.

La numere Mach mici, concordanța formulelor cu experiența se realizează grație parametrului unitar de similaritate $K = m\, M_\infty\, \delta$ care diferă de parametrul de similaritate hipersonic $K = M_\infty \delta$ prin factorul $m = \frac{M_\infty}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}}$. La numere Mach mici teoria hipersonică dă abateri mari, dar, așa cum a remarcat Van Dyke [5], rezultatele obținute pot fi valabile și pentru numere Mach mici dacă înlocuim pur și simplu în expresia distribuției de presiuni M_∞ din parametrul de similaritate cu $\sqrt{M_\infty^2 - 1}$, ceea ce nu introduce modificări importante pentru numere Mach mari. Formula unitară pe care am aplicat-o în lucrarea de față prezintă avantajul de a fi dedusă direct din ecuația undelor de șoc.

Să observăm acum că pentru $M_\infty = 1{,}21$ unghiul limită la care unda de șoc oblică mai rămîne încă atașată este $\delta \approx 4°, 2$. Faptul că rezultatele teoretice sînt apropiate de cele experimentale chiar pentru incidența $\alpha = 4°$, cînd, pentru profilul ales, deviația la intrare pe intrados este $\delta \approx 10°, 44$, se poate explica prin aceea că pe de o parte unda detașată la vîrful profilului este foarte slabă și pe de altă parte prin aceea că pe extrados expansiunea decurge corect. La incidențe $\alpha > 5°$ abaterile față de experiență devin însemnate.

Primită la redacție la 25 martie 1963

AERODYNAMIC CHARACTERISTICS OF PROFILES IN SUPERSONIC-HYPERSONIC FLOW IN THE CASE OF NEGLECTING PRESSURE LOSSES DUE TO SHOCK WAVES

ABSTRACT

Using a unitary formula for the pressure distribution, formula which covers a wide range of supersonic moderate-hypersonic flow, the authors establish the expressions of the aerodynamic characteristics (C_z, C_m and C_x) for various shapes and profiles, valid within a considerable range of values of the similarity parameter $K = \frac{M_\infty^2}{M_\infty^2 - 1} \sin \delta$.

The calculation is performed by neglecting the losses due to shock waves. Broken and cambered profiles are considered, both thin and of thickness.

A comparison with the formulas of the linearized theory and with these corresponding to the hypersonic flow, as well as the experimental verifications which are in good agreement with the established formula confirm the degree of its applicability within the whole supersonic moderate-hypersonic range.

BIBLIOGRAFIE

1. CARAFOLI E., *Stabilirea unei formule unitare pentru compresiune-expansiune in regim supersonic-hipersonic*. Com. Acad. R.P.R., **XII**, *9*, 985–993 (1962).
2. DORRANCE W. H., *Two-dimensional Airfoils at Moderate Hypersonic Velocities*. Journ. Aero-Sciences, **19**, *9*, 593–600 (1952).
3. FERRI A., Atti di Guidonia, 17 (1939).
4. HILTON W. F., PRUDEN F. W., *Subsonic and supersonic High Speed Tunnel Tests of a Facied Double Wedge Airfoil*. R. and M. 2057, decembrie, 1943.
5. VAN DYKE M. D., *A Study of Hypersonic Small Disturbance Theory*. NACA TN 3173, May, 1954.

STUDII

O METODĂ PENTRU STUDIUL JETURILOR PLANE INCOMPRESIBILE MĂRGINITE DE PÎNZE DE JET SUBȚIRI

DE

D. PANTAZOPOL și C. S. IOAN

Studiul mișcărilor jeturilor plane se poate face, într-o primă aproximație, neglijîndu-se viscozitatea fluidului, dar admițînd existența unor suprafețe de discontinuitate care se mențin pînă la infinit aval. Metodele de calcul bazate pe aceste ipoteze conduc la o bună indicație calitativă asupra mișcării și, în multe cazuri, chiar la rezultate cantitative satisfăcătoare.

În lucrarea de față vom considera, utilizînd ipotezele menționate, mișcarea plană a unui jet de fluid incompresibil mărginit de alte două jeturi — foarte subțiri în raport cu primul — ale căror viteze asimptotice (la infinit aval) sînt diferite de viteza asimptotică a acestuia.

Vom adopta și ipoteza suplimentară că jeturile marginale, care au forma unor pînze fluide (*pînze de jet*), pot fi considerate infinit subțiri din punct de vedere matematic. Totodată, vom presupune că mărimea $j = \rho v q$ (ρ — densitatea fluidului, v — viteza medie în secțiune și q — debitul unei pînze de jet) se menține constantă în lungul pînzei de jet respective.

Ipotezele de mai sus sînt utilizate și în lucrările [1], [2] și [3], referitoare la profile cu voleți fluizi și conduc la rezultate în bună concordanță cu experiența.

În felul cum este pusă problema, între pînzele de jet marginale și jetul principal apare o discontinuitate. În general, astfel de probleme — care iau în considerare discontinuități de viteze între două jeturi fluide în mișcare — sînt rareori tratate în literatura de specialitate din cauza dificultăților matematice.

Unii autori, [4], [5], au ocolit aceste dificultăți și s-au mărginit la studiul cazului particular în care nu există discontinuități de viteze la traversarea suprafeței de separație dintre jeturile fluide aflate în mișcare. Prin ipoteze simplificatoare, ei au redus cazurile studiate la rezolvarea unor probleme de tip Kirchhoff.

În [2] se prezintă o metodă liniarizată pentru studiul jeturilor plane mărginite de pînze de jet, în cazul cînd mișcarea în orice punct diferă puțin de mișcarea asimptotică de la infinit aval.

Renunțînd la liniarizare, ne propunem să considerăm cazuri mai generale de mișcări ale jeturilor plane mărginite de pînze de jet, generalizînd — într-un anumit sens — problema clasică a lui Kirchhoff.

★

Să considerăm un jet fluid, incompresibil și irotațional, care se scurge prin ajutajul bidimensional ai cărui pereți sînt reprezentați în figura 1 prin curbele MP și M_1P_1.

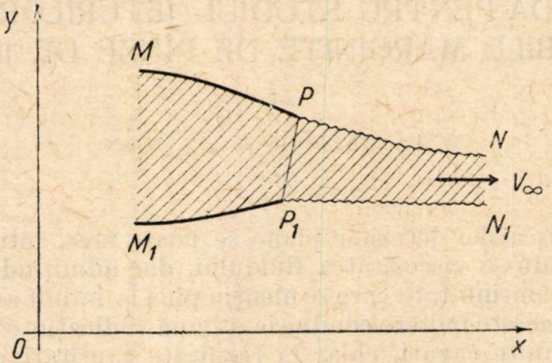


Fig. 1

Din P și P_1 țîșnesc două pînze de jet, infinit de subțiri, reprezentate în figura 1 prin curbele PN și P_1N_1, a căror formă este necunoscută apriori.

Vom face ipoteza, unanim acceptată, că spre infinit aval scurgerea devine asimptotic rectilinie, iar viteza constantă în secțiune.

Pentru studiul scurgerii bidimensionale astfel definite, vom utiliza funcția clasică Levi-Civitta

$$\omega(z) = \theta + i\tau, \tag{1}$$

întîlnită în problemele de tip Kirchhoff. Partea reală a acestei funcții (θ) reprezintă unghiul pe care-l face viteza $\vec{V}$ (dintr-un punct oarecare al jetului) cu axa Ox, iar partea imaginară (τ) se definește prin expresia

$$\tau = \ln \frac{V}{V_\infty} \cdot \tag{2}$$

De-a lungul curbelor MP și M_1P_1 valoarea părții reale θ este cunoscută în fiecare punct, fiind egală — evident — cu înclinarea tangentei față de axa Ox în punctul respectiv.

Pentru stabilirea condiției la limită pe curbele PN și P_1N_1 (care reprezintă, în figura 1, pînzele de jet infinit de subțiri), vom aplica teorema impulsului ca în lucrarea [2].

În felul acesta vom obține expresia condiției la limită (valabilă în orice punct al pînzei de jet) de forma

$$\delta_p = \frac{j}{r}, \tag{3}$$

în care

$\delta_p = p - p_0$... reprezintă (în punctul respectiv) diferența dintre presiunea p din jetul principal și presiunea p_0 din mediul ambiant, presupus în repaus;

$j = \rho v q$... caracterizează intensitatea pînzelor de jet respective (ρ — densitatea, v — viteza și q — debitul uneia dintre pînzele de jet subțiri). Evident, se pot alege fie aceleași valori, pentru ambele pînze de jet, fie valori diferite ale mărimilor ρ, v și q;

r ... este raza de curbură a liniei de jet, în punctul considerat.

Notînd cu $\mathrm{d}s$ elementul de arc (al pînzei de jet), condiția (3) se mai poate scrie

$$\delta p = j \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}\cdot \tag{3'}$$

Aplicînd formula lui Bernoulli, între punctul considerat și cel de la infinit aval, unde vom admite că presiunea în jetul principal este p_0 (datorită faptului că cele două curbe PN și P_1N_1 tind asimptotic către linii drepte), se deduce relația

$$1 - \frac{V^2}{V_\infty^2} = k \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}, \tag{4}$$

în care

$$K = \frac{j}{\frac{\rho}{2} V_\infty^2}.$$

Dacă introducem expresia (2) în condiția la limită (4), aceasta devine

$$1 - e^{2\tau} = K \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}, \tag{5}$$

obținîndu-se astfel o relație între partea imaginară și cea reală a funcției $\omega(z)$. Noua relație (5) înlocuiește condiția la limită simplă ($\tau = 0$) întîlnită în problema clasică a lui Kirchhoff (cînd suprafața liberă a jetului principal vine în contact direct cu atmosfera în repaus).

În legătură cu condiţia la limită (5) observăm că atunci cînd pînza de jet infinit-subţire are un debit mic în comparaţie cu debitul principal (adică j şi respectiv K au valori mici), partea imaginară τ a funcţiei $\omega(z)$ are la rîndul ei valori mici în lungul curbelor PN şi P_1N_1.

Cînd K tinde spre zero, admiţînd că $\frac{d\theta}{ds}$ are valori finite peste tot, se observă din (5) că şi τ tinde către zero. Astfel se regăseşte, la limită, condiţia cunoscută ($\tau = 0$) din cazul problemei Kirchhoff.

★

Vom studia mişcarea considerată recurgînd la reprezentarea conformă a domeniului ocupat de fluid (fig. 1) pe un domeniu situat într-un plan auxiliar (ζ), aşa cum se obişnuieşte în problemele de tip Kirchhoff.

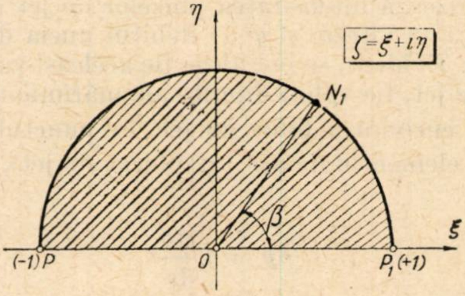


Fig. 2

De exemplu, putem alege în planul (ζ) un domeniu mărginit de un semicerc (avînd raza egală cu 1) şi de diametrul acestuia de pe axa reală, cu corespondenţa frontierelor indicată pe figura 2.

Funcţiile

$$\omega(\zeta) = \theta + i\tau$$

şi

$$f(\zeta) = \varphi + i\psi,$$

(ultima reprezentînd potenţialul complex al mişcării), trebuie să satisfacă următoarele condiţii la limită :

1. pentru funcţia $f(\zeta)$,

$$\begin{aligned} &\text{pe } \overline{MP_1} \text{ şi } \overparen{P_1N_1}: \quad \psi = 0, \\ &\text{pe } \overparen{NP} \text{ şi } \overline{PM}: \quad \psi = Q, \end{aligned} \tag{6}$$

Q fiind debitul jetului principal;

2. pentru funcția $\omega(\zeta)$,

$$\begin{aligned} &\text{pe } \overline{M_1P_1}: && \theta = m(\xi), \\ &\text{pe } \overline{MP}: && \theta = n(\xi). \end{aligned} \tag{7}$$

Condiția la limită pe semicerc se obține cu ajutorul relației (5), plecînd de la expresia

$$\mathrm{d}z = \frac{\mathrm{d}f}{w} = \frac{1}{V_\infty}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega(\zeta)} \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\zeta}\, \mathrm{d}\zeta, \tag{8}$$

în care $w = u - iv$ este viteza complexă.

Deoarece pe liniile care reprezintă jeturile marginale $\mathrm{d}z = \mathrm{d}s.\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, iar pe semicerc $\zeta = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}$, relația (8) devine

$$\mathrm{d}s = \frac{1}{V_\infty}\, \mathrm{e}^{-\tau} \left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\zeta}\right)_{\zeta=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}} \mathrm{i}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}\, \mathrm{d}\beta. \tag{9}$$

Determinînd funcția $f(\zeta)$ în baza condițiilor (6) și efectuînd operațiile necesare, se obține din (9) o expresie de tipul

$$\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}s} = -\, g(\beta)\, \mathrm{e}^{\tau}, \tag{9'}$$

în care s-a notat

$$g(\beta) = \frac{\mathrm{i}\, V_\infty\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta}}{\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\zeta}\right)_{\zeta=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}}}. \tag{9''}$$

Introducînd expresia (9′) în (5) obținem

$$\mathrm{sh}\, \tau = \frac{K}{2}\, g(\beta) \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\beta}. \tag{10}$$

Așadar, (7) și (10) reprezintă condițiile la limită pe care trebuie să le satisfacă funcția $\omega(\zeta)$ în planul ζ.

Dacă pereții ajutajului, MP și M_1P_1 (fig. 1) au o formă oarecare, atunci funcțiile $m(\xi)$ și $n(\xi)$ din relațiile (7) nu sînt cunoscute, deoarece corespondența dintre punctele frontierelor respective din planurile (z) și (ζ) nu este cunoscută apriori.

Pentru simplificarea problemei, funcțiile $m(\xi)$ și $n(\xi)$ se pot alege inițial, urmînd ca forma pereților ajutajului din planul fizic să se stabilească aposteriori.

Dacă pereții ajutajului sînt însă rectilinii, aceste funcții se determină cu ușurință, luînd forme foarte simple.

Rezolvarea riguroasă a problemei este foarte dificilă datorită faptului că expresia (10) este neliniară.

Însă, pentru pînzele de jet infinit de subțiri, cu debitul relativ mic (deci constanta K suficient de mică), conform unei remarci anterioare putem presupune că și mărimea τ este mică, încît se poate admite (cu o bună aproximație) egalitatea $\operatorname{sh} \tau \approx \tau$.

Astfel, condiția la limită (10) se va scrie,

$$\tau = \frac{K}{2} g(\beta) \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\beta}. \tag{11}$$

În diversele cazuri concrete pentru care condiția (11) este valabilă, problema jeturilor plane mărginite de pînze de jet subțiri poate fi soluționată cu mijloace matematice simple.

APLICAȚIE LA CAZUL AJUTAJULUI CONVERGENT, SIMETRIC, CU PEREȚI RECTILINII

Să utilizăm condițiile generale de mai sus în cazul unui ajutaj simetric, plan, reprezentat în figura 3, pereții MP și M_1P_1 fiind rectilinii.

Vom executa calculele presupunînd că debitul total de fluid care se scurge prin ajutaj este $2Q$, iar față de acesta debitele pînzelor de jet subțiri care țîșnesc prin P și P_1 sînt suficient de mici, astfel încît condiția la limită (11) să fie satisfăcută.

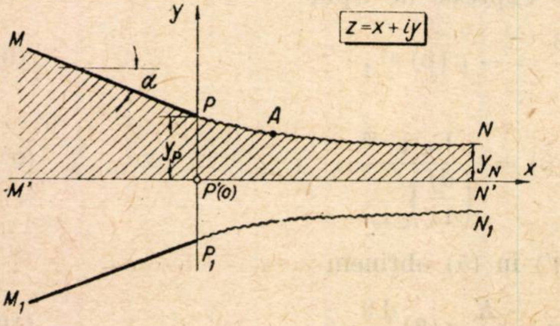


Fig. 3

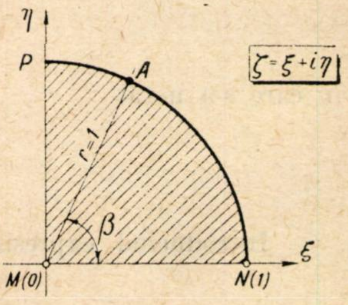


Fig. 4

Deoarece scurgerea este simetrică față de axa Ox, ne vom ocupa numai de domeniul $MM'N'NPM$ (hașurat în figura 3), pe care-l vom reprezenta conform pe sfertul de cerc (de rază unitară) din primul cadran al planlui $\zeta = \xi + \mathrm{i}\eta = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}$, cu corespondența frontierelor indicată pe figura 4.

Pentru funcția

$$f(z) = \varphi + \mathrm{i}\psi,$$

condițiile la limită în planul (ζ) sînt:

$$\text{pe } \overline{MN}: \ \psi = 0,$$

$$\text{pe } \overline{MP}: \ \psi = Q.$$

Aceste condiții sînt satisfăcute de funcția

$$f(\zeta) = \frac{2Q}{\pi} \ln \frac{2\zeta}{\zeta^2 - 1} + 2\,\mathrm{i}\,Q, \tag{12}$$

care a fost determinată prin soluționarea unei probleme Dirichlet.

Pentru funcția $\omega(z) = \theta + \mathrm{i}\tau$, condițiile la limită (fig. 4) în planul (ζ) sînt:

$$\begin{aligned} &\text{pe } \overline{MN}: \quad \theta = 0,\\ &\text{pe } \overline{MP}: \quad \theta = -\alpha,\\ &\text{pe } \overset{\frown}{NP}: \quad \tau = \frac{K}{2} g(\beta) \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\beta}. \end{aligned} \tag{13}$$

Introducînd în formula (9″) funcția $f(\zeta)$ dată de (12) și observînd că debitul $Q = V_\infty y_N$, după efectuarea calculelor se obține

$$g(\beta) = \frac{\pi}{2y_N} \operatorname{tg} \beta,$$

astfel încît ultima din condițiile (13) devine

$$\tau = \frac{\pi K}{4y_N} \operatorname{tg} \beta \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\beta}. \tag{13'}$$

Pentru determinarea funcției $\omega(\zeta)$, respectînd condițiile la limită stabilite, vom scrie

$$\omega(\zeta) = \omega_0(\zeta) + \omega_1(\zeta), \tag{14}$$

ceea ce este întotdeauna posibil.

Vom impune funcției $\omega_0(\zeta)$ să satisfacă condițiile la limită (fig. 4):

$$\begin{aligned} &\text{pe } \overline{MN}: \ \theta_0 = 0,\\ &\text{pe } \overset{\frown}{NP}: \ \tau_0 = 0,\\ &\text{pe } \overline{PM}: \ \theta_0 = -\alpha, \end{aligned} \tag{15}$$

θ_0 și τ_0 fiind partea reală și, respectiv, partea imaginară a funcției $\omega_0(\zeta)$.

Este ușor de remarcat că funcția $\omega_0(\zeta)$ astfel definită reprezintă soluția problemei Kirchhoff pentru jetul principal, în lipsa pînzelor de jet marginale.

În baza condițiilor (15), se găsește că

$$\omega_0(\tau) = \mathrm{i}\frac{2\alpha}{\pi} \ln \zeta, \tag{16}$$

de unde rezultă

$$\theta_0(\beta) = -\frac{2\alpha}{\pi}\beta. \tag{17}$$

Pentru ca $\omega(\zeta)$ să respecte condiţiile (13), funcţia $\omega_1(\zeta)$ va trebui să satisfacă următoarele condiţii la limită (fig. 4):

$$\begin{aligned} &\text{pe } \overline{MN}: \ \theta_1 = 0, \\ &\text{pe } \overline{PM}: \ \theta_1 = 0, \\ &\text{pe } \overset{\frown}{NP}: \ \tau_1 = \frac{\pi K}{4y_N}\cdot \operatorname{tg}\beta\left(-\frac{2\alpha}{\pi}+\frac{d\theta_1}{d\beta}\right), \end{aligned} \tag{18}$$

ultima condiţie fiind obţinută din (13′), ţinîndu-se seama de (14) şi (17).

În baza condiţiei $\theta_1 = 0$ de pe frontierele $\overline{PM}$ şi $\overline{MN}$, funcţia $\omega_1(\zeta)$ poate fi prelungită analitic în tot cercul unitar, conform principiului lui Schwartz şi, de aceea, admite o dezvoltare în serie Taylor de forma

$$\omega_1(\zeta) = i\sum_0^\infty b_{2n}\zeta^{2n}, \tag{19}$$

în care coeficienţii b_{2n} sînt reali.

Separînd partea reală de cea imaginară, din (19) se găseşte

$$\tau_1(\beta) = \sum_0^\infty b_{2n}\cos 2n\,\beta, \tag{20}$$

$$\theta_1(\beta) = -\sum_0^\infty b_{2n}\sin 2n\,\beta \tag{21}$$

şi

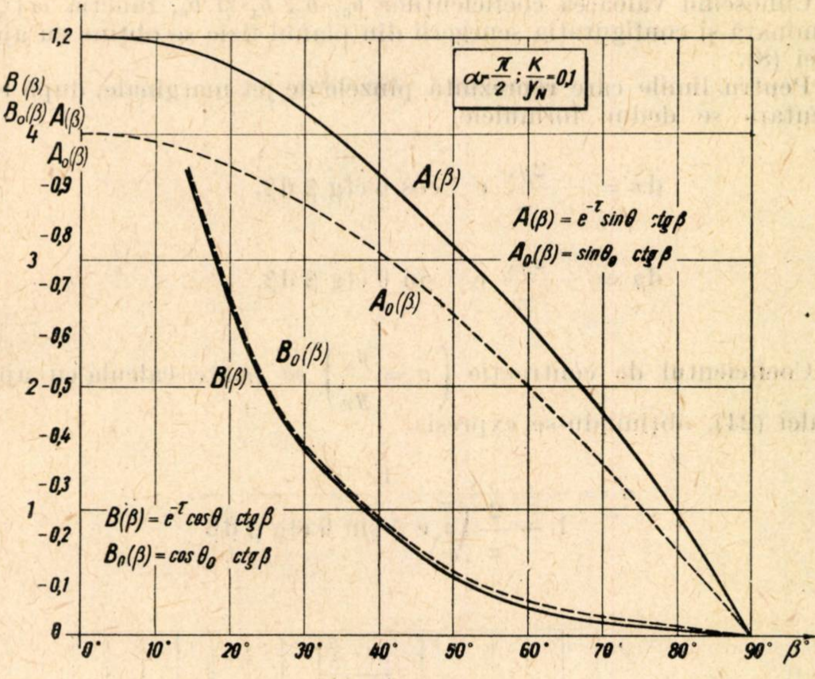
$$\frac{d\theta_1}{d\beta} = -\sum_0^\infty 2n\,b_{2n}\cos 2n\,\beta. \tag{21′}$$

Introducînd expresiile (20) şi (21′) în ultima din condiţiile (18), între coeficienţii dezvoltării Taylor se obţine o relaţie de forma

$$b_0 + \sum_1^\infty b_{2n}\left(1 + n\frac{\pi K}{2y_N}\right)\cos 2n\,\beta = -\frac{\alpha k}{2y_N}\operatorname{tg}\beta. \tag{22}$$

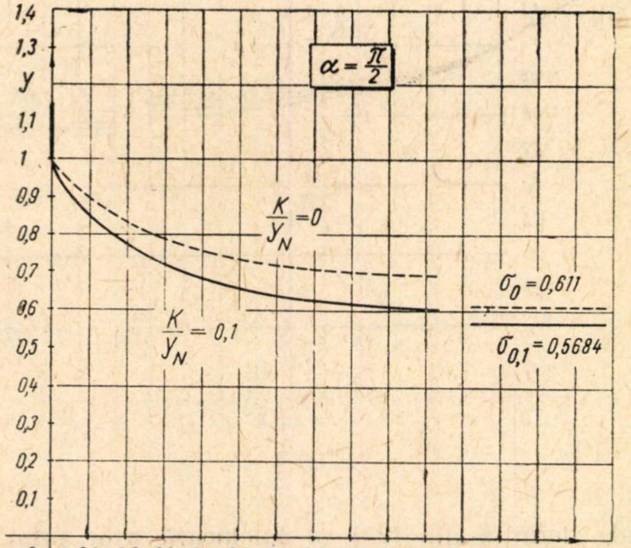
Coeficienţii b_{2n} se pot determina alegînd n puncte (β_0, β_1, β_2, ..., β_n) convenabil dispuse pe arcul de cerc $\overset{\frown}{PN}$ şi scriind că relaţia (22) este satisfăcută în aceste puncte. Astfel se formează un sistem de n ecuaţii liniare, necunoscutele fiind primii n coeficienţi ai dezvoltării.

Din calculele numerice s-a constatat că se obţin rezultate satisfăcătoare cu ajutorul unui sistem de patru ecuaţii cu patru necunoscute (b_0, b_2, b_4 şi b_6), luînd $\beta_0 = 0°$, $\beta_1 = 30°$, $\beta_2 = 60°$ şi $\beta_4 = 85°$.



$\alpha=\frac{\pi}{2};\ \frac{K}{y_N}=0,1$
$B(\beta)$
$B_0(\beta)$ $A(\beta)$
$A_0(\beta)$
$A(\beta)=e^{-\tau}\sin\theta\ \ ctg\beta$
$A_0(\beta)=\sin\theta_0\ \ ctg\beta$
$B(\beta)=e^{-\tau}\cos\theta\ \ ctg\beta$
$B_0(\beta)=\cos\theta_0\ \ ctg\beta$
-1,2
4
-0,9
-0,8
3
-0,7
-0,6
2 -0,5
-0,4
-0,3
1
-0,2
-0,1
0
0°
10°
20°
30°
40°
50°
60°
70°
80°
90°
β°

Fig. 5



$\alpha=\frac{\pi}{2}$
y
1,4
1,3
1,1
1
0,9
0,8
0,7
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
0
$\frac{K}{y_N}=0$
$\frac{K}{y_N}=0,1$
$\sigma_0=0,611$
$\sigma_{0,1}=0,5684$
0,1
0,2
0,3
0,4
0,5
0,6
0,7
0,8
0,9
1
1,1
1,2
1,3
x

Fig. 6

Cunoscînd valoarea coeficienţilor b_0, b_2, b_4 şi b_6, funcţia $\omega(\zeta)$ este determinată şi configuraţia scurgerii din planul fizic se obţine cu ajutorul relaţiei (8).

Pentru liniile care reprezintă pînzele de jet marginale, după calcule elementare se deduc formulele

$$dx = -\frac{2y_N}{\pi} e^{-\tau} \cos\theta \operatorname{ctg}\beta \, d\beta, \tag{23}$$

$$dy = -\frac{2y_N}{\pi} e^{-\tau} \sin\theta \operatorname{ctg}\beta \, d\beta. \tag{24}$$

Coeficientul de contracţie $\left(\sigma = \frac{y_N}{y_P}\right)$ se poate calcula cu ajutorul formulei (24), obţinîndu-se expresia

$$\sigma = \frac{1}{1 - \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\tau} \sin\theta \operatorname{ctg}\beta \, d\beta}. \tag{25}$$

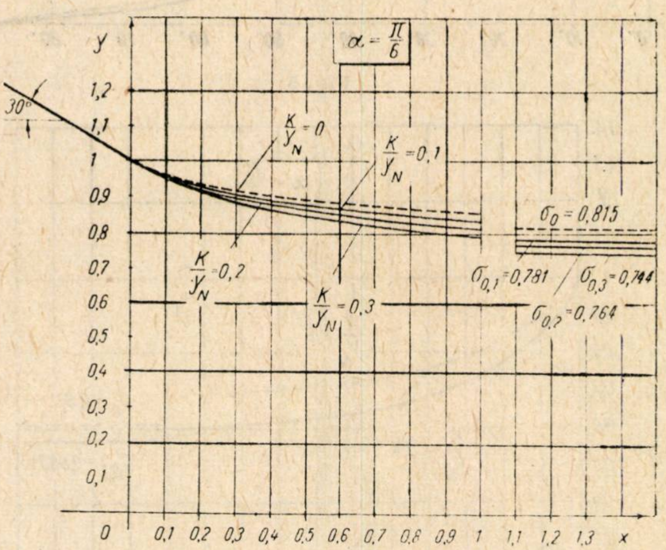


Fig. 7

Integrala definită din (25) se calculează uşor prin planimetrare.

Ecuaţiile parametrice (în funcţie de β) ale curbelor care reprezintă pînzele de jet marginale se obţin integrînd ecuaţiile (23) şi (24), tot prin planimetrare.

Se observă că formulele (23), (24) şi (25) rămîn valabile şi atunci cînd lipsesc pînzele de jet marginale $\left(\tau = 0 \text{ şi } \theta(\beta) = \theta_0(\beta) = -\frac{2\alpha}{\pi}\beta\right)$.

REZULTATE NUMERICE

Considerînd în calcule scurgerea printr-o fantă practicată într-un perete $\left(\text{deci } \alpha = \frac{\pi}{2}\right)$ şi luînd $\frac{K}{y_N} = 0{,}1$ s-a găsit (fig. 5)

$$\sigma = 0{,}568,$$

iar în absenţa jeturilor marginale,

$$\sigma_0 = 0{,}611,$$

rezultat cunoscut din literatură ([6], [7], [8]).

Forma pînzei de jet marginale în cazul scurgerii printr-o fantă practicată într-un perete plan este dată în figura 6.

În cazul ajutajului convergent $\left(\text{cu } \alpha = \frac{\pi}{6}\right)$ s-au găsit pentru σ următoarele valori

$\frac{K}{y_N}$	0	0,1	0,2	0,3
σ	0,815	0,781	0,764	0,744

Forma pînzelor de jet marginale pentru scurgerea prin ajutajul cu $\alpha = \frac{\pi}{6}$ este dată în figura 7.

Primită la redacţie la 9 aprilie 1963

A METHOD FOR STUDYING INCOMPRESSIBLE PLANE JETS BOUNDED BY THIN JET SHEETS

ABSTRACT

The purpose of this paper is to establish a method for studying incompressible plane jets bounded by thin jet sheets, by considering the velocity discontinuity at the interface.

The results of numerical calculations performed for convergent nozzles with plane walls emphasize the influence of the marginal jet sheets on the shape of the stream lines and on the shrinkage coefficient of the principal jet.

BIBLIOGRAFIE

1. L. MALAVARD, *Sur une théorie linéaire du souflage au bord de fuite d'un profil d'aile* C. R. Acad. Sci. Paris, **242** (1956).
2. N. N. PATRAULEA, *Profile aerodinamice cu voleţi fluizi*. Bul. ştiinţ. Acad. R.P.R., Secţia Şt. mat. fiz., **IX**, 2, 491 (1957).
3. — *Contribution théorique à l'étude des profiles à volet fluide (jet-flap)*. IXe Congrès International de Mécanique appliquée, Actes, Bruxelles, 1957, **I**, 457.
4. F. EHRICH FREDRICH, *Penetration and Deflection of jets oblique to a General Stream*, IRAS, 2, 1953.
5. M. KADOSCH, *Mécanisme de la déviation des jets propulsifs*. PSTMA, Nr. BST 124, Paris, 1959.
6. E. CARAFOLI, T. OROVEANU, *Mecanica fluidelor*. Edit. Acad. R.P.R., Bucureşti, 1952, 46.
7. CAIUS IACOB, *Introducere matematică în mecanica fluidelor*. Edit. Acad. R.P.R., Bucureşti, 1952, 411.
8. М. И. ГУРЕВИЧ, *Теория струй идеальной жидкости*. Физматгиз, Москва, 1961, 65.

STUDII

APLICAȚII ALE UNUI PROCEDEU APROXIMATIV DE DETERMINARE A VALORILOR PROPRII ÎN PROBLEMA STURM-LIOUVILLE

DE

T. OROVEANU

533 : 539.3

1. INTRODUCERE

Problema clasică Sturm-Liouville care constă în determinarea valorilor proprii și a funcțiilor proprii pentru ecuația

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p\,(x)\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right] + [q\,(x) + \lambda\, r\,(x)]y = 0, \tag{1}$$

cu condițiile la limită

$$\alpha_1 y\,(a) + \alpha_2\, y'\,(a) = 0, \quad \beta_1\, y\,(b) + \beta_2\, y'\,(b) = 0, \tag{2}$$

α_1, α_2, β_1, β_2 fiind constante ($|\alpha_1| + |\alpha_2| > 0$ și $|\beta_1| + |\beta_2| > 0$) este binecunoscută. În afară de cîteva cazuri în care funcțiile $p\,(x)$, $q\,(x)$ și $r\,(x)$ au anumite forme speciale și problema se poate rezolva exact, este necesar să se recurgă la metode aproximative. Dat fiind interesul pe care această problemă îl prezintă în fizică și în tehnică, metodele aproximative au cunoscut o amplă dezvoltare, prezentînd însă inconvenientul de a necesita un volum mare de calcule. În cele ce urmează, ne vom ocupa de un astfel de procedeu aproximativ, relativ mai simplu și care conduce la rezultate suficient de precise pentru aplicațiile practice.

2. DETERMINAREA APROXIMATIVĂ A CELEI MAI MICI VALORI PROPRII

În anumite cazuri, dintre care unul va face obiectul aplicațiilor din această lucrare, este necesar să se determine numai cea mai mică valoare proprie și eventual funcția proprie corespunzătoare. Ne referim la o particularizare a problemei Sturm-Liouville, în care ecuația (1) ia forma

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p\,(x)\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right]+\lambda\, r\,(x)\, y=0, \tag{3}$$

iar condițiile la limită (2) devin

$$y\,(0)=0, \quad y'\,(1)=0. \tag{4}$$

Dacă scriem ecuația (3) sub forma

$$Ay-\lambda\, By=0 \tag{5}$$

cu

$$Ay=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p\,(x)\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right], \quad By=r\,(x)\,y, \tag{6}$$

operatorii A și B fiind considerați în spațiul Hilbert $L_2\,(0,\ 1)$[1]) și admitem că $p\,(x)$ și $p'\,(x)$ sînt continue în $[0,\ 1]$ iar în același interval avem $p\,(x)>0$ și $r\,(x)>0$, se poate arăta că operatorii A și B sînt pozitiv-definiți [3]. În aceste condiții, se demonstrează de asemenea că valorile proprii ale ecuației (5) sînt toate reale și pozitive și formează o mulțime infinită [3].

Un procedeu aproximativ de determinare a valorilor proprii în această problemă, care constă în aplicarea metodei WKB[2]) a fost indicat nu de mult de către W. J. Goodey [2]. Pentru aplicarea acestuia, este însă necesar în prealabil să se efectueze o transformare a ecuației (3), cu ajutorul schimbării de funcție

$$\psi=p^{\frac{1}{2}}\,y, \tag{7}$$

care ne dă

$$\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}x^2}+\left(\lambda\frac{r}{p}-\frac{1}{p^{\frac{1}{2}}}\frac{\mathrm{d}^2 p^{\frac{1}{2}}}{\mathrm{d}x^2}\right)\psi=0. \tag{8}$$

condițiile (4) luînd la rîndul lor forma

$$\psi\,(0)=0, \quad \left(p^{-\frac{1}{2}}\right)'_{x=1}\psi\,(1)+\left(p^{-\frac{1}{2}}\right)_{x=1}\psi'\,(1)=0. \tag{9}$$

Deoarece funcțiile $p\,(x)$ și $r\,(x)$ au fost presupuse pozitive în $[0,\ 1]$ putem pune

$$\frac{r}{p}=\beta^2\,(x). \tag{10}$$

---

[1]) Mulțimea funcțiilor de pătrat integrabil definite în intervalul închis [0,1].

[2]) Prescurtarea uzuală pentru metoda Wentzel-Kramers-Brillouin.

Dacă mai introducem notația

$$\frac{1}{p^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{\mathrm{d}^2 p^{\frac{1}{2}}}{\mathrm{d}x^2} = \gamma(x) \tag{11}$$

și ținem seama de faptul că toate valorile proprii sînt pozitive, ceea ce ne permite să scriem

$$\lambda = \alpha^2, \tag{12}$$

ecuația (8) devine

$$\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}x^2} + (\alpha^2\beta^2 - \gamma)\,\psi = 0. \tag{13}$$

În această ecuație, facem schimbarea de funcție

$$\psi = \mathrm{e}^{\int_0^x v(x)\,\mathrm{d}x} \tag{14}$$

care ne dă

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + v^2 + \alpha^2\beta^2 - \gamma = 0 \tag{15}$$

ecuație de tip Ricatti. Reamintim că în metoda WKB schimbarea de funcție este

$$\psi = \mathrm{e}^{\alpha\int_0^x u(x)\,\mathrm{d}x} \tag{16}$$

și conduce la ecuația

$$\alpha\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + \alpha^2u^2 + \alpha^2\beta^2 - \gamma = 0 \tag{17}$$

tot de tipul Ricatti, pentru care se consideră soluția formală

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)\,\alpha^{-n}. \tag{18}$$

Limitîndu-ne la a doua aproximație și ținînd seama de relația evidentă dintre funcțiile $u(x)$ și $v(x)$ găsim

$$v = \pm\,\mathrm{i}\,\alpha\,\beta - \frac{1}{2\beta}\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}x} = \pm\,\mathrm{i}\alpha\,\beta - \frac{1}{2}\,\frac{\mathrm{d}(\log\beta)}{\mathrm{d}x} \tag{19}$$

ceea ce ne dă

$$\psi = C\,B^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\alpha\int_0^x \beta\mathrm{d}x} \tag{20}$$

C fiind o constantă arbitrară.

Pentru a satisface prima condiție la limită (9), vom considera soluția

$$\psi = C\,\beta^{-\frac{1}{2}}\sin\left(\alpha\int_0^x \beta\,\mathrm{d}x\right). \tag{21}$$

A doua condiție la limită ne permite să calculăm valorile proprii; în acest scop, vom reveni la ecuația (3) și vom observa că avem

$$y = C\,p^{-\frac{1}{2}}\,\beta^{-\frac{1}{2}}\sin\left(\alpha\int_0^x \beta\,\mathrm{d}x\right) \tag{22}$$

sau

$$y = C\,(pr)^{-\frac{1}{4}}\sin\left(\alpha\int_0^x \beta\,\mathrm{d}x\right). \tag{23}$$

Deoarece

$$\frac{(pr)^{\frac{1}{4}}}{\beta}\,\frac{\mathrm{d}\,(pr)^{-\frac{1}{4}}}{\mathrm{d}x} = -\frac{1}{4\beta}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\log\,(pr)\right] \tag{24}$$

a doua condiție (4) ne dă

$$\alpha = a\,\mathrm{tg}\left(\alpha\int_0^x \beta\,\mathrm{d}x\right), \tag{25}$$

unde am introdus notația

$$a = \frac{1}{4\beta}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\log(pr)\right]\Big|_{x=1}. \tag{26}$$

Rădăcinile ecuației (25) sînt valorile proprii aproximative. În particular, cea mai mică rădăcină a acestei ecuații ne furnizează, într-o primă aproximație, cea mai mică valoare proprie. Pentru ameliorarea rezultatului, în lucrarea [2] se utilizează cîtul lui Rayleigh. Să notăm astfel cu $\alpha_1^{(1)}$ cea mai mică rădăcină a ecuației (25) și cu $\psi_1^{(1)}$ funcția (21) corespunzătoare. Această funcție nu este o soluție exactă a ecuației (13), respectiv (8), dar satisface riguros condițiile la limită (9). Cîtul lui Rayleigh, care este funcționala

$$-\frac{\displaystyle\int_0^1 \psi_1^{(1)}\left(\frac{\mathrm{d}^2\psi_1^{(1)}}{\mathrm{d}x^2} - \gamma\psi_1^{(1)}\right)\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_0^1 \beta^2\,(\psi_1^{(1)})^2\,\mathrm{d}x}, \tag{27}$$

reprezintă o margine superioară pentru cea mai mică valoare proprie a ecuației considerate. Deoarece $\psi_1^{(1)}$ conține prima aproximație $\alpha_1^{(1)}$ a acestei valori proprii, vom obţine deci o a doua aproximaţie, notată cu $\alpha_1^{(2)}$, din expresia

$$(\alpha_1^{(2)})^2 = -\frac{\displaystyle\int_0^1 \psi_1^{(1)}\left(\frac{\mathrm{d}^2\psi_1^{(1)}}{\mathrm{d}x^2} - \gamma\,\psi_1^{(1)}\right)\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_0^1 \beta^2\,(\psi_1^{(1)})^2\,\mathrm{d}x.}\cdot \qquad (28)$$

Utilizînd expresia (21) pentru funcţia $\psi_1^{(1)}$, găsim, după calcule simple

$$\frac{\mathrm{d}^2\,\psi_1^{(1)}}{\mathrm{d}x^2} = C\left[\beta^{\frac{1}{2}}\,\frac{\mathrm{d}^2\,\beta^{-\frac{1}{2}}}{\mathrm{d}x^2} - (\alpha_1^{(1)})^2\,\beta^2\right]\psi_1^{(1)}, \qquad (29)$$

astfel că (28) devine

$$(\alpha_1^{(2)})^2 = (\alpha_1^{(1)})^2 - \frac{\displaystyle\int_0^1\left(\beta^{\frac{1}{2}}\,\frac{\mathrm{d}^2\beta^{-\frac{1}{2}}}{\mathrm{d}x^2} - \gamma\right)(\psi_1^{(1)})^2\,\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_0^1 \beta^2\,(\psi_1^{(1)})^2\,\mathrm{d}x} \qquad (30)$$

sau, sub forma care este dată de asemenea în [2],

$$(\alpha_1^{(2)})^2 = (\alpha_1^{(1)})^2 - \frac{\displaystyle\int_0^1\left(\frac{3\beta'^2}{4\beta^2} - \frac{\beta''}{2\beta} - \gamma\right)(\psi_1^{(1)})^2\,\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_0^1 \beta^2\,(\psi_1^{(1)})^2\,\mathrm{d}x}. \qquad (31)$$

Tot în lucrarea citată se arată că integrala de la numitor din (30) sau (31) se poate calcula uşor cu ajutorul substituţiei

$$\chi = \int_0^x \beta\,\mathrm{d}x \qquad (32)$$

care ne dă

$$\psi_1^{(1)} = C\,\beta^{-\frac{1}{2}}\sin(\alpha_1^{(1)}\,\chi) \qquad (33)$$

şi

$$\int_0^1 \beta^2\,(\psi_1^{(1)})^2\,\mathrm{d}x = \frac{C^2}{2}\int_0^1 \beta\mathrm{d}x - \frac{C^2}{4\alpha_1^{(1)}}\sin\left(2\alpha_1^{(1)}\int_0^1 \beta\,\mathrm{d}x\right). \qquad (34)$$

3. APLICAȚIE LA DETERMINAREA VITEZEI DE DIVERGENȚĂ AEROELASTICĂ

Procedeul aproximativ expus mai sus se poate aplica la studiul fenomenului de divergență de răsucire a suprafețelor portante de secțiune constantă sau variabilă. Ecuația care permite calcularea vitezei de divergență are forma [1]

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(GI_d\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}y}\right)+q\,c\,e\,c_z^{(e)}=0, \tag{35}$$

în care y este coordonata măsurată în lungul anvergurii, GI_d rigiditatea la răsucire într-o secțiune oarecare, φ unghiul de răsucire elastică, q presiunea dinamică, c și e coarda, respectiv distanța dintre linia elastică și linia centrelor aerodinamice într-o secțiune oarecare iar $c_z^{(e)}$ coeficientul de portanță local datorit răsucirii elastice.

Dacă admitem că pentru $c_z^{(e)}$ putem lua expresia [1]

$$c_z^{(e)}=\frac{\mathrm{d}C_z}{\mathrm{d}i}\varphi,$$

în care C_z este coeficientul de portanță al suprafeței portante și i unghiul de incidență, ecuația (35) devine

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(GI_d\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}y}\right)+q\,ce\frac{\mathrm{d}C_z}{\mathrm{d}i}\varphi=0 \tag{36}$$

și este de același tip cu (3). De asemenea, condițiile la limită sînt tot (4) și anume

$$y=0,\quad \varphi=0;\quad y=b,\quad \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}y}=0, \tag{37}$$

b fiind lungimea suprafeței portante.

Forma efectivă a ecuației (36) depinde de expresiile mărimilor GI_d, c și e. În cele ce urmează, vom considera cîteva cazuri particulare care au mai fost studiate și pe altă cale.

a) *Suprafața portantă de secțiune variabilă în translație.* Pentru a putea aprecia gradul de precizie al procedeului, vom examina mai întîi un caz simplu, cunoscut din literatura de specialitate [1]. Este vorba de suprafețele portante pentru care avem

$$\frac{c}{c_0}=\frac{e}{e_0}=\left(1-\nu\frac{y}{b}\right)^{\gamma_1}=(1-\nu\eta)^{\gamma_1} \tag{38}$$

și

$$\frac{GI_d}{GI_{d_0}}=\left(1-\nu\frac{y}{b}\right)^{\gamma_2}=(1-\nu\eta)^{\gamma_2}, \tag{39}$$

unde am pus

$$\eta = \frac{y}{b}\,, \tag{40}$$

iar c_0, e_0 și GI_{d_0} se raportează la secțiunea de încastrare ($y = 0$), γ_1, γ_2 și ν fiind constante ($\nu < 1$).

Ecuația (36) devine

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\eta}\left[(1 - \nu\eta)^{\gamma_2}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\eta}\right] + \alpha^2 b^2 (1 - \nu\eta)^{2\gamma_1}\varphi = 0 \tag{41}$$

cu

$$\alpha^2 = \frac{q\, c_0\, e_0 \dfrac{\mathrm{d}C_z}{\mathrm{d}i}}{GI_{d_0}} \tag{42}$$

și condițiile la limită

$$\eta = 0, \quad \varphi = 0\,; \quad \eta = 1, \quad \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\eta} = 0. \tag{43}$$

Viteza de divergență se calculează din (42) în care introducem cea mai mică valoare proprie a ecuației considerate, pe care o notăm cu α_1. Pentru rezolvarea problemei este deci suficient să se determine cea mai mică valoare proprie.

În acest caz, există o soluție exactă [1] și pentru a putea face comparație cu datele din literatură, ne vom limita la cazul particular în care avem

$$\gamma_2 = 2\,(\gamma_1 + 1) \tag{44}$$

ceea ce ne dă

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\eta}\left[(1 - \nu\eta)^{2(\gamma_1+1)}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\eta}\right] + \alpha^2 b^2 (1 - \nu\eta)^{2\gamma_1}\varphi = 0. \tag{45}$$

Schimbarea de funcție (7) ia forma

$$\psi = (1 - \nu\eta)^{\gamma_1+1}\,\varphi \tag{46}$$

și conduce la ecuația

$$\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}\eta^2} + [\alpha^2 b^2 - \nu^2\gamma_1(\gamma_1 + 1)]\,(1 - \nu\,\eta)^{-2}\,\psi = 0. \tag{47}$$

Mai departe, prin schimbarea de funcție (14) ajungem la ecuația

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\eta} + v^2 + [\alpha^2 b^2 - \nu^2\gamma_1(\gamma_1 + 1)]\,(1 - \nu\eta)^{-2} = 0. \tag{48}$$

Aplicarea metodei WKB ne dă soluţia în a doua aproximaţie

$$v = \pm \mathrm{i}\alpha\, b\,(1 - \nu\eta)^{-1} - \frac{\nu}{2}(1 - \nu\eta)^{-1} \tag{49}$$

iar funcţia ψ, adecvată condiţiilor la limită, este

$$\psi = C\,(1 - \nu\eta)^{\frac{1}{2}} \sin\left[\alpha b \log(1 - \nu\eta)^{-\frac{1}{\nu}}\right]. \tag{50}$$

Revenind la funcţia ψ, găsim

$$\psi = -\,C\,(1 - \nu\eta)^{-\gamma_1 - \frac{1}{2}} \sin\left[\frac{\alpha b}{\nu}\log(1 - \nu\eta)\right], \tag{51}$$

iar cea mai mică valoare proprie rezultă din relaţia

$$\alpha b = \nu\left(\gamma_1 + \frac{1}{2}\right)\mathrm{tg}\left[\frac{\alpha b}{\nu}\log(1 - \nu)\right]. \tag{52}$$

Corectarea se obţine aplicînd relaţia (30) care ia forma

$$(\alpha_1^{(2)} b)^2 = (\alpha_1^{(1)} b)^2 + \frac{\nu^2\left[\gamma_1(\gamma_1 + 1) + \frac{1}{4}\right]\int_0^1 (1 - \nu\eta)^{-1}\sin^2\left[\frac{\alpha_1^{(1)} b}{\nu}\log(1 - \nu\eta)\right]\mathrm{d}\eta}{\int_0^1 (1 - \nu\eta)^{-1}\sin^2\left[\frac{\alpha_1^{(1)} b}{\nu}\log(1 - v\eta)\right]\mathrm{d}\eta} =$$

$$= (\alpha_1^{(1)} b)^2 + \nu^2\left[\gamma_1(\gamma_1 + 1) + \frac{1}{4}\right]. \tag{53}$$

Dacă luăm ca în [1] $\gamma_1 = 1$, ceea ce corespunde la o aripă cu secţiunile transversale geometric asemenea dar cu toate dimensiunile reduse proporţional cu coarda locală, şi punem $\nu = \frac{1}{2}$, din (52) obţinem

$$\alpha_1^{(1)} b = 1{,}4729$$

iar (53) ne dă

$$\alpha_1^{(2)}\, b = 1{,}6528,$$

în timp ce soluţia exactă, tratată în [1], conduce la valoarea

$$\alpha_1\, b = 1{,}653$$

concordanţa fiind deci perfectă.

Este interesant de remarcat că soluția exactă care se scrie cu notațiile noastre

$$\varphi = - C (1 - \nu\eta)^{-\gamma_1 - \frac{1}{2}} \sin [\mu \log (1 - \nu\eta)] \tag{54}$$

diferă de soluția aproximativă (51) numai prin valoarea coeficientului

$$\mu = \sqrt{\left(\frac{\alpha b}{\nu}\right)^2 - \left(\gamma_1 + \frac{1}{2}\right)^2} \cdot \tag{55}$$

Cu datele din exemplul tratat, găsim

$$\mu = 2{,}946$$

în timp ce

$$\frac{\alpha_1 b}{\nu} = 3{,}306$$

eroarea asupra acestui coeficient fiind deci de $+12\%$.

Mai observăm de asemenea că, în cazul soluției exacte, valorile proprii se calculează din relația

$$\sqrt{\left(\frac{\alpha b}{\nu}\right)^2 - \left(\gamma_1 + \frac{1}{2}\right)^2} = \left(\gamma_1 + \frac{1}{2}\right) \operatorname{tg}\left[\sqrt{\left(\frac{\alpha b}{\nu}\right)^2 - \left(\gamma_1 + \frac{1}{2}\right)^2} \log (1 - \nu)\right] \tag{56}$$

iar dacă α este suficient de mare pentru ca să putem pune

$$\sqrt{\left(\frac{\alpha b}{\nu}\right)^2 - \left(\gamma_1 + \frac{1}{2}\right)^2} \approx \frac{\alpha b}{\nu}, \tag{57}$$

obținem relația (52). Prin urmare, pentru valori proprii din ce în ce mai mari, eroarea procedeului este din ce în ce mai mică. Lucrul acesta era de așteptat deoarece metoda WKB, care stă la baza considerațiilor precedente, se încadrează în categoria metodelor asimptotice.

b) *Suprafață portantă de secțiune constantă în rototranslație.* Acest caz, care a fost tratat în [4], conduce la ecuația

$$\frac{d^2\varphi}{d\eta^2} + \alpha^2 b^2 (\eta + \delta)^2 \varphi = 0 \tag{58}$$

cu condițiile la limită (43). În această ecuație avem

$$\alpha^2 = \frac{q_1 c e \dfrac{dC_z}{di}}{G I_d}, \tag{59}$$

q_1 fiind presiunea dinamică ce corespunde vitezei relative de rotație la vîrful palei V_1, iar

$$\delta = \frac{V_0}{V_1}, \tag{60}$$

V_0 fiind viteza de translație.

Ecuația fiind de forma (13), efectuăm direct schimarea de funcție care conduce la ecuația lui Riccati

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\eta} + v^2 + \alpha^2 b^2 (\eta + \delta)^2 = 0 \tag{61}$$

și aplicarea metodei WKB ne dă, în a doua aproximație,

$$v = \pm \mathrm{i}\alpha\, b\, (\eta + \delta) - \frac{1}{2\,(\eta + \delta)} \tag{62}$$

de unde obținem soluția corespunzătoare pentru (58) și anume

$$\varphi = C\,(\eta + \delta)^{-\frac{1}{2}} \sin\left[\alpha b \eta \left(\frac{\eta}{2} + \delta\right)\right]. \tag{63}$$

Se observă că prima condiție la limită (43) este satisfăcută, în timp ce a doua condiție ne conduce la relația

$$\alpha b = \frac{1}{2\,(1 + \delta)^2}\, \mathrm{tg}\left[\alpha b \left(\frac{1}{2} + \delta\right)\right] \tag{64}$$

care se deduce direct din (25) și (26).

Cea mai mică valoare proprie obținută din (64) se corectează prin aplicarea relației (30) care ne dă

$$(\alpha_2^{(2)}\, b)^2 = (\alpha_1^{(1)}\, b)^2 - \frac{\dfrac{3}{4}\displaystyle\int_0^1 (\eta + \delta)^{-3} \sin^2\left[\alpha_1^{(1)}\, b\eta\left(\frac{\eta}{2} + \delta\right)\right] \mathrm{d}\eta}{\displaystyle\int_0^1 (\eta + \delta) \sin^2\left[\alpha_1^{(1)}\, b\eta\left(\frac{\eta}{2} + \delta\right)\right] \mathrm{d}\eta}. \tag{65}$$

Deoarece integrala de la numitor se calculează cu ajutorul formulei (34), mai putem scrie

$$(\alpha_1^{(2)}\, b)^2 = (\alpha_1^{(1)} b)^2 - \frac{\dfrac{3}{4}\displaystyle\int_0^1 (\eta + \delta)^{-3} \sin^2\left[\alpha_1^{(1)}\, b\eta\left(\frac{\eta}{2} + \delta\right)\right] \mathrm{d}\eta}{\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2} + \delta\right) - \dfrac{1}{4\alpha_1^{(1)} b} \sin\left[2\alpha_1^{(1)} b\left(\dfrac{1}{2} + \delta\right)\right]}. \tag{66}$$

Pentru a putea face comparația cu rezultatele din [4] vom lua $\delta = 0{,}1$; în felul acesta, din (64) obținem

$$\alpha_1^{(1)}\, b = 2{,}3247.$$

În (66), integrala de la numărător se calculează cu ajutorul unei metode de calcul aproximative, de exemplu prin utilizarea formulei lui Simpson, și în cele din urmă găsim

$$\alpha_1^{(2)} b = 1,\ 9168.$$

În lucrarea citată [4], pentru compararea rezultatelor cu cele obținute în cazul mișcării de translație, se introduce notația

$$V = V_1 + V_0 \tag{67}$$

iar V are expresia

$$V = k \frac{\pi}{2b} \sqrt{\frac{GI_d}{\frac{\rho}{2} c e \frac{\mathrm{d}C_z}{\mathrm{d}i}}}, \tag{68}$$

în care

$$\frac{k}{b} = \frac{\alpha_1}{b} (1 + \delta) \frac{2}{\pi} \cdot \tag{69}$$

Cu valoarea calculată mai sus, avem

$$\frac{k}{b} = 1{,}3424$$

în timp ce în [4] se dă

$$\frac{k}{b} = 1{,}313.$$

Diferența față de acest ultim rezultat este de + 2,24%, deci cu totul neînsemnată. Și calculele din [4] au fost efectuate prin încercări, printr-un procedeu sensibil mai laborios decît cel expus aici.

4. CONCLUZII

Exemplele tratate arată că procedeul propus în [2] poate fi utilizat cu succes la determinarea cu o precizie suficientă a celei mai mici valori proprii, în diferite cazuri particulare ale problemei Sturm-Liouville care intervin în aplicații. Întrucît metoda WKB are un caracter asimptotic, este probabil că aplicarea cîtului lui Rayleigh pentru corectarea celei mai mici valori proprii se poate face și în cadrul altor metode asimptotice cunoscute. De asemenea, al doilea exemplu tratat mai sus arată că acest procedeu conduce uneori la calcule mai simple decît acelea necesitate de soluțiile exacte. În sfîrșit, el poate fi aplicat și la determinarea celorlalte valori proprii, atunci cînd este necesar.

Primită la redacție la 13 aprilie 1963

APPLICATIONS D'UN PROCÉDÉ APPROXIMATIF DE DÉTERMINATION DES VALEURS PROPRES DANS LE PROBLÈME DE STURM-LIOUVILLE

RÉSUMÉ

Le procédé approximatif indiqué dans [2], fondé sur la méthode WKB, est appliqué au calcul de la vitesse de divergence aéroélastique. L'auteur montre que la précision est bonne et que dans certains cas les calculs sont moins longs que ceux requis par l'utilisation de la solution exacte.

BIBLIOGRAFIE

1. R. L. Bisplinghoff, H. Ashley, R. L. Halfmann, *Aeroelasticity*. Addison-Wesley Publishing Company, Cambridge, 1955, 431–434.
2. W. J. Goodey, *The Approximate Calculation of Eingenvalues for Certain Second Order Linear Differential Equations*. Journal of the Royal Aeronautical Society, 65, *605*, (1961).
3. Solomon G Michlin, *Variationsmethoden der mathematischen Physik*. Akademie — Verlag, Berlin, 1962, 107–110, 190–191.
4. A. Petre, *Divergența aeroelastică la suprafețe portante în rotație și rototranslație*. St. cerc. mec. apl., **X**, *4* (1959).

STUDII

UNDE DE TRANSLAȚIE CU PIERDERI PE TRASEU PRIN INFILTRAȚIE. MIȘCAREA FRONTULUI UNDEI ȘI VARIAȚIA DEBITULUI

DE

I. VLADIMIRESCU și R. BĂDESCU

În hidraulică [1] se studiază în mod curent undele de translație care iau naștere la ridicarea în timp foarte scurt a unei vane, undele de trecere de la un regim de scurgere permanent la alt regim permanent și undele de inundație care au loc la ruperea unui baraj.

Practica actuală a irigațiilor terenurilor aride, care cer metode mai economice (brazde și fîșii lungi), ca și cercetarea hidrologică a unor cursuri de apă de suprafață — care dispar pe traseu — scot la iveală necesitatea studierii și a unor unde *pierdute* care în esență pot fi considerate și ele ca unde de translație. Aceste unde se deplasează direct pe teren fără să fie suprapuse peste un alt curent, fiind alimentate încontinuu la capătul amonte cu un debit mic și constant care treptat se pierde pe parcurs datorită permeabilității relativ mare a solului.

Pentru aplicațiile specifice, interesează în mod deosebit modul de deplasare a frontului — respectiv variația în raport cu timpul a lungimii parcurse de curent — și variația debitului într-o secțiune transversală dată.

Sub aspectul primei părți se cunoaște pînă acum — în afară de unele tratări mult schematizate — ecuația lui S. M. Krivoveaz [2] sub forma

$$l = \frac{Q}{\omega (y_1 - y_2)} \left\{ - \frac{1}{y_1} [1 - e^{y_1 t} (1 - \Phi (\sqrt{y_1^2 t})) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{y_2} [1 - e^{y_2 t} (1 - \Phi (\sqrt{y_2^2 t})] \right\}, \qquad (1)$$

unde avem :

l = depărtarea frontului de capătul amonte,
ω = suprafața zonei de saturație în profil transversal al solului,
y_1, y_2 = rădăcinile ecuației pătratice,
Φ = integrala erorilor a lui Gauss,
t = timpul,
Q = debitul de alimentare.

În cele ce urmează, se stabilește o nouă relație a distanței frontului undei — de o construcție mai simplă — fără a reduce numărul factorilor hotărîtori și care permite să se ajungă la relația debitului încă necalculată pînă în prezent.

1. Unul din factorii importanți ai mișcării undei este infiltrația apei în teren, sub sarcina unei coloane de apă de mică înălțime, de care literatura de specialitate din ultimul timp s-a ocupat pe larg.

O formulă comodă a vitezei reale $U(t)$ cu care pătrunde apa în sol[1]) s-a stabilit pornind de la ecuația diferențială a mișcării lichidului ideal care pătrunde sub acțiunea gravitației, într-un mediu poros și omogen și cu neglijarea presiunii date de adîncimea apei, sub forma

$$\frac{1}{\varepsilon}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = F_z, \tag{2}$$

unde

ε este porozitatea efectivă a terenului,
t = timpul,
$F_z = -g\frac{u}{k}$ = accelerația forței masice, pe direcția verticalei z,
g = accelerația gravitației,
K = coeficientul de permeabilitate a mediului poros.

Integrarea ecuației (2) în condiția $t = 0$, $u = u_0$, conduce la relația

$$u = u_0\, e^{-g\frac{\varepsilon}{k}t}.$$

Cu notația $\gamma = g\frac{\varepsilon}{k}$, formula de mai sus devine

$$u = u_0\, e^{-\gamma t}. \tag{3}$$

Numeroase experimentări cu infiltrometrul au arătat o variație analogă cu relația (3) pentru un interval de timp relativ restrîns, cu deosebirea că nu se ajunge însă la o anulare a vitezei de infiltrare, cînd timpul crește — așa cum rezultă din formula (3) — ci rămîne la o valoare constantă U_c. Adaptarea ecuației (3) la condițiile reale conduce la următoarea expresie cunoscută în hidrologie

$$u = u_c + (u_0 - u_c)\, e^{-\gamma t}. \tag{4}$$

---

[1]) La nivelul terenului $z = 0$.

Parametrii u_c, u_0 și γ pot fi determinați în mod experimental prin infiltrometre, pentru fiecare fel de teren pe care se deplasează unda.

2. Să considerăm acum o undă ce se deplasează într-un canal de pămînt, cu secțiunea dreptunghiulară (fig. 1). Profilul longitudinal al canalului și al undei cuprinse în canal pe lungimile x, l și $(l + \mathrm{d}l)$, respectiv la timpii τ, t și $(t + \mathrm{d}t)$, sînt indicate în figura 1, *a*. Unda este alimentată la capătul amonte cu debitul constant Q, în mod continuu, rezultînd la acest capăt adîncimea A a apei și lățimea B a oglinzii de apă.

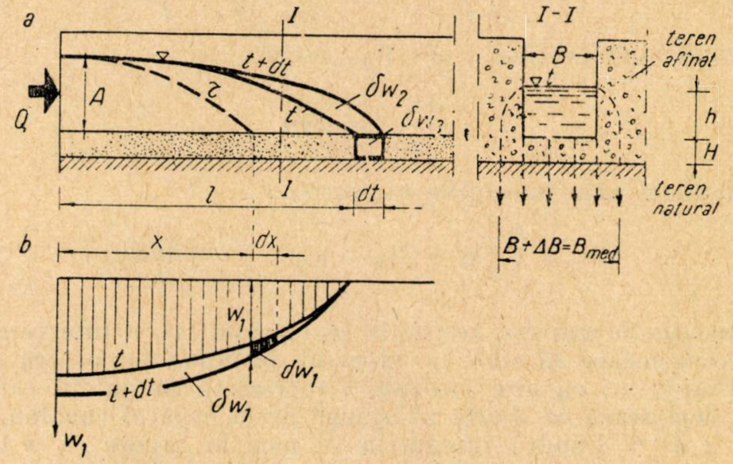


Fig. 1

Pentru o mai largă cuprindere a fenomenului se consideră stratificația terenului alcătuită dintr-un sol afînat, în care apa pătrunde foarte repede, iar ca suport un altul compact în care infiltrația se produce pe o lățime activă $B_{\mathrm{med}} \neq B$.

Dacă notăm (fig. 1)

$$q = \frac{Q}{B_{\mathrm{med}}}, \tag{5}$$

unde

B_{med} este *lățimea medie activă* pe lungimea parcursă de undă și apoi

δW_1 = volumul de apă infiltrat pe unitatea de lățime B_{med} și pe lungimea l parcursă de undă, de la timpul t la timpul $t + \mathrm{d}t$ (fig. 1, *b*),

δW_2 = volumul de apă pe aceeași unitate de lățime, acumulat în canal de la timpul t la timpul $t + \mathrm{d}t$, pe toată lungimea,

δW_3 = volumul de apă pe unitatea de lățime, acumulat la capătul aval al undei în stratul afînat, pe lungimea corespunzător timpului $\mathrm{d}t$ (cu neglijarea capilarității în toate sensurile), vom putea scrie următoarea relaţie de bilanţ al volumelor, în timpul dt :

$$q\,\mathrm{d}t = \delta W_1 + \delta W_2 + \delta W_3. \tag{6}$$

Volumul δW_1 este reprezentat în figura 1, c, prin aria haşurată dintre cele două curbe care reprezintă volumele infiltrate W_1 de-a lungul lui l şi pe unitatea de lăţime B_{med}, la timpul t şi la timpul $t + \mathrm{d}t$. Analitic avem

$$\delta W_1 = \int_{x=0}^{l} \mathrm{d}W_1\,\mathrm{d}x = \int_0^l \left[\frac{\mathrm{d}W_1}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}x. \tag{7}$$

După semnificaţia pe care o are W_1, avem

$$\frac{\mathrm{d}W_1}{\mathrm{d}t} = u\,(t)$$

aşa că obţinem prin înlocuirile respective :

$$\delta W_1 = \int_0^l [u_c + (u_0 - u_c)\,\mathrm{e}^{-\gamma(t-\tau)}]\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x. \tag{7'}$$

În relaţia de mai sus, respectiv în formula (4), a intervenit timpul τ de la care începe să aibă loc procesul de infiltraţie pentru secţiunea de la distanţa x; cu alte cuvinte, τ reprezintă timpul în care frontul undei se deplasează ca acesta să ajungă de la capătul canalului pînă la distanţa x de 0. Fiindcă integrarea se face în raport cu x timpul dt este o constantă şi cu notaţia

$$\frac{u_0 - u_c}{u_c} = n \tag{8}$$

avem în final

$$\delta W_1 = u_c\,\mathrm{d}t \int_{x=0}^{l} (1 + n\,\mathrm{e}^{-\gamma(t-\tau)})\,\mathrm{d}x. \tag{9}$$

Volumul δW_2 este reprezentat în figura 1, a prin aria dintre cele două curbe ale liniei suprafeţei libere, respectiv la timpul t şi la timpul $t + \mathrm{d}t$. În ipoteza liniilor parabolice, avem

$$\delta W_2 = \frac{2}{3} A\,(l + \mathrm{d}l) - \frac{2}{3} A\,l = \frac{2}{3} A\,\mathrm{d}l \tag{10}$$

unde A este adîncimea apei la capătul canalului.

Volumul δW_3 rezultă foarte simplu ca fiind volumul golurilor din prisma de teren cu secţiunea $l\mathrm{d}l$ şi înălţimea H a stratului afînat. Luînd în considerare porozitatea efectivă ε a stratului, avem de asemenea

$$\delta W_3 = \varepsilon H\,\mathrm{d}l. \tag{11}$$

Ecuația bilanțului (6) poate să fie scrisă, în consecință, prin înlocuirile (9), (10) și (11), sub forma

$$q = u_c \int_{x=0}^{l} (1 + n e^{-\gamma(t-\tau)})\, \mathrm{d}x + \left(\varepsilon H + \frac{2A}{3}\right) \frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}.$$

Prin schimbarea variabilei x cu τ, conform relației

$$\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}\, \mathrm{d}\tau = l'\, \mathrm{d}\tau,$$

ajungem la ecuația integrală de tipul Volterra și de speța a II-a în $\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t} = l'$

$$q = u_c \int_{\tau=0}^{t} (1 + n \mathrm{e}^{-\gamma(t-\tau)})\, l'\, \mathrm{d}\tau + \left(\varepsilon H + \frac{2A}{3}\right) l'. \tag{12}$$

3. În vederea obținerii lui l' din (12), să notăm

$$\lambda = \left(\varepsilon H + \frac{2}{3} A\right), \quad \mu = \frac{u_c}{\lambda}, \quad q^{\star} = \frac{q}{\lambda}, \quad l' = \varphi(t), \tag{13}$$

de unde ecuația (12) devine

$$\varphi(t) + \mu \int_{\tau=0}^{t} (1 + n \mathrm{e}^{-\gamma(t-\tau)})\, \varphi(\tau)\, \mathrm{d}\tau = q^{\star}. \tag{14}$$

Presupunînd că funcția $\varphi(t)$ necunoscută admite două derivate continue în vecinătatea originii, două derivări în raport cu t a ecuației (14) conduc la ecuațiile

$$\varphi'(t) + \mu(1 + n)\varphi(t) - \gamma\mu \int_{\tau=0}^{t} n\, \mathrm{e}^{-\gamma(t-\tau)}\, \varphi(\tau)\, \mathrm{d}\tau = 0 \tag{14'}$$

$$\varphi''(t) + [\mu(1 + n) + \gamma]\, \varphi'(t) + \gamma\mu\, \varphi(t) = 0$$

ultima fiind de forma

$$\varphi''(t) + 2\beta\, \varphi'(t) + \gamma\mu\, \varphi(t) = 0. \tag{15}$$

unde

$$2\beta = \mu(1 + n) + \gamma. \tag{16}$$

Ecuația caracteristică atașată ecuației diferențiale (15) are rădăcinile reale dacă

$$\Delta = \beta^2 - \gamma\mu > 0 \tag{17}$$

iar soluția generală $\varphi(t)$ se scrie în această ipoteză

$$\varphi(t) = C_1 \mathrm{e}^{r_1 t} + C_2 \mathrm{e}^{r_2 t}, \quad r_{1,2} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \gamma\mu}. \tag{18}$$

Făcînd în (14) şi (14′) pe $t = 0$, găsim relaţiile

$$\varphi(0) = q^{*}, \quad \varphi'(0) = -\mu(1+n)\,q^{*} = -(2\beta - \gamma)\,q^{*} \tag{19}$$

care dau, pentru $t = 0$, pe C_1 şi C_2 din (18)

$$\begin{aligned} q^{*} &= C_1 + C_2, \\ -\mu(1+n) &= C_1 r_1 + C_2 r_2, \end{aligned} \tag{20}$$

sau

$$C_1 = -\frac{\mu(1+n) + r_2}{2\sqrt{\Delta}}\,q^{*} \quad \text{şi} \quad C_2 = q^{*} - C_1. \tag{21}$$

Rădăcinile r_1 şi r_2, în ipoteza $\Delta \neq 0$, cu notaţiile iniţiale (15) sînt

$$r_{1,2} = -\frac{u_0}{2\lambda} - \frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{\Delta} \tag{22}$$

iar

$$\Delta = \frac{1}{4}\left(\frac{u_0}{\lambda} + \gamma\right)^2 - \frac{u_c}{\lambda}\gamma \tag{23}$$

este pozitiv în ipoteza $u_0 > u_c$, căci dacă luăm expresia Δ', obţinută prin înlocuirea lui u_0 prin u_c, expresie mai mică decît Δ[1]),

$$\Delta' = \frac{1}{4}\left(\frac{u_c}{\lambda} + \gamma\right)^2 - \frac{u_c}{\lambda}\gamma - \frac{1}{4}\left(\frac{u_c}{\lambda} - \gamma\right)^2,$$

găsim un pătrat perfect. Ambele rădăcini sînt reale, distincte şi *negative*, pentru că din ecuaţia caracteristică avem

$$r_1 r_2 = \gamma\mu > 0 \quad \text{şi} \quad r_1 + r_2 = -2\beta < 0. \tag{24}$$

Integrînd atunci relaţia (18) şi întrucît conform cu (13) s-a notat $\varphi(t) = \frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}$, avem ca soluţie pentru l

$$\boxed{l = \frac{C_1}{r_1}\left(e^{r_1 t} - 1\right) + \frac{C_2}{r_2}\left(e^{r_2 t} - 1\right)}\,. \tag{25}$$

Cînd t tinde către infinit, expresia (25) devine, r_1 şi r_2 fiind negativi,

$$l_{t=\infty} = -\frac{C_1}{r_1} - \frac{C_2}{r_2}. \tag{26}$$

---

[1] Cu condiţia ca $u_c \neq \gamma\lambda$.

sau, înlocuind valorile lui C_1 și C_2 prin (20) și q^* prin (13) și (5) avem

$$l_{t=\infty} = \frac{q}{\mu\lambda} = \frac{Q}{u_c\, B_{\text{med}}}\,. \tag{27}$$

Graficul lui $l(t)$ este o curbă crescătoare pentru $t > 0$, curbă ce tinde pentru $t = \infty$ către valoarea din (27), aceasta întrucît $l' = \varphi(t)$ este încontinuu pozitiv. Într-adevăr, dacă $\varphi(t)$ s-ar anula, am avea după (18)

$$C_1\, e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t} = 0 \quad \text{sau} \quad e^{(r_1 - r_2)t} = -\frac{C_1}{C_2}$$

și deci această ecuație nu ar avea nici o soluție finită dacă C_1 și C_2 ar fi de același semn. Examinînd valorile (21) se vede că produsul

$$[\mu(1+n) + r_2]\,[\mu(1+n) + r_2 +$$
$$+ 2\sqrt{\Delta}\,] = (\beta - \gamma - \sqrt{\Delta})\,(\beta - \gamma + \sqrt{\Delta})$$

trebuie să fie negativ. Cum el se scrie după (16)

$$(\beta - \gamma)^2 - \Delta = \gamma\,[\gamma + \mu - 2\beta] =$$
$$= \gamma\,\mu\,n < 0$$

rezultă că $\varphi(t)$ nu se anulează pentru nici o valoare finită a lui t, iar graficul lui l se prezintă ca în figura 2.

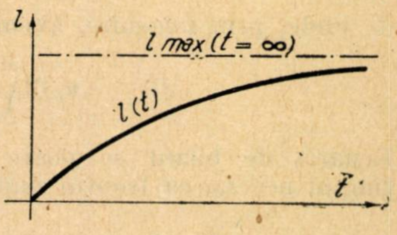


Fig. 2

4. Aplicarea formulelor (25), respectiv (27), cere să fie cunoscută și lățimea activă B_{med}. În general se admite relația (fig. 1, *c*)

$$B_{\text{med}} = B + \Delta B. \tag{28}$$

Experimentările mai recente [2] arată că ΔB crește sau descrește o dată cu $(A + H)$ și crește cînd panta i a canalului descrește, toate acestea în ipoteza că stratul freatic se situează mult mai jos în sol, adică acolo unde el nu influențează infiltrația din stratul compact.

În primă aproximație, pentru $(A + H)$ relativ mic, admitem relația

$$B_{\text{med}} \approx B. \tag{29}$$

În ambele cazuri, pentru un debit de alimentare Q dat, A și B rezultă în urma unui calcul hidraulic normal.

Pe măsura obținerii unor date experimentale mai numeroase se vor putea aduce corectări formulei (29) care are aici un caracter preliminar.

5. *Ecuația debitului*. Considerăm și aici cazul undei cu secțiunea transversală dreptunghiulară, iar debitul specific de alimentare q după relația (5).

Cu neglijarea volumului de apă acumulat în canal, putem scrie următoarea ecuație de bilanț (fig. 1)

$$(q - q_1)\, dt = \int_{x=0}^{l_1} dW_1\, dx \tag{30}$$

în care :

q_1 = debitul specific în secţiunea aflată la distanţa $l_1 < l$, debit a cărui ecuaţie se caută,

W_1 = ordonata volumului specific infiltrat pe durata $(t - \tau)$, respectiv pentru abscisa x.

τ = timpul necesar ca unda să parcurgă distanţa x.

Volumul δW_1, pe distanţa $l_1 < l$, este după ecuaţia (9) :

$$\delta W_1 = \int_{x=0}^{l_1} \mathrm{d}W_1\, \mathrm{d}x = u_c\, \mathrm{d}t \int_{x=0}^{l_1} (1 + \mathrm{n}\mathrm{e}^{-\gamma(t-\tau)})\, \mathrm{d}x.$$

Dar

$$\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}\tau = l'\, \mathrm{d}\tau = \varphi(t)\, \mathrm{d}\tau$$

de unde, prin înlocuire, avem

$$\delta W_1 = u_c\, \mathrm{d}t \int_{\tau=0}^{t_1} (1 + n\mathrm{e}^{-\gamma(t-\tau)})\, \varphi(\tau)\, \mathrm{d}\tau.$$

Ecuaţia de bilanţ se poate deci scrie, cu menţiunea că t_1 reprezintă timpul necesar ca frontul undei să atingă distanţa l_1,

$$(q - q_1)\, \mathrm{d}t = u_c\, \mathrm{d}t \int_{\tau=0}^{t_1} (1 + \mathrm{n}\, \mathrm{e}^{-\gamma(t-\tau)})\, \varphi(\tau)\, \mathrm{d}\tau =$$

$$= u_c\, \mathrm{d}t \left[\int_{\tau=0}^{t_1} \varphi(\tau)\, \mathrm{d}\tau + n \int_{\tau=0}^{t_1} \mathrm{e}^{-\gamma(t-\tau)} \varphi(\tau)\, \mathrm{d}\tau \right].$$

După (13) se deduce valoarea lui l_1

$$\int_{\tau=0}^{t_1} \varphi(\tau)\, \mathrm{d}\tau = l_1$$

care introdusă mai sus conduce la

$$q - q_1 = u_c \left[l_1 + \int_{\tau=0}^{t_1} n\, \mathrm{e}^{-\gamma(t-\tau)}\, \varphi(\tau)\, \mathrm{d}\tau \right]. \tag{31}$$

Ţinînd seama de ecuaţia (19) şi efectuînd integrala din paranteză, se obţine

$$q_1 = q - u_c \left[l_1 + n \left\{ \frac{C_1}{\gamma + r_1} \mathrm{e}^{(\gamma + r_1)\tau - \gamma t} + \frac{C_2}{\gamma + r_2} \mathrm{e}^{(\gamma + r_2)\tau - \gamma t} \right\}_{\tau=0}^{t_1} \right]$$

sau, în final, avem pentru $l_1 < l$ şi $t \geqslant t_1$

$$\boxed{q_1 = q - l_1 u_c - u_c n\, \mathrm{e}^{-\gamma t} \left[\frac{C_1}{\gamma + r_1} (\mathrm{e}^{(\gamma + r_1)t_1} - 1) + \frac{C_2}{\gamma + r_2} (\mathrm{e}^{(\gamma + r_2)t_1} - 1) \right]} \tag{32}$$

în care, conform relațiilor de mai înainte,

$$q = \frac{Q}{B_{\text{med}}}, \quad q_1 = \frac{Q_1}{B_{\text{med}}}, \quad n = \frac{u_0 - u_c}{u_c},$$

C_1 și C_2 fiind dați de relațiile (21), iar legătura dintre l_1 și t_1, conform ecuației (25), este

$$l_1 = \frac{C_1}{r_1}(e^{r_1 t_1} - 1) + \frac{C_2}{r_2}(e^{r_2 t_1} - 1).$$

Graficul lui q_1 în raport cu timpul t este o curbă exponențială, cu asimptota pentru $t = \infty$ (fig. 3)

$$\underset{t \to \infty}{q_1} = q - l_1 u_c \quad \text{respectiv}$$

$$Q_1 = Q - l_1 u_c B_{\text{med}}. \qquad (33)$$

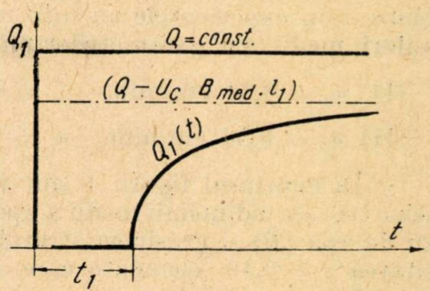
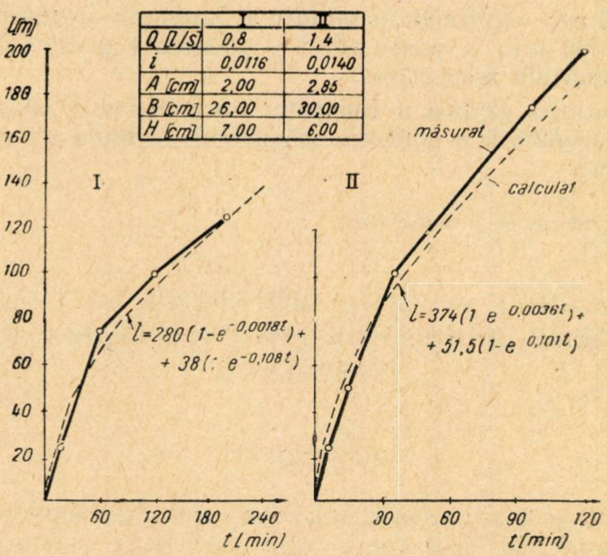


Fig. 3

Cînd $l_1 = 0$, avem evident $t_1 = 0$, așa că ecuația (32) devine respectiv $Q = Q_1$ (debitul de alimentare la capăt).

Trebuie observat că valorile obținute prin formula (32) pot fi mai mari decît acelea în care s-ar fi ținut seama de volumul de apă acumulat în canal, dar diferența este de un ordin de mărime puțin important.



	I	II
Q [l/s]	0,8	1,4
i	0,0116	0,0140
A [cm]	2,00	2,85
B [cm]	26,00	30,00
H [cm]	7,00	6,00

Fig. 4

6. *Rezultate experimentale.* O verificare a formulei (25) s-a obținut folosind datele experimentale (I.S.P.A. astăzi I.P.A.C.H.) de la

brazdele lungi amenajate pe cîmpul experimental de la G.A.S. Ovidiu, în decursul anului 1962.

În figura 4 sînt redate prin linii pline (*I* și *II*) variația lungimilor de brazdă în raport cu timpul, ca rezultat al măsurătorilor directe.

Brazdele au secțiuni aproximativ parabolice și cu pante relativ apropiate. Din experiențele cu infiltrometrul pe teren au reieșit următoarele valori medii ale parametrilor privind infiltrația :

$$(\mathrm{I})\quad u_0 = 0{,}40\ \mathrm{cm/min},\quad u_c = 0{,}058\ \mathrm{cm/min},\quad \gamma = 0{,}013\ \ \mathrm{min}^{-1};$$

$$(\mathrm{II})\quad u_0 = 0{,}36\ \mathrm{cm/min},\quad u_c = 0{,}059\ \mathrm{cm/min},\quad \gamma = 0{,}0246\ \mathrm{min}^{-1}.$$

În cuprinsul figurii 4 sînt indicate valorile debitelor (Q), ale pantelor (i), ale adîncimii medii a apei la capătul amonte (A), lățimea oglinzii de apă (B) și grosimea stratului de sol afînat (H) considerat cu porozitatea $\varepsilon = 0{,}40$, elemente care sînt necesare și ele la aplicarea teoriei expusă în această lucrare.

Folosind succesiv relațiile (29), (8), (5), (13), (16), (18), (21), (17) și (25), rezultă ecuațiile de calcul $l\,(t)$

$$(\mathrm{I})\quad l = 280\ (1 - e^{-0{,}0018\,t}) + 38\ (1 - \mathrm{e}^{-0{,}108\,t})\qquad [\mathrm{m}],$$

$$(\mathrm{II})\quad l = 374\ (1 - \mathrm{e}^{-0{,}0036\,t}) + 51{,}5\ (1 - \mathrm{e}^{-0{,}101\,t})\quad [\mathrm{m}],$$

în care timpul este exprimat în minute și lungimile în metri. Se observă că pentru $t \geqslant 60$ min se poate admite valoarea 1 a celei de-a doua paranteze din ecuațiile respective.

Reprezentarea grafică a ecuațiilor de calcul este redată în figura 4, de unde se constată o concordanță destul de bună cu graficul măsurătorilor directe.

Primită la redacție la 1 martie 1963

ПОСТУПАТЕЛЬНЫЕ ВОЛНЫ С ПОТЕРЯМИ НА ТРАКТЕ ПУТЕМ ИНФИЛЬТРАЦИИ, ДВИЖЕНИЕ ФРОНТА ВОЛНЫ И ИЗМЕНЕНИЕ РАСХОДА

РЕЗЮМЕ

Исследуется класс гидравлических волн с непрерывным питанием в их конце, имеющие большие потери воды из-за мощных инфильтраций в грунт.

Принимается скорость инфильтрации воды в грунт переменной со временем по (3) и находится уравнение баланса в виде дифференциального уравнения (5), соответственно (11), с обозначениями из рис. 1.

Дается метод расчета решения дифференциального уравнения, представляющего соотношение между длиной l, пройденной фронтом

волны, и временем, которое аналитически имеет вид, данный уравнением (27), соответственно для $t = \infty$ в уравнении (29).

Далее, устанавливается уравнение баланса (33), соответственно (34), для расчета удельного расхода q_1 в сечении потока на расстоянии $l_1 < l$. Это уравнение в явном виде дается в соотношении (35).

Экспериментальная проверка производилась на длинных оросительных бороздах и как следует из рис. 3 наблюдается удовлетворительное соответствие между расчетными (27) и экспериментальными результатами.

Установленные формулы находят себе область применения в задаче гидравлического проектирования устройства полей для орошения.

BIBLIOGRAFIE

1. CR. MATEESCU, *Hidraulica*. Edit de Stat didact. şi ped., Bucureşti, 1962.
2. С. М. КРИВОВЯЗ, *Расчет полива по бороздам*. Гидротехника и мелиорация, *1*, (1961).

REGIMURI OPTIME DE DIRIJARE A TRACȚIUNII UNOR RACHETE

DE

PETRE BRĂDEANU[1] și ION PĂVĂLOIU[1]

533 :629.136/3

Mișcarea rachetelor, balistice sau cosmice, după un program optim de funcționare a motorului și dirijare a direcției tracțiunii, care să asigure stabilitatea, mărirea continuă a bătăii sau energiei rachetei, este astăzi una din cele mai importante probleme ale teoriei și tehnicii rachetelor.

Problema folosirii raționale, economice și rentabile a combustibilului rămîne actuală atîta timp cît motorul rachetă funcționează cu combustibili clasici. Folosirea unui combustibil nuclear va diminua desigur importanța regimurilor optime de funcționare și consum pentru motoarele rachetă.

Cu problema regimului optim de dirijare a tracțiunii s-au ocupat D. Lawden, B. Fried și I. Richardson, H. Tsien etc., care au reușit să dea, sub diverse forme matematice, o teorie destul de generală a acestei probleme și, ca aplicații, să studieze pînă la capăt unele cazuri particulare simple, într-un număr foarte mic, a căror rezolvare prin cvadraturi corespundea metodei propuse.

În lucrarea de față ne vom ocupa cu stabilirea unui regim optim de dirijare a direcției tracțiunii unei rachete balistice și a unei rachete cosmice, în vederea obținerii unei bătăi maxime, respectiv energii maxime. Nu vom pune probleme de optim asupra regimului de funcționare a motorului, considerînd că acesta este dat. Folosind procedee deosebite de cele întîlnite la autorii citați mai sus, studiem, într-o formă exactă în cadrul teoriei mișcării relative, problema regimului optim de dirijare a tracțiunii în ipoteza că Pămîntul se mișcă în spațiu iar regimul de funcționare a motorului este cunoscut.

---

[1] Universitatea „Babeș-Bolyai", Cluj.

1. ECUAŢIILE MIŞCĂRII RACHETEI

Să presupunem că o rachetă balistică este lansată dintr-o poziţie fixă O de pe suprafaţa Pămîntului şi să ţinem seama că Pămîntul este mobil în spaţiu şi anume că se roteşte în jurul axei sale. Vom considera în punctul O sistemul de coordonate $Ox_1x_2x_3$ invariabil legat de Pămînt. Neglijăm contribuţia rotaţiei rachetei asupra traiectoriei rachetei şi traiectoriei centrului de greutate al rachetei.

Admiţînd postulatul mişcării corpului de masă variabilă şi postulatul mişcării relative, ecuaţia mişcării relative a rachetei raportată la reperul mobil $Ox_1x_2x_3$ se obţine din ecuaţia lui Newton

$$m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \vec{F}$$

dacă se consideră că masa variază în raport cu timpul iar forţa $\vec{F}$ conţine forţa direct aplicată $\vec{G} = m\vec{g}$ (forţa gravitaţională $m\vec{g}$ rezultantă a forţei de atracţie a Pămîntului şi forţei centrifuge), forţa Coriolis $-2m\vec{\omega} \times \vec{v}$ şi forţa de tracţiune reactivă $\vec{P} = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\vec{u}$, unde $\vec{v}$ este viteza rachetei faţă de $Ox_1x_2x_3$, m este masa, $\vec{\omega}$ este viteza unghiulară a Pămîntului iar $\vec{u}$ este viteza efectivă de expulzare a gazelor în ajutajul rachetei.

Ecuaţia mişcării rachetei va avea deci forma

$$m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = m\vec{g} - 2\,m\vec{\omega} \times \vec{v} + \vec{P}. \tag{1}$$

Împărţind ecuaţia (1) cu m şi notînd $\frac{\vec{P}}{m} = \vec{f}$, $\vec{f}$ fiind acceleraţia reactivă, această ecuaţie devine

$$\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \vec{g} - 2\vec{\omega} \times \vec{v} + \vec{f}. \tag{2}$$

Considerăm acum reperul cartezian $Ox_1x_2x_3$. Axa Ox_1 este tangentă la Pămînt şi orientată spre sud, axa Ox_2 este verticala locului, îndreptată spre zenit, iar axa Ox_3 este perpendiculară în O pe Ox_1 şi Ox_2, astfel încît $Ox_1x_2x_3$ să formeze un reper direct în această ordine.

Notînd cu α unghiul pe care Ox_1 îl formează cu meridianul locului de lansare O, cu λ latitudinea geografică a punctului O şi cu l_1,

l_2 și l_3 cosinușii directori ai tracțiunii față de axele Ox_1, Ox_2 și Ox_3 , avem proiecțiile

$$\vec{\omega}\,(-\,\omega\cos\lambda\cos\alpha,\ \ \omega\sin\lambda,\ -\ \omega\cos\lambda\sin\alpha),\ \vec{g}\,(0,\ -\,g,\ 0),$$

$$\vec{v}\,(\dot{x}_1,\ \dot{x}_2,\ \dot{x}_3)\ ,\ \vec{f}\,(fl_1,\ fl_2,\ fl_3).$$

Prin proiectarea ecuației de mișcare (2), pe axele triedrului ales, se obțin ecuațiile scalare ale mișcării în forma

$$\ddot{x}_1 + 2(\dot{x}_2\,\omega\cos\lambda\sin\alpha + \dot{x}_3\,\omega\sin\lambda) = fl_1, \tag{2'}$$

$$\ddot{x}_2 + 2(-\,\dot{x}_1\,\omega\cos\lambda\sin\alpha + \dot{x}_3\,\omega\cos\lambda\cos\alpha) = fl_2 - g,$$

$$\ddot{x}_3 - 2\,(\dot{x}_1\,\omega\sin\lambda + \dot{x}_2\,\omega\cos\lambda\cos\alpha) = fl_3.$$

Vom presupune acum că tracțiunea se află în tot timpul acțiunii sale în planul Ox_1x_2 și atunci $l_3 = 0$. Vom presupune de asemenea că $\lambda = 0$ și $\alpha = \frac{\pi}{2}$, ceea ce înseamnă că planul Ox_1x_2 coincide cu planul ecuatorului. Din ecuația a treia a sistemului (2′) rezultă, presupunînd că viteza inițială se află în planul Ox_1x_2, că în tot timpul mișcării $x_3=0$, că mișcarea are loc în planul Ox_1x_2, adică în planul ecuatorului pămîntesc. Vom studia problema propusă într-un asemenea caz. Axa Ox_1 va fi tangentă la ecuator și îndreptată spre est iar axa Ox_2, îndreptată spre zenit, este în planul ecuatorului. Presupunem că lansarea are loc spre est.

Ecuațiile mișcării plane a rachetei pe partea activă a traiectoriei, adică pe acea parte a traiectoriei pe care forța de tracțiune lucrează efectiv fiind diferită de zero, se vor deduce din (2′) și au forma

$$\ddot{x}_1 + 2\omega\,\dot{x}_2 = fl_1, \tag{3}$$

$$\ddot{x}_2 - 2\omega\,\dot{x}_1 = fl_2 - g. \tag{4}$$

Pe partea pasivă a traiectoriei, unde tracțiunea este nulă, ecuațiile mișcării se vor deduce, în baza ipotezelor de mai sus, din (2′) luînd $f = 0$,

$$\ddot{x}_1 + 2\omega\,\dot{x}_2 = 0, \tag{5}$$

$$\ddot{x}_2 - 2\omega\,\dot{x}_1 = -\,g. \tag{6}$$

Ecuațiile de mai sus sînt valabile, în ipotezele admise, atît pentru rachete balistice cît și pentru rachete cosmice sau purtătoare de sateliți artificiali ai Pămîntului.

A. RACHETE BALISTICE

2. CALCULUL DISTANŢEI ORIZONTALE DE ZBOR (BĂTAIA)

Pentru a calcula distanţa de zbor a rachetei ar trebui să integrăm ecuaţiile (3) — (4) corespunzătoare părţii active şi ecuaţiile (5) — (6) corespunzătoare părţii pasive. Pentru scopurile pe care le urmărim, în acest paragraf, nu este nevoie decît să integrăm ecuaţiile (5) — (6) şi să considerăm că poziţia finală a părţii active are coordonatele A (q_1, q_2), rămînînd ca q_1 şi q_2 să fie determinaţi ulterior. Să notăm cu $\dot{q}_1$ şi $\dot{q}_2$ vitezele, orizontală şi verticală, ale rachetei în poziţia A. Mărimile $\dot{q}_i$ sînt de asemenea necunoscute.

Să observăm că ecuaţiile (5) — (6) sînt cu coeficienţi constanţi şi nu cuprind funcţiile necunoscute ci numai derivatele lor. În consecinţă, aceste ecuaţii se pot integra odată obţinînd,

$$\dot{x}_1 + 2\omega\, x_2 = c_1,$$

$$\dot{x}_2 - 2\omega\, x_1 = -\, gt + c_2.$$

Integrarea acestor ecuaţii, cu condiţiile iniţiale

$$x_1(0) = q_1,\ x_2(0) = q_2,\ \dot{x}_1(0) = \dot{q}_1,\ \dot{x}_2(0) = \dot{q}_2,$$

este imediată şi conduce la soluţiile

$$x_1(t) = q_1 - \frac{\dot{q}_2}{2\omega} + \frac{\dot{q}_2}{2\omega}\cos 2\,\omega t + \frac{2\,\omega\dot{q}_1 - g}{4\,\omega^2}\sin 2\,\omega t + \frac{gt}{2\omega}, \tag{7}$$

$$x_2(t) = q_2 + \frac{\dot{q}_1}{2\omega} + \frac{\dot{q}_2}{2\omega}\sin 2\omega t + \frac{-2\,\omega\,\dot{q}_1 + g}{4\,\omega^2}\cos 2\,\omega t - \frac{g}{4\,\omega^2}. \tag{8}$$

Distanţa orizontală de zbor (bătaia) se va obţine din formula (7) cu condiţia $x_2 = 0$, condiţie din care se află timpul t_1 necesar parcurgerii părţii pasive. Din ecuaţia $x_2(t_1) = 0$ se găseşte

$$\sin 2\omega\, t_1 = \alpha + \sqrt{\alpha^2 - \beta} = Z, \tag{9}$$

unde, după cum rezultă din calcule,

$$\alpha = \frac{-\,2\,\omega\,\dot{q}_2\,(4\,\omega^2 q_2 + 2\,\omega\dot{q}_1 - g)}{4\,\omega^2\,\dot{q}_2^2 + (-\,2\,\omega\,\dot{q}_1 + g)^2}, \tag{9'}$$

$$\beta = \frac{(4\,\omega^2\,q_2 + 2\,\omega\,\dot{q}_1 - g)^2 - (-2\,\omega\dot{q}_1 + g)^2}{4\,\omega^2\,\dot{q}_2^2 + (-2\,\omega\,\dot{q}_1 + g)^2}. \tag{9''}$$

Se înlocuieşte (9) în (7) şi se obţine distanţa de zbor

$$R\,(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2) = q_1 - \frac{\dot{q}_2}{2\omega} + \frac{\dot{q}_2}{2\omega}\sqrt{1 - Z^2} + \frac{2\,\omega\,\dot{q}_1 - g}{4\,\omega^2}\,Z +$$

$$+ \frac{g}{4\,\omega^2}\arcsin Z. \tag{10}$$

Distanța de zbor R depinde de poziția rachetei în momentul încetării motorului și de viteza pe care racheta și-a cîștigat-o în această poziție. Poziția finală a părții active este poziție inițială pentru partea pasivă.

Poziția A (q_1, q_2) se obține dacă se integrează ecuațiile mișcării pe partea activă, adică ecuațiile (3) — (4). Aceste ecuații conțin două categorii de funcții necunoscute. Pe de o parte, funcții necunoscute sînt $x_1(t)$ și $x_2(t)$ iar pe de altă $f(t)$ și $l_i(t)$. Dacă se iau ca necunoscute funcțiile $x_i(t)$, adică mișcarea, atunci funcțiile $f(t)$ și $l_i(t)$, care reprezintă regimul de funcționare și direcția tracțiunii, se consideră cunoscute în sensul să sînt date efectiv sau sînt determinate cu condiții suplimentare. Funcțiile $f(t)$ și $l_i(t)$ sînt deci funcții arbitrare, avînd bineînțeles proprietăți matematice necesare asigurării integrării ecuațiilor. Funcțiile $f(t)$ și $l_i(t)$ pot fi alese într-un fel sau altul după cum și forța de tracțiune, forță artificială, poate fi aleasă într-un fel sau altul.

O dată alese funcțiile $f(t)$ și $l_i(t)$ vor rezulta valori bine determinate, obținute prin integrarea ecuațiilor (3) — (4), pentru q_i și $\dot{q}_i$ și în consecință și pentru distanța R.

Dacă se modifică puțin funcțiile $f(t)$ și $l_i(t)$, cu $\delta f(t)$ și $\delta l_i(t)$, adică se ia o variație a regimului de funcționare și dirijare a tracțiunii, atunci va rezulta o variație a mișcării rachetei și în consecință valorile q_i, $\dot{q}_i$ și R vor suferi și ele variațiile δq_i, $\delta \dot{q}_i$, δR între care există o relație ce rezultă din (10) și care are forma

$$\delta R = \delta q_1 + P_2\, \delta q_2 + P_3\, \delta \dot{q}_1 + P_4\, \delta \dot{q}_2, \tag{11}$$

unde

$$P_2 = \left(\frac{-\dot{q}_2 Z}{2\omega\sqrt{1-Z^2}} + \frac{2\omega\dot{q}_1 - g}{4\omega^2} + \frac{g}{4\omega^2}\, \frac{1}{\sqrt{1-Z^2}} \right) \frac{\partial Z}{\partial q_2},$$

$$P_3 = \frac{-\dot{q}_2 Z}{2\omega\sqrt{1-Z^2}}\, \frac{\partial Z}{\partial \dot{q}_1} + \frac{Z}{2\omega} + \frac{2\omega\dot{q}_1 - g}{4\omega^2}\, \frac{\partial Z}{\partial \dot{q}_1} + \frac{g}{4\omega^2\sqrt{1-Z^2}}\, \frac{\partial Z}{\partial \dot{q}_1},$$

$$P_4 = -\frac{1}{2\omega} + \frac{\sqrt{1-Z^2}}{2\omega} - \frac{\dot{q}_2 Z}{2\omega\sqrt{1-Z^2}}\, \frac{\partial Z}{\partial \dot{q}_2} + \frac{2\omega\dot{q}_1 - g}{4\omega^2}\, \frac{\partial Z}{\partial \dot{q}_2} + \frac{g}{4\omega^2\sqrt{1-Z^2}}\, \frac{\partial Z}{\partial \dot{q}_2}.$$

Problema care se pune acum constă în alegerea funcțiilor $f(t)$ și $l_i(t)$ în așa fel ca bătaia R a rachetei să fie maximă.

Nu ne vom ocupa cu rezolvarea în întregime a acestei probleme, ci vom considera că funcția $f(t)$ este dată (fixată din punct de vedere variațional), rămînînd să alegem numai funcțiile $l_i(t)$ care fac maximă bătaia R.

În acest scop va trebui să exprimăm variațiile δq_i și $\delta \dot{q}_i$, și pe urmă și variația δR, în raport cu variațiile δl_i și din condiția de extrem $\delta R = 0$ să deducem expresiile funcțiilor $l_i(t)$, adică regimul optim de dirijare care să asigure realizarea unei bătăi maxime.

3. REGIMUL OPTIM DE DIRIJARE A DIRECŢIEI TRACŢIUNII

Considerînd că funcţia $f(t)$ este dată, ecuaţiile variaţiilor se vor deduce din ecuaţiile (3) — (4) şi au forma

$$\delta\ddot{x}_1 + 2\omega\,\delta\,\dot{x}_2 = f\delta l_1, \tag{12}$$

$$\delta\ddot{x}_2 - 2\omega\,\delta\,\dot{x}_1 = f\delta l_2. \tag{13}$$

Să observăm că problema variaţională formulată permite să scriem ecuaţiile (12) — (13) în forma

$$\left.\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta\dot{x}_1) + 2\omega\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta x_2) &= f\delta l_1,\\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta\dot{x}_2) - 2\omega\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta x_1) &= f\delta l_2.\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Problema noastră cere să aflăm variaţiile δx_i şi $\delta\dot{x}_i$ care satisfac ecuaţiile precedente. Pentru a rezolva aceste ecuaţii facem substituţiile

$$\delta\dot{x}_i = z_i, \qquad \delta x_i = y_i \tag{15}$$

şi atunci ecuaţiile precedente conduc la sistemul

$$\left.\begin{aligned}\dot{z}_1 + 2\omega z_2 &= f\delta\, l_1,\\ \dot{z}_2 - 2\omega z_1 &= f\delta\, l_2,\\ \dot{y}_1 - z_1 &= 0,\\ \dot{y}_2 - z_2 &= 0.\end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Adăugăm la ecuaţiile (16) următoarele condiţii iniţiale

$$\left.\begin{aligned}z_1(0) = \delta\,\dot{x}_1(0) = 0, \quad z_2(0) = \delta\,\dot{x}_2(0) = 0,\\ y_1(0) = \delta\, x_1(0) = 0, \quad y_2(0) = \delta\, x_2(0) = 0.\end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Ecuaţiile omogene corespunzătoare primelor două ecuaţii din (16) pot fi scrise în forma

$$\ddot{z}_i + 4\omega^2 z_i = 0, \qquad i = 1,\ 2.$$

Integrala generală a sistemului omogen este de forma

$$\left.\begin{aligned}z_1(t) &= A\cos 2\omega t - B\sin 2\omega t,\\ z_2(t) &= A\sin 2\omega t + B\cos 2\omega t.\end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Determinantul sistemului fundamental de soluţii este

$$\Delta = \begin{vmatrix}\cos 2\omega t & -\sin 2\omega t\\ \sin 2\omega t & \cos 2\omega t\end{vmatrix} = 1. \tag{19}$$

Se observă din (18) că pentru condițiile inițiale (17) constantele A și B sînt nule.

Pentru a găsi soluțiile sistemului (16) unit cu condițiile (17) vom folosi metoda variației constantelor.

Soluțiile primelor două ecuații din (16) care satisfac condițiile inițiale sînt

$$z_1(t) = \delta\dot{x}_1(t) = \int_0^t f(s)\,[\cos 2\omega(t-s)\,\delta l_1(s) - \sin 2\omega(t-s)\,\delta l_2(s)]\,\mathrm{d}s, \tag{20}$$

$$z_2(t) = \delta\dot{x}_2(t) = \int_0^t f(s)\,[\sin 2\omega(t-s)\,\delta l_1(s) + \cos 2\omega(t-s)\,\delta l_2(s)]\,\mathrm{d}s. \tag{21}$$

Ultimele două ecuații din (16) se integrează cu ajutorul soluțiilor (20) — (21) sub forma

$$y_1(t) = \delta x_1(t) = \int_0^t \mathrm{d}x \int_0^x f(s)[\cos 2\omega(x-s)\,\delta l_1(s) - \sin 2\omega(x-s)\,\delta l_2(s)]\,\mathrm{d}s, \tag{22}$$

$$y_2(t) = \delta x_2(t) = \int_0^t \mathrm{d}x \int_0^x f(s)[\sin 2\omega(x-s)\,\delta l_1(s) + \cos 2\omega(x-s)\,\delta l_2(s)]\,\mathrm{d}s. \tag{23}$$

Pentru calculul ultimelor integrale folosim formula lui Dirichlet și obținem

$$y_1(t) = \delta x_1(t) = \int_0^t \frac{f(s)}{2\omega}\{[\cos 2\omega(t-s) - 1]\,\delta l_2(s) + \sin 2\omega(t - s)\,\delta l_1(s)\}\,\mathrm{d}s, \tag{24}$$

$$y_2(t) = \delta x_2(t) = \int_0^t \frac{f(s)}{2\omega}\{\sin 2\omega(t-s)\,\delta l_2(s) + [1 - \cos 2\omega(t - s)]\,\delta l_1(s)\}\,\mathrm{d}s. \tag{25}$$

Dacă notăm cu T timpul în care racheta parcurge partea activă OA, atunci formulele (20) — (21) și (24) — (25) aplicate la momentul T, după înlocuirea variabilei s cu t, devin

$$\delta\dot{q}_1 = \delta\dot{x}_1(T) = \int_0^T f(t)\,[\cos 2\omega(T-t)\,\delta l_1(t) - \sin 2\omega(T-t)\,\delta l_2(t)]\,\mathrm{d}t,$$

$$\delta\dot{q}_2 = \delta\dot{x}_2(T) = \int_0^T f(t)\,[\sin 2\omega(T-t)\,\delta l_1(t) + \cos 2\omega(T-t)\,\delta l_2(t)]\,\mathrm{d}t, \tag{26}$$

$$\delta q_1 = \delta x_1(T) = \int_0^T \frac{f(t)}{2\omega}\{\sin 2\omega(T-t)\,\delta l_1(t) + [\cos 2\omega(T-t) - 1]\,\delta l_2(t)\}\,\mathrm{d}t,$$

$$\delta q_2 = \delta x_2(T) = \int_0^T \frac{f(t)}{2\omega}\{[1 - \cos 2\omega(T-t)]\,\delta l_1(t) + \sin 2\omega(T-t)\,\delta l_2(t)\}\,\mathrm{d}t.$$

Înlocuim expresiile variaţiilor (26) în formula (11) şi expresia variaţiei bătăii R devine

$$\delta R = \int_0^T f(t) \left\{ \left[\left(\frac{1}{2\omega} + P_4\right) \sin 2\omega (T-t) + \left(P_3 - \frac{P_2}{2\omega}\right) \cos 2\omega (T-t) + \right.\right.$$
$$\left. + \frac{P_2}{2\omega}\right] \delta l_1(t) + \left[-\frac{1}{2\omega} + \frac{1}{2\omega} \cos 2\omega (T-t) + \left(\frac{P_2}{2\omega} - \right.\right. \tag{27}$$
$$\left.\left.\left. - P_3\right) \sin 2\omega (T-t) + P_4 \cos 2\omega (T-t)\right] \delta l_2(t) \right\} \mathrm{d}t.$$

Variaţiile δl_1 şi δl_2 satisfac relaţia

$$l_1 \delta l_1 + l_2 \delta l_2 = 0 \tag{28}$$

deoarece

$$l_1^2 + l_2^2 = 1. \tag{29}$$

Condiţia necesară de extrem $\delta R = 0$ împreună cu relaţia (28) conduce la formula

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{\left(\frac{1}{2\omega} + P_4\right) \sin 2\omega (T-t) + \left(P_3 - \frac{P_2}{2\omega}\right) \cos 2\omega (T-t) + \frac{P_2}{2\omega}}{\left(P_4 + \frac{1}{2\omega}\right) \cos 2\omega (T-t) + \left(\frac{P_2}{2\omega} - P_3\right) \sin 2\omega (T-t) - \frac{1}{2\omega}}. \tag{30}$$

La formula (30) se adaugă relaţia

$$l_2 = \sqrt{1 - l_1^2} \tag{31}$$

şi rezolvînd sistemul de ecuaţii (30) — (31) în raport cu l_1 şi l_2 obţinem

$$\begin{aligned} l_1 &= \cos\varphi = \frac{L_1(t)}{\sqrt{L_1^2(t) + L_2^2(t)}}, \\ l_2 &= \sin\varphi = \frac{L_2(t)}{\sqrt{L_1^2(t) + L_2^2(t)}}, \end{aligned} \tag{32}$$

adică

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{l_2(t)}{l_1(t)} = \frac{L_2(t)}{L_1(t)}, \tag{32'}$$

unde

$$\begin{aligned} L_1(t) &= \left(\frac{1}{2\omega} + P_4\right) \sin 2\omega (T-t) + \left(P_3 - \frac{P_2}{2\omega}\right) \cos 2\omega (T-t) + \frac{P_2}{2\omega}, \\ L_2(t) &= \left(\frac{P_2}{2\omega} - P_3\right) \sin 2\omega (T-t) + \left(P_4 + \frac{1}{2\omega}\right) \cos 2\omega (T-t) - \frac{1}{2\omega}. \end{aligned} \tag{33}$$

Formula (32′) reprezintă programarea optimă a direcţiei tracţiunii pentru a obţine o bătaie maximă a rachetei. După cum se vede, programarea optimă depinde de timpul t, adică este variabilă în timp, de timpul T, adică de perioada funcţionării motorului, de poziţia (q_1, q_2) şi vitezele $\dot{q}_1$ şi $\dot{q}_2$ pe care racheta le are în momentul încetării funcţionării motorului. Intervalul de timp T este dat, însă valorile q_i şi $\dot{q}_i$ nu sînt cunoscute. Pentru a determina valorile q_i şi $\dot{q}_i$ va trebui să integrăm ecuaţiile mişcării pe partea activă, adică ecuaţiile (3) — (4), în care acum l_1 şi l_2 se consideră cunoscuţi cu ajutorul formulelor de dirijare optimă (32).

Integrînd, prin metodele folosite mai sus, ecuaţiile (3) — (4) împreună cu formulele (32) şi condiţiile iniţiale

$$x_i(0) = 0, \quad \dot{x}_i(0) = 0, \qquad i = 1, 2,$$

se găsesc ecuaţiile traiectoriei optimale.

Aplicînd ecuaţiile astfel obţinute la momentul $t = T$ se găsesc pentru valorile q_i şi $\dot{q}_i$ ecuaţiile

$$\begin{aligned}
\dot{q}_1 &= \int_0^T f(t) \cos [f(t) - 2\omega (t - T)]\, \mathrm{d}t + \frac{g}{2\omega}(1 - \cos 2\omega T), \\
\dot{q}_2 &= \int_0^T f(t) \sin [\varphi(t) - 2\omega (t - T)]\, \mathrm{d}t - \frac{g}{2\omega} \sin 2\omega T, \\
q_1 &= \frac{1}{2\omega} \int_0^T f(t) \Big\{ \sin [\varphi(t) - 2\omega (t - T)] - \sin \varphi(t) \Big\} \mathrm{d}t + \\
&\quad + \frac{gT}{2\omega} + \frac{g}{4\omega^2} \sin 2\omega T, \\
q_2 &= \frac{1}{2\omega} \int_0^T f(t) \Big\{ \cos \varphi(t) - \cos [\varphi(t) - 2\omega (t - T)] \Big\} \mathrm{d}t - \\
&\quad - \frac{g}{4\omega^2} (\cos 2\omega T - 1).
\end{aligned} \tag{34}$$

Soluţiile q_1, q_2, $\dot{q}_1$, $\dot{q}_2$ ale sistemului (34) se înlocuiesc acum în formulele (33) — (32) — (32′) şi în formula (10).

Se determină, în acest fel, nu numai regimul optim de dirijare a direcţiei tracţiunii pentru obţinerea unei bătăi maxime, ci şi valoarea maximă a acestei bătăi, care corespund regimului dat de funcţionare a motorului $f(t)$, vitezei unghiulare ω, cîmpului gravitaţional plan-paralel şi intervalului de timp dat T de funcţionare a motorului.

Observaţie. Ecuaţiile (3) — (4) împreună cu formulele (32) reprezintă ecuaţiile diferenţiale ale traiectoriei optimale. La aceste ecuaţii se vor adăuga formulele (34) pentru determinarea valorilor q_i şi $\dot{q}_i$.

B. RACHETE COSMICE

4. CALCULUL ENERGIEI MAXIME

Să presupunem că racheta se mișcă în cîmpul gravitațional plan-paralel constant sub acțiunea forței de tracțiune și a forței Coriolis în condițiile din problema precedentă. Să notăm cu OA partea activă a traiectoriei, pe care are loc accelerarea rachetei. În poziția A forța de tracțiune încetează să acționeze și racheta se mișcă ca un corp cu masa constantă. Să notăm cu (q_1, q_2) și $(\dot{q}_1, \dot{q}_2)$ coordonatele, respectiv vitezele rachetei în poziția A. Ecuațiile mișcării rachetei pe partea activă vor fi (3) — (4) iar pe partea pasivă (5) — (6).

Energia totală (cinetică și potențială), raportată la unitatea de masă, cîștigată de rachetă în punctul A, adică la sfîrșitul intervalului de accelerare, va fi

$$E = \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) + g q_2. \tag{35}$$

Problema care se pune constă în alegerea funcțiilor $l_i(t)$, adică a regimului de dirijare a direcției tracțiunii pe partea activă a traiectoriei, în așa fel ca valoarea E să fie maximă.

Condiția de extrem, obținută prin anularea primei variații, este

$$\delta E = \dot{q}_1\, \delta\dot{q}_1 + \dot{q}_2\, \delta\dot{q}_2 + g\, \delta q_2 = 0. \tag{36}$$

Pentru a exprima relațiile dintre variațiile $\delta\dot{q}_1$, $\delta\dot{q}_2$, δq_2 și variațiile δl_i ale direcției tracțiunii folosim formulele (26), considerînd că $\delta x_i(0) = 0$, $\delta\dot{x}_i(0) = 0$.

Notînd

$$\begin{aligned} L_1(t) &= \dot{q}_2 \sin 2\omega\,(T - t) + \left(\dot{q}_1 - \frac{g}{2\omega}\right)\cos 2\omega\,(T - t) + \frac{g}{2\omega}, \\ L_2(t) &= \left(\frac{g}{2\omega} - \dot{q}_1\right)\sin 2\omega\,(T - t) + \dot{q}_2 \cos 2\omega\,(T - t), \end{aligned} \tag{37}$$

condiția de extrem (36) devine

$$\delta E = \int_0^T f(t)\,[L_1(t)\,\delta l_1(t) + L_2(t)\,\delta l_2(t)]\,\mathrm{d}t = 0, \tag{38}$$

la care se adaugă relația cunoscută

$$l_1 \delta l_1 + l_2 \delta l_2 = 0. \tag{39}$$

Din comparația expresiilor (38) și (39) rezultă

$$\begin{aligned} \cos\varphi &= l_1(t) = \frac{L_1(t)}{\sqrt{L_1^2(t)+L_2^2(t)}}, \\ \sin\varphi &= l_2(t) = \frac{L_2(t)}{\sqrt{L_1^2(t)+L_2^2(t)}}, \end{aligned} \qquad (40)$$

adică

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{L_2(t)}{L_1(t)} \qquad (41)$$

pentru regimul optim de dirijare a direcției tracțiunii, unde $L_1(t)$ și $L_2(t)$ au expresiile (37).

Ecuațiile diferențiale ale traiectoriei optimale sînt

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + 2\omega\,\dot{x}_2 &= \frac{f(t)\,L_1(t)}{\sqrt{L_1^2(t)+L_2^2(t)}}, \\ \ddot{x}_2 - 2\omega\,\dot{x}_1 &= \frac{f(t)\,L_2(t)}{\sqrt{L_1^2(t)+L_2^2(t)}}. \end{aligned} \qquad (42)$$

Integrarea acestor ecuații conduce la formule de tipul (34), cu care se găsesc valorile necunoscute $\dot{q}_1$, $\dot{q}_2$ și q_2. Se înlocuiesc valorile $\dot{q}_1$, $\dot{q}_2$, q_2, astfel determinate, în formulele (41), (35) și (42) și se obține dirijarea optimă a direcției tracțiunii, valoarea maximă a energiei E precum și ecuațiile traiectoriei optimale.

5. OBSERVAȚII ȘI CONCLUZII

Scopul principal al lucrării de față constă în determinarea programării optime a direcției tracțiunii unor tipuri de rachete ținînd seama că Pămîntul se rotește în jurul axei sale.

Rotația Pămîntului influențează simțitor calculul distanței orizontale de zbor a rachetelor balistice și are un important efect asupra dirijării optime a tracțiunii unor asemenea rachete.

Comparativ cu ipoteza Pămîntului fix, care conduce, după cum este dovedit în lucrarea lui D. Lawden, la rezultate destul de simple, lucrarea de față arată că problema se complică mult în cazul Pămîntului mobil și că deși ea este rezolvabilă prin cvadraturi acestea nu se pot evalua decît folosind metode numerice.

Rezolvarea problemei obținerii unei energii maxime este utilă în problemele satelitului artificial și în problema desprinderii rachetelor de pe o orbită circulară aflată în jurul unui centru atractiv, în particular în jurul Pămîntului. În acest caz viteza inițială este, desigur, diferită de zero.

În lucrarea noastră se presupune că contribuția forțelor aerodinamice (rezistența aerului) este neglijabilă iar cîmpul gravitațional este plan-paralel şi constant. Aceste ipoteze sînt valabile numai aproximativ dar luarea lor în considerare, într-o formă mai generală nu modifică în esenţă problema ci introduce complicaţii mai mari în calcule.

Rezultatele obţinute permit, în primul rînd, să ne facem o suficientă idee despre felul cum trebuie dirijată, ţinînd seama că Pămîntul este mobil, tracţiunea unor rachete în vederea realizării unei bătăi maxime şi energii maxime şi, în al doilea rînd, să calculăm efectiv valoarea acestei bătăi şi energii.

Primită la redacţie la 19 septembrie 1962 şi o nouă versiune la 25 ianuarie 1963

ОПТИМАЛЬНЫЕ РЕЖИМЫ УПРАВЛЕНИЯ ТЯГОЙ НЕКОТОРЫХ РАКЕТ

РЕЗЮМЕ

В работе исследуется задача управления, по оптимальной программе, направлением баллистической ракеты и космической ракеты ввиду получения дальности, соответственно максимальной энергии, в гипотезе, что Земля движется в пространстве, а режим работы двигателя задан.

Указывается затем, при тех же гипотезах, как можно рассчитывать максимальную дальнобойность баллистической ракеты и также как можно оценить максимальную энергию космической ракеты.

BIBLIOGRAFIE

1. D. LAWDEN, *Issledovanie optimalnth regimov dvijenia raket.* Oboronghizd, Moscva, 1959.
2. D. E. OHOTIMSKI, T. M. ENEEV, *Unele probleme variaţionale legate de lansarea sateliţilor artificiali ai Pămîntului.* UFN sept., 1957.

STUDII

STUDIU ASUPRA BARAJELOR DE GREUTATE CU PARAMENTUL AMONTE NEGATIV

DE

RADU PRIȘCU[1]) și GHEORGHE OLTEANU[1])

627.8

1. INTRODUCERE

Cele cîteva sute de baraje de greutate construite în diverse țări de pe glob au tot atîtea secțiuni transversale caracteristice. Aceste secțiuni, denumite *profile*, cu paramentele curbe, poligonale sau rectilinii, nu se îndepărtează în linii mari de la forma generală triunghiulară. Și totuși stabilitatea și economicitatea acestor construcții depind, în afară de condițiile geologice, de modul în care materialul de construcție se distribuie în corpul lor.

Admițînd drept criterii de dimensionare condiția de efort vertical nul la piciorul amonte și condiția de stabilitate la alunecare, s-au examinat în cîteva lucrări anterioare profilele cu parament amonte vertical, înclinat, frînt [1], [2] și cu talpa de fundație înclinată [3]. S-a arătat că profilul optim este cel cu ambele paramente înclinate și s-au determinat cazurile particulare în care sînt indicate celelalte profile.

În lucrarea de față se studiază profilele cu paramentul amonte negativ care prin suspendarea unei părți importante din masa de beton beneficiază de o precomprimare a piciorului amonte. Această dispoziție a fost aplicată de către A. Coyne la barajul în arc Marèges în anul 1935, apărînd apoi, fără pinteni de rezemare, la alte lucrări printre care la barajul de greutate în arc Vieux—Emosson (1955) și recent la barajul de greutate Grande Dixence (1961). Profilele lor, desenate la scări diferite, se văd în figura 1.

Este evident că profilele cu paramentul amonte negativ sînt solicitate de eforturi de tensiune la piciorul aval, în ipoteza lacului gol. Acest feno-

---

[1]) Institutul de construcții, București.

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM KÖZPONTI KÖNYVTÁRA 1848

men se produce destul de rar, sau foarte rar în cazul barajelor de acumulare pentru amenajări hidroelectrice, unde nivelul lacului nu scade în mod obişnuit sub cota minimă de exploatare. Ţinînd seama de acest fapt, se poate considera drept normală situaţia cu lacul parţial plin la cota minimă de exploatare şi drept excepţională situaţia cu lacul complet gol.

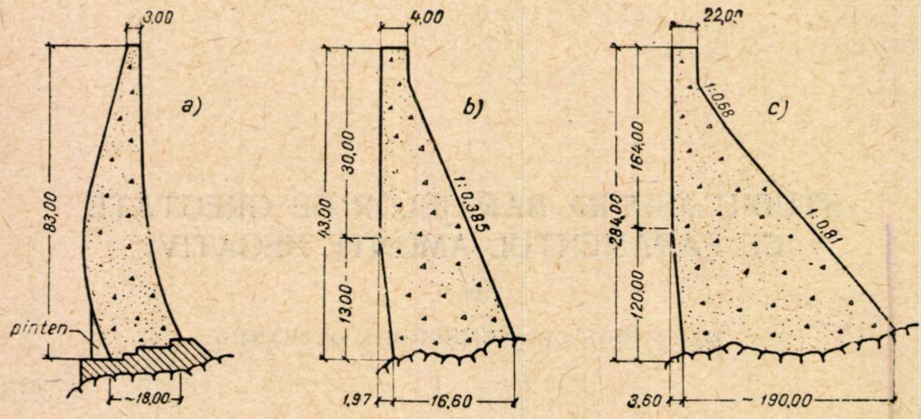


Fig. 1. — Profile cu precomprimare : *a* — Marèges ; *b* — Vieux — Emosson ; *c* — Grande Dixence.

Admiţînd ca punct de frîngere al paramentului amonte cota minimă de exploatare, cunoscută la o amenajare dată, criteriile de dimensionare ale unui asemenea profil pot fi :

— condiţia clasică de efort vertical nul la piciorul amonte, în ipoteza lacului plin

$$\sigma_{am} = \frac{\Sigma N}{\Omega} + \frac{\Sigma M}{W}, \tag{1}$$

— condiţia de efort vertical nul la piciorul aval, în ipoteza lacului parţial plin

$$\sigma_{av} = \frac{\Sigma N}{\Omega} - \frac{\Sigma M}{W}. \tag{2}$$

Pentru a aprecia comportarea unor profile astfel dimensionate este necesar a se verifica apoi :

— mărimea coeficientului de alunecare al barajului $\Sigma T / \Sigma N$, în ipoteza lacului plin, faţă de coeficientul de frecare statică beton — rocă f,

— valoarea eforturilor de tensiune care apar la piciorul aval, în ipoteza lacului gol, sub acţiunea precomprimării.

Aceste elemente, ca şi volumele relative de beton, vor fi apoi utilizate pentru compararea cu profilele cu paramentul amonte vertical şi, implicit, cu cele cu paramentul amonte înclinat (fig. 2).

Exprimîndu-ne în alt mod, vom examina dacă, existînd un nivel minim de exploatare în lac, un profil cu paramentul amonte negativ este sau nu mai avatanjos decît un profil cu paramentul amonte vertical.

2. EXPRESII CARACTERISTICE PENTRU PROFILUL CU PARAMENT AMONTE NEGATIV

NOTAŢII

H — înălțimea barajului (m),
λ — tangenta unghiului pe care îl face paramentul aval cu verticala,
λ_0 — tangenta unghiului pe care îl face paramentul amonte cu verticala,
ρ — înălțimea relativă a paramentului amonte negativ,
γ — greutatea specifică a apei (t/m³),
γ_b — greutatea specifică a betonului (t/m³),
γ_b — $\gamma_b - m\gamma$,
σ — efort normal (t/m²),
m — coeficientul de reducere a subpresiunilor,
f — coeficientul de frecare statică între beton și rocă.

Luînd în considerare greutatea proprie a barajului G, presiunea hidrostatică cu cele două componente ale sale P_0 (orizontală) și P_v (verticală)

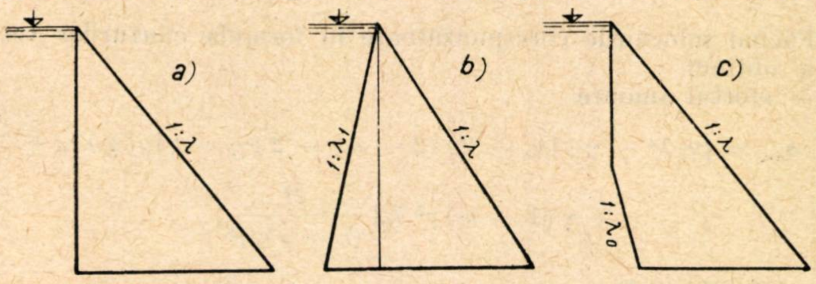


Fig. 2. — *a* — profil cu paramentul amonte vertical; *b* — profil cu paramentul amonte înclinat; *c* — profil cu paramentul amonte negativ.

și subpresiunea S (care se admite că variază liniar din amonte spre aval), s-au dedus expresiile solicitărilor și eforturilor care acționează în suprafața de fundație a unui baraj cu paramentul amonte negativ.

În ipoteza lacului plin (fig. 3, *a*) avem :

— suma forțelor normale pe fundație

$$\Sigma N = G - P_v - S = \frac{1}{2}\{\gamma_b' \lambda - [\gamma(2 - m) + (\gamma_b - \gamma)\rho]\rho\lambda_0\} H^2;$$

— suma forțelor tangențiale la fundație

$$\Sigma T = P_0 = \frac{1}{2}\gamma H^2;$$

— suma momentelor față de centrul secțiunii

$$\Sigma M = \frac{1}{12}\{\gamma'_b\lambda^2 - 2\gamma + [3(\gamma_b - 2\gamma) + 2m\gamma - 3(\gamma_b - \gamma)\rho]\rho\lambda\lambda_0 -$$

$$- [m\gamma + (\gamma_b - \gamma)\rho]\rho^2\lambda_0^2\} H^3.$$

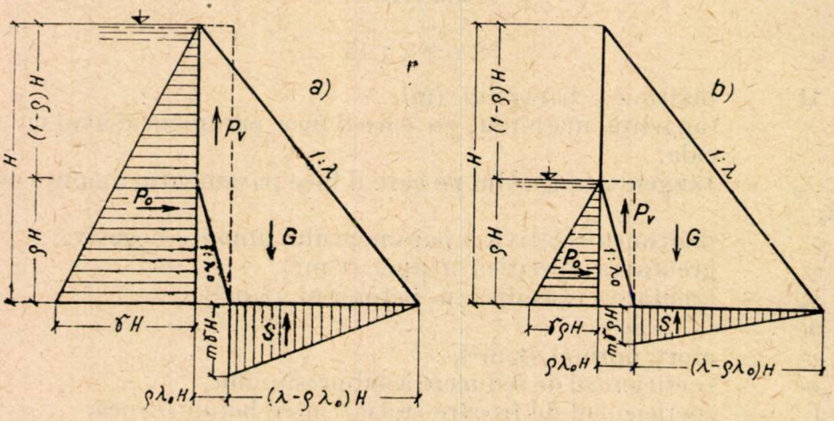


Fig. 3. — Forțele care acționează : *a* — la lac plin ; *b* — la lac parțial plin.

Făcînd înlocuirile corespunzătoare în formula eforturilor verticale (1) s-a obținut

— efortul amonte

$$\sigma_{am} = \{\gamma'_b\lambda^2 - \gamma + [\gamma_b - 2\gamma(2 - m) - 2(\gamma_b - \gamma)\rho]\rho\lambda\lambda_0 +$$

$$+ \gamma(1 - m)\rho^2\lambda_0^2\}\frac{H}{(\lambda - \rho\lambda_0)^2}; \tag{3}$$

— efortul aval

$$\sigma_{av} = \{\gamma - (\gamma_b - \gamma)(2 - \rho)\rho\lambda\lambda_0 + [\gamma + (\gamma_b - \gamma)\rho]\rho^2\lambda_0^2\}\frac{H}{(\lambda - \rho\lambda_0)^2}. \tag{4}$$

Coeficientul de alunecare al profilului a rezultat

$$\frac{\Sigma T}{\Sigma N} = \frac{\gamma}{\gamma'_b\lambda - [\gamma(2 - m) + (\gamma_b - \gamma)\rho]\rho\lambda_0}. \tag{5}$$

Remarcăm că făcînd $\rho = 0$, expresiile (3), (4) și (5) devin identice cu expresiile deduse anterior [1] pentru profilul cu parament amonte vertical.

★

În ipoteza lacului parțial plin, la cota ρH (fig. 3, *b*), avem
— suma forțelor normale pe fundație

$$\Sigma N = G - P_v - S = \frac{1}{2}\left[(\gamma_b - m\gamma\rho)\,\lambda - (\gamma_b' + \gamma)\,\rho^2\lambda_0\right] H^2;$$

— suma forțelor tangențiale la fundație

$$\Sigma T = P_0 = \frac{1}{2}\,\gamma\,\rho^2 H^2;$$

— suma momentelor față de centrul secțiunii

$$\Sigma M = \frac{1}{12}\{(\gamma_b - m\gamma\rho)\,\lambda^2 - 2\gamma\rho^3 + [3\gamma_b - (3\gamma_b + 3\gamma -$$
$$- 2m\gamma)\,\rho]\,\rho\lambda\lambda_0 - [\gamma_b - (1 - m)\,\gamma]\,\rho^3\lambda_0^2\}\,H^3.$$

Făcînd înlocuirile corespunzătoare în formula eforturilor verticale (1) s-a obținut
— efortul amonte

$$\sigma_{am} = \{(\gamma_b - m\gamma\rho)\,\lambda^2 - \gamma\rho^3 + [\gamma_b - 2\,(\gamma_b' + \gamma)\,\rho]\,\rho\,\lambda\lambda_0 +$$
$$+ \gamma\,(1 - m)\,\rho^3\lambda_0^2\}\,\frac{H}{(\lambda - \rho\,\lambda_0)^2}; \qquad (6)$$

— efortul aval

$$\sigma_{av} = \{\gamma\,\rho^3 - [2\gamma_b - (\gamma_b + \gamma)\,\rho]\,\rho\,\lambda\lambda_0 + \gamma_b\,\rho^3\lambda_0^2\}\,\frac{H}{(\lambda - \rho\,\lambda_0)^2}. \qquad (7)$$

Coeficientul de alunecare al profilului a rezultat

$$\frac{\Sigma T}{\Sigma N} = \frac{\gamma\rho^2}{(\gamma_b - m\,\gamma\,\rho)\,\lambda - (\gamma_b' + \gamma)\,\rho^2\lambda_0^2}. \qquad (8)$$

★

În ipoteza lacului gol eforturile care apar sub acțiunea greutății proprii sînt
— efortul amonte

$$\sigma_{am} = \frac{\lambda^2 + (1 - 2\,\rho)\,\rho\,\lambda\lambda_0}{(\lambda - \rho\,\lambda_0)^2}\,\gamma_b H; \qquad (9)$$

— efortul aval

$$\sigma_{av} = -\frac{(2 - \rho)\,\rho\,\lambda\lambda_0 - \rho^3\lambda_0^2}{(\lambda - \rho\,\lambda_0)^2}\,\gamma_b\,H. \qquad (10)$$

3. DIMENSIONAREA PROFILULUI CU PARAMENT AMONTE NEGATIV

Referindu-ne la un profil cu paramentul amonte negativ, a cărui frîngere se face în dreptul cotei date ρH, constatăm că pentru dimensionarea sa trebuie determinate pantele λ_0 şi λ. Cele două necunoscute pot fi determinate rezolvînd sistemul de ecuaţii (1) şi (2), indicate mai înainte. Egalînd deci cu zero expresiile eforturilor (3) şi (7) se obţine

$$\gamma_b' \lambda^2 - \gamma + [\gamma_b - 2\,\gamma\,(2 - m) - 2\,(\gamma_b - \gamma)\,\rho]\,\rho\lambda\lambda_0 + \gamma(1-m)\rho^2\lambda_0^2 = 0, \qquad (3')$$

$$\gamma\rho^2 - [2\,\gamma_b - (\gamma_b + \gamma)\,\rho]\,\lambda\lambda_0 + \gamma_b\,\rho^2\lambda_0^2 = 0. \qquad (7')$$

Soluţia sistemului de ecuaţii (3′), (7′) este dată de ecuaţia bipătrată

$$\{2\gamma_b\,(\gamma_b^2 - \gamma^2)\,\rho^5 + [\gamma_b^2\gamma_b' - \gamma_b\,(\gamma_b + \gamma)\,(\gamma_b - 4\gamma + 2m\gamma) - 4\gamma_b^2\,(\gamma_b - \gamma) +$$

$$+ \gamma\,(1 - m)\,(\gamma_b + \gamma)^2]\,\rho^4 + [2\gamma_b^2\,(\gamma_b - 4\gamma + 2\,m\gamma) - 4\gamma_b\gamma\,(1 -$$

$$- m)\,(\gamma_b + \gamma)]\,\rho^3 + 4\gamma_b^2\,\gamma\,(1 - m)\,\rho^2\}\,\lambda_0^4 + \gamma\,\{2\,(\gamma_b^2 - \gamma^2)\,\rho^5 + [2\gamma_b\gamma_b' - \qquad (11)$$

$$-(\gamma_b + \gamma)\,(\gamma_b - 4\gamma + 2m\gamma) - 4\,\gamma_b\,(\gamma_b - \gamma)]\,\rho^4 + 2\gamma_b\,(\gamma_b - 4\gamma + 2m\gamma)\,\rho^3 -$$

$$-\,(\gamma_b + \gamma)^2\,\rho^2 + 4\gamma_b\,(\gamma_b + \gamma)\,\rho - 4\gamma_b^2\}\,\lambda_0^2 + \gamma_b'\,\gamma^2\rho^4 = 0.$$

Cunoscînd pe λ_0, necunoscuta λ se poate determina printr-una din ecuaţiile (3′) sau (7′). Din (7′) rezultă spre exemplu

$$\lambda = \frac{(\gamma + \gamma_b\,\lambda_0^2)\,\rho^2}{[2\gamma_b - (\gamma_b + \gamma)\,\rho]\,\lambda_0}. \qquad (12)$$

★

Cu ajutorul relaţiilor deduse s-au efectuat o serie de calcule numerice, admiţînd $\gamma = 1$ t/m^3, $\gamma_b = 2{,}3$ t/m^3 şi făcînd să varieze parametric coeficientul de reducere a subpresiunilor şi înălţimea relativă ρ. În afară de pantele λ_0 şi λ, s-au calculat : coeficienţii de alunecare $\Sigma T / \Sigma N$ în ipoteza lacului plin (5), efortul vertical relativ σ_{av}/H în ipoteza lacului gol (10), volumul relativ pe metru liniar de baraj $V_{(\lambda_0, \lambda)}/H^2$ şi raportul între volumele profilelor cu parament amonte negativ ($V_{(\lambda_0,\,\lambda)}$) şi ale celor cu parament amonte vertical ($V_{(\lambda)}$) corespunzătoare. Rezultatele sînt trecute în tabelă şi reprezentate în figurile 4, 5 şi 6.

Examinînd aceste rezultate, se constată că :

— pentru valori ale înălţimii relative (ρ) mai mici ca 0,30, paramentul negativ (λ_0) se depărtează puţin de verticală, iar paramentul aval (λ) este practic identic cu cel necesar pentru profilele cu parament amonte vertical (fig. 4); o variaţie mai mare a înclinării paramentelor are loc

Tabelă

m	ρ	λ_0	λ	$\Sigma T/\Sigma N$	σ_{uv}/H	$V_{(\lambda_0,\lambda)}/H^2$	$V_{(\lambda_0,\lambda)}/V_{(\lambda)}$
0,50	0,60	0,181444	0,814625	0,820943	−0,540478	0,374653	1,005299
	0,50	0,112287	0,776611	0,782968	−0,282812	0,374265	1,004258
	0,40	0,064988	0,757897	0,762366	−0,134188	0,373750	1,002876
	0,30	0,033350	0,749462	0,751810	−0,053492	0,373230	1,001481
	0,20	0,013610	0,746279	0,747098	−0,015184	0,372868	1,000510
	0,10	0,003142	0,745434	0,745562	−0,001844	0,372702	1,000064
	0	0	0,745355	0,745356	0	0,372678	1,000000
0,75	0,60	0,169962	0,862156	0,885482	−0,465073	0,400485	0,997196
	0,50	0,104847	0,828715	0,843951	−0,243470	0,401252	0,999106
	0,40	0,060513	0,812906	0,821584	−0,115538	0,401612	1,000002
	0,30	0,030994	0,806154	0,810 82	−0,045846	0,401683	1,000179
	0,20	0,012635	0,803805	0,805100	−0,013075	0,401650	1,000097
	0,10	0,002915	0,803264	0,803434	−0,001588	0,401618	1,000017
	0	0	0,803222	0,803216	0	0,401611	1,000000
1,00	0,60	0,157163	0,923950	0,967787	−0,389755	0,432693	0,986627
	0,50	0,096631	0,895840	0,921768	−0,204150	0,435841	0,993805
	0,40	0,055611	0,883413	0,897161	−0,109766	0,437258	0,997036
	0,30	0,028427	0,878641	0,884659	−0,041646	0,438042	0,998823
	0,20	0,011576	0,877255	0,879110	−0,010981	0,438396	0,999631
	0,10	0,002670	0,877054	0,877294	−0,001331	0,438514	0,999900
	0	0	0,877116	0,877003	0	0,438558	1,000000

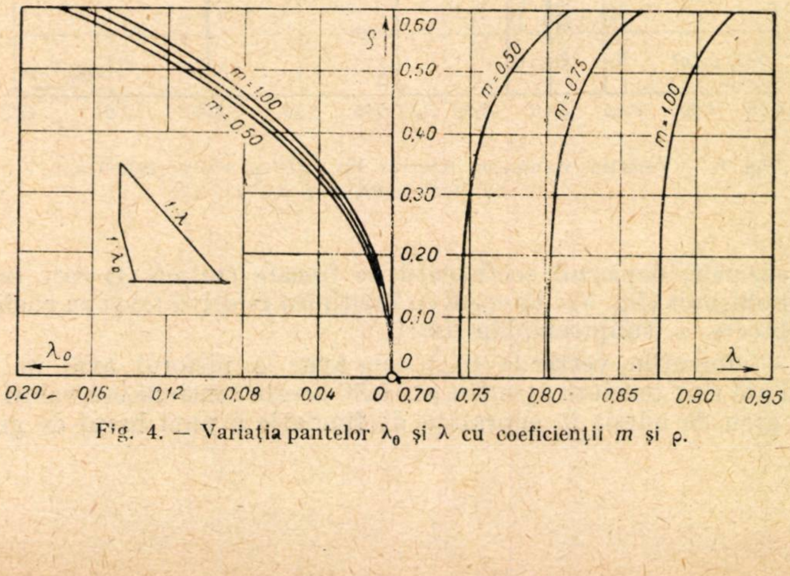


Fig. 4. — Variația pantelor λ_0 și λ cu coeficienții m și ρ.

pentru $\rho > 0{,}30$. Subpresiunile influenţează în mai mare măsură panta paramentului aval (λ), care creşte o dată cu coeficientul (m);

— coeficienţii de alunerare ($\Sigma T/\Sigma N$) care rezultă au valori mari în

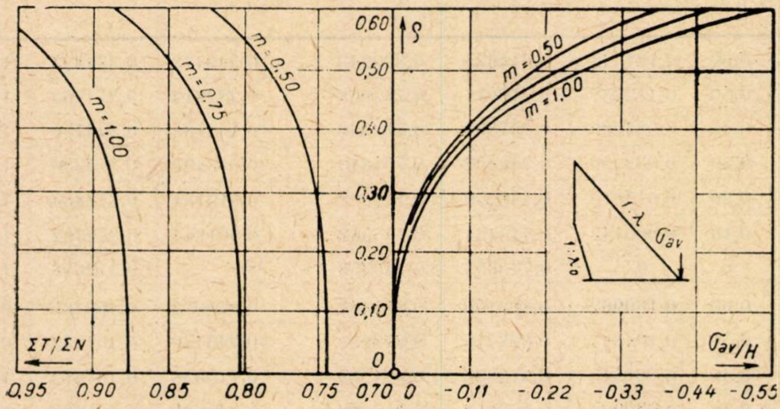


Fig. 5. — Variaţia coeficienţilor de alunecare $\Sigma T/\Sigma N$ (lac plin) şi a eforturilor relative σ_{av}/H (lac gol) cu coeficienţii m şi ρ.

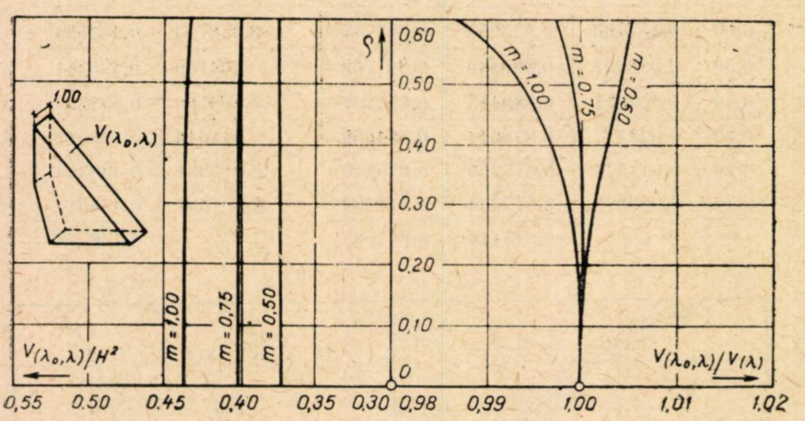


Fig. 6. — Variaţia volumelor relative $V_{(\lambda_0,\lambda)}/H^2$ şi a raportului $V_{(\lambda_0,\lambda)}/V_{(\lambda)}$ cu coeficienţii m şi ρ.

toate cazurile, depăşind coeficienţii de frecare statică (f) care se admit în mod obişnuit (fig. 5). Ei cresc cu înălţimea relativă (ρ) şi cu coeficientul de reducere a subpresiunilor (m);

— eforturile verticale (σ_{av}) care apar la piciorul aval în ipoteza lacului gol sînt tensiuni; pentru $\rho > 0{,}30$ aceste tensiuni iau valori importante, greu de admis în suprafaţa de fundaţie a unui baraj de greutate.

4. COMPARAŢIE CU PROFILUL CU PARAMENT AMONTE VERTICAL

Profilul cu parament amonte vertical reprezintă de fapt un caz limită al profilului cu parament amonte negativ, corespunzînd unei înălţimi relative nule ($\rho = 0$). Din punctul de vedere al stabilităţii la alunecare el conduce la valorile ($\Sigma T/\Sigma N$) cele mai reduse, iar în ce priveşte eforturile verticale de la piciorul aval în cazul lacului gol, acestea sînt în permanenţă nule şi nu tensiuni (fig. 5).

Din diagramele din figura 6 rezultă că volumele relative ale celor două tipuri de profile sînt practic identice, raportul dintre ele fiind foarte apropiat de unitate.

5. CONCLUZII

Plecînd de la ideea precomprimării piciorului amonte prin suspendarea unei părţi din masa de beton şi a existenţei unui nivel minim de exploatare în lac (ρH) s-au examinat efectele statice şi economice pe care le exercită aceşti factori asupra profilului unui baraj de greutate. Spre deosebire de cazul barajelor arcuite, la care stabilitatea la alunecare este asigurată prin acţiunea în spaţiu a acestor structuri, în cazul barajelor de greutate orientarea paramentului amonte spre aval nu are efecte favorabile.

În comparaţie cu profilele cu paramentul amonte vertical (fig. 2, *a*) profilele studiate conduc în toate cazurile la coeficienţi de alunecare mai mari, la tensionarea piciorului aval în ipoteza lacului gol şi la volume de beton sensibil egale.

Slaba stabilitate la alunecare, în condiţii de volum identice, are explicaţie. În loc ca profilul să poarte în amonte un volum de apă stabilizator, ca în cazul profilelor cu paramentul amonte înclinat (fig. 2, *b*), profilele cu parament negativ (fig. 2, *c*) sînt solicitate de jos în sus de portanţa hidrostatică. Deci dacă este necesar a se îmbunătăţi stabilitatea unui profil cu paramentul amonte vertical, sporul de siguranţă se va obţine prin împingerea spre amonte a piciorului amonte şi nu prin adoptarea unui parament negativ, înclinat spre aval.

Concluzia de mai sus a fost verificată încercînd a se dimensiona un asemenea profil considerînd, pe lîngă λ_0 şi λ, şi pe ρ necunoscut. S-a impus, în afară de condiţiile de eforturi verticale nule (1) şi (2), condiţia de egalitate a coeficientului de alunecare cu coeficientul de frecare statică, $\Sigma T/\Sigma N = f$. Calcule laborioase au arătat că pentru valori obişnuite ale lui f, situate sub 0,75, nu există soluţii care să respecte cele trei condiţii.

Primită la redacţie la 6 martie 1963

ÉTUDE DES BARRAGES-POIDS À PAREMENT AMONT NÉGATIF

RÉSUMÉ

Dans cette étude, on examine le comportement statique et l'économie des barrages-poids à parement amont négatif, barrages précontraints dans les zones tensionnées par l'action de la pression hydrostatique. En admettant la condition d'effort nul au pied amont, dans l'hypothèse du lac plein, et la condition d'effort nul au pied aval, dans l'hypothèse du lac plein jusqu'à la cote (ρH), on a établi les expressions des efforts et les formules de calcul.

Par rapport aux profils à parement amont vertical, les profils étudiés ne réalisent pas d'économies de volume et n'ont qu'une faible stabilité au glissement. Il s'ensuit la conclusion que dans le cas où il est nécessaire d'améliorer la stabilité d'un profil à parement amont vertical, on peut obtenir le surplus de sécurité et d'économie non pas en adoptant un parement négatif, mais en déplaçant le pied amont vers l'amont.

BIBLIOGRAFIE

1. RADU PRIŞCU, *Asupra profilului optim al barajelor de greutate.* St. cerc. mec. metalurg., **IV** (1953).
2. — *Considérations sur le calcul des barrages en béton pour larges vallées.* Rapport nr. 46, Septième congrès des grands barrages, Rome, 1961.
3. RADU PRIŞCU şi GHEORGHE OLTEANU, *Eficienţa inclinării tălpii de fundaţie la barajele de greutate.* St. cerc. mec. apl., **XIII**, *2* (1962).

STUDII

O NOUĂ METODĂ PENTRU CALCULUL COEFICIENTULUI DE SIGURANȚĂ LA SOLICITĂRI VARIABILE PRIN CICLURI ASIMETRICE

DE

GH. BUZDUGAN[1])

MEMBRU CORESPONDENT AL ACADEMIEI R.P.R.

539.4

1. INTRODUCERE

Modul de calcul al coeficientului de siguranță la solicitări variabile prin cicluri asimetrice prezintă o serie de dificultăți, fapt care a dus la existența mai multor metode, îndelung discutate.

Prima dificultate constă în a stabili ciclul limită care să fie comparat cu cel real din piesă, pentru determinarea coeficientului de siguranță. Majoritatea metodelor de calcul admit că, în cazul depășirii ciclului real, trecerea spre ciclul limită are loc păstrînd coeficientul de asimetrie constant

$$R = \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}} = \text{const.} \qquad (1)$$

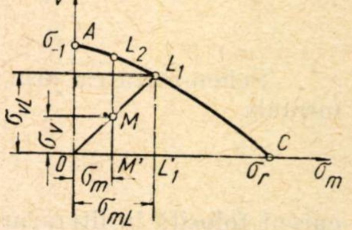


Fig. 1

Dacă se reprezintă diagrama rezistențelor la oboseală (diagrama ciclurilor limită) prin curba $AL_1\ C$ din figura 1, iar ciclul real din piesă prin punctul $M\ (\sigma_m\ ,\ \sigma_v)$, unde

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}}{2}, \quad \sigma_v = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2}, \qquad (2)$$

---

[1] Institutul politehnic, București.

atunci ciclul limită de comparație este $L_1\ (\sigma_{mL}, \sigma_{vL})$, obținut prin prelungirea dreptei OM. Acest criteriu de similitudine este cel mai frecvent, fiind folosit curent în literatura tehnică sovietică și americană. În metoda germană, se ia criteriul de similitudine $\sigma_m = \text{const.}$, ceea ce face ca lui M să-i corespundă ciclul limită L_2 (fig. 1).

A doua dificultate se întîmpină la exprimarea analitică a mărimii coeficientului de siguranță. În metoda sovietică, coeficientul de siguranță se definește prin relația

$$c = \frac{\sigma_{\max L}}{\sigma_{\max}} = \frac{\sigma_{mL} + \sigma_{vL}}{\sigma_m + \sigma_v} = \frac{OL'_1 + L'_1 L_1}{OM' + M'M}. \tag{3}$$

Cît timp curba ciclurilor limită are un traseu oarecare, segmentele OL'_1 și L'_1L_1 se determină numai pe cale grafică. Metodele analitice dezvoltate se bazează pe *diagrame schematizate* care înlocuiesc curba ciclurilor limită prin linii drepte. Astfel, schematizarea Soderberg (fig. 2) duce la expresia coeficientului de siguranță.

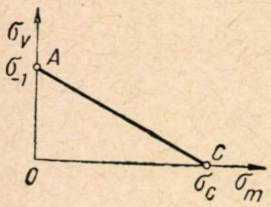


Fig. 2

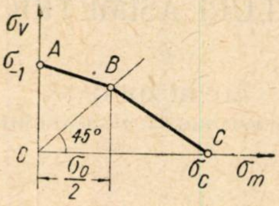


Fig. 3

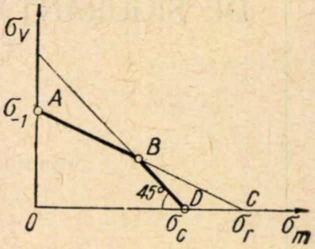


Fig. 4

$$c = \frac{1}{\dfrac{\sigma_v}{\sigma_{-1}} + \dfrac{\sigma_m}{\sigma_c}}. \tag{4}$$

Schematizarea prin linie frîntă a acad. Serensen (fig. 3) duce la formula

$$c = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_v + \psi\,\sigma_m} \tag{5}$$

curent folosită în literatura sovietică. S-a notat

$$\psi = \frac{2\sigma_{-1} - \sigma_0}{\sigma_0}. \tag{6}$$

Formula lui Serensen este aplicabilă numai ciclurilor situate deasupra liniei OB. Pentru ciclurile situate sub linia OB, coeficientul de siguranță se calculează ca la o solicitare statică, față de limita de curgere

$$c_c = \frac{\sigma_c}{\sigma_{\max}} = \frac{\sigma_c}{\sigma_v + \sigma_m}. \tag{7}$$

O schematizare asemănătoare este cea a lui Ujik din figura 4. Este evident că formulele (4), (5), (7), sau altele similare, dau rezultate cu atît mai apropiate de realitate, cu cît linia schematizată a ciclurilor limită se apropie mai mult de curba reală.

2. METODA PROPUSĂ

Teoriile III și IV asupra ruperii materialelor (teoria efortului unitar tangențial maxim și teoria energiei de deformație) la solicitări statice, arată că stările limită de solicitări compuse care produc, de exemplu, curgerea plastică, pot fi reprezentate, în planul axelor de coordonate σ și τ prin sferturi de elipsă, ca în figura 5, avînd ecuația

$$\left(\frac{\sigma}{\sigma_c}\right)^2 + \left(\frac{\tau}{\tau_c}\right)^2 = 1.$$

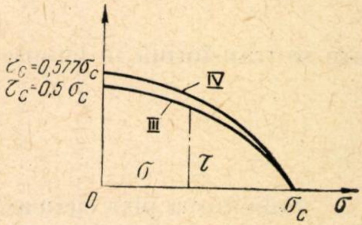


Fig. 5

În mod analog, experiențele făcute asupra solicitărilor compuse prin cicluri simetrice de încovoiere și răsucire au arătat că stările limită de solicitări compuse, ducînd la ruperea prin oboseală, pot fi reprezentate prin sfertul de elipsă *ALB* din figura 6, de ecuație

$$\left(\frac{\sigma_{vL}}{\sigma_{-1}}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{vL}}{\tau_{-1}}\right)^2 = 1. \tag{8}$$

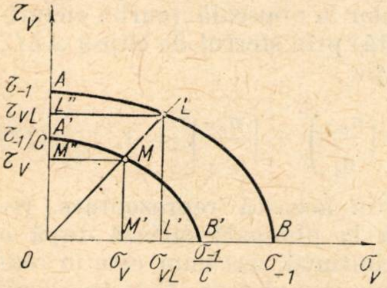


Fig. 6

Prin punctul *M*, reprezentînd solicitarea reală din piesă (σ_v, τ_v), se duce o elipsă *A'MB'*, similară elipsei *ALB*, avînd toate razele vectoare reduse în raportul *c* (coeficientul de siguranță al solicitării compuse). Împărțind în relația (8) cu σ_v^2, respectiv τ_v^2, se scrie

$$\frac{\left(\frac{\sigma_{vL}}{\sigma_v}\right)^2}{\left(\frac{\sigma_{-1}}{\sigma_v}\right)^2} + \frac{\left(\frac{\tau_{vL}}{\tau_v}\right)^2}{\left(\frac{\tau_{-1}}{\tau_v}\right)^2} = 1. \tag{9}$$

În baza similitudinii celor două elipse, rezultă

$$c = \frac{\mathrm{OB}}{\mathrm{OB}'} = \frac{OA}{OA'} = \frac{OL}{OM} = \frac{OL'}{OM'} = \frac{\sigma_{vL}}{\sigma_v} = \frac{OL''}{OM''} = \frac{\tau_{vL}}{\tau_v}.$$

De asemenea, prin definiție, cele două solicitări simple componente — de încovoiere și de răsucire — au coeficienții de siguranță parțiali

$$c_\sigma = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_v}, \quad c_\tau = \frac{\tau_{-1}}{\tau_v}. \tag{10}$$

Făcînd înlocuirile în relația (9), rezultă

$$\frac{c^2}{c_\sigma^2} + \frac{c^2}{c_\tau^2} = 1$$

care se transformă în cunoscuta formulă

$$c = \frac{c_\sigma\, c_\tau}{\sqrt{c_\sigma^2 + c_\tau^2}}. \tag{11}$$

Solicitarea prin ciclu asimetric poate fi privită ca o solicitare compusă din una statică, de mărime σ_m, și un ciclu simetric, de amplitudine σ_v. Stările limită extreme, pentru cele două feluri de solicitări simple componente, sînt date, în cazul metalelor tenace, de către limita de curgere σ_c și rezistența la oboseală prin ciclul simetric σ_{-1} (punctele C și A din figura 7). Ne propunem a reprezenta diagrama rezistențelor la oboseală (curba ciclurilor limită) prin sfertul de elipsă ALC, de ecuație

$$\left(\frac{\sigma_{mL}}{\sigma_c}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{vL}}{\sigma_{-1}}\right)^2 = 1. \tag{12}$$

Prin această reprezentare, rezistența la oboseală variază după o curbă continuă, așa cum este în realitate fenomenul fizic. Folosirea legii de variație după o elipsă este justificată de exemplele anterioare, referitoare la alte cazuri de solicitări compuse, statice sau variabile.

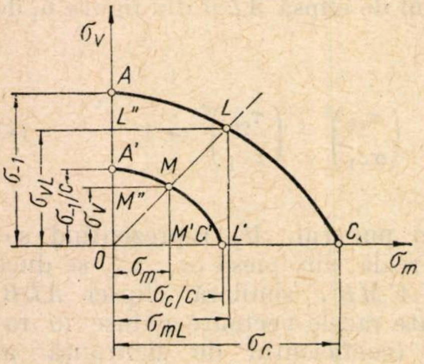


Fig. 7

Literatura tehnică arată că, la solicitări statice, rezistența admisibilă se ia

$$\sigma_a \approx \frac{\sigma_c}{2}$$

iar la solicitări variabile prin ciclu simetric

$$\sigma_a \approx \frac{\sigma_{-1}}{2}.$$

Cu alte cuvinte, la extremele curbei ALC există același coeficient de siguranță, de valoare $c = 2$ (sau altă valoare). Această constatare ne îndreptățește a duce prin punctul M o elipsă $A'MC'$, similară elipsei limită ALC, avînd toate razele vectoare reduse în același raport c.

Procedînd analog ca la demonstrația anterioară, se poate scrie

$$c = \frac{OC}{OC'} = \frac{OA}{OA'} = \frac{OL}{OM} = \frac{OL'}{OM'} = \frac{\sigma_{mL}}{\sigma_m} = \frac{OL''}{OM''} = \frac{\sigma_{vL}}{\sigma_v}, \tag{13}$$

$$c_s = \frac{\sigma_c}{\sigma_m}, \tag{14}$$

$$c_v = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_v}, \tag{15}$$

unde numim :

c — coeficient de siguranță al solicitării prin ciclu asimetric,

c_s — coeficient de siguranță al solicitării statice,

c_v — coeficient de siguranță al solicitării variabile simetrice.

Ecuația (12) se transformă astfel :

$$\frac{\left(\frac{\sigma_{mL}}{\sigma_m}\right)^2}{\left(\frac{\sigma_c}{\sigma_m}\right)^2} + \frac{\left(\frac{\sigma_{vL}}{\sigma_v}\right)^2}{\left(\frac{\sigma_{-1}}{\sigma_v}\right)^2} = 1,$$

respectiv

$$\frac{c^2}{c_s^2} + \frac{c^2}{c_v^2} = 1,$$

sau, în fine,

$$c = \frac{c_s\, c_v}{\sqrt{c_s^2 + c_v^2}}. \tag{16}$$

S-a găsit astfel o nouă expresie a coeficientului de siguranță al solicitării prin ciclu asimetric. Înlocuind expresiile (14) și (15), formula (16) se transformă în

$$c = \frac{\sigma_c\, \sigma_{-1}}{\sqrt{\sigma_v^2\, \sigma_c^2 + \sigma_m^2\, \sigma_{-1}^2}} = \frac{\sigma_{-1}}{\sqrt{\sigma_v^2 + \sigma_m^2 \left(\frac{\sigma_{-1}}{\sigma_c}\right)^2}}. \tag{17}$$

Se observă că dacă $\sigma_m = 0$, sau $\sigma_v = 0$, se regăsesc formulele (15), (14).

Pentru a vedea în ce măsură reprezentarea eliptică a diagramei rezistențelor la oboseală se îndepărtează sau nu de realitate, merită a se face o discuție specială asupra ciclului pulsator.

Aşa, de exemplu , dacă în ecuaţia (12) se face

$$\sigma_{mL} = \sigma_{vL} = \frac{\sigma_0}{2}$$

se găseşte expresia rezistenţei la oboseală prin ciclu pulsator

$$\sigma_0 = \frac{2\,\sigma_{-1}\,\sigma_c}{\sqrt{\sigma_{-1}^2 + \sigma_c^2}}. \tag{18}$$

După datele publicate în lucrarea [2], s-a întocmit tabela 1, în care valorile determinate experimental ale lui σ_0 sînt notate cu σ_0'. În coloana σ_0'' s-a calculat valoarea lui σ_0 cu formula (18), scriindu-se valorile medii. Se vede că această formulă dă valori superioare cu 11—13% celor din lucrarea [2] la oţeluri carbon, cu 3—7% superioare la oţel carbon de calitate şi foarte apropiate la oţeluri aliate. Pe de altă parte, în lucrarea [4] se dau (p. 497) unele indicaţii asupra lui ψ, definit de formula (6) : la oţeluri carbon $\psi = 0$, deci $\sigma_0 = 2\,\sigma_{-1}$, adică valorile σ_0' din tabela 1 ar trebui mult mărite. Rezultă de aci că în literatura tehnică există mari incertitudini asupra lui σ_0, deci şi a lui ψ, motiv ce pledează pentru aplicarea formulei (17) care renunţă la această mărime.

Tabela 1

Materialul	σ_c [kg/mm²]	σ_{-1} [kg/mm²]	σ_0' (exper.) [kg/mm²]	σ_0'' (calculat) [kg/mm²]	$\frac{\sigma_0' - \sigma_0''}{\sigma_0''} \times 100$ [%]
OL 34	min 19	17	22	25,3	13
OL 38	min 22	18,5	25	28,3	12
OL 50	27	24	32	35,8	11
OL 60	30	28	36	40,9	12
OL 70	min 35	33	42	48,1	13
OLC 25	min 24	19—24	30	32,2	7
OLC 35	min 28	23—28	37	38,0	3
OLC 45	min 34	28—32	43	45,0	4
OLC 60	min 40	32—36	50	52,0	4
35 CN 15	min 52	36—42	63	62,6	—0,6
35 CN 25	min 56	38—46	68	67,5	—0,7
30 CN 35	min 67	42—50	82	76,0	—4

Problemele uzuale de calcul la oboseală sînt acelea în care apar şi coeficienţii :

β_k — coeficientul efectiv de concentrare,

ε — factorul dimensional,

γ — coeficientul de calitate a suprafeţei.

Pentru simplificare, se notează coeficientul de concentrare complex al piesei

$$\beta_{kP} = \frac{\beta_k}{\varepsilon\gamma}. \tag{19}$$

Acest coeficient reduce pe σ_{-1} în raportul $\frac{1}{\beta_{kP}}$ sau — ceea ce este același lucru — amplifică pe σ_v în raportul β_{kP}, ceea ce face ca formula (17) să devină

$$c = \frac{\sigma_{-1}}{\sqrt{\beta_{kP}^2 \sigma_v^2 + \sigma_m^2 \left(\frac{\sigma_{-1}}{\sigma_c}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{\beta_{kP}^2 \left(\frac{\sigma_v}{\sigma_{-1}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_m}{\sigma_c}\right)^2}}. \tag{20}$$

În mod analog, formula (5) se transformă în

$$c = \frac{\sigma_{-1}}{\beta_{kP}\,\sigma_v + \psi\,\sigma_m}. \tag{21}$$

3. EXEMPLU DE CALCUL

Pentru o piesă din OL 38, avînd coeficientul de concentrare complex $\beta_{kP} = 1{,}5$, se va calcula coeficientul de siguranță pe trei căi — prin metoda Serensen cu date din tabela 1, prin metoda Serensen luînd $\psi = 0$, după lucrarea [4], prin metoda propusă — în trei alternative de solicitare: ciclu situat deasupra liniei *OB* din figura 3, ciclu pulsator și ciclu situat sub linia *OB*. Datele și rezultatele calculului au fost sintetizate în tabela 2. Din examinarea rezultatelor se observă o dispersie a valorilor date de metoda Serensen, funcție de valoarea incertă a lui ψ. De asemenea, se vede că valorile obținute prin metoda propusă se încadrează între limitele date de metoda Serensen, cînd se aplică formula (21). Pentru cazul de solicitare ultim coeficientul c rezultă cu 10% superior lui c_c.

Tabela 2

Ciclul de solicitare	$\sigma_c = 22$ kg/mm²; $\sigma_{-1} = 18{,}5$ kg/mm²; $\beta_{kP} = 1{,}5$		
	Metoda Serensen		Metoda propusă
	După tabela 1 $\sigma_0 = 25$ kg/mm²; $\psi = 0{,}48$	După lucrarea [4] $\psi = 0$	
$-1 < R < 0$ $\sigma_v = 8{,}5$ kg/mm² $\sigma_m = 3$ kg/mm²	formula (21) $c = 1{,}31$	formula (21) $c = 1{,}46$	formula (20) $c = 1{,}43$
$R = 0$ $\sigma_v = \sigma_m = 6{,}5$ kg/mm²	formula (21) $c = 1{,}44$	formula (21) $c = 1{,}90$	formula (20) $c = 1{,}65$
$0 < R < +1$ $\sigma_v = 4{,}5$ kg/mm² $\sigma_m = 8{,}5$ kg/mm²	formula (7) $c_c = 1{,}69$	formula (7) $c_c = 1{,}69$	formula (20) $c = 1{,}87$

4. CONCLUZII

Metoda propusă, bazată pe criteriul de asemănare $R = \text{const.}$, prezintă următoarele avantaje :

a. Folosește o curbă continuă a ciclurilor limită, determinată de mărimile σ_{-1} și σ_c care încadrează destul de bine și valorile cunoscute pentru σ_0 la unele materiale.

b. Nu mai necesită cunoașterea mărimilor incerte σ_0, ψ .

c. Folosește o formulă unitară pentru întreg domeniul de existență al solicitării variabile, $-1 \leqslant R \leqslant +1$.

d. Prin felul cum s-a ales curba ciclurilor limită, ea se apropie de curba reală mai mult decît diagramele schematizate, ceea ce face ca coeficienții calculați să fie mai apropiați de cei reali.

e. Valorile coeficienților de siguranță, calculați prin metoda unitară propusă, sînt apropiate de cele obținute prin metoda Serensen.

f. În domeniul apropiat de solicitarea statică, (σ_m mare și σ_v mic) faptul că elipsa ciclurilor limită trece puțin deasupra liniei BC din figura 3 sau BD din figura 4, face ca valorile coeficientului de siguranță, calculat prin noua metodă, să fie ușor superioare celor date de calculul static făcut prin formula (7).

Primită la redacție la 27 august 1962

UNE NOUVELLE MÉTHODE POUR LE CALCUL DU COEFFICIENT DE SÉCURITÉ, DANS LE CAS DE SOLLICITATIONS VARIABLES, PAR CYCLES ASYMÉTRIQUES

RÉSUMÉ

L'auteur part de la constatation que les diagrammes schématisés des résistances à la fatigue, utilisés pour le calcul du coefficient de sécurité des sollicitations variables, par cycles asymétriques, fournissent des valeurs d'autant plus éloignées des valeurs réelles que la schématisation est plus approximative. La méthode de Serensen, qui emploie pour le calcul les grandeurs σ_{-1}, σ_0, σ_c, donne une meilleure approximation du diagramme des cycles-limite (fig. 3) que la méthode de Soderberg (fig. 2).

Puisque, dans le cas des sollicitations composées, statiques (fig. 5) ou symétriquement variables (fig. 6), le lieu géométrique des cycles-limite est un quart d'ellipse, l'auteur propose de considérer le cycle asymétrique comme une sollicitation composée, le diagramme des cycles étant représenté par le quart d'ellipse de la figure 7. En vertu de ce diagramme, il établit la formule (16), ou ses variantes (17), (20) qui fournissent avec une assez bonne approximation le coefficient de sécurité, la connaissance de σ_0 ou de ψ (formule (6)) n'étant plus nécessaire.

BIBLIOGRAFIE

GH. BUZDUGAN, *Calculul de rezistență la solicitări variabile.* Edit. tehnică, București, 1963.

* * * *Metale și aliaje standardizate.* Biblioteca standardizării, Seria tehnică A, *19*, București, 1958.

3. С. Д. ПОНОМАРЕВ, В. Л. БИДЕРМАН, К. К. ЛИХАРЕВ, В. М. МАКУШИН, Н. Н. МАЛИНИН, В. И. ФЕОДОСЬЕВ, *Расчеты на прочность в машиностроении.* Машгиз, Москва, 1959, **III**.

4. * * * *Справочник машиностроителя* (под ред. С. В. Серенсена), Машгиз, Москва, 1962, **III**.

STUDII

TEORIA ÎNCOVOIERII SIMETRICE A PARABOLOIDULUI DE ROTAȚIE PLEOȘTIT PE CONTUR CIRCULAR

DE

MIRCEA SOARE[1])

539.3

INTRODUCERE

Plăcile curbe subțiri de rotație pleoștite au fost studiate de numeroși autori [4] [6], [8], fără însă a se lua în considerare toate funcțiile de integrare care intervin la rezolvarea problemei.

Obiectul articolului de față este de a indica soluția completă a problemei și a face o discuție asupra stării de eforturi.

În ipoteza de placă pleoștită, forma suprafeței poate fi asimilată cu cupola sferică sau a paraboloidului de rotație care au același creștet și același cerc de bază[2].

§ 1. ECUAȚIILE DE BAZĂ ALE PROBLEMEI

În metoda mixtă, pe care o vom utiliza mai departe, necunoscutele principale sînt săgețile w și o funcție de tip Airy F din care derivă eforturile. Dacă se notează cu a raza de curbură la creștet a paraboloidului de rotație (respectiv raza sferei) cele două ecuații de bază care determină mărimile definite mai sus se scriu, în coordonate carteziene :

$$\begin{aligned} K\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)^{(2)} w - \frac{1}{a}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) F = Z, \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)^{(2)} F + \frac{E\delta}{a}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) w = 0, \end{aligned} \tag{1.1}$$

---

[1]) Institutul de cercetări în construcții și economia construcțiilor (INCERC), București.

[2]) Suprafața va fi considerată pleoștită dacă $f/d < 1/5$, unde f este săgeata cupolei și d diametrul cercului de bază.

în care :

$\left(\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}\right)$ reprezintă operatorul lui Laplace în coordonate carteziene,

E modulul de elasticitate al materialului,

δ grosimea plăcii (presupusă constantă),

μ coeficientul de contracție transversală,

$K=\dfrac{E\delta^3}{12(1-\mu^2)}$ modulul de rigiditate la încovoiere a plăcii,

Z componenta normală a încărcării (se admite că $X=Y\equiv 0$).

În cazul conturului circular, este indicat să utilizăm un sistem de coordonate cvasipolar — prin analogie cu plăcile plane — în care poziția unui punct este definită prin raza r_0 a cercului paralel respectiv (în cazul simetriei stării de eforturi în raport cu axa de rotație o a doua coordonată definind poziția punctului pe cercul paralel nu intervine).

Va fi avantajos să introducem, mai departe, în locul variabilei r_0 o nouă variabilă adimensională α, legată de raza r_0 prin relația

$$r_0=r\alpha, \tag{1.2}$$

în care r este o lungime ce va fi precizată ulterior.

Trecerea de la coordonatele carteziene la cele polare se face cu ajutorul relației

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(\ldots)=\frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}+\frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial\alpha}\right](\ldots).$$

Pentru simplitatea scrierii, vom nota *operatorul armonic în coordonate polare*

$$\Delta(\ldots)=\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\alpha^2}+\frac{1}{\alpha}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\right)(\ldots). \tag{1.3}$$

Cu notațiile precedente, ecuațiile (1.1) devin :

$$\frac{K}{r^4}\Delta\Delta w-\frac{1}{ar^2}\Delta F=Z, \tag{1.4a}$$

$$\frac{1}{r^4}\Delta\Delta F+\frac{E\delta}{ar^2}\Delta w=0. \tag{1.4b}$$

Integrarea sistemului (1.4) poate fi redusă la integrarea succesivă a unor ecuații cu derivate parțiale de ordin inferior, dacă se consideră o funcție Ω astfel încît

$$\Delta w=\Delta\Omega, \tag{1.5a}$$

$$\Delta F=-\frac{E\delta r^2}{a}\Omega. \tag{1.5b}$$

Cu aceasta, ecuația (1.4b) este identic verificată, iar (1.4a) devine

$$\Delta\Delta\,\Omega + \frac{E\delta}{Ka^2}\,r^4\,\Omega = \frac{Zr^4}{K}\,\cdot$$

Vom determina constanta r din condiția

$$r = \sqrt[4]{\frac{Ka^2}{E\delta}} = \frac{\sqrt{a\delta}}{\sqrt[4]{12\,(1-\mu^2)}}\,\cdot \tag{1.6}$$

Cu această notație, ecuația precedentă care determină funcția auxiliară Ω se scrie

$$\Delta\Delta\Omega + \Omega = \frac{Za^2}{E\delta}\,\cdot \tag{1.7}$$

Săgeata w va rezulta din (1.5a); prin integrarea simbolică rezultă

$$w = \Omega + \omega, \tag{1.8}$$

unde ω este o funcție armonică arbitrară care satisface deci ecuația

$$\Delta\omega = 0. \tag{1.9}$$

În sfîrșit, funcția de eforturi rezultă direct din (1.5b).

Se menționează că relațiile (1.4) — (1.9) sînt valabile pentru cazul mai general al stării de eforturi și de deformații.

În continuare, vom trece la integrarea ecuațiilor obișnuite în cazul simetriei stării de eforturi.

§ 2. DEDUCEREA SOLUȚIEI GENERALE

În paragraful precedent am redus problema la integrarea succesivă a ecuațiilor (1.9), (1.7) și (1.5b).

Ținînd seama de simetria stării de eforturi și de deformații, aceste ecuații pot fi scrise dezvoltat :

$$\frac{d^2\omega}{d\alpha^2} + \frac{1}{\alpha}\frac{d\omega}{d\alpha} = 0, \tag{2.1}$$

$$\left(\frac{d^2}{d\alpha^2} + \frac{1}{\alpha}\frac{d}{d\alpha}\right)\left(\frac{d^2\,\Omega}{d\alpha^2} + \frac{1}{\alpha}\frac{d\Omega}{d\alpha}\right) + \Omega = \frac{Za^2}{E\delta}\,, \tag{2.2}$$

$$\frac{d^2\,F}{d\alpha^2} + \frac{1}{\alpha}\frac{dF}{d\alpha} = -\frac{E\delta r^2}{a}\,\Omega. \tag{2.3}$$

Integrarea ecuației (2.1) este elementară (fiind de tip Euler) și are soluția generală

$$\omega\,(\alpha) = C_1 + C_2 \ln\alpha, \tag{2.4}$$

în care C_1, C_2 reprezintă două constante de integrare.

Soluția generală a ecuației (2.2) are următoarea formă

$$\Omega(\alpha) = w_0(\alpha) + A_1 J_1(\alpha) + A_2 J_2(\alpha) + A_3 J_3(\alpha) + A_4 J_4(\alpha), \quad (2.5)$$

în care

$w_0(\alpha)$ reprezintă o soluție particulară[1] a ecuației (2.2), J_1, J_2, J_3, J_4 sînt integrale liniar independente ale ecuației omogene

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\alpha^2} + \frac{1}{\alpha}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\right)\left(\frac{\mathrm{d}^2\Omega}{\mathrm{d}\alpha^2} + \frac{1}{\alpha}\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}\alpha}\right) + \Omega = 0, \quad (2.6)$$

A_1, A_2, A_3, A_4 reprezintă constante de integrare.

Soluția particulară depinde de natura încărcării și poate fi determinată prin procedee cunoscute (identificarea coeficienților, metoda variației constantelor).

Vom da mai jos soluția particulară pentru două cazuri de încărcare :

— încărcare uniformă $Z = p = \text{const.}$

$$w_0(\alpha) = \frac{pa^2}{E\delta}; \quad (2.7a)$$

— încărcare variind parabolic $Z = p\alpha^2$

$$w_0(\alpha) = \frac{pa^2}{E\delta}\alpha^2. \quad (2.7b)$$

Soluția ecuației omogene introduce funcții transcendente de tip Bessel ale căror dezvoltări în serie se scriu :

$$J_1(\alpha) = 1 - \frac{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^4}{(2\,!)^2} + \frac{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^8}{(4\,!)^2} - \frac{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^{12}}{(6\,!)^2} + \ldots,$$

$$J_2(\alpha) = \frac{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2}{(1\,!)^2} - \frac{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^6}{(3\,!)^2} + \frac{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^{10}}{(5\,!)^2} - \frac{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^{14}}{(7\,!)^2} + \ldots,$$

$$J_3(\alpha) = \frac{1}{2}J_1(\alpha) + \frac{2}{\pi}\left[\left(\ln\frac{\alpha}{2} + c\right)J_2(\alpha) - R_1(\alpha)\right],$$

$$J_4(\alpha) = -\frac{1}{2}J_2(\alpha) + \frac{2}{\pi}\left[\left(\ln\frac{\alpha}{2} + c\right)J_1(\alpha) + R_2(\alpha)\right],$$

---

[1] Ținînd seama de relația (1.8), am preferat să notăm soluția particulară prin w_0, în loc de Ω_0.

în care:

$c = 0{,}577215\ldots$ constanta lui Euler,

$$R_1(\alpha) = \frac{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2}{(1\,!)^2} - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)\frac{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^6}{(3\,!)^2} + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right)\frac{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^{10}}{(5\,!)^2} + \ldots$$

$$R_2(\alpha) = \left(1 + \frac{1}{2}\right)\frac{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^4}{(2\,!)^2} - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)\frac{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^8}{(4\,!)^2} + {}$$

$$+ \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right)\frac{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^{12}}{(6\,!)^2}\ldots$$

Funcțiile $J_1(\alpha)$ și $J_2(\alpha)$ sînt funcții de speța întîi (nu au singularități), în timp ce celelalte două $J_3(\alpha)$ și $J_4(\alpha)$ sînt funcții de speța a doua, prin faptul că conțin termeni logaritmici.

Derivatele de ordinul întîi sînt funcții independente.

Valorile numerice ale funcțiilor J_1, J_2, J_3, J_4 și ale derivatelor lor de ordinul întîi J_1', J_2', J_3'. J_4' sînt tabelate (cu diferite notații) [1], [3], [8].

Funcțiile precedente se bucură de unele proprietăți remarcabile, care le aseamănă cu funcțiile exponențiale amortizate.

a) Integralele J_1, J_2; J_3, J_4 satisfac ecuațiile diferențiale de ordinul al doilea

$$\begin{aligned} \Delta J_1 &= -J_2, & \Delta J_3 &= +J_4, \\ \Delta J_2 &= +J_1, & \Delta J_4 &= -J_3, \end{aligned} \tag{2.8a}$$

unde Δ este operatorul definit de relația (1.3).

b) Derivatele de ordinul al doilea și superior pot fi exprimate numai prin intermediul funcțiilor și al derivatelor de ordinul întîi:

$$\begin{aligned} J_1'' &= -J_2 - \frac{1}{\alpha}J_1', & J_3'' &= +J_4 - \frac{1}{\alpha}J_3', \\ J_2'' &= +J_1 - \frac{1}{\alpha}J_2', & J_4'' &= -J_3 - \frac{1}{\alpha}J_4', \end{aligned} \tag{2.8b}$$

$$\left.\begin{aligned} J_1''' &= +\frac{1}{\alpha}J_2 - J_2' + \frac{2}{\alpha^2}J_1', \\ J_2''' &= -\frac{1}{\alpha}J_1 + J_1' + \frac{2}{\alpha^2}J_2', \\ J_3''' &= -\frac{1}{\alpha}J_4 + J_4' + \frac{2}{\alpha^2}J_3', \\ J_4''' &= +\frac{1}{\alpha}J_3 - J_3' + \frac{2}{\alpha^2}J_4'. \end{aligned}\right\} \tag{2.8c}$$

Cu ajutorul rezultatelor precedente, expresia generală a săgeților se scrie sub forma

$$w(\alpha) = w_0(\alpha) + C_1 + C_2 \ln\alpha + A_1 J_1(\alpha) + A_2 J_2(\alpha) + A_3 J_3(\alpha) + A_4 J_4(\alpha). \tag{2.9}$$

După deducerea funcției auxiliare Ω, putem trece la determinarea funcției de eforturi F.

Ținînd seama de (2.5), ecuația (2.3) se scrie

$$\frac{\mathrm{d}^2F}{\mathrm{d}\alpha^2} + \frac{1}{\alpha}\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}\alpha} = -\frac{E\delta r^2}{a}[w_0(\alpha) + A_1 J_1(\alpha) + A_2 J_2(\alpha) + A_3 J_3(\alpha) + + A_4 J_4(\alpha)]. \tag{2.10}$$

Soluția generală se obține imediat, dacă în membrul drept se înlocuiesc funcțiile J prin expresiile lor date de (2.8a):

$$F(\alpha) = F_0(\alpha) - \frac{E\delta r^2}{a}[A_1 J_2(\alpha) - A_2 J_1(\alpha) - A_3 J_4(\alpha) + A_4 J_3(\alpha) + C_3 \ln\alpha + C_4], \tag{2.11}$$

în care $F_0(\alpha)$ reprezintă o soluție particulară și C_3, C_4 sînt două noi constante de integrare.

Soluția particulară $F_0(\alpha)$ se deduce cu ajutorul relației generale

$$F_0(\alpha) = -\frac{E\delta r^2}{a}\int\frac{1}{\alpha}\int\alpha\, w_0(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}\alpha. \tag{2.12}$$

Pentru cazurile de încărcare reprezentate de relațiile (2.7), se obține:

— pentru încărcarea uniformă $Z = p = \text{const.}$

$$F_0(\alpha) = -\frac{pa}{4}r^2\alpha^2, \tag{2.13a}$$

— pentru încărcarea variind parabolic $Z = p\alpha^2$

$$F_0(\alpha) = -\frac{pa}{14}r^2\alpha^4. \tag{2.13b}$$

Soluția generală a problemei este astfel precizată complet, intervenind opt constante de integrare, C_1, C_2, C_3, C_4, A_1, A_2, A_3, A_4, adică un număr egal cu ordinul ecuațiilor cu derivate parțiale.

În expresiile obținute, trebuie remarcați termenii $C_2 \ln\alpha$, $C_3 \ln\alpha$, $J_3(\alpha)$ și $J_4(\alpha)$ care prezintă singularități în pol (adică devin infiniți la creștet $\alpha = 0$), pe cînd restul termenilor sînt regulați.

§ 3. DEDUCEREA CELORLALTE MĂRIMI

Odată determinate mărimile w și F, celelalte mărimi statice (fig. 1) și geometrice se deduc din relațiile cunoscute și anume :

rotirea :

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}r_0} = \frac{1}{r}\left[w_0'(\alpha) + \frac{C_2}{\alpha} + A_1 J_1'(\alpha) + A_2 J_2'(\alpha) + A_3 J_3'(\alpha) + A_4 J_4'(\alpha)\right]; \quad (3.1)$$

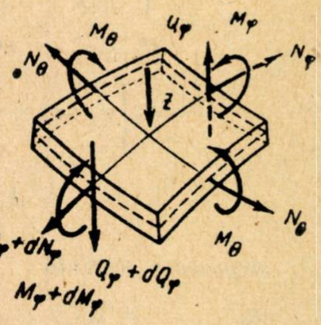


Fig. 1. — Echilibrul unui element de placă subțire de rotație.

momentele încovoietoare :

$$M_\varphi = -\frac{K}{r^2}\left(\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}\alpha^2} + \frac{\mu}{\alpha}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}\alpha}\right) = \frac{K}{r^2}\Bigg\{-w_0''(\alpha) - \frac{\mu}{\alpha} w_0'(\alpha) + C_2\frac{1-\mu}{\alpha^2} + A_1\left[J_2(\alpha) + \frac{1-\mu}{\alpha} J_1'(\alpha)\right] - A_2\left[J_1(\alpha) - \frac{1-\mu}{\alpha} J_2'(\alpha)\right] - A_3\left[J_4(\alpha) - \frac{1-\mu}{\alpha} J_3'(\alpha)\right] + A_4\left[J_3(\alpha) + \frac{1-\mu}{\alpha} J_4'(\alpha)\right]\Bigg\}, \quad (3.2)$$

$$M_\theta = +\mu M_\varphi - \frac{K}{r^2}(1-\mu^2)\frac{1}{\alpha}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}\alpha} = +\mu M_\varphi - \frac{K}{r^2}(1-\mu^2) \times \left[\frac{1}{\alpha} w_0'(\alpha) + \frac{C_2}{\alpha^2} + A_1\frac{1}{\alpha} J_1'(\alpha) + A_2\frac{1}{\alpha} J_2'(\alpha) + A_3\frac{1}{\alpha} J_3'(\alpha) + A_4\frac{1}{\alpha} J_4'(\alpha)\right]; \quad (3.3)$$

forța tăietoare :

$$Q_\varphi = -\frac{K}{r^3}\left(\frac{\mathrm{d}^3 w}{\mathrm{d}\alpha^3} + \frac{1}{\alpha}\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}\alpha^2} - \frac{1}{\alpha}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}\alpha}\right) = \frac{K}{r^3}\left[-w_0'''(\alpha) - \frac{1}{\alpha} w_0''(\alpha) + \frac{1}{\alpha^2} w_0'(\alpha) + A_1 J_2'(\alpha) - A_2 J_1'(\alpha) - A_3 J_4'(\alpha) + A_4 J_3'(\alpha)\right]; \quad (3.4)$$

eforturi normale :

$$N_\varphi = \frac{1}{r^2}\frac{1}{\alpha}\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}\alpha} = \frac{1}{r^2\alpha}F_0'(\alpha) - \frac{E\delta}{a\alpha}\Big[A_1 J_2'(\alpha) - A_2 J_1'(\alpha) - \\ - A_3 J_4'(\alpha) + A_4 J_3'(\alpha) + \frac{C_3}{\alpha}\Big], \tag{3.5}$$

$$N_\theta = \frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}^2F}{\mathrm{d}\alpha^2} = \frac{1}{r^2}F_0''(\alpha) - \frac{E\delta}{a}\Big\{A_1\Big[J_1(\alpha) - \frac{1}{\alpha}J_2'(\alpha)\Big] + \\ + A_2\Big[J_2(\alpha) + \frac{1}{\alpha}J_1'(\alpha)\Big] + A_3\Big[J_3(\alpha) + \frac{1}{\alpha}J_4'(\alpha)\Big] + \\ + A_4\Big[J_4(\alpha) - \frac{1}{\alpha}J_3'(\alpha)\Big] - \frac{C_3}{\alpha^2}\Big\}; \tag{3.6}$$

deplasare radială :

$$\xi = \frac{r_0}{E\delta}(N_\theta - \mu N_\varphi) = \frac{1}{E\delta r}(\alpha F_0'' - \mu F_0') - \frac{r\alpha}{a}\Big[A_1\Big(J_1 - \frac{1+\mu}{\alpha}J_2'\Big) + \\ + A_2\Big(J_2 + \frac{1+\mu}{\alpha}J_1'\Big) + A_3\Big(J_3 + \frac{1+\mu}{\alpha}J_4'\Big) + A_4\Big(J_4 - \frac{1+\mu}{\alpha}J_3'\Big) - \mu\frac{C_3}{\alpha}\Big]. \tag{3.7}$$

Cele opt constante urmează să fie precizate din condiții limită.

§ 4. CUPOLA PARABOLICĂ ÎNCHISĂ LA CREȘTET

Vom determina, în continuare, constantele de integrare în cazul cupolei închise la creștet. Presupunînd că încărcarea este continuă pe toată placa și nu prezintă singularități, toate mărimile statice și deformațiile vor trebui să păstreze o *valoare finită la creștet.*

Aceste condiții vor fi satisfăcute dacă luăm

$$C_2 = C_3 = A_3 = A_4 = 0.$$

Vom observa, de asemenea, că constanta C_4 nu intervine decît în expresia lui F, ceea ce nu interesează pentru restul calculului, iar C_1 intervine doar la calculul săgeților w.

În funcție de restul constantelor de integrare (C_1, A_1, A_2), expresiile (2.9), (3.1)... (3.7) se scriu :

$$w(\alpha) = w_0(\alpha) + C_1 + A_1 J_1(\alpha) + A_2 J_2(\alpha), \tag{4.1}$$

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}r_0} = \frac{1}{r}\,[w_0'(\alpha) + A_1 J_1'(\alpha) + A_2 J_2'(\alpha)], \tag{4.2}$$

$$
\begin{aligned}
M_\varphi = \frac{K}{r^2}\Big\{ - w_0'''(\alpha) - \frac{\mu}{\alpha} w_0'(\alpha) + A_1\Big[J_2(\alpha) + \frac{1-\mu}{\alpha} J_1'(\alpha)\Big] - \\
- A_2\Big[J_1(\alpha) - \frac{1-\mu}{\alpha} J_2'(\alpha)\Big]\Big\},
\end{aligned}
\tag{4.3}
$$

$$
M_\theta = +\mu\, M_\varphi - \frac{K}{r^2}(1-\mu^2)\left[\frac{1}{\alpha} w_0'(\alpha) + A_1\frac{1}{\alpha}J_1'(\alpha) + A_2\frac{1}{\alpha}J_2'(\alpha)\right], \tag{4.4}
$$

$$
Q_\varphi = \frac{K}{r^3}\left[- w_0'''(\alpha) - \frac{1}{\alpha} w_0''(\alpha) + \frac{1}{\alpha^2} w_0'(\alpha) + A_1 J_2'(\alpha) - A_2 J_1'(\alpha)\right], \tag{4.5}
$$

$$
N_\varphi = \frac{1}{r^2\alpha} F_0'(\alpha) - \frac{E\delta}{a\alpha}\left[A_1 J_2'(\alpha) - A_2 J_1'(\alpha)\right], \tag{4.6}
$$

$$
N_\theta = \frac{1}{r^2} F_0''(\alpha) - \frac{E\delta}{a}\left\{A_1\left[J_1(\alpha) - \frac{1}{\alpha}J_2'(\alpha)\right] + A_2\left[J_2(\alpha) + \frac{1}{\alpha}J_1'(\alpha)\right]\right\}, \tag{4.7}
$$

$$
\xi = \frac{1}{E\delta r}(\alpha F_0'' - \mu F_0') - \frac{r\alpha}{a}\left[A_1\left(J_1 - \frac{1+\mu}{\alpha}J_2'\right) + A_2\left(J_2 + \frac{1+\mu}{\alpha}J_1'\right)\right]. \tag{4.8}
$$

Pentru creștet ($\alpha = 0$), toate mărimile precedente păstrează valori finite, dacă se ține seama că

$$
\lim_{\alpha\to 0} \frac{1}{\alpha} J_1'(\alpha) = 0 \quad \text{și} \quad \lim_{\alpha\to 0} \frac{1}{\alpha} J_2'(\alpha) = \frac{1}{2}\cdot
$$

Vom determina, mai departe, cele trei constante în două cazuri de rezemare și încărcare a cupolei.

A. *Cupola încărcată cu sarcină uniform distribuită, încastrată nedeplasabil la marginea inferioară.* Notînd cu d diametrul cupolei de bază și cu f săgeata, raza de curbură la creștet rezultă din relația

$$
a = \frac{d^2}{8f}\cdot \tag{4.9a}
$$

Marginea inferioară ($r_0 = r_{0,i}$) este caracterizată de variabila adimensională

$$
\alpha = \alpha_i = \frac{r_{0,i}}{r} = \frac{d}{2r} = 2\sqrt[4]{3(1-\mu^2)}\sqrt{\frac{f}{\delta}}\cdot \tag{4.9b}
$$

Condițiile care se pot pune sînt

$$
\text{— pentru } \alpha = \alpha_i \rightarrow w_i = 0, \quad \frac{\mathrm{d}w_i}{\mathrm{d}\alpha} = 0, \quad \xi_i = 0. \tag{4.10}
$$

Să precizăm acum termenii liberi. Pentru săgeți, avem conform (2.7a)

$$w_0(\alpha) = \frac{pa^2}{E\delta} = \text{const.} \quad \text{și} \quad w_0'(\alpha) = w_0''(\alpha) = w_0'''(\alpha) = 0.$$

Pentru funcția de eforturi avem conform (2.13a)

$$F_0(\alpha) = -\frac{pa}{4} r^2 \alpha^2, \quad F_0'(\alpha) = -\frac{pa^2}{2} r^2 \alpha, \quad F_0''(\alpha) = -\frac{pa}{2} r^2.$$

În vederea simplificării calculelor, este indicat ca în locul constantelor C_1, A_1, A_2 să se aleagă alte constante adimensionale, definite de relațiile

$$C_1 = \frac{pa^2}{E\delta} \overline{C}_1, \quad A_1 = \frac{pa^2}{E\delta} \overline{A}_1, \quad A_2 = \frac{pa^2}{E\delta} \overline{A}_2.$$

Ținînd seama de noile constante, condițiile (4.10) se scriu explicit, după simplificarea factorilor dimensionali :

$$\left.\begin{aligned} &\overline{C}_1 + \overline{A}_1 J_{1i} + \overline{A}_2 J_{2i} = -1, \\ &\overline{A}_1 J_{1i}' + \overline{A}_2 J_{2i}' = 0, \\ &\overline{C}_1 + \frac{1+\mu}{\alpha_i} (\overline{A}_1 J_{2i}' - \overline{A}_2 J_{1i}') = -\frac{1+\mu}{2}, \end{aligned}\right\} \tag{4.11}$$

unde s-a notat

$$J_1(\alpha_i) = J_{1i}, \; J_2(\alpha_i) = J_{2i}, \; J_1'(\alpha_i) = J_{1i}', \; J_2'(\alpha_i) = J_{2i}'.$$

Din rezolvarea sistemului (4.11) rezultă constantele

$$\begin{aligned} \overline{A}_1 &= +\frac{1-\mu}{2} \cdot \frac{J_{2i}'}{N} \\ \overline{A}_2 &= -\frac{1-\mu}{2} \cdot \frac{J_{1i}'}{N}, \\ \overline{C}_1 &= -1 - \frac{1-\mu}{2} \cdot \frac{J_{1i} J_{2i}' - J_{2i} J_{1i}'}{N}, \end{aligned} \tag{4.12}$$

unde

$$N = J_{1i} J_{2i}' - J_{2i} J_{1i}' - \frac{1+\mu}{\alpha_i} (J_{1i}'^2 + J_{2i}'^2). \tag{4.13}$$

Ducînd valorile astfel obținute în (4.1)—(4.8) și grupînd convenabil termenii se obține final:

$$w = \frac{1-\mu}{2} \cdot \frac{pa^2}{E\delta}\left[\frac{J'_{2i}}{\mathbf{N}}(J_1 - J_{1i}) - \frac{J'_{1i}}{\mathbf{N}}(J_2 - J_{2i})\right], \tag{4.14a}$$

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}r_0} = \frac{1-\mu}{2} \cdot \frac{pa^2}{E\delta r}\left(\frac{J'_{2i}}{\mathbf{N}} J'_1 - \frac{J'_{1i}}{\mathbf{N}} J'_2\right), \tag{4.14b}$$

$$M_\varphi = \frac{pa\delta}{4}\sqrt{\frac{1-\mu}{3(1+\mu)}}\left[\frac{J'_{1i}}{\mathbf{N}}\left(J_1 - \frac{1-\mu}{\alpha} J'_2\right) + \frac{J'_{2i}}{\mathbf{N}}\left(J_2 + \frac{1-\mu}{\alpha} J'_1\right)\right], \tag{4.14c}$$

$$M_\theta = \mu M_\varphi - pa\delta\,\frac{1-\mu}{24}\sqrt{12\,(1-\mu^2)} \cdot \frac{1}{\alpha}\left(\frac{J'_{2i}}{\mathbf{N}} J'_1 - \frac{J'_{1i}}{\mathbf{N}} J'_2\right), \tag{4.14d}$$

$$Q_\varphi = \frac{p\sqrt{a\delta}}{2}\sqrt[4]{\frac{1-\mu}{12^3\,(1+\mu)^3}}\left(\frac{J'_{1i}}{\mathbf{N}} J'_1 + \frac{J'_{2i}}{\mathbf{N}} J'_2\right), \tag{4.14e}$$

$$N_\varphi = -\frac{pa}{2} - (1-\mu)\frac{pa}{2}\left(\frac{J'_{1i}}{\mathbf{N}} \cdot \frac{J'_1}{\alpha} + \frac{J'_{2i}}{\mathbf{N}} \cdot \frac{J'_2}{\alpha}\right), \tag{4.14f}$$

$$\begin{aligned} N_\theta = {} & -\frac{pa}{2} + (1-\mu)\frac{pa}{2}\left(\frac{J'_{1i}}{\mathbf{N}} \cdot \frac{J'_1}{\alpha} + \frac{J'_{2i}}{\mathbf{N}} \cdot \frac{J'_2}{\alpha}\right) - \\ & - (1-\mu)\frac{pa}{2}\left(\frac{J'_{2i}}{\mathbf{N}} J_1 - \frac{J'_{1i}}{\mathbf{N}} J_2\right), \end{aligned} \tag{4.14g}$$

$$\begin{aligned} \xi = {} & -\frac{1-\mu}{2} \cdot \frac{par\alpha}{E\delta}\left[1 + \frac{J'_{2i}}{\mathbf{N}} J_1 - \frac{J'_{1i}}{\mathbf{N}} J_2 - \right. \\ & \left. - \frac{1+\mu}{\alpha}\left(\frac{J'_{1i}}{\mathbf{N}} J'_1 + \frac{J'_{2i}}{\mathbf{N}} J'_2\right)\right]. \end{aligned} \tag{4.14h}$$

În grupul de formule precedent a fost scos în evidență factorul dimensional și funcțiile variabile J_1 J_2, J'_1, J'_2.

B. *Cupola acționată de momente M la marginea inferioară.* Din condițiile (fig. 2) rezultă:

— pentru $\alpha = \alpha_i \rightarrow M_\varphi = M$, $N_\varphi = Q_\varphi = 0$,

(deși aparent există patru condiții, în realitate sînt numai trei, deoarece — în situația omogenă — N_φ și Q_φ stau într-un raport constant $N_\varphi = - Q_\varphi \operatorname{ctg}\varphi$).

Anulînd termenii reprezentînd soluția particulară în (4.1)—(4.8), se scrie următorul sistem de ecuații care determină constantele:

$$\begin{aligned} & C_1 + A_1 J_{1i} + A_2 J_{2i} = 0, \\ & A_1\left(J_{2i} + \frac{1-\mu}{\alpha_i} J'_{1i}\right) - A_2\left(J_{1i} - \frac{1-\mu}{\alpha_i} J'_{2i}\right) = \frac{Mr^2}{K}, \\ & A_1 J'_{2i} - A_2 J'_{1i} = 0. \end{aligned}$$

Cu notația

$$\mathbf{N} = J_{1i}\, J'_{2i} - J_{2i}\, J'_{1i} - \frac{1-\mu}{\alpha_i}\,(J'^2_{1i} + J'^2_{2i}), \tag{4.15}$$

mărimile căutate se scriu:

$$w = \frac{Mr^2}{K}\left[\frac{J'_{1i}}{\mathbf{N}}\,(J_{1i} - J_1) + \frac{J'_{2i}}{\mathbf{N}}\,(J_{2i} - J_2)\right], \tag{4.16a}$$

$$\frac{dw}{dr_0} = -\frac{Mr}{K}\left(\frac{J'_{1i}}{\mathbf{N}}\,J'_1 + \frac{J'_{2i}}{\mathbf{N}}\,J'_2\right), \tag{4.16b}$$

$$M_\varphi = M\left[\frac{J'_{2i}}{\mathbf{N}}\left(J_1 - \frac{1-\mu}{\alpha}\,J'_2\right) - \frac{J'_{1i}}{\mathbf{N}}\left(J_2 - \frac{1-\mu}{\alpha}\,J'_1\right)\right], \tag{4.16c}$$

$$M_\theta = \mu\, M_\varphi + (1-\mu^2)\,\frac{M}{\alpha}\left(\frac{J'_{1i}}{\mathbf{N}}\,J'_1 + \frac{J'_{2i}}{\mathbf{N}}\,J'_2\right), \tag{4.16d}$$

$$Q_\varphi = \frac{M}{r}\left(\frac{J'_{2i}}{\mathbf{N}}\,J'_1 - \frac{J'_{1i}}{\mathbf{N}}\,J'_2\right), \tag{4.16e}$$

$$N_\varphi = -\sqrt{12\,(1-\mu^2)}\;\frac{M}{\delta\alpha}\left(\frac{J'_{2i}}{\mathbf{N}}\,J'_1 - \frac{J'_{1i}}{\mathbf{N}}\,J'_2\right), \tag{4.16f}$$

$$N_\theta = +\sqrt{12\,(1-\mu^2)}\;\frac{M}{\delta}\left[\frac{J'_{1i}}{\mathbf{N}}\left(J_1 - \frac{1+\mu}{\alpha}\,J'_2\right) + \frac{J'_{2i}}{\mathbf{N}}\left(J_2 + \frac{1+\mu}{\alpha}\,J'_1\right)\right], \tag{4.16g}$$

$$\xi = \frac{Ma\alpha}{E\delta r}\left[\frac{J'_{1i}}{\mathbf{N}}\left(J_1 - \frac{1+\mu}{\alpha}\,J'_2\right) + \frac{J'_{2i}}{\mathbf{N}}\left(J_2 + \frac{1+\mu}{\alpha}\,J'_1\right)\right]. \tag{4.16h}$$

Variația momentului meridian M_φ și a efortului meridian N_φ pentru diferiți α_i (respectiv diferite rapoarte f/δ) a fost reprezentată în figura 2, *a* și *b*, considerînd $\mu = 1/6$.

Se constată că cu cît placa este mai pleoștită (evaluînd pleoștirea prin raportul f/δ), cu atît momentele se propagă mai departe în interiorul cupolei către creștet; la limită, pentru $f/\delta = 0$, se regăsește distribuția de la placa plană circulară.

Problema variației eforturilor meridiane prezintă o analogie completă cu aceea a arcului dublu articulat. În mod obișnuit, la calculul împingerii static nedeterminată se neglijează efectul forței axiale. Această neglijare nu mai este permisă cînd săgeata tinde către zero, deoarece ar conduce la împingeri infinite; în realitate, împingerea trece printr-un maxim pentru o valoare foarte mică a raportului f/δ, pentru ca să se anuleze o dată cu săgeata. Acest fapt este perfect explicabil, întrucît arcul se reduce la o grindă care sub acțiunea sarcinilor transversale lucrează numai la încovoiere.

Discuția precedentă este valabilă și pentru plăcile curbe subțiri, așa cum reiese din figura 2, *b*.

În încheiere, vom observa că diagramele din figura 2, *a* și *b*, au fost stabilite fără a ține seama de fenomenul pierderii stabilității elastice.

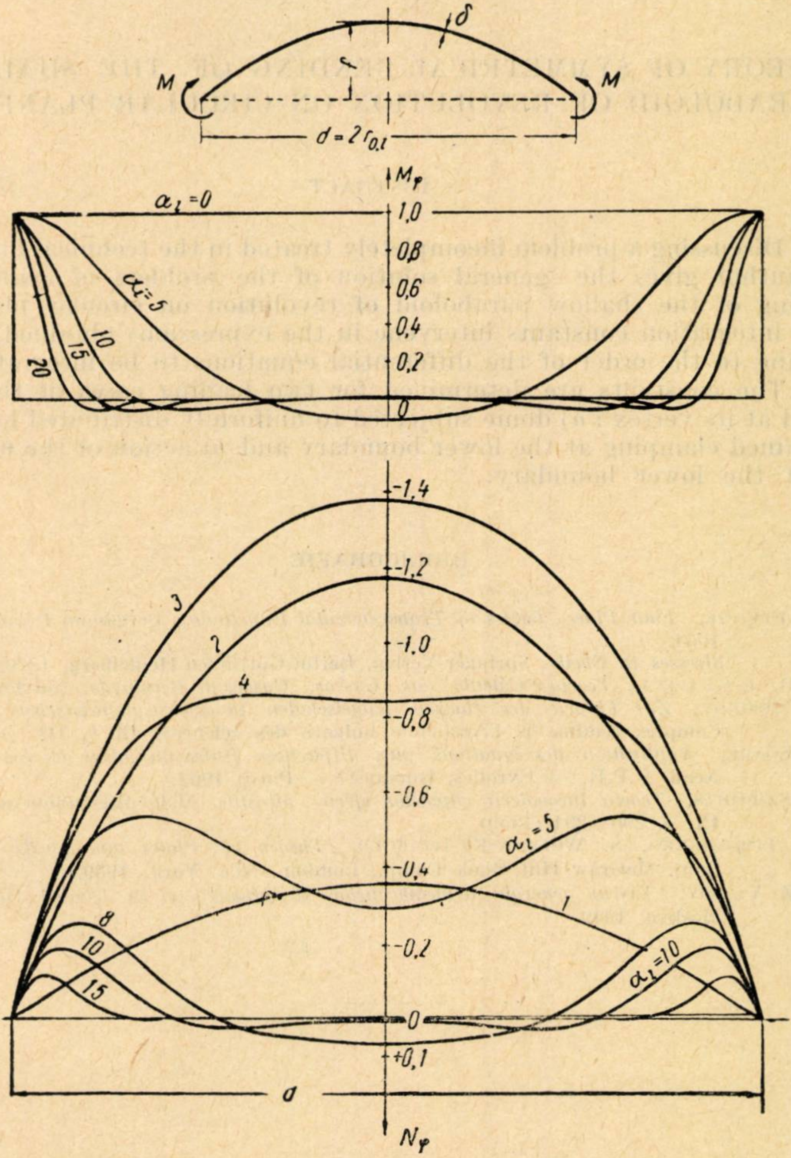


Fig. 2. — Acțiunea unor momente meridiane M la marginea inferioară a cupolei : a — variația momentelor încovoietoare M_φ; b — variația eforturilor meridiane N_φ pentru diferite valori ale parametrului α_i (respectiv f/δ).

Dimensionarea sau verificarea unei cupole foarte pleoştite este imposibilă din punct de vedere constructiv fără verificarea coeficientului de siguranţă în raport cu pierderea stabilităţii.

Primită la redacţie la 29 ianuarie 1963

THEORY OF SYMMETRICAL BENDING OF THE SHALLOW PARABOLOID OF REVOLUTION ON CIRCULAR PLANFORM

ABSTRACT

Discussing a problem incompletely treated in the technical literature, the author gives the general solution of the problem of symmetrical bending of the shallow paraboloid of revolution on circular planform; eight integration constants intervene in the expressions obtained, corresponding to the order of the differential equations to be integrated.

The constants are determined for two loading cases of the dome closed at its vertex : *a*) dome subjected to uniformly distributed load with restrained clamping at the lower boundary and *b*) action of the moments M at the lower boundary.

BIBLIOGRAFIE

1. W. FLÜGGE, *Four-Place Tables of Transcendental Functions.* Pergamon Press, London, 1954.
2. — *Stresses in Shells.* Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1960.
3. P. B. J. GRAVINA, *Teoria e Cálculo das Cascas. Cascas de Revolução.* São Paulo, 1957.
4. M. MISONOV, *Zur Theorie der flachen Kugelschalen in achsensymmetrischen Aufgaben.* Comptes rendus de l'Académie bulgare des sciences, **12**, *6*, 541–544 (1959).
5. M. SOARE, *Application des équations aux différences finies au calcul des coques.* Edit. Acad. R.P.R. — Eyrolles, Bucureşti — Paris, 1962.
6. K. SZMODITS, *Teoria încovoierii cupolelor sferice pleoştite.* Mélyépitéstudományi Szemle, **IX**, *6*, 290–294 (1959).
7. ST. TIMOSHENKO, S. WOINOWSKY-KRIEGER, *Theory of Plates and Shells* (2d Edition). McGraw Hill Book Comp., London–New York, 1959.
8. V. Z. VLASOV, *Teoria generală a membranelor şi aplicarea ei în tehnică.* Gostehizdat, Moskva, 1949.

CONSIDERAȚII ASUPRA TEORIEI PLĂCILOR PLANE ELASTICE SUBȚIRI

DE

V. MANEA

539.3

1. INTRODUCERE

După cum se știe, ipoteza Love-Kirchhoff aduce cu sine simplificări importante la stabilirea ecuațiilor de echilibru ale plăcilor elastice subțiri, meritul său în acest sens fiind incontestabil. Totodată ea conduce însă și la contradicții, binecunoscute, care în multe cazuri practice nu afectează validitatea rezultatelor.

În prezent, preocupările consacrate eliminării contradicțiilor, evaluării erorii ce se comite adoptînd această ipoteză sau construirii ecuațiilor fără adoptarea ei, sînt numeroase și variate. Numai cîteva dintre cele mai importante se găsesc în [1]—[7].

În cele ce urmează vom prezenta un mod de a stabili ecuațiile plăcilor plane elastice subțiri fără a utiliza această ipoteză.

2. DEDUCEREA ECUAȚIILOR DE ECHILIBRU PENTRU PLĂCILE ELASTICE SUBȚIRI DIN ECUAȚIILE EXACTE DE ECHILIBRU

Ecuațiile de echilibru dinamic al unei porțiuni finite dintr-un mediu elastic, de volum V și suprafață S sînt

$$\int_S \bar{\sigma}_n \,\mathrm{d}\, S + \int_V \rho\left(\bar{f} - \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial t^2}\right) \mathrm{d}V = 0, \tag{1}$$

$$\int_S \bar{r} \wedge \bar{\sigma}_n \,\mathrm{d}\, S + \int_V r \wedge \left(\bar{f} - \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}\right) \mathrm{d}V = 0, \tag{2}$$

unde $\bar{\sigma}_n$ este vectorul tensiune ce acționează pe suprafața S, $\bar{f}$ vectorul forțelor masice, $\bar{U}$ vectorul deplasării, $\bar{r} = x_j\, \bar{i}_j$ vectorul de poziție al unui punct curent aparținînd lui V, x_j fiind coordonatele acestui punct într-un sistem rectiliniu triortogonal, iar $\bar{i}_j$ versorii axelor acestui sistem.

Pentru generalitate vom folosi în cele ce urmează coordonatele curbilinii $\alpha_i = \alpha_i\,(x_1,\ x_2,\ x_3)$, unde $i = 1,\ 2,\ 3$, vectorii bazei covariante fiind

$$\bar{r}_i = \frac{\partial \bar{r}}{\partial \alpha_i} \tag{3}$$

iar cei ai bazei contravariante

$$\bar{r}^i = \frac{1}{\sqrt{g}}\, \bar{r}_j \wedge \bar{r}_k = \bar{i}_l \frac{\partial \alpha_i}{\partial x_l} \qquad (i \neq j \neq k), \tag{4}$$

unde

$$\sqrt{g} = \left| \frac{\partial x_l}{\partial \alpha_i} \right| = \sqrt{|\, g_{ik} \,|} = (\bar{r}_1,\ \bar{r}_2,\ \bar{r}_3). \tag{5}$$

$g_{ik} = \bar{r}_i\, \bar{r}_k$ reprezentînd componentele tensorului metric fundamental.

Tensorul tensiunilor în sistemul cartezian $Ox_1\ x_2\ x_3$, scris sub formă diadică, va fi

$$\Pi = \bar{i}_m\, \bar{\sigma}_m. \tag{6}$$

Vectorul tensiune ce acționează pe suprafața $\alpha_i = ct$ va fi

$$\bar{\sigma}_{\alpha_i} = \frac{\bar{r}^i}{r^{i'}} \cdot \Pi = \frac{1}{r^{i'}}\, \frac{\partial \alpha_i}{\partial x_l}\, \bar{\sigma}_l \tag{7}$$

unde prin $r^{i'}$ am notat modulul lui $\bar{r}^i$, semnul prim la un indice avînd semnificația, în tot cursul articolului, că operația de sumare nu are loc. Folosind relația (7) putem transforma integrala de suprafață din (1) în integrală de volum

$$\int_S \bar{\sigma}_n\, \mathrm{d}\, S = \int_V \frac{\partial \sigma_l}{\partial \alpha_i}\, \frac{\partial \alpha_i}{\partial x_l} \sqrt{g}\, \mathrm{d}\alpha_1\, \mathrm{d}\alpha_2\, \mathrm{d}\alpha_3 = \int_V \frac{\partial}{\partial \alpha_i} \left(\sqrt{g}\, r^{i'}\, \bar{\sigma}_{\alpha_i} \right) \mathrm{d}\alpha_1\ \mathrm{d}\alpha_2\, \mathrm{d}\alpha_3 \tag{8}$$

deoarece

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_i} \left(\frac{\partial \alpha_i}{\partial x_l} \sqrt{g} \right) \equiv 0.$$

Aceasta se verifică imediat dacă se înlocuiește

$$\frac{\partial \alpha_i}{\partial x_l} = \frac{1}{\sqrt{g}} \left(\frac{\partial x_m}{\partial \alpha_j} \cdot \frac{\partial x_n}{\partial \alpha_k} - \frac{\partial x_n}{\partial \alpha_j} \cdot \frac{\partial x_m}{\partial x_k} \right)$$

relație ce rezultă din (4).

Ca urmare, ecuațiile de echilibru (1) și (2) se vor scrie sub forma

$$\int_V \left[\frac{\partial}{\partial \alpha_i}\left(\sqrt{g}\, r^{i'}\, \bar{\sigma}_{\alpha_i}\right) + \rho \sqrt{g}\left(\bar{f} - \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial t^2}\right)\right] \mathrm{d}\alpha_1\, \mathrm{d}\alpha_2\, \mathrm{d}\alpha_3 = 0 \qquad (1')$$

$$\int_V \bar{r} \wedge \left[\frac{\partial}{\partial \alpha_i}\left(\sqrt{g}\, r^{i'} \bar{\sigma}_{\alpha_i}\right) + \rho \sqrt{g}\left(\bar{f} - \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial t^2}\right) \mathrm{d}\alpha_1\, \mathrm{d}\alpha_2\, \mathrm{d}\alpha_3 + \right.$$

$$\left. + \int_V \left(\bar{r}_i \wedge \sqrt{g}\, r^{i'} \bar{\bar{\sigma}}_{\alpha_i}\right)\right] \mathrm{d}\alpha_1\, \mathrm{d}\alpha_2\, \mathrm{d}\alpha_3 = 0. \qquad (2')$$

Dacă

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_i}\left(\sqrt{g}\, r^{i'}\, \bar{\sigma}_{\alpha_i}\right) + \rho \sqrt{g}\left(\bar{f} - \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial t^2}\right) = 0 \qquad (9)$$

din cea de-a doua ecuație (2′) rezultă condiția de dualism pentru tensiunile de lunecare

$$r^1\left(\bar{r}_1, \wedge \bar{\sigma}_{\alpha_1}\right) + r^2\left(\bar{r}_2 \wedge \bar{\sigma}_{\alpha_2}\right) + r^3\left(\bar{r}_3 \wedge \bar{\sigma}_{\alpha_3}\right) = 0 \qquad (10)$$

sau înlocuind

$$\bar{\sigma}_{\alpha_i} = \frac{\bar{r}_k}{r_{k'}}\, \sigma_{\alpha_i \alpha_k} = \frac{\bar{r}_k}{r^{i'}}\, P^{ik}, \qquad (11)$$

unde $\sigma_{\alpha_i \alpha_k}$ sînt componentele fizice ale tensorului tensiunilor referitor la sistemul de coordonate curbilinii α_i, iar P^{ik} cele contravariante, rezultă

$$\begin{aligned} \frac{r^1\, \sigma_{\alpha_1 \alpha_2}}{r_2} &= \frac{r^2\, \sigma_{\alpha_2 \alpha_1}}{r_1}, \\ \frac{r^2\, \sigma_{\alpha_2 \alpha_3}}{r_3} &= \frac{r^3\, \sigma_{\alpha_3 \alpha_2}}{r_2}. \\ \frac{r^3\, \sigma_{\alpha_3 \alpha_1}}{r_1} &= \frac{r^1\, \sigma_{\alpha_1 \alpha_3}}{r_3}, \end{aligned} \qquad (12)$$

pentru componentele fizice, respectiv

$$P^{12} = P^{21}, \quad P^{23} = P^{32}, \quad P^{31} = P^{13} \qquad (13)$$

pentru cele contravariante.

Referindu-ne la suprafața mediană a plăcii, pentru care vom considera $\alpha_3 = 0$, vom scrie expresia vectorului de poziție pentru un punct curent aparținînd plăcii sub forma

$$\bar{r} = \bar{\rho}\,(\alpha_1, \alpha_2) + \bar{\rho}_3\,(\alpha_1, \alpha_2)\, \alpha_3, \qquad (14)$$

unde $\bar{\rho}$ reprezintă vectorul de poziție al unui punct aflat pe suprafața mediană, iar $\rho_3\,(\alpha_1, \alpha_2)$ vectorul tangent la cea de-a treia linie de coordonată care, în particular, poate fi și normală la suprafața mediană. Limitîndu-ne la primii doi termeni din dezvoltarea lui $\bar{r}$, diversele mărimi geometrice legate de metrica spațiului vor fi considerate tot în aproximația liniară în raport cu α_3. Astfel, pentru vectorii bazei covariante vom avea

$$\begin{aligned}\bar{r}_1 &= \frac{\partial\bar{\rho}}{\partial\alpha_1} + \frac{\partial\bar{\rho}_3}{\partial\alpha_1}\,\alpha_3 = \bar{\rho}_1 + \frac{\partial\bar{\rho}_3}{\partial\alpha_1}\,\alpha_3,\\ \bar{r}_2 &= \bar{\rho}_2 + \frac{\partial\bar{\rho}_3}{\partial\alpha_2}\,\alpha_3,\\ \bar{r}_3 &= \bar{\rho}_3.\end{aligned} \tag{3'}$$

Ținînd seama de relațiile

$$\frac{\partial\bar{r}_k}{\partial\alpha_i} = \Gamma^s_{ki}\,\bar{r}_s, \tag{15}$$

unde Γ^s_{ki} reprezintă simbolurile lui Christoffel de speța a doua, avem

$$\frac{\partial\bar{\rho}_k}{\partial\alpha_i} = \left(\frac{\partial\bar{r}_k}{\partial\alpha_i}\right)_{\alpha_3=0} = \widetilde{\Gamma}^s_{ki}\,\bar{\rho}_s, \tag{16}$$

unde prin $\widetilde{\Gamma}^s_{ki}$ am notat $(\Gamma^s_{ki})_{\alpha_3=0}$.
Ca urmare vom avea

$$\begin{aligned}\bar{r}_1 &= \bar{\rho}_1 + \widetilde{\Gamma}^s_{31}\,\bar{\rho}_s\,\alpha_3,\\ \bar{r}_2 &= \bar{\rho}_2 + \widetilde{\Gamma}^s_{32}\,\bar{\rho}_s\,\alpha_3,\\ \bar{r}_3 &= \bar{\rho}_3,\end{aligned} \tag{17}$$

relații ce servesc la stabilirea aproximației liniare în raport cu α_3 a celorlalte mărimi geometrice legate de metrica spațiului.

Revenind la ecuațiile de echilibru (1′) și (2′), le vom rescrie sub forma

$$\begin{aligned}\iint_{S_{\alpha_3=0}} \Bigg[&\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\left(\int_{\alpha_3^i}^{\alpha_3^s}\sqrt{g}\,r^1\,\bar{\sigma}_{\alpha_1}\,\mathrm{d}\alpha_3\right) + \frac{\partial}{\partial\alpha_2}\left(\int_{\alpha_3^i}^{\alpha_3^s}\sqrt{g}\,r^2\,\bar{\sigma}_{\alpha_3}\,\mathrm{d}\alpha_3\right) + \left(\sqrt{g}\,r^3\bar{\sigma}_{\alpha_3}\right)\Big|_{\alpha_3^i}^{\alpha_3^s} +\\ &+ \int_{\alpha_3^i}^{\alpha_3^s}\rho\sqrt{g}\left(\bar{f} - \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}\right)\mathrm{d}\alpha_3\Bigg]\,\mathrm{d}\alpha_1\,\mathrm{d}\alpha_2 = 0,\end{aligned} \tag{18}$$

$$\begin{aligned}\iint_{S_{\alpha_3=0}} \bar{\rho}\wedge\Bigg[&\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\left(\int_{\alpha_3^i}^{\alpha_3^s}\sqrt{g}\,r^1\bar{\sigma}_{\alpha_1}\mathrm{d}\alpha_3\right) + \frac{\partial}{\partial\alpha_2}\left(\int_{\alpha_3^i}^{\alpha_3^s}\sqrt{g}\,r^2\,\bar{\sigma}_{\alpha_2}\,\mathrm{d}\alpha_3\right) + \left(\sqrt{g}\,r^3\bar{\sigma}_{\alpha_3}\right)\Big|_{\alpha_3^i}^{\alpha_3^s} +\\ &+ \int_{\alpha_3^i}^{\alpha_3^s}\rho\sqrt{g}\left(\bar{f} - \frac{\partial^2\bar{U}}{\partial t^2}\right)\mathrm{d}\alpha_3\Bigg]\,\mathrm{d}\alpha_1\,\mathrm{d}\alpha_2 +\\ + \iint_{S_{\alpha_3=0}}\Bigg\{\bar{\rho}_3\wedge\Bigg[&\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\left(\int_{\alpha_3^i}^{\alpha_3^s}\sqrt{g}\,r^1\bar{\sigma}_{\alpha_1}\,\alpha_3\mathrm{d}\alpha_3\right) + \frac{\partial}{\partial\alpha_2}\left(\int_{\alpha_3^i}^{\alpha_3^s}\sqrt{g}\,r^2\,\bar{\sigma}_{\alpha_2}\,\alpha_3\,\mathrm{d}\alpha_3\right) +\\ &+ \int_{\alpha_3^i}^{\alpha_3^s}\frac{\partial}{\partial\alpha_3}\left(\sqrt{g}\,r^3\,\bar{\sigma}_{\alpha_3}\right)\alpha_3\,\mathrm{d}\alpha_3 + \int_{\alpha_3^i}^{\alpha_3^s}\rho\sqrt{g}\left(\bar{f} - \frac{\partial^2\bar{U}}{\partial t^2}\right)\mathrm{d}\alpha_3\Bigg] +\\ &+ \int_{\alpha_3^i}^{\alpha_3^s}\left(\bar{r}_i\wedge\sqrt{g}\,r^{i'}\,\bar{\sigma}_{\alpha_i}\right)\mathrm{d}\alpha_3\Bigg\}\,\mathrm{d}\alpha_1\,\mathrm{d}\alpha_2 = 0.\end{aligned} \tag{19}$$

Introducînd notațiile

$$\int_{\alpha_3^i}^{\alpha_3^s} \sqrt{g}\, r^{i'}\, \bar{\sigma}_{\alpha_i}\, \mathrm{d}\alpha_3 = \sqrt{\tilde{g}}\, \rho^{i'}\, \overline{N}_{\alpha_i}, \tag{20}$$

$$\int_{\alpha_3^i}^{\alpha_3^s} \sqrt{g}\, r^{i'}\, \bar{\sigma}_{\alpha_i}\, \alpha_3\, \mathrm{d}\alpha_3 = \sqrt{\tilde{g}}\, \rho^{i'}\, \overline{M}_{\alpha_i}, \tag{21}$$

$$\int_{\alpha_3^i}^{\alpha_3^s} \bar{r}_i \wedge \sqrt{g}\, r^{i'}\, \bar{\sigma}_{\alpha_i}\, \mathrm{d}\alpha_3 = \int_{\alpha_3^i}^{\alpha_3^s} (\bar{\rho}_i + \tilde{\Gamma}_{3i}^s\, \bar{\rho}_s\, \alpha_3) \wedge \sqrt{g}\, r^{i'}\, \bar{\sigma}_{\alpha_3}\, \mathrm{d}\alpha_3 =$$

$$= \bar{\rho}_i \wedge \sqrt{\tilde{g}}\, \rho^{i'}\, \overline{N}_{\alpha_i} + \tilde{\Gamma}_{3i}^s\, \bar{\rho}_s \wedge \sqrt{\tilde{g}}\, \rho^{i'}\, \overline{M}_{\alpha_i}, \tag{22}$$

vom observa că ecuațiile precedente vor fi satisfăcute dacă sînt satisfăcute ecuațiile

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_1} (\sqrt{\tilde{g}}\, \rho^1\, \overline{N}_{\alpha_1}) + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} (\sqrt{\tilde{g}}\, \rho^2\, \overline{N}_{\alpha_2}) + (\sqrt{g}\, r^3\, \bar{\sigma}_{\alpha_3}) \Big|_{\alpha_3^i}^{\alpha_3^s} +$$

$$+ \int_{\alpha_3^i}^{\alpha_3^s} \rho \sqrt{g} \left(\bar{f} - \frac{\partial^2 \overline{U}}{\partial t^2}\right) \mathrm{d}\alpha_3 = 0. \tag{23}$$

$$\bar{\rho}_3 \wedge \Bigg[\frac{\partial}{\partial \alpha_1} (\sqrt{\tilde{g}}\, \rho^1\, \overline{M}_{\alpha_1}) + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} (\sqrt{\tilde{g}}\, \rho^2\, \overline{M}_{\alpha_2}) + \int_{\alpha_3^i}^{\alpha_3^s} \frac{\partial}{\partial \alpha_3} (\sqrt{g}\, r^3\, \bar{\sigma}_{\alpha_3})\, \alpha_3\, \mathrm{d}\alpha_3 +$$

$$+ \int_{\alpha_3^i}^{\alpha_3^s} \rho \sqrt{g} \left(\bar{f} - \frac{\partial^2 \overline{U}}{\partial t^2}\right) \alpha_3\, \mathrm{d}\alpha_3 + \bar{\rho}_i \wedge \sqrt{\tilde{g}}\, \rho^i\, \overline{N}_{\alpha_i} + \tilde{\Gamma}_{3i}^s\, \bar{\rho}_s \wedge \sqrt{\tilde{g}}\, \rho^{i'}\, \overline{M}_{\alpha_i} = 0. \tag{24}$$

Acestea sînt ecuațiile de echilibru dinamic pentru plăcile subțiri. După cum se observă, în ultima ecuație se ține seama și de efectul inerției de rotație.

Vom scrie din nou ecuațiile (23) și (24) pentru plăcile plane subțiri, pentru care vom considera coordonata α_3 perpendiculară la planul median al plăcii și o vom nota cu x_3. Grosimea plăcii o vom considera constantă și egală cu h. Celelalte două coordonate α_1 și α_2 le vom presupune ortogonale. Pentru vectorul de poziție vom avea

$$\bar{r} = \bar{\rho}\,(\alpha_1, \alpha_2) + x_3\, \bar{\rho}_3$$

iar pentru vectorii fundamentali

$$\bar{r}_i = \bar{\rho}_i$$

și ca urmare

$$\Gamma_{k3}^s = 0.$$

De asemenea, avem

$$\sqrt{g} = \sqrt{\tilde{g}} = (\bar{\rho}_1\, \bar{\rho}_2\, \bar{\rho}_3),$$

$$\sqrt{g}\, r^i = \sqrt{\tilde{g}}\, \rho^i = |\, \bar{\rho}_j \wedge \bar{\rho}_k \,| \quad \text{cu} \quad i \neq j \neq k,$$

sau utilizînd coeficienții lui Lamé

$$\begin{aligned}|\bar\rho_2\wedge\bar\rho_3| &= \rho^1 = H_2,\\ |\bar\rho_3\wedge\bar\rho_1| &= \rho^2 = H_1,\\ |\bar\rho_1\wedge\bar\rho_2| &= \rho^3 = 1,\\ (\bar\rho_1\,\bar\rho_2\,\bar\rho_3) &= H_1H_2.\end{aligned}$$

Ținînd seama de aceste observații, ecuațiile (23) și (24) devin :

$$\frac{\partial}{\partial\alpha_1}(H_2\,\overline{N}_{\alpha1})+\frac{\partial}{\partial\alpha_2}(H_1\,\overline{N}_{\alpha2})+\bar\sigma_{x_3^s}-\bar\sigma_{x_3^i}+H_1H_2\int_{-h/2}^{h/2}\rho\left(\bar f-\frac{\partial^2\overline{U}}{\partial t^2}\right)\mathrm{d}x_3=0 \tag{23'}$$

$$\bar\rho_3\wedge\left[\frac{\partial}{\partial\alpha_1}(H_2\,\overline{M}_{\alpha2})+\frac{\partial}{\partial\alpha_2}(H_1\,\overline{M}_{\alpha1})+\frac{h}{2}(\bar\sigma_{x_3^s}+\bar\sigma_{x_3^i})+\right.$$

$$+H_1H_2\int_{-h/2}^{h/2}\rho\left(\bar f-\frac{\partial^2\overline{U}}{\partial t^2}\right)x_3\,\mathrm{d}x_3+\bar\rho_1\wedge H_2\overline{N}_{\alpha_1}+\bar\rho_2\wedge H_1\,\overline{N}_{\alpha_2}=0. \tag{24'}$$

Vom considera în cele ce urmează, fără a afecta generalitatea tratării problemei propuse, cazul coordonatelor rectilinii triortogonale x_1, x_2 și x_3. Pentru a scrie sub formă scalară ecuațiile de mai sus vom înlocui, ținînd seama de notațiile (20) și (21), astfel

$$\begin{aligned}\overline{N}_1 &= \bar\imath_1\,N_{11}+\bar\imath_2\,N_{12}+\bar\imath_3\,N_{13},\\ \overline{N}_2 &= \bar\imath_1\,N_{21}+\bar\imath_2\,N_{22}+\bar\imath_3\,N_{23},\end{aligned} \tag{25}$$

$$\begin{aligned}\overline{M}_1 &= \bar\imath_1\,M_{11}+\bar\imath_2\,M_{12}+\bar\imath_3\,M_{13},\\ \overline{M}_2 &= \bar\imath_1\,M_{21}+\bar\imath_2\,M_{22}+\bar\imath_3\,M_{23},\end{aligned} \tag{26}$$

unde în locul indicilor α_1, α_2 și α_3 am pus 1, 2 și 3 în scopul simplificării scrierii. Înlocuind în mod corespunzător în (23′) și (24′) obținem ecuațiile :

$$\begin{aligned}&\frac{\partial N_{11}}{\partial x_1}+\frac{\partial N_{21}}{\partial x_2}+\sigma_{31}^{(s)}-\sigma_{31}^{(i)}+\int_{-h/2}^{h/2}\rho\left(f_1-\frac{\partial^2U_1}{\partial t^2}\right)\mathrm{d}x^3=0,\\ &\frac{\partial N_{12}}{\partial x_1}+\frac{\partial N_{22}}{\partial x_2}+\sigma_{32}^{(s)}-\sigma_{32}^{(i)}+\int_{-h/2}^{h/2}\rho\left(f_2-\frac{\partial^2U_2}{\partial t^2}\right)\mathrm{d}x_3=0,\\ &\frac{\partial N_{13}}{\partial x_1}+\frac{\partial N_{23}}{\partial x_2}+\sigma_{33}^{(s)}-\sigma_{33}^{(i)}+\int_{-h/2}^{h/2}\rho\left(f_3-\frac{\partial^2U_3}{\partial t^2}\right)\mathrm{d}x_3=0,\\ &\frac{\partial M_{12}}{\partial x_1}+\frac{\partial M_{22}}{\partial x_2}+\frac{h}{2}(\sigma_{32}^{(s)}-\sigma_{32}^{(i)})+\int_{-h/2}^{h/2}\rho\left(f_2-\frac{\partial^2U_2}{\partial t^2}\right)x_3\,\mathrm{d}x_3-N_{23}=0,\\ &\frac{\partial M_{11}}{\partial x_1}+\frac{\partial M_{21}}{\partial x_2}+\frac{h}{2}(\sigma_{31}^{(s)}-\sigma_{31}^{(i)})+\int_{-h/2}^{h/2}\rho\left(f_1-\frac{\partial^2U_1}{\partial t^2}\right)x_3\,\mathrm{d}x_3-N_{13}=0,\\ &N_{12}-N_{21}=0,\end{aligned} \tag{27}$$

binecunoscute în teoria plăcilor plane.

3. TENSORUL DEFORMAȚIILOR, TENSIUNILOR ȘI LEGEA LUI HOOKE

Să luăm pentru proiecțiile vectorului deplasare următoarele expresii :

$$\begin{aligned} U_1 &= u_{10}(x_1, x_2, t) + w_1(x_1, x_2, t)\, x_3, \\ U_2 &= u_{20}(x_1, x_2, t) + w_2(x_1, x_2, t)\, x_3, \\ U_3 &= w(x_1, x_2, x_3, t). \end{aligned} \tag{28}$$

Componentele tensorului deformațiilor vor fi

$$\begin{aligned} &\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_{10}}{\partial x_1} + \frac{\partial w_1}{\partial x_1} x_3, \quad \varepsilon_{12} = \frac{\partial u_{10}}{\partial x_2} + \frac{\partial u_{20}}{\partial x_1} + \left(\frac{\partial w_1}{\partial x_2} + \frac{\partial w_2}{\partial x_1}\right) x_3, \\ &\varepsilon_{22} = \frac{\partial u_{20}}{\partial x_2} + \frac{\partial w_2}{\partial x_2} x_3, \quad \varepsilon_{13} = \frac{\partial w}{\partial x_1} + w_1, \\ &\varepsilon_{33} = \frac{\partial w}{\partial x_3}, \quad \varepsilon_{23} = \frac{\partial w}{\partial x_2} + w_2. \end{aligned} \tag{29}$$

Pentru deformația volumetrică avem evident

$$\theta = \theta_0 + \theta_1 x_3 + \frac{\partial w}{\partial x_3}, \tag{30}$$

unde am notat

$$\begin{aligned} \theta_0 &= \frac{\partial u_{10}}{\partial x_1} + \frac{\partial u_{20}}{\partial x_2}, \\ \theta_1 &= \frac{\partial w_1}{\partial x_1} + \frac{\partial w_2}{\partial x_2}. \end{aligned} \tag{31}$$

Adoptînd legea lui Hooke vom avea pentru tensiuni următoarele expresii :

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \lambda(\theta_0 + \theta_1 x_3) + 2\mu\left(\frac{\partial u_{10}}{\partial x_1} + \frac{\partial w_1}{\partial x_1} x_3\right) + \lambda \frac{\partial w}{\partial x_3}, \\ \sigma_{22} &= \lambda(\theta_0 + \theta_1 x_3) + 2\mu\left(\frac{\partial u_{20}}{\partial x_2} + \frac{\partial w_2}{\partial x_2} x_3\right) + \lambda \frac{\partial w}{\partial x_3}, \\ \sigma_{33} &= \lambda(\theta_0 + \theta_1 x_3) + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial w}{\partial x_3}, \\ \sigma_{12} &= \mu\left(\frac{\partial u_{10}}{\partial x_2} + \frac{\partial u_{20}}{\partial x_1}\right) + \mu\left(\frac{\partial w_1}{\partial x_2} + \frac{\partial w_2}{\partial x_1}\right) x_3, \\ \sigma_{13} &= \mu\left(\frac{\partial w}{\partial x_1} + w_1\right), \\ \sigma_{23} &= \mu\left(\frac{\partial w}{\partial x_2} + w_2\right). \end{aligned} \tag{32}$$

Avînd tensiunile putem calcula mărimile N_{ij} și M_{ij} ce intervin în ecuațiile de echilibru (27). Astfel rezultă :

$$
\begin{aligned}
N_{11} &= \lambda h \theta_0 + 2 \mu h \frac{\partial u_{10}}{\partial x_1} + \lambda \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial w}{\partial x_3} \\
N_{22} &= \lambda h \theta_0 + 2 \mu h \frac{\partial u_{20}}{\partial x_2} + \lambda \int_{-h/2}^{h/2} \mathrm{d} x_3, \\
N_{12} &= \mu h \left(\frac{\partial u_{10}}{\partial x_2} + \frac{\partial u_{20}}{\partial x_1} \right), \\
N_{13} &= \mu h \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial x_1} + w_1 \right), \\
N_{23} &= \mu h \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial x_2} + w_2 \right),
\end{aligned}
\tag{33}
$$

unde am notat

$$\bar{w} = \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} w \mathrm{d} x_3.$$

De asemenea

$$
\begin{aligned}
M_{11} &= \lambda \frac{h^3}{12} \theta_1 + 2\mu \frac{h^3}{12} \cdot \frac{\partial w_1}{\partial x_1} + \lambda \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial w}{\partial x_3} x_3 \, \mathrm{d} x_3, \\
M_{22} &= \lambda \frac{h^3}{12} \theta_1 + 2\mu \frac{h^3}{12} \cdot \frac{\partial w_2}{\partial x_2} + \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial w}{\partial x_3} x_3 \, \mathrm{d} x_3, \\
M_{12} &= \mu \frac{h^3}{12} \left(\frac{\partial w_1}{\partial x_2} + \frac{w_2}{\partial x_1} \right).
\end{aligned}
\tag{33'}
$$

Vom elimina din expresiile (33) și (33′) integralele ce conțin pe $\frac{\partial w}{\partial x_3}$ în modul următor. Vom scrie expresiile tensiunilor σ_{31}, σ_{32} și σ_{33} conform legii lui Hooke

$$
\begin{aligned}
\sigma_{31} &= \mu \left(\frac{\partial U_1}{\partial x_3} + \frac{\partial U_3}{\partial x_1} \right), \\
\sigma_{32} &= \mu \left(\frac{\partial U_2}{\partial x_3} + \frac{\partial U_3}{\partial x_2} \right), \\
\sigma_{33} &= \lambda \left(\frac{\partial U_1}{\partial x_1} + \frac{\partial U_2}{\partial x_2} \right) + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial U_3}{\partial x_3}.
\end{aligned}
\tag{34}
$$

Pe de altă parte, ținînd seama de valorile acestor tensiuni pe suprafața superioară și inferioară a plăcii, vom pune

$$\sigma_{31} = \sigma_{31}^{i} + \frac{\sigma_{31}^{s} - \sigma_{31}^{i}}{2}\left(1 + \frac{2x_3}{h}\right) + \mu\, \psi_1(x_1, x_2, x_3, t),$$

$$\sigma_{32} = \sigma_{32}^{i} + \frac{\sigma_{32}^{s} - \sigma_{32}^{i}}{2}\left(1 + \frac{2x_3}{h}\right) + \mu\psi_2\, (x_1, x_2, x_3, t), \tag{34'}$$

$$\sigma_{33} = \sigma_{33}^{i} + \frac{\sigma_{33}^{s} - \sigma_{33}^{i}}{2}\left(1 + \frac{2x_3}{h}\right) + (\lambda + 2\mu)\, \psi_3\, (x_1, x_2, x_3, t),$$

funcțiile ψ_1, ψ_2 și ψ_3 fiind nule pentru $x_3 = \pm \dfrac{h}{2}$. Acestea se pot determina în mod aproximativ urmînd același raționament ca în [1]. Pentru primele două se observă că

$$\frac{1}{h}\int_{-h/2}^{h/2} \psi_1\, \mathrm{d}x_3 = \frac{\partial \bar{w}}{\partial x_1} + w_1 - \frac{\sigma_{31}^{s} + \sigma_{31}^{i}}{2\mu},$$

$$\frac{1}{h}\int_{-h/2}^{h/2} \psi_2\, \mathrm{d}x_3 = \frac{\partial \bar{w}}{\partial x_2} + w_2 - \frac{\sigma_{32}^{s} + \sigma_{32}^{i}}{2\mu}, \tag{35}$$

de unde rezultă

$$\psi_1 = \frac{3}{2}\left(1 - \frac{4x_3^2}{h^2}\right)\left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial x_1} + w_1 - \frac{\sigma_{31}^{s} + \sigma_{31}^{i}}{2\mu}\right),$$

$$\psi_2 = \frac{3}{2}\left(1 - \frac{4x_3^2}{h^2}\right)\left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial x_2} + w_2 - \frac{\sigma_{32}^{s} + \sigma_{32}^{i}}{2\mu}\right). \tag{36}$$

Pentru ψ_3 se poate arăta, utilizînd pentru deplasări expresii sub forma unor dezvoltări după puterile lui x_3 limitate la primii trei termeni, că aceasta este dată de expresia

$$\psi_3 = -\frac{\lambda h^2}{4(\lambda + 2\mu)}\left(1 - \frac{4x_3^2}{h^2}\right)\left(\frac{\partial u_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial u_{22}}{\partial x_2}\right), \tag{37}$$

unde u_{12} și u_{22} sînt coeficienții lui x_3^2 din dezvoltările corespunzătoare deplasărilor U_1 și U_2. Cum în cazul de față ne-am limitat numai la aproximația liniară a acestora, (28), rezultă că putem considera

$$\psi_3 = 0. \tag{38}$$

Ca urmare, din ultima relație (34) și (34′) obținem

$$\begin{aligned} \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial w}{\partial x_3}\,\mathrm{d}x_3 &= \frac{h}{\lambda + 2\mu}\,(\varphi_1 - \lambda\theta_0), \\ \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial w}{\partial x_3}\,x_3\,\mathrm{d}x_3 &= \frac{h^3}{12(\lambda + 2\mu)}\,(\varphi_2 - \lambda\theta_1), \end{aligned} \tag{39}$$

unde

$$\begin{aligned} \varphi_1\,(x_1, x_2, t) &= \frac{1}{h}\int_{-h/2}^{h/2}\left[\sigma_{33}^{i} + \frac{\sigma_{33}^{s} - \sigma_{33}^{i}}{2}\left(1 + \frac{2x_3}{h}\right)\right]\mathrm{d}x_3, \\ \varphi_2\,(x_1, x_2, t) &= \frac{1}{h}\int_{-h/2}^{h/2}\left[\sigma_{33}^{i} + \frac{\sigma_{33}^{s} - \sigma_{33}^{i}}{2}\left(1 + \frac{2x_3}{h}\right)\right]x_3\,\mathrm{d}x_3. \end{aligned} \tag{39′}$$

Înlocuind acum în (33) și (33′) obținem definitiv

$$\begin{aligned} N_{11} &= \lambda^{\star}\,h\,\theta_0 + 2\mu\,h\,\frac{\partial u_{10}}{\partial x_1} + \frac{\lambda^{\star}\,h}{2\mu}\,\varphi_1, \\ N_{22} &= \lambda^{\star}\,h\,\theta_0 + 2\mu\,h\,\frac{\partial u_{20}}{\partial x_2} + \frac{\lambda^{\star}\,h}{2\mu}\,\varphi_1, \\ N_{12} &= \mu h\left(\frac{\partial u_{10}}{\partial x_2} + \frac{\partial u_{20}}{\partial x_1}\right), \\ N_{13} &= \mu h\left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial x_1} + w_1\right), \\ N_{23} &= \mu h\left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial x_2} + w_2\right), \\ M_{11} &= \frac{\lambda^{\star}\,h^3}{12}\,\theta_1 + 2\mu\,\frac{h^3}{12}\,\frac{\partial w_1}{\partial x_1} + \frac{\lambda^{\star}}{2\mu}\,\frac{h^3}{12}\,\varphi_2, \\ M_{22} &= \frac{\lambda^{\star}\,h^3}{12}\,\theta_1 + 2\mu\,\frac{h^3}{12}\,\frac{\partial w_2}{\partial x_2} + \frac{\lambda^{\star}}{2\mu}\,\frac{h^3}{12}\,\varphi_2, \\ M_{12} &= \mu\,\frac{h^3}{12}\left(\frac{\partial w_1}{\partial x_2} + \frac{\partial w_2}{\partial x_1}\right), \end{aligned} \tag{40}$$

unde am notat

$$\lambda^{\star} = \frac{2\lambda\mu}{\lambda + 2\mu}.$$

4. ECUAȚIILE DE ECHILIBRU PENTRU PLĂCILE PLANE ELASTICE SUBȚIRI ÎN DEPLASĂRI

Înlocuind în (27) conform cu (40) obținem ecuațiile plăcilor plane elastice subțiri în deplasări:

$$\mu h\ \Delta u_{10} + (\lambda^\star + \mu)\, h \frac{\partial \theta_0}{\partial x_1} + \rho h \left(F_1 - \frac{\partial^2 u_{10}}{\partial t^2} \right) + \sigma^s_{31} - \sigma^i_{31} + \frac{\lambda^\star}{2\mu} h \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} = 0,$$

$$\mu h\ \Delta u_{20} + (\lambda^\star + \mu)\, h \frac{\partial \theta_0}{\partial x_2} + \rho h \left(F_2 - \frac{\partial^2 u_{20}}{\partial t^2} \right) + \sigma^s_{32} - \sigma^i_{32} + \frac{\lambda^\star}{2\mu} h \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} = 0,$$

$$\mu h\ \Delta \bar{w} + \mu\, h\, \theta_1 + \rho h \left(F_3 - \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial t^2} \right) + \sigma^s_{33} - \sigma^i_{33} = 0,$$

$$\mu \frac{h^3}{12}\, \Delta w_1 + (\lambda^\star + \mu) \frac{h^3}{12} \frac{\partial \theta_1}{\partial x_1} - \mu\, h \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial x_1} + w_1 \right) + \frac{\rho h^3}{12} \left(\mathcal{F}_1 - \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} \right) +$$
$$+ \frac{h}{2} (\sigma^s_{31} + \sigma^i_{31}) + \frac{\lambda^\star}{2\mu} \frac{h^3}{12} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} = 0, \qquad (41)$$

$$\mu \frac{h^3}{12}\, \Delta w_2 + (\lambda^\star + \mu) \frac{h^3}{12} \frac{\partial \theta_1}{\partial x_2} - \mu\, h \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial x_2} + w_2 \right) + \frac{\rho h^3}{12} \left(\mathcal{F}_2 - \frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2} \right) +$$
$$+ \frac{h}{2} (\sigma^s_{32} + \sigma^i_{32}) + \frac{\lambda^\star}{2\mu} \frac{h^3}{12} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} = 0,$$

unde am notat

$$F_i = \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} f_i \, \mathrm{d}x_3, \qquad i = 1,\ 2,\ 3,$$

$$\mathcal{F}_i = \frac{12}{h^3} \int_{-h/2}^{h/2} f_i\, x_3 \, \mathrm{d}x_3, \qquad i = 1,\ 2.$$

Stabilirea acestui sistem de ecuații s-a făcut fără a apela la ipoteza simplificatoare Love-Kirchhoff. Primele două ecuații se pot rezolva în mod independent de celelalte trei; ele descriu starea de tensiune plană a plăcii și pot fi rezolvate cu ajutorul metodelor binecunoscute din teoria elasticității plane [10]. Ultimele trei ecuații, cu necunoscutele $\bar{w}$, w_1 și w_2, descriu starea de încovoiere a plăcii. Este remarcabilă asemănarea ultimelor două ecuații cu ecuațiile stării plane de tensiune, exceptînd cel de al treilea termen datorit forței tăietoare. Această asemănare sugerează folosirea metodelor de rezolvare din teoria elasticității plane.

5. CONDIȚIILE LA LIMITĂ PENTRU PLĂCILE PLANE ELASTICE SUBȚIRI

Pentru starea de tensiune plană, respectiv pentru primele două ecuații ale sistemului (41), punerea condițiilor la limită, în număr de două, este cunoscută.

Pentru starea de încovoiere a plăcii, deci pentru ultimele trei ecuații ale sistemului (41), condițiile de margine sînt în număr de trei și au un sens fizic determinat de modul cum este fixată marginea. Înainte de a scrie aceste condiții este util să scriem expresia forței tăietoare, momentului de torsiune și momentului de încovoiere ce acționează asupra unui arc de curbă s pe unitatea de lungime. Dacă notăm cosinușii directori ai normalei exterioare $\vec{n}$ la acest arc de curbură cu α și β, utilizînd (25) rezultă

$$\overline{N}_n = \overline{N}_1\alpha + \overline{N}_2\beta,$$
$$\overline{M}_n = \overline{M}_1\alpha + \overline{M}_2\beta. \qquad (42)$$

Avem evident

$$\begin{aligned} N_{n3} &= N_{13}\,\alpha + N_{23}\,\beta, \\ M_{nn} &= M_{11}\,\alpha^2 + M_{22}\,\beta^2 + 2\,M_{12}\,\alpha\beta, \qquad (43)\\ M_{ns} &= (M_{22} - M_{11})\,\alpha\beta + M_{12}\,(\alpha^2 - \beta^2). \end{aligned}$$

Ținînd seama de expresiile deplasărilor (28), rezultă similar

$$\begin{aligned} w_n &= w_1\,\alpha + w_2\,\beta, \\ w_s &= -\,w_1\beta + w_2\alpha. \qquad (44) \end{aligned}$$

Cu aceasta, condițiile la limită, care se întîlnesc în mod obișnuit în practică, se pot scrie astfel:

1. Margine liberă

a) $\mu h\left(\dfrac{\partial \bar{w}}{\partial n} + w_n\right)_s = (N_{n3})_s,$

b) $(M_{11}\alpha^2 + M_{22}\,\beta^2 + 2M_{12}\,\alpha\,\beta)_s = (M_{nn})_s,$

c) $[(M_{22} - M_{11})\,\alpha\beta + M_{12}\,(\alpha^2 - \beta^2)]_s = (M_{ns})_s,$

pentru care se dau simultan valorile forței tăietoare, momentului de torsiune și momentului încovoietor.

2. Margine simplu rezemată

a) $(\bar{w})_s = 0,$

b) $(M_{11}\,\alpha^2 + M_{22}\,\beta^2 + 2M_{12}\,\alpha\beta)_s = (M_{nn})_s,$

c) $(-w_1\beta + w_2\,\alpha)_s = 0.$

3. Margine încastrată

a) $(\bar{w})_s = 0$,

b) $(w_1\alpha + w_2\beta)_s = 0$,

c) $(-w_1\beta + w_2\alpha)_s = 0$.

Desigur că pot exista condiții de margine diferite de cele menționate mai sus, de exemplu cele corespunzătoare marginii cu deplasare dată de-a lungul ei, sau rotire etc., a căror stabilire nu ridică dificultăți.

6. APLICAȚIE

Pentru o ilustrare sub aspectul aplicativ al celor precedente, am ales cazul încovoierii cilindrice în diverse condiții la limită, considerînd și efectul încărcării normale cu o sarcină constantă $\sigma^s_{33} - \sigma^i_{33} = q$, neglijînd efectele dinamice. În acest caz $w_2 = 0$, iar $\bar{w}$ și w_1 sînt funcții numai de x_1 și prin urmare ecuația a treia și a patra din (41) devin

$$\begin{aligned} &B\left(\frac{\mathrm{d}^2\bar{w}}{\mathrm{d}x_1^2} + \frac{\mathrm{d}w_1}{\mathrm{d}x_1}\right) + q = 0, \\ &D\,\frac{\mathrm{d}^2 w_1}{\mathrm{d}x_1^2} - B\left(\frac{\mathrm{d}\bar{w}}{\mathrm{d}x_1} + w_1\right) = 0, \end{aligned} \tag{45}$$

unde am notat

$$B = \mu h,$$

$$D = (\lambda^* + 2\mu)\,\frac{h^3}{12},$$

rigiditatea la lunecare, respectiv încovoiere. Din prima ecuație (45) deducem

$$\frac{\mathrm{d}\bar{w}}{\mathrm{d}x_1} + w_1 = -\frac{q}{B}\,x_1 + a_1 \tag{46}$$

iar după înlocuire în cea de-a doua și integrare, obținem

$$w_1 = -\frac{q x_1^3}{3\,!\,D} + a_1\frac{B}{D}\,\frac{x_1^2}{2} + b_2\,x_1 + b_1. \tag{47}$$

Înlocuind în (46) și integrînd rezultă

$$\bar{w} = \frac{q x_1^4}{4\,!\,D} - a_1\frac{B}{D}\,\frac{x_1^3}{3\,!} - \left(b_2 + \frac{q}{B}\right) + (a_1 - b)\,x_1 + b_0. \tag{48}$$

Constantele de integrare din (47) și (48) se determină cu ajutorul condițiilor la limită. Vom da numai rezultatele pentru cîteva cazuri de rezemare a unei plăci de deschidere l, în vederea comparării rezultatelor între ele, precum şi cu cele bazate pe ipoteza Love-Kirchhoff.

a) Rezemare simplă cu momente egale la capete (M) :

$$\bar{w} = \frac{M}{2D} x_1 (l - x_1),$$

$$w_1 = -\frac{\mathrm{d}\bar{w}}{\mathrm{d}x_1},$$

$$N_{13} = 0,$$

$$M_{11} = D \frac{\mathrm{d}w_1}{\mathrm{d}x_1} = M,$$

rezultatul este identic cu cel clasic.

b) Rezemare simplă cu momente neegale la capete (M_1 şi M_2) :

$$\bar{w} = \frac{M_1 - M_2}{Dl} \frac{x_1^3}{6} - \frac{M_1}{D} \frac{x_1^2}{2} + \left(\frac{M_2 - M_1}{D} \frac{l}{6} + \frac{M_1}{D} \frac{l}{2} \right) x_1,$$

$$w_1 = \frac{M_2 - M_1}{Dl} \frac{x_1^2}{2} + \frac{M_1}{D} x_1 - (M_2 - M_1) \left(\frac{l}{6D} - \frac{1}{Bl} \right) - \frac{M_1 l}{2D},$$

$$N_{13} = \frac{1}{l} (M_2 - M_1),$$

$$M_{11} = M_1 + \frac{M_2 - M_1}{l} x_1.$$

Deoarece $w_1 \neq -\frac{\mathrm{d}\bar{w}}{\mathrm{d}x_1}$ rezultă că deplasarea $U_1 = u_{10} + w_1 x_3$ este diferită de cea din formularea clasică. Restul rezultatelor coincid.

c) Placă în consolă cu forţă tăietoare constantă pe marginea liberă :

$$\bar{w} = -\frac{P}{D} \frac{x_1^3}{3!} + \frac{Pl}{D} \frac{x_1^2}{2} + \frac{P}{B} x_1,$$

$$w_1 = \frac{P}{D} \frac{x_1^2}{2} - \frac{Pl}{D} x_1,$$

$$N_{13} = P,$$

$$M_{11} = P (x_1 - l).$$

Se remarcă influenţa alunecării transversale asupra deplasării prin ultimul termen. Se observă că tangenta la linia deformată $\bar{w}$, în origine, este $\frac{\mathrm{d}\bar{w}}{\mathrm{d}x_1} = \frac{P}{B} \neq 0$ ceea ce corespunde faptului fizic că încastrarea nu împiedică alunecarea pe direcție transversală.

d) Placă simplu rezemată sub acțiunea sarcinii uniform repartizate :

$$\bar{w} = \frac{q\,x_1^4}{4\,!\,D} - \frac{q\,x_1^3\,l}{12\,D} - \frac{q\,x_1^2}{2\,B} + \left(\frac{ql}{2B} + \frac{ql^3}{4\,!\,D}\right)x_1,$$

$$w_1 = -\frac{q\,x_1^3}{3\,D} + \frac{q\,x_1^2\,l}{4\,D} - \frac{q\,l^3}{4\,!\,D},$$

$$N_{13} = \frac{q}{2}\,(l - 2x_1),$$

$$M_{11} = \frac{q}{2}\,x_1\,(l - x_1).$$

Ne-am limitat numai la cîteva exemple care, deși sînt dintre cele mai elementare, ilustrează într-o anumită măsură faptul că prezenta formulare completează în mod natural rezultatele din formularea clasică. Desigur că prezintă mai mult interes compararea rezultatelor în acele cazuri în care se manifestă evident contradicțiile binecunoscute ale formulării clasice, dar aceasta depășește cadrul unui singur articol.

Primită la redacție la 16 februarie 1963

CONSIDÉRATIONS SUR LA THÉORIE DES PLAQUES PLANES MINCES, ÉLASTIQUES

RÉSUMÉ

Dans la première partie de l'article, l'auteur donne une déduction générale des équations des plaques minces, avec les approximations des ordres zéro et un, en partant des équations exactes d'équilibre dynamique, dans le cas des milieux continus déformables. En particularisant, il obtient les équations d'équilibre dynamique des plaques planes.

Par un choix convenable des expressions des déplacements, il obtient un système de cinq équations aux dérivées partielles, décrivant l'état de sollicitation de la plaque, sans qu'il soit nécessaire de faire appel à l'hypothèse classique de Love-Kirchhoff.

Il indique ensuite les conditions aux limites auxquelles doit satisfaire l'état de sollicitation à la flexion de la plaque. Comme application, il considère la flexion cylindrique, dans quelques cas d'appui, et fait ressortir les complètements qu'il apporte à la formulation classique.

BIBLIOGRAFIE

1. В. В. Новожилов, П. М. Финкелштейн, *О погрешности гипотез Киргоффа в теории оболочек.* Р.М.М., **VII**, *5* (1943).
2. E. Reissner, *On the theory of bending of plates.* J. Math. Phys., **XXIII** (1944).
3. — *On bending of elastic plates.* Quart. of Appl. Math., **5**, *1* (1957).
4. Б. Ф. Власов, *Об уравнениях теории изгиба пластинок.* Изв. АН СССР, ОТН, *12* (1957).
5. P. M. Naghdi, *A survey of recent progress in the theory of elastic shells.* Applied mechanics Reviews, **9**, *9* (1956).
6. А. Л. Голденвейзер, *К теории изгиба пластинок Рейсснера.* Изв. АН СССР, ОТН, *4* (1958).
7. С. А. Амбарцумиан, *Теория анизотропных оболочек.* Физматгиз, Москва, 1961.
8. В. В. Новожилов, *Основы нелинейной теории упругости.* Огиз-Гостехиздат, Москва, 1948.
9. С. П. Тимошенко, *Устойчивость упругих систем.* Госиздат. тех. теор. лит., Москва, 1955.
10. Н. И. Мусхелишвилли, *Некоторые основные задачи математической теории упругости.* Изд. АН СССР, Москва, 1954.

ASUPRA FLAMBAJULUI SUPERELASTIC AL BARELOR DE OȚEL

DE

NICOLAE S. PÎRVULESCU[1]

539.4

Deși intervalul superelastic, mărginit între limita de proporționalitate și limita convențională de curgere, reprezintă aproximativ numai un sfert din capacitatea de rezistență pînă la această limită de curgere, totuși importanța acestui interval este considerabilă, întrucît cedarea elementelor de construcție are în general loc tocmai în domeniul superelastic. Într-adevăr, pentru flambaj în construcții se evită barele prea zvelte, deoarece în domeniul elastic rezistențele critice σ_{k0} coboară considerabil cu zveltețea, ceea ce reclamă secțiuni mari care fac construcția grea și costisitoare. Pentru aceste considerații standardele de stat interzic folosirea în construcții a barelor prea zvelte. Astfel, pentru bare din oțel OL 38 se limitează [1] zveltețea barelor la $\lambda = 250$, iar pentru OL $\times$ 52 se limitează [2] la $\lambda = 150$.

Prin zăbreluiri se reduce zveltețea barelor, tocmai pentru a fi aduse în domeniul supraelastic, unde rezistența critică este mai apropiată de limita de curgere, avînd drept consecință economia de material.

1. CURBA CARACTERISTICĂ SUPERELASTICĂ

Într-o lucrare precedentă [3] am luat în considerare — în ceea ce privește curba caracteristică a materialului — două ipoteze :

---

[1] Întreprinderea de foraj pentru alimentări cu apă.

1) *ipoteza modulului de superelasticitate cu variație liniară*, unde modulul de superelasticitate E_σ este definit de expresia

$$E_\sigma = \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\varepsilon} \tag{1}$$

în care :

σ — efortul unitar,
ε — alungirea specifică ;

2) *ipoteza modulului redus cu variație liniară*, unde modulul redus E_r este definit de expresia

$$E_r = \frac{4\,EE_\sigma}{(\sqrt{E} + \sqrt{E_\sigma})^2} \tag{2}$$

în care E este modulul de elasticitate constant în domeniul elastic dat de expresia

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon}. \tag{3}$$

Păstrînd ultima ipoteză — verificată de exemplele menționate [3] — am determinat dreapta E_r prin două puncte date, de coordonatele E_{r1}, σ_1 și E_{r2}, σ_2 astfel :

$$E_r = b_2 - a_2\,\sigma, \tag{4}$$

unde

$$a_2 = \frac{E_{r1} - E_{r2}}{\sigma_2 - \sigma_1}, \quad b_2 = E_{ri} + a_2\,\sigma_i, \tag{5}$$

în care $i = 1$ sau $i = 2$.

Să ne referim la cele două puncte particulare care constituie extremitățile segmentului de dreaptă PC (figura 2 din [3]) și anume limita de proporționalitate P, determinată prin coordonatele σ_p, E, și limita totală de curgere C, determinată prin coordonatele σ_t, $E_t = 0$.

Determinarea experimentală a punctelor particulare menționate P și C este dificilă. În vecinătatea lor se cunosc puncte convenționale — determinate pentru o anumită alungire permanentă ε_0 — și anume : limita de elasticitate — ceva deasupra limitei de proporționalitate — determinată de coordonatele σ_e, ε_{0e} și limita convențională de curgere —

ceva sub limita totală de curgere — determinată de coordonatele σ_c, ε_{0c}. Pentru caracterizarea oțelurilor, în practică, se folosește în general numai limita convențională de curgere. În acest caz, alungirea permanentă, dată de expresia

$$\varepsilon_{0c} = \varepsilon_c - \frac{\sigma_c}{E} \tag{6}$$

se ia $\varepsilon_{0c} = 0{,}2\%$.

Un al doilea punct, care urmează¹) să fie determinat prin încercări experimentale, poate fi determinat în mod analog cu limita de curgere și anume cu σ_b, ε_{0b}, unde alungirea remanentă ε_{0b} a acestui punct ar putea fi aleasă tot prin convenție, de exemplu $\varepsilon_{0b} = 0{,}1\%$ sau $0{,}01\%$.

Cu aceste precizări, expresiile (5) devin:

$$a_2 = \frac{E}{\sigma_t - \sigma_p}, \quad b_2 = \frac{\sigma_t E}{\sigma_t - \sigma_p}. \tag{7}$$

Să specificăm influența valorilor particulare folosind expresiile:

$$k_{tp} = \frac{k_t}{k_p}, \; k_t = \frac{\sigma_t}{\sigma_c}, \; k_p = \frac{\sigma_p}{\sigma_c} \tag{8}$$

și deci

$$k_{tp} = \frac{\sigma_t}{\sigma_p}.$$

Ținînd seama de (8), relațiile (7) devin:

$$a_2 = \frac{\dfrac{E}{\sigma_c}}{k_t - k_p}, \quad b_2 = \frac{k_t E}{k_t - k_p}. \tag{9}$$

S-a arătat [3] că, admițînd a doua ipoteză și pornind de la expresia (6), se obține

$$\varepsilon_{0c} = \frac{8}{a_2}\left(\ln\frac{1}{q_c} + q_c - 1\right), \tag{10}$$

---

¹) Nedispunînd de timp și de un laborator pentru executarea încercărilor experimentale, ne-am hotărît să completăm studiul teoretic pe baza cifrelor menționate, lăsînd altora sarcina să facă verificările și corectările respective.

Va trebui să se urmărească și influența tratamentelor termice și tehnologice ale materialului, întrucît pentru același material ridicarea limitei de proporționalitate — ca și a limitei de curgere de altfel — conduce la ușurarea barelor supuse la flambaj.

în care

$$q_c = \sqrt{\frac{E_{rc}}{E}}. \tag{11}$$

Ținînd seama de (4), (9) relația (11) devine:

$$q_c^2 = 1 - \varkappa \text{ în care } \varkappa = \frac{1 - k_p}{k_t - k_p}. \tag{12}$$

Înlocuind pe a_2 din (9), relația (10) se poate pune sub forma

$$\sigma_c = \frac{E\,\varepsilon_{0c}}{4\,(k_t - k_p)\,\mathcal{S}_c}, \tag{13}$$

în care

$$\mathcal{S}_c = \ln \frac{1}{q_c^2} - 2\,(1 - q_c). \tag{14}$$

În ceea ce privește limita convențional elastică, procedăm în mod analog ca la limita convențională de curgere și prin urmare:

$$\varepsilon_{e0} = \frac{\mathcal{S}_e}{a_2} \text{ unde } \mathcal{S}_e = \ln \frac{1}{q_e^2} - 2\,(1 - q_e) \tag{15}$$

și

$$q_e^2 = \frac{E_{re}}{E} = \frac{\sigma_t - \sigma_e}{\sigma_c\,(k_t - k_p)}, \tag{16}$$

unde indicele *e* se referă la limita convențională elastică.

Din relațiile (10), (13), ținînd seama de (14), (15), se obține:

$$\frac{\varepsilon_{e0}}{\varepsilon_{c0}} = \frac{\mathcal{S}_e}{\mathcal{S}_c}. \tag{17}$$

2. IPOTEZA RAPORTULUI k_{tp} CONSTANT

Relațiile (13), (14) arată că σ_c este o funcție de k_t și k_p, k_{tp} fiind raportul lor (8). Dacă se cunoaște și un al doilea punct (σ_b, ε_{0b}), în afară de limita convențională de curgere (σ_c, ε_{0c}) — după cum s-a menționat — rapoartele k_p și k_t sînt determinate. S-a arătat [3] că pentru oțelul experimentat și luat în considerație, cu $\sigma_c = 29{,}37$ kg/mm², a rezultat $\sigma_p = 21{,}95$ kg/mm², $\sigma_t = 29{,}83$ kg/mm² și prin urmare $k_p = 0{,}747$ $k_t = 1{,}016$, $k_{tp} = 1{,}36$. Pentru alte oțeluri ar trebui să se stabilească valorile rapoartelor menționate prin încercări experimentale.

În lipsa celui de-al doilea punct, se poate admite, ca premisă simplificatoare, constanța unuia dintre cele trei rapoarte menționate.

Atît pentru oțelul OL 38 și cît pentru OL × 52 găsim [2] aceeași valoare pentru raportul $k_e = 0{,}79$

$$k_e = \frac{\sigma_e}{\sigma_c}. \tag{18}$$

A admite ca ipoteză k_e constant, sau k_p constant sau k_t constant, înseamnă a admite o lege legată de un punct convențional σ_c. Preferăm premisa k_{tp} constant care este legată de punctele particulare σ_t, σ_p și este mai veridică, după cum se va arăta la aplicații.

Prin urmare, vom folosi deocamdată la aplicațiile numerice valoarea $k_{tp} = 1{,}36$ — găsită la menționatul oțel experimentat — și pentru celelalte oțeluri.

Deoarece nu dispunem de o expresie în care q_c să fie exprimat explicit în funcție de σ_c, s-a întocmit tabela 1 — folosind formulele (8), (13), (14) pentru $E = 21\,000$ kg/mm² — cu ajutorul căreia, prin interpolare, se poate determina q_c în funcție de σ_c, evitînd sau facilitînd astfel încercările succesive. S-a întocmit apoi tabela 2 pentru oțelurile obișnuite.

În diagrama din figura 1 sînt trasate valorile $\mathcal{S}_c$, σ_c, k_t conform tabelei 1.

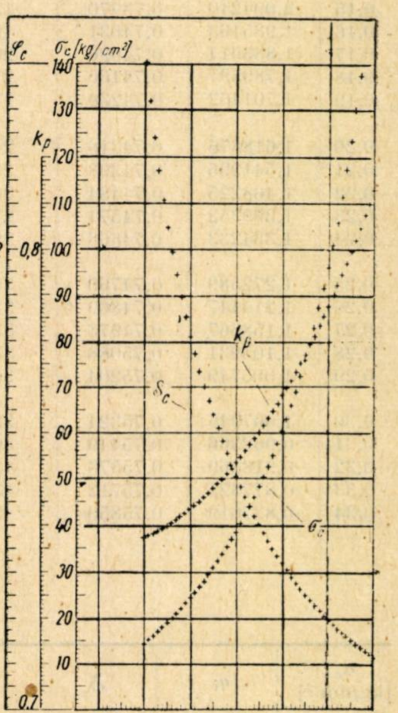


Fig. 1. — Diagramele σ_c, k_p, σ_e în funcție de q_c.

3. REZISTENȚELE CRITICE SUPERELASTICE ALE BARELOR DE OȚEL

În lucrarea citată [3] s-a făcut o primă aplicație la flambajul superelastic al barelor menționate (cupru și oțel).

S-a arătat că formula Euler, în zona superelastică, devine:

$$\left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^2 = \frac{b_2}{\sigma_{k1}} - a_2, \tag{19}$$

unde σ_{k1} este rezistența critică (efortul la care se produce flambajul) în concepția noastră.

Tabela 1

q_c	$\mathcal{S}_c$	k_p	σ_c [kg/mm²]	q_c	$\mathcal{S}_c$	k_p	σ_c [kg/mm²]
0,10	2,805170	0,73725	14,10	0,35	0,799644	0,75994	48,00
0,11	2,634550	0,73766	15,01	0,36	0,763302	0,76142	50,18
0,12	2,480527	0,73811	15,93	0,37	0,728505	0,76294	52,48
0,13	2,340442	0,73860	16,87	0,38	0,695168	0,76452	54,88
0,14	2,212226	0,73913	17,84	0,39	0,663217	0,76614	57,40
0,15	2,094240	0,73970	18,83	0,40	0,632581	0,76781	60,05
0,16	1,985163	0,74031	19,85	0,41	0,603196	0,76954	62,83
0,17	1,883914	0,74096	20,89	0,42	0,575001	0,77131	65,76
0,18	1,789597	0,74166	21,96	0,43	0,547940	0,77313	68,85
0,19	1,701462	0,74239	23,09	0,44	0,511961	0,75501	72,10
0,20	1,618876	0,74316	24,24	0,45	0,497015	0,77694	75,53
0,21	1,541296	0,74398	25,44	0,46	0,473058	0,77892	79,15
0,22	1,468225	0,74484	26,67	0,47	0,450045	0,78096	82,99
0,23	1,399352	0,74574	27,95	0,48	0,427938	0,78305	87,04
0,24	1,334233	0,74668	29,28	0,49	0,406700	0,78520	91,33
0,25	1,272589	0,74766	30,65	0,50	0,386294	0,78740	95,89
0,26	1,214147	0,74869	32,08	0,51	0,366689	0,78966	100,73
0,27	1,158667	0,74976	33,57	0,52	0,347853	0,79198	105,87
0,28	1,105931	0,75088	35,12	0,53	0,329757	0,79436	111,35
0,29	1,005749	0,75204	36,74	0,54	0,312372	0,79680	117,18
0,30	1,007946	0,75324	38,42	0,55	0,295674	0,79930	123,41
0,31	0,962366	0,75449	40,17	0,56	0,279637	0,80186	130,07
0,32	0,918869	0,75578	42,00	0,57	0,264238	0,80448	137,21
0,33	0,877325	0,75712	43,91	0,58	0,249454	0,80717	144,85
0,34	0,837619	0,75850	45,92	0,59	0,235265	0,80992	153,07
				0,60	0,221651	0,81274	161,91

Tabela 2

σ_c [kg/mm²]	q_c	$\mathcal{S}_c$	k_p	σ_c [kg/mm²]	q_c	$\mathcal{S}_c$	k_p
18	0,14162	2,19916	0,73922	55	0,38048	0,69365	0,76459
20	0,16144	1,97056	0,74040	60	0,39981	0,63316	0,76778
22	0,18018	1,78801	0,74167	65	0,41741	0,58232	0,77085
24	0,19793	1,63596	0,74300	70	0,43354	0,53875	0,77380
26	0,21455	1,50803	0,74437	75	0,44846	0,50087	0,77664
28	0,23038	1,39690	0,74577	80	0,46281	0,46796	0,77937
30	0,24526	1,30184	0,74720	85	0,47496	0,43907	0,78200
32	0,25944	1,21742	0,74863	90	0,48690	0,41328	0,78453
34	0,27277	1,14404	0,75007	95	0,49805	0,39030	0,78697
36	0,28543	1,07867	0,75151	100	0,50831	0,37001	0,78928
38	0,29750	1,01990	0,75294	105	0,51831	0,35104	0,79159
40	0,30903	0,96679	0,75437	110	0,52754	0,33422	0,79377
42	0,32000	0,57500	0,75578	115	0,53626	0,31887	0,79588
45	0,33542	0,85579	0,75787	120	0,54454	0,30477	0,79792
50	0,35917	0,76630	0,76129				

λ — coeficientul de subțirime (zveltețe) al barei, definit astfel

$$\lambda = \frac{l_f}{i}, \quad i^2 = \frac{I}{A_b}$$

cu l_f — lungimea de flambaj,
I — momentul minim de inerție al secțiunii.

Făcînd înlocuirile date de (7) și (9) se obține succesiv

$$\left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^2 = \frac{E\left(\frac{\sigma_t}{\sigma_{k1}} - 1\right)}{\sigma_t - \sigma_p}, \tag{20}$$

$$\sigma_{k1} = \frac{k_t\,\sigma_c}{1 + (k_t - k_p)\pi_\xi \frac{\sigma_c}{E}\left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^2}. \tag{21}$$

S-a obținut o formulă de tip Rankine [4]

$$\sigma_k = \frac{\sigma_t}{1 + \alpha\,\lambda^2}. \tag{22}$$

stabilită plecînd de la compresiunea excentrică, dar în care α se determină prin experiență.

În cazul nostru α capătă expresia

$$\alpha = \frac{(k_t - k_p)\,\sigma_c}{E\,\pi^2}. \tag{23}$$

Făcînd înlocuirile date de tabela 2 pentru oțel OL × 52, caracterizat prin $\sigma_c = 36$ kg/mm^2 se obține $\alpha = 0{,}47.10^{-4}$; cifra $\alpha = 0{,}0001$ prescrisă [4] pentru fier ar corespunde, după formula (23), oțelului caracterizat prin $\sigma_c = 75$ kg/mm^2.

Expresia (22) se poate pune sub forma :

$$\sigma_k = \sigma_t\,(1 - \beta\,\lambda^2) \tag{24}$$

în care

$$\beta = \frac{\alpha}{1 + 10\,000\,\alpha\left(\frac{\lambda}{100}\right)^2}. \tag{25}$$

Dacă se neglijează termenul $\alpha\lambda^2$ din (25), formula (24) devine

$$\sigma_k = \sigma_t\,(1 - \alpha\,\lambda^2), \tag{26}$$

adică tocmai formula Johnson [5] care devine astfel o aproximație a formulei Rankine. Pentru λ mare, termenul al doilea de la numitorul relației (25) nu mai poate fi neglijat.

Să generalizăm aplicațiile la flambajul superelastic al barelor din oțelurile specificate în tabela 2. Cu ajutorul relației (21), pe baza cifrelor din tabela 2, s-au calculat tabelele 3 și 4 care se reflectă în diagrama din figura 2.

Valorile λ_p, λ_e corespunzătoare respectiv la σ_p și σ_c s-au calculat cu expresiile

$$\left(\frac{\lambda_p}{\pi}\right)^2 = \frac{E}{k_p\,\sigma_c}, \quad \left(\frac{\lambda_c}{\pi}\right)^2 = \frac{(k_t-1)\,E}{(k_t-k_p)\,\sigma_c} \tag{27}$$

obținute din relația (21) pentru $\sigma_1 = \sigma_p$ și $\sigma_1 = \sigma_c$.

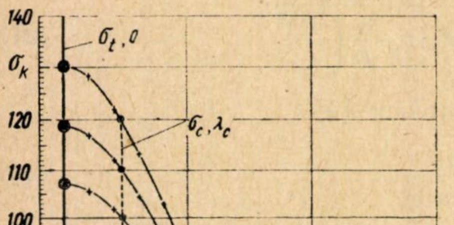


Fig. 2. — Rezistențe critice superelastice ale barelor de oțel.

Observăm că λ_c crește cu σ_c de la $\lambda_c < 20$, trecînd pentru $\sigma_c > 30$ kg/mm^2 la $\lambda_c > 20$, fără să se depărteze prea mult, încît valorile λ_c (din tabela 3 și figura 2) calculate în concepția noastră sînt apropiate de valoarea 20, folosită în general în standarde, ceea ce constituie și o verificare.

Mai observăm că, dincolo de limita convențională de curgere, σ_{k1} crește cu cît ne apropiem de σ_t și mai ales cu cît crește σ_e (calitatea oțelului).

Din tabela 2 se constată creșterea lui k_p cu σ_c, de la $k_p \approx 0{,}74$ pentru $\sigma_c = 20$ kg/mm^2 pînă la $k_p \approx 0{,}80$ pentru $\sigma_c = 120$ kg/mm^2, adică σ_p se apropie de σ_c. În ipoteza k_p constant, cu cît crește σ_c se obțin pentru σ_t valori încă și mai mari. Acesta a fost încă un motiv ca să renunțăm la această ipoteză.

În ceea ce privește limita elastică, aplicînd relațiile (15), (16), (17) la oțelul OL 38 [2] cu $\sigma_c = 24$ kg/mm^2, $\sigma_e = 19$ kg/mm^2 și valorile din tabelele 2 și 3, se obține $\varepsilon_{0e} \approx 0{,}0012\%$, față de 0,001 fixat de congresul internațional de la Bruxell în 1906. Aceeași valoare se regăsește și pentru oțelul OL × 52 cu $\sigma_e = 28{,}5$ kg/mm^2. Prin urmare, cifra 0,01%, menționată în [6] pentru ε_{0e}, este mai mare.

Tabela 3

σ_c [kg/mm^2]	λ_ε	σ_p [kg/mm^2]	λ_p	σ_c [kg/mm^2]	λ_c	σ_p [kg/mm^2]	λ_p
18	15,2	13,31	124,8	55	23,4	42,05	70,2
20	16,4	14,80	118,6	60	23,5	46,07	67,1
22	17,5	16,31	112,7	65	23,6	50,11	64,3
24	18,4	17,83	107,8	70	23,6	54,17	61,9
26	19,2	19,35	103,5	75	23,6	58,25	59,7
28	19,8	20,88	99,6	80	23,5	62,35	57,7
30	20,4	22,42	96,2	85	23,5	66,47	55,8
32	20,9	23,96	93,0	90	23,4	70,61	54,2
34	21,3	25,50	90,2	95	23,3	74,76	52,7
36	21,7	27,05	87,5	100	23,2	78,93	51,2
38	22,0	28,61	85,1	105	23,0	83,12	49,9
40	22,2	30,18	82,7	110	22,9	87,32	48,7
42	22,5	31,74	80,8	115	22,8	91,53	47,6
45	22,8	34,10	78,0	120	22,6	95,75	46,5
50	23,1	38,07	73,8				

Tabela 4

Rezistenţe critice superelastice

σ_c \ λ	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110
18	18,10	18,05	17,93	17,73	17,45	17,11	16,71	16,26	15,76	15,24	14,70	14,92
20	20,14	20,09	19,93	19,68	19,34	18,92	18,43	17,89	17,29	16,67	16,02	15,36
22	22,19	22,13	21,94	21,65	21,23	**20,72**	20,14	19,49	18,75	18,05	17,29	16,52
24	24,25	24,18	23,96	23,59	23,11	22,51	21,82	21,07	20,23	19,39	18,52	
26	26,32	26,23	25,97	25,80	24,98	24,28	23,48	22,60	21,66	20,69	19,70	
28	28,40	28,30	27,99	27,50	26,84	26,02	25,12	24,11	23,05	21,95		
30	30,49	30,04	30,02	29,45	28,70	**27,78**	26,74	25,60	24,40	23,18		
32	32,58	32,45	32,05	31,40	30,55	29,51	28,34	27,56	25,73	24,37		
36	36,79	36,62	36,12	35,30	34,22	32,93	31,47	29,91	28,29			
40	41,04	40,82	40,20	**39,19**	37,86	**36,28**	34,32	32,65	30,73			
45	46,38	**46,11**	**45,31**	44,03	**42,37**	40,40	38,23	35,96				
50	51,77	51,45	50,43	48,86	46,82	44,43	41,82	39,10				
55	57,19	56,78	55,57	53,66	51,21	48,36	45,28	42,12				
60	62,65	62,15	60,71	58,44	55,54	52,21	48,64					
65	68,14	67,56	65,85	63,19	59,81	55,97	51,89					
70	73,67	72,98	70,99	67,92	64,03	59,64	55,03					
75	79,22	78,42	76,13	72,59	68,16	63,19						
80	84,80	83,89	81,28	77,26	72,27	66,73						
90	96,03	94,86	91,54	86,51	80,27	73,49						
100	107,34	105,89	101,76	95,55	88,03	79,94						
110	118,75	116,97	111,95	104,47	95,54							
120	130,22	128,09	122,10	113,27	102,85							

4. SIGURANȚA LA FLAMBAJ

Coeficientul de siguranță la flambaj c, definit de expresia

$$c = \frac{\sigma_k}{\sigma_{af}}, \tag{28}$$

unde :

σ_k — rezistența critică,

σ_{af} — rezistența admisibilă la flambaj,

avînd de înglobat [7] efectele imperfecțiunilor barei (curbură inițială și neomogenitatea materialului), precum și excentricitatea aplicării sarcinii, este o funcție de λ.

1) Dacă pentru coeficientul de siguranță, în acest caz c_1, se păstrează [8] o variație liniară dincolo de limita elastică, înseamnă că :

$$c_1 = a_3 + b_3 \lambda. \tag{29}$$

Fie c_p coeficientul de siguranță la flambajul în zona elastică (pînă la limita de proporționalitate) și c_c coeficientul de siguranță la limita convențională de curgere.

La limite expresia (29) devine :

$$c_p = a_3 + b_3 \lambda_p, \quad c_c = a_3 + b_3 \lambda_c \tag{30}$$

și făcînd înlocuirile :

$$\frac{c_1}{c_c} = \frac{\lambda_p - \lambda + \frac{(\lambda - \lambda_c)\, c_p}{c_c}}{\lambda_p - \lambda_c}. \tag{31}$$

Ținînd seama de relațiile (27), relația precedentă devine :

$$\frac{c_1}{c_c} = \frac{\left(\frac{c_p}{c_c} - 1\right) \frac{\lambda}{\pi} \sqrt{\frac{\sigma_c}{E} (k_t - k_p)} + \sqrt{k_{tp} - 1} - \frac{c_p}{c_c} \sqrt{k_t - 1}}{\sqrt{k_{tp} - 1} - \sqrt{k_t - 1}}. \tag{32}$$

2) Dacă pentru coeficientul de flambaj c_2 se păstrează o variație parabolică [9] dincolo de limita elastică, înseamnă că :

$$c_2 = a_4 + b_4 \lambda^2. \tag{33}$$

Punînd condițiile ca această curbă să treacă prin punctele limită, se obține

$$\frac{c_2}{c_t} = 1 + \left(\frac{c_p}{c_t} - 1\right) \left(\frac{\lambda}{\lambda_p}\right)^2, \tag{34}$$

unde c_t este coeficientul de siguranță la limita totală de curgere și

$$\left(\frac{\lambda_c}{\lambda_p}\right)^2 = \frac{k_p (k_t - 1)}{k_t - k_p}. \tag{35}$$

dedus din relațiile (27).

În mod analog, se deduce:

$$\frac{c_t}{c_c} = \frac{1 - \left(\frac{\lambda_c}{\lambda_p}\right)^2 \frac{c_p}{c_c}}{1 - \left(\frac{\lambda_c}{\lambda_p}\right)^2} \tag{36}$$

și făcînd înlocuirile

$$\frac{c_2}{c_c} = \frac{(k_{tp} - 1)\left[1 + \left(\frac{c_p}{c_c} - 1\right)\left(\frac{\lambda}{\lambda_p}\right)^2\right] - \frac{c_p}{c_c}(k_t - 1)}{k_{tp}(1 - k_p)}. \tag{37}$$

3) Preferăm să dăm coeficientului de siguranță, în acest caz c_3, o formă asemănătoare rezistenței critice și anume:

$$c_3 = \frac{c_t}{a_5 - b_5 \lambda^2}. \tag{38}$$

Punînd condițiile la limite: $\lambda = 0$ și $\lambda = \lambda_p$ se determină coeficienții a_5, b_5 și ecuația (38) devine:

$$\frac{c_3}{c_t} = \frac{1}{1 - \left(1 - \frac{c_t}{c_p}\right)\left(\frac{\lambda}{\lambda_p}\right)^2}. \tag{39}$$

Pentru condiția de trecere prin punctul λ_c, c_c, rezultă

$$\frac{c_t}{c_c} = \frac{1 - \left(\frac{\lambda_c}{\lambda_p}\right)^2}{1 - \left(\frac{\lambda_c}{\lambda_p}\right)^2 \frac{c_c}{c_p}}. \tag{40}$$

Făcînd înlocuirile se obține:

$$\frac{c_3}{c_t} = \frac{1}{1 - \left(1 - \frac{c_t}{c_c}\right)\left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2}. \tag{41}$$

Prin urmare

$$\frac{c_3}{c_c} = \frac{1 - \left(\frac{\lambda_c}{\lambda_p}\right)^2}{1 - \frac{c_c}{c_p}\left(\frac{\lambda_c}{\lambda_p}\right)^2 - \left(1 - \frac{c_c}{c_p}\right)\left(\frac{\lambda}{\lambda_p}\right)^2} \tag{42}$$

și ținînd seama de (35)

$$\frac{c_3}{c_c} = \frac{k_{tp}(1 - k_p)}{(k_{tp} - 1)\left[1 - \left(1 - \frac{c_c}{c_p}\right)\left(\frac{\lambda}{\lambda_p}\right)^2\right] - \frac{c_c}{c_p}(k_t - 1)}. \tag{43}$$

5. COEFICIENTUL DE FLAMBAJ φ

Coeficientul φ, care reduce problema de flambaj la o problemă de compresiune simplă, este definit de expresia:

$$\varphi = \frac{1}{\omega} = \frac{\sigma_{af}}{\sigma_{ac}} \tag{44}$$

în care:

ω — multiplicatorul de flambaj,

σ_{ac} — rezistența admisibilă la compresiune simplă definită de expresia

$$\sigma_{ac} = \frac{\sigma_c}{c_c}. \tag{45}$$

Ținînd seama de (28), (45) expresia (44) devine:

$$\varphi = \frac{c_c\,\sigma_k}{c\,\sigma_c} \tag{46}$$

și făcînd înlocuirea dată de (21)

$$\varphi = \frac{k_t \dfrac{c_c}{c}}{1 + (k_t - k_p)\dfrac{\sigma_c}{E}\left(\dfrac{\lambda}{\pi}\right)^2}, \tag{47}$$

unde, după conceptul de variație a coeficientului de siguranță ales, c se înlocuiește cu: c_1 din formulele (31) sau (32), c_2 din (36) sau (37), c_3 din (42) sau (43).

Observăm că în toate cazurile considerate, φ nu depinde de c_p independent sau de c_c independent ci numai de raportul lor c_p/c_c.

6. EXEMPLU: OȚELUL OL × 52

În acest caz, caracteristica oțelului [2] este $\sigma_c = 36$ kg/mm², iar rezistențele critice σ_{k1} în funcție de λ sînt trecute în tabelele 3, 4 și în diagramele din figurile 2, 3. Aceasta din urmă (fig. 3) este desenată la o scară mare, pentru a putea compara σ_{k1} (linie plină) cu schematizarea Tetmayer-Iasinski σ_{k2} (linie întreruptă) și racordarea prin elipsă σ_{k3} (linie punctată). Schematizarea prin drepte, acceptată de DIN, și racordarea prin elipsă, folosită de STAS, au în diagramele din figura 3 punctele particulare puțin modificate și anume: $\lambda_c = 21{,}7$, în loc de $\lambda = 20$, și $\sigma_p = 27{,}05$ kg/mm², $\lambda_p = 87{,}5$, în loc de $\sigma_e = 28{,}5$ kg/mm², $\lambda_e = 84{,}2$, încît să avem aceleași puncte particulare ca și în cazul nostru.

Tabela 5

λ	σ_{k2} [kg/mm^2]	Dif. 2 − 1 [%]	σ_{k3} [kg/mm^2]	Dif. 3 − 1 [%]	$\frac{c_1}{c_c}$	$\frac{c_2}{c_c}$	$\frac{c_3}{c_c}$	φ_0	φ_1	Dif. 0 − 1 [%]	φ_2	Dif. 0 − 2 [%]	φ_3	Dif. 0 − 3 [%]
0	36,00	−2,2	36,00	−2,2	1,000	0,974	0,982	1,000	1,022	−2,2	1,049	−4,7	1,041	−3,9
10	36,00	−1,7	36,00	−1,7	1,000	0,980	0,986	1,000	1,017	−1,7	1,038	−3,7	1,032	−3,1
20	36,00	−0,3	36,00	−0,3	1,000	0,997	0,997	1,000	1,003	−0,3	1,007	−0,7	1,006	−0,6
21,7	36,00	±0,0	36,00	±0,0	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	±0,0	1,000	±0,0	1,000	±0,0
30	34,87	−1,2	35,91	+1,7	1,051	1,024	1,016	0,939	0,933	+0,6	0,958	−2,0	0,965	−2,7
40	33,51	−2,1	35,55	+3,9	1,112	1,063	1,047	0,879	0,855	+2,8	0,894	−1,7	0,907	−3,2
50	32,15	−2,4	34,90	+6,0	1,172	1,113	1,088	0,820	0,780	+5,1	0,822	+0,2	0,840	−2,5
60	30,79	−2,2	33,88	+7,7	1,233	1,174	1,142	0,760	0,710	+7,0	0,745	+2,0	0,765	−0,7
70	29,43	−1,6	32,57	+8,9	1,294	1,246	1,214	0,695	0,642	+8,3	0,667	+4,2	0,684	+1,6
80	28,07	−0,8	30,10	+6,4	1,355	1,330	1,308	0,620	0,581	+6,7	0,591	+4,9	0,600	+3,3
87,5	27,05	±0,0	27,06	±0,0	1,400	1,400	1,400	0,537	0,537	±0,0	0,537	±0,0	0,537	±0,0

Dreapta Tetmayer-Iasinski, valabilă între limita de proporționalitate și limita convențională de curgere, s-a exprimat prin :

$$\frac{\sigma_{k2}}{\sigma_c} = 1 - \frac{1 - k_p}{\dfrac{\lambda_p}{\lambda_c} - 1}\left(\frac{\lambda}{\lambda_c} - 1\right) \tag{48}$$

care reprezintă expresia dreptei trecînd prin cele două puncte menționate.

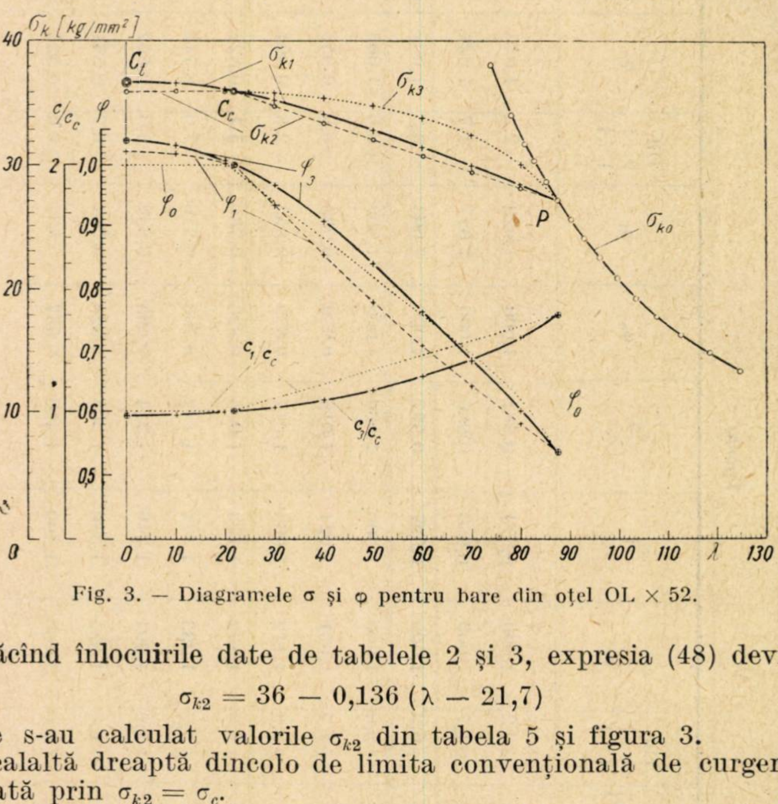


Fig. 3. — Diagramele σ și φ pentru bare din oțel OL × 52.

Făcînd înlocuirile date de tabelele 2 și 3, expresia (48) devine

$$\sigma_{k2} = 36 - 0{,}136\,(\lambda - 21{,}7) \tag{49}$$

cu care s-au calculat valorile σ_{k2} din tabela 5 și figura 3.

Cealaltă dreaptă dincolo de limita convențională de curgere este exprimată prin $\sigma_{k2} = \sigma_c$.

Expresia elipsei de racordare, care se obține punînd condițiile de racordare a elipsei, pe de o parte la hiperbola lui Euler în punctul σ_p, λ_p și de cealaltă parte la dreapta $\sigma_{k2} = \sigma_c$ în punctul σ_c, λ_c, este

$$\sigma_{k3} = \sigma_c - b_5 + \frac{b_5}{a_5}\sqrt{a_5^2 - (\lambda - \lambda_c)^2}, \tag{50}$$

unde semiaxele elipsei a_5 și b_5 sînt :

$$b_5 = \frac{\sigma_c - \sigma_p}{2}\left[1 + \frac{\sigma_p\,(\lambda_p - \lambda_c)}{\sigma_p\,(\lambda_p - \lambda_c) - \lambda_p\,(\sigma_c - \sigma_p)}\right], \tag{51}$$

$$\left(\frac{a_5}{b_5}\right)^2 = \frac{(\lambda_p - \lambda_c)\,\lambda_p}{2\,\sigma_p\,(\sigma_p - \sigma_c + b_5)}. \tag{52}$$

În cazul exemplului nostru expresia (50) devine

$$\sigma_{k3} = 23{,}54 + 0{,}1816\sqrt{4\,704 - (\lambda - 21{,}7)^2}. \qquad (53)$$

Cu această expresie s-au calculat valorile σ_{k3} din tabela 5 (fig. 3).

Comparațiile sînt puse în evidență prin diferențele în procente, dintre valorile schematizării prin drepte sau racordări prin elipsă, față de curba noastră (σ_{k1}).

Observăm că schematizarea prin drepte este acoperitoare, diferența maximă fiind în jurul valorii $\lambda = 50$, unde reprezintă 2,4%. Dincolo de limita convențională de curgere, diferența maximă este 2,2% pentru $\lambda = 0$.

Racordarea prin elipsă dă o diferență maximă în jurul valorii $\lambda = 70$, unde reprezintă 8,9%, iar siguranța nu mai este asigurată în măsura coeficientului exprimat.

Coeficientul de siguranță de variație parabolică (c_2, tab. 5), folosit de DIN, pare mai îndreptățit decît coeficientul de variație liniară (c_1, tab. 5), folosit de STAS pentru a compensa în parte siguranța descoperită, adoptînd racordarea prin elipsă.

Nu ne preocupăm aici de valorile c_c și c_p, însă păstrăm valoarea raportului $c_p/c = 1{,}4$ din STAS.

În cazul nostru, formulele (31), (35), (36) devin

$$\frac{c_1}{c_c} = 0{,}8685 + 0{,}608\,\frac{\lambda}{100}, \quad \left(\frac{\lambda_c}{\lambda_p}\right)^2 = 0{,}06125,$$

$$\frac{c_2}{c_c} = 0{,}974\left[1 + 0{,}523\left(\frac{\lambda}{100}\right)^2\right], \quad \frac{c_3}{c_c} = \frac{0{,}939}{0{,}956 - 0{,}373\left(\dfrac{\lambda}{100}\right)^2}. \qquad (54)$$

În tabela 5 sînt redate valorile rapoartelor coeficienților de siguranță, calculate cu formulele (54).

Influențele combinate ale conceptului de sarcină critică precum și aceea referitoare la coeficientul de siguranță se reflectă în curbele coeficientului de flambaj.

Am notat cu φ_0 valorile φ după STAS [2] reprezentate pe figura 3 cu linie punctată. Pentru celelalte curbe, luate în considerație pentru comparație, am folosit formula (47) din conceptul sarcinii critice, preconizat de noi care, în exemplul luat, devine

$$\varphi_i = \frac{1{,}02205\, c_c}{1 + 0{,}47\left(\dfrac{\lambda}{100}\right)^2 c_i}, \qquad (55)$$

unde indicele i se referă la conceptul de variație a coeficientului de siguranță. Valorile obținute sînt trecute în tabela 5. Pe diagramă s-au trecut, pentru a nu complica figura, numai φ_1 cu linie întreruptă și φ_3 cu linie plină.

Tot în tabela 5 sînt trecute și diferențele valorilor φ_0 față de φ_1, φ_2, φ_3 în procente, încît diferențele urmărite pe diagramă pot fi regăsite cifric în tabelă.

CONCLUZII

Acceptarea ipotezei modulului redus de variația liniară, nu numai că definește curba caracteristică, cunoscînd două puncte ale acesteia, dar este avantajoasă în problema flambajului superelastic, unde intră în formulă ca atare. Acceptarea și a ipotezei k_{t_p} constant, reduce condițiile pentru definirea curbei caracteristice la un singur punct și anume la valoarea σ_c care rămîne singura caracteristică a oțelului. În acest fel, sîntem dispensați de a cunoaște alte puncte caracteristice, pînă ce se vor putea realiza noi încercări experimentale de mare precizie.

Cu aceste ipoteze am ajuns la formula (21) care în formă reactualizează vechea formulă Rankine, părăsită în ultima vreme [10], și precizează valoarea α prin expresia (23). În fond, prin liniarizarea modulului redus E_r, s-a generalizat formula Euler, în sensul că în domeniul superelastic devine formula (21).

Luînd ca exemplu OL × 52 (fig. 3), s-a făcut comparația curbei σ_{k1} (preconizată) cu curba σ_{k2} (schematizarea prin drepte) și curba σ_{k3} (racordarea eliptică), din care rezultă că σ_{k1} se situează între cele două concepții σ_{k2} și σ_{k3}, σ_{k2} fiind mai apropiat și cu valori acoperitoare.

Luînd în considerare două concepții ale coeficientului de siguranță și anume : c_1 (liniar), c_2 (parabolic), c_3 (recomandat), se pot compara coeficienții de flambaj : φ_0 (STAS) cu φ_1 (combinația $\sigma_{k1} - c_1$) și φ_3 (combinația $\sigma_{k1} - c_3$).

Curba φ_0 prezintă acoperiri pentru λ mic și pentru $\lambda = 75 \div 80$, conducînd la subdimensionări în această parte a intervalului.

Se desprinde concluzia finală de recomandare a concepției reprezentată prin curba φ_3, a cărei formă estetică încheie confirmarea.

Chiar dacă diferențele în procente nu sînt mari, față de celelalte concepții folosite în acest interval, interesul este apreciabil, avînd în vedere întinderea considerabilă a domeniului de aplicare, fiind vorba de barele supuse la compresiune care intră în toate felurile de construcții.

Primită la redacție la 8 februarie 1963

SUR LE FLAMBAGE HYPERÉLASTIQUE DES BARRES D'ACIER

RÉSUMÉ

L'auteur reprend le problème de la courbe caractéristique hyperélastique, — étudié d'une manière fondamentale dans un article précédent [3] — en fonction des points caractéristiques et arrive à l'expression (13) de la limite conventionnelle d'écoulement.

En admettant la constance du rapport k_{tp}, entre la tension du matériel à la limite totale d'écoulement et la tension à la limite de proportionnalité, il arrive à déterminer la courbe caractéristique, tout en ne connaissant que la limite conventionnelle d'écoulement caractérisant l'acier.

En partant de ces hypothèses, il reprend le problème du flambage des barres d'acier, et arrive à la formule (21) de la tension critique hyperélastique. Les valeurs calculées des tableaux 3 et 4 sont représentées sur les diagrammes de la figure 2.

Le coefficient de sécurité au flambage est exprimé suivant diverses conceptions (31), (34), (42), et l'on arrive à la formule (47) du coefficient de flambage φ.

Par exemple, pour l'acier OL×52, l'auteur analyse la tension critique, le coefficient de sécurité et le coefficient de flambage suivant sa conception, en comparaison à d'autres conceptions similaires.

Les conclusions se rapportent surtout aux résultats de cette analyse

BIBLIOGRAFIE

1. * * * STAS 764—49, *Construcții metalice nituite. Elemente de calcul.*
2. * * * STAS—1909—54 *Turle metalice pentru foraj și producție.*
3. N. S. PÎRVULESCU, *Despre modulul de superelasticitate*. St. cerc. mec. apl. **XI**, 3 (1960).
4. * * * *Lexiconul tehnic romin*. Edit. tehnică, București, 1949, **II**, 568.
5. GH. EM. FILIPESCU, *Statica construcțiilor și rezistența materialelor*. Imprimeria națională, București, 1940, 544.
6. * * * STAS 200—61, *Încercările metalelor. Încercarea la tracțiune.*
7. * * * *Manualul inginerului petrolist. 42*, Edit. tehnică, București, 1957. 14.
8. * * * STAS 763—49, *Construcții metalice. Elemente generale de calcul.*
9. * * * DIN 1050, § 11, p. 5 (a se vedea HÜTTE) *Manualul inginerului*. Editura AGIR, București, 1947.
10. C. C. TEODORESCU, *Curs de rezistența materialelor* (ed. a II-a). Imprimeria Căilor Ferate Romine, București, 1945, 218.

MICROBETON CU LIANT EPOXIDIC PENTRU MODELE ALE CONSTRUCȚIILOR

DE

EDUARD NICOLAU[1]

691.3

În ultimii ani la INCERC s-a introdus și pus la punct metoda cercetării structurii de rezistență a construcțiilor cu ajutorul modelelor mici executate din mase plastice — mai ales plexiglas — la scări cuprinse între $\frac{1}{20}$ și $\frac{1}{50}$.

Metoda utilizării modelelor mici, avînd dimensiuni pînă la 1 m^2 prezintă o serie de avantaje față de aceea a modelelor mari $\left(\text{scara } \frac{1}{3} \div \frac{1}{5}\right)$ sau la scară naturală, în investigarea multilaterală a structurilor de rezistență privind comportarea lor sub încărcare. Fără a minimaliza aportul pe care-l aduc celelalte metode, avantajele utilizării modelelor mici ca de exemplu : costul redus al modelului, ușurința și precizia superioară ce caracterizează încercările în condiții de laborator, posibilitatea separării efectelor datorate diferitelor tipuri de solicitări, rapiditatea cu care se poate trece în încercări de la o variantă la alta a proiectului și repetarea nelimitată a încercărilor pentru a desprinde contribuția factorilor accidentali de cei permanenți asupra comportării construcției etc., fac din această metodă un auxiliar prețios de investigație științifică și un mijloc rapid, ieftin și corect de apreciere a soluțiilor tehnice îndrăznețe.

În Institutul nostru s-au făcut numeroase studii cu ajutorul modelelor mici din plexiglas [1]—[3] pentru construcții din beton armat și precomprimat, stabilindu-se pe această cale distribuția tensiunilor, a săgeților precum și alte elemente ce caracterizează comportarea sub sarcină, ca de exemplu puncte de inflexiune în cazul sarcinilor orizontale (seismice), efectul precomprimării, al introducerii unor legături suplimentare față de cele prevăzute în proiect etc.

---

[1]) Institutul de cercetări în construcții și economia construcțiilor (INCERC), București.

I. MICROBETON PENTRU MODELE. TEHNOLOGIA ŞI METODICA DE ÎNCERCARE

1. Avînd în vedere că pentru interpretarea corectă a rezultatelor încercărilor pe model, teoria modelelor stabileşte ca o condiție de similitudine corespondența afină dintre diagramele caracteristice ale betonului şi ale materialului modelului [3] şi cum această corespondență nu se realizează pentru plexiglas decît în stadiul elastic al betonului şi plexiglasului, rezultatele încercărilor de pînă acum s-au referit la acest stadiu. Studiul pe un model din plexiglas a permis deci stabilirea stării de tensiune în construcții funcționînd în stadiul elastic.

Pe baza experienței acumulate pînă acum şi ținînd seama de însemnătatea problemelor ridicate de comportarea elementelor de beton armat la rupere, s-a hotărît trecerea la modele care pot fi cercetate cu rezultate interpretabile pentru construcțiile reale, pînă se rup sub solicitarea preconizată.

Pentru realizarea unor modele utilizabile pînă la rupere s-a urmărit să se obțină un mortar care să modeleze în mod satisfăcător betonul. S-a considerat că, avînd în vedere particularitățile numeroase ale betonului şi numărul mare de factori care influențează comportarea elementelor de beton, fiecare în mod caracteristic, să se procedeze în mod treptat la obținerea unui material corespunzător. În acest sens, s-a ales ca prim criteriu cantitativ de similitudine valoarea raportului dintre rezistențele la compresiune şi întindere.

Mortarul, ale cărui caracteristici au fost studiate şi sînt prezentate în lucrarea de față, are pentru raportul dintre rezistența la compresiune şi rezistența la tracțiune valoarea stabilită experimental:

$$\frac{R_c}{R_{tr}} \cong 7$$

unde:

la compresiune $R_c = 930$ kg/cm^2 determinată pe cub

la tracțiune $R_{tr} = 131$ kg/cm^2 determinată pe cub (sarcini concentrate diametral opuse) şi verificate pe prismă încovoiată (moment încovoietor constant),

valori determinate la o vîrstă a mortarului de 15 zile cînd rezistențele s-au stabilizat în suficientă măsură. Pornind de la acest indice, a cărei satisfacere s-a considerat necesară în această etapă, deşi insuficientă pentru a asigura o modelare satisfăcătoare a betonului, s-au studiat toate proprietățile şi constantele fizico-mecanice care pun în evidență similitudinea mecanică.

Pentru obținerea mortarului prezentat s-au dat rezolvări numeroaselor probleme ce s-au pus în acest scop ca: granulometrie, liantul specific, dozajul şi influenţa sa, modul de preparare, tipurile şi dimensiunile epruvetelor, metodica de încercare, tehnica de măsurare şi înregistrarea măsurătorilor, interpretarea datelor măsurătorilor, interpretarea datelor experimentale pentru stabilirea caracteristicilor funcţionale ale mortarului.

2. *Granulometrie.* S-a considerat că scara la care se vor executa modelele va avea în general valori apropiate de 1 : 20 şi de aceea s-a apreciat că mortarul necesar unui asemenea model trebuie să reprezinte un microbeton utilizînd un agregat cu curba granulometrică dedusă prin intermediul coeficientului de scară de 1/20 din curba granulometrică cuprinsă în interiorul domeniului indicat de normele în vigoare pentru un beton bun.

S-a considerat pentru prototipul din beton un agregat avînd granulometria indicată mai jos:

sită mm	1	3	7	15	30
procente de trecere prin sită	14	26	45	81	100

Pentru agregatul mortarului s-au ales în raport cu scara 1 : 20 următoarea corespondenţă între site:

sită prototip	1	3	7	15	30
sită model	0,06	0,125	0,315	0,80	1,25

şi deci următoarea curbă granulometrică

sită mm	0,06	0,125	0,315	0,80	1,25
procente de trecere prin sită	14	26	45	81	100

Pentru obţinerea unui agregat cu caracteristicile de mai sus s-a folosit nisipul de Bragadiru (nisipul de Văleni are un spectru de dimensiuni prea îngust). Realizarea agregatului necesar a impus o cernere fracţionată. Astfel, pentru obţinerea unei cantităţi de agregat de 1,00 kg se amestecă:

— nisip de Bragadiru trecut prin sita de 1,5 şi rămas pe sita de 0,75	0,66
— idem trecut prin sita de 0,315	0,89
	Total = 1,55 kg.

din care se extrage:

0,421 kg mat. fin trecut prin sita de 0,06
0,017 kg mat. fin cuprins în domeniul 0,06÷0,125
0,112 kg mat. fin cuprins în domeniul 0,315 ÷ 0,80.
0,550 kg

3. *Liantul.* Modelarea realizată prin adoptarea unei anumite granulometrii pentru agregat impun o granulometrie şi a prafului de ciment. Considerîndu-se această condiţie ca imposibil de realizat s-a înlocuit cimentul cu un liant lichid, în speţă un adeziv de tipul unei răşini sintetice. În acest caz a fost utilizat Araldítul D care polimerizează la temperatura camerei.

4. *Dozajul.* Au fost efectuate încercări de rezistenţă pentru a se stabili contribuţia pe care o are cantitatea de liant. Dozajele utilizate la încercări au fost, pentru raportul liant-agregat în greutate: 1: 5, 1: 6, 1: 7, 1: 8, 1: 9 şi 1: 10 (fig. 1).

5. *Prepararea mortarului.* Mortarul se obţine după prepararea răşinei prin amestecarea acesteia cu agregatul, cînd fluiditatea ei a mai scăzut (procesul de polimerizare a început).

Amestecul se face astfel încît să se asigure ca fiecare granulă să fie învelită cu o pătură de liant. Turnarea mortarului în forme se începe după ce amestecul preparat a fost lăsat cîtva timp liniştit pentru ca procesul de polimerizare să mai avanseze.

Turnarea s-a făcut în straturi de 2—3 mm grosime care au fost bine bătute şi presate cu maiul. Formele (ca şi maiul) au fost din plexiglas deoarece răşina utilizată nu este aderentă la plexiglas.

6. *Tipurile şi dimensiunile epruvetelor.* Încercările pentru determinarea caracteristicilor fizico-mecanice s-au făcut pe cuburi, prisme şi cilindri.

Avînd în vedere că modelarea se va face la o scară apropiată de 1 : 20, s-au executat şi epruvetele la o asemenea scară. Astfel, cuburile utilizate au avut dimensiunile 10 × 10 × 10 mm, prismele 10 × 10 × 40 mm şi 20 × 60, iar cilindrii $\varnothing = 7{,}5$ mm.

Formele pentru turnarea epruvetelor au fost executate din plexiglas cu pereţi demontabili pentru a permite o decofrare uşoară şi fără deteriorarea epruvetelor.

7. *Metodica de încercare.* Încercările pentru stabilirea comportării microbetonului la *compresiune* s-au efectuat pe cuburi, prisme şi cilindri. Cuburile au fost solicitate în condiţiile existenţei frecărilor pe platane ceea ce s-a manifestat şi în modul de rupere (fig. 2). Rezistenţele determinate pe prisme şi cilindri au fost în general inferioare celor pe cuburi, atît datorită formei (fig. 3) (pentru prisme $h/b = 3$ sau 4 şi pentru cilindri $h/d = 2$) cît şi unei dezaxări inevitabile la o încărcare pe întreaga suprafaţă a bazelor.

Pentru a se elimina la maximum dezaxarea introdusă de apăsarea bacurilor maşinii de încercat, forţa s-a exercitat prin intermediul unui dispozitiv cu bilă (fig. 3, *c*).

Pentru *întindere* s-au folosit tot cuburi de 10 × 10 × 10 mm, comprimate diametral ca în figura 4 a căror rupere s-a produs prin întindere (fig. 4, *b*). Evaluarea întinderii se face avînd în vedere că efortul unitar

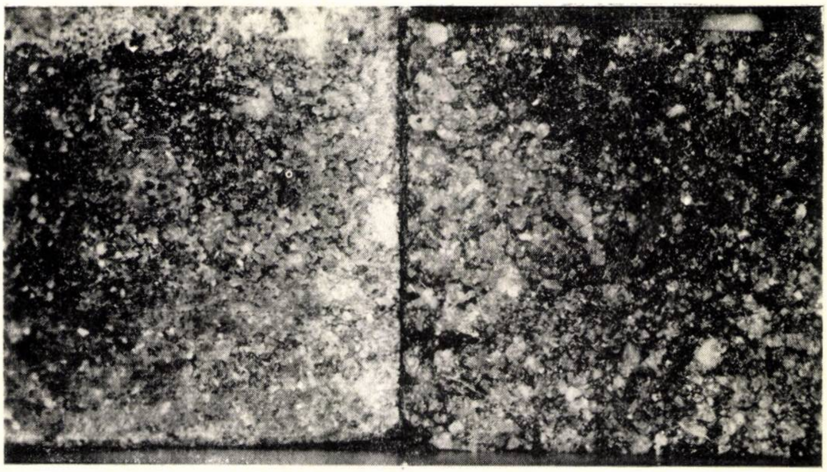


Fig. 1. — Cuburi din microbeton cu dozaje diferite.

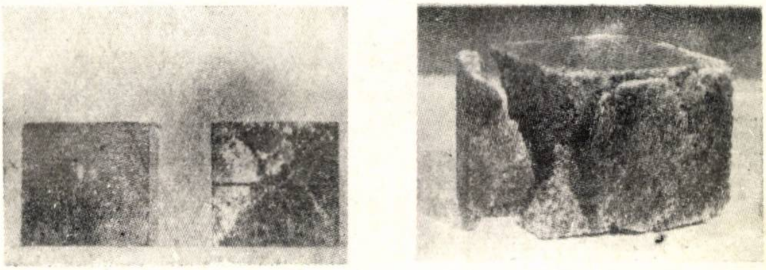


Fig. 2. — Cub din microbeton înainte de solicitare, în momentul ruperii și după distrugere.

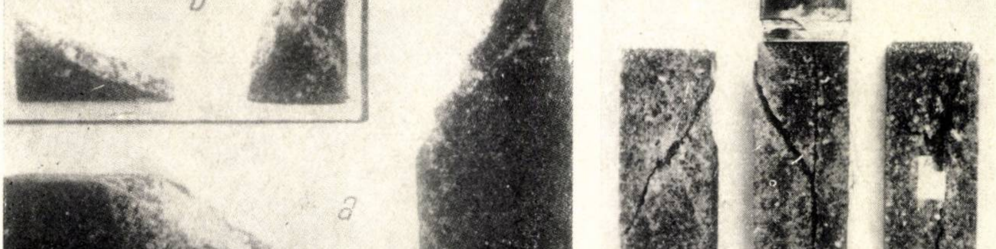


Fig. 3. — Prisme și cilindri din microbeton rupte prin comprimare.
a — prisme 10×10×30 mm ; *b* — cilindri $\varnothing = 7{,}5$, $h = 15$ mm ; *c* — prisme 20×20×60 cu dispozitive de transmitere a presiunii printr-o bilă de oțel.

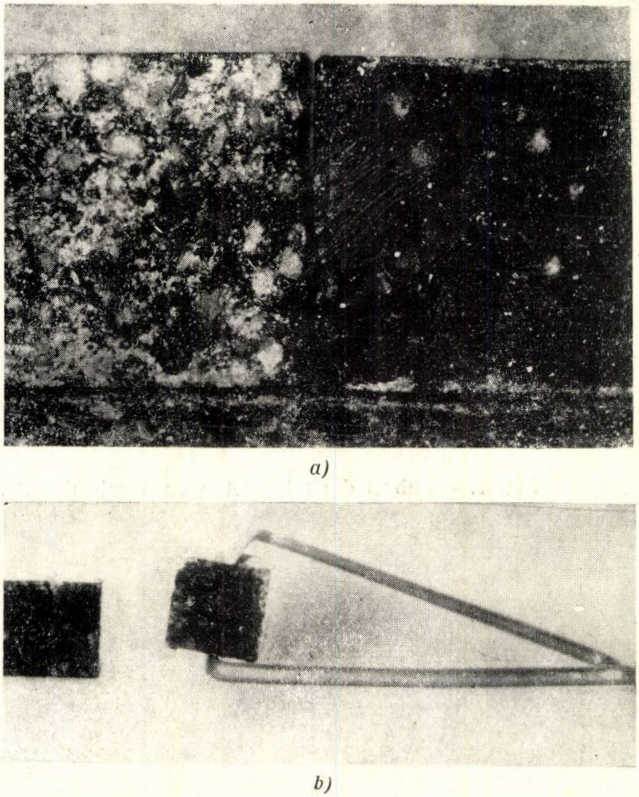


Fig. 4. — Solicitare la întindere prin despicare :
a — secţiunea despicată şi faţa cubului ; *b* — sistemul de solicitare şi cub despicat.

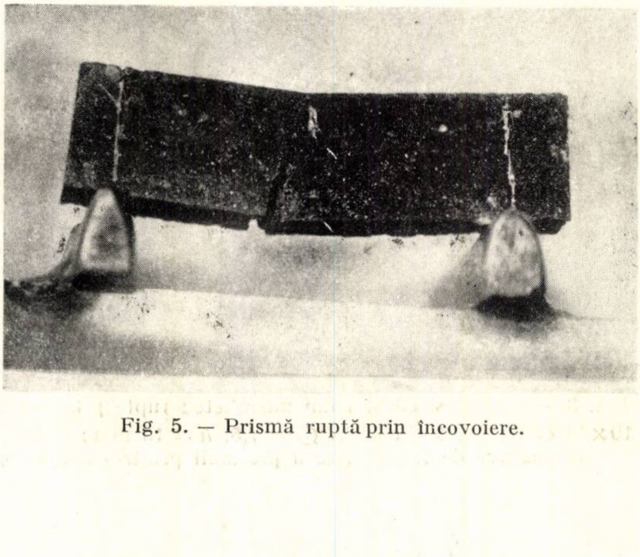


Fig. 5. — Prismă ruptă prin încovoiere.

de întindere este constant pe linia forțelor (cu excepția unor zone mici de lîngă punctele de aplicare a forțelor) și egal cu

$$\sigma_x = \frac{2P}{\pi h b},$$

unde

P este forța aplicată,
h înălțimea prismei (nu mai mare decît lățimea ei),
b grosimea prismei (pe care este aplicată forța P).

În cazul de față $h = b$.

Încercarea la *încovoiere* s-a efectuat prin două tipuri de solicitări: cu o forță la mijloc (fig. 5) și cu două forțe egale și moment încovoietor

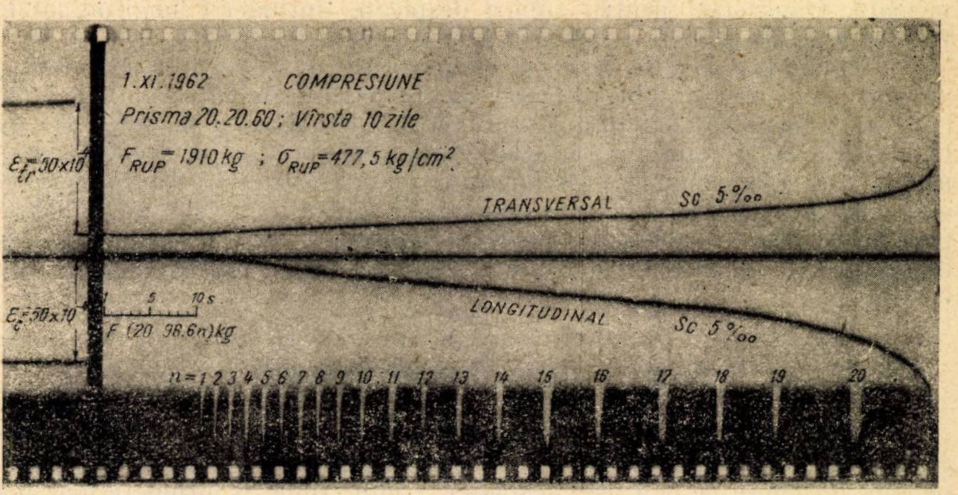


Fig. 6 *a*. — Oscilogramă cuprinzînd înregistrările deformațiilor longitudinale și transversale.

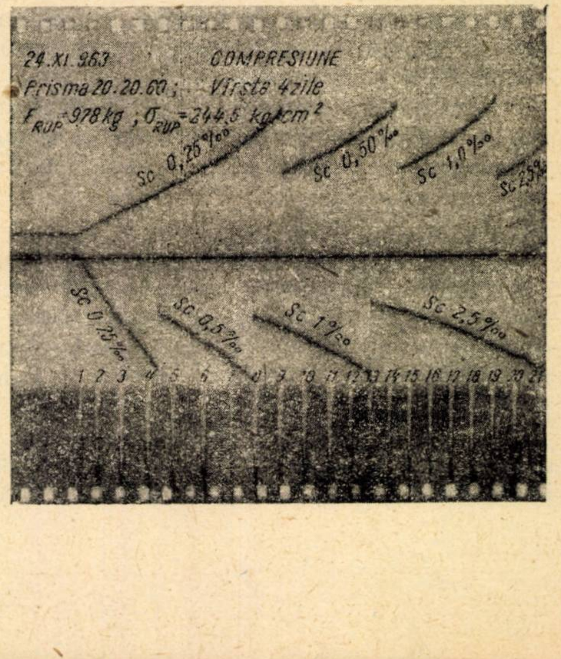


Fig. 6 *b*. — Oscilogramă cuprinzînd înregistrările variației forței.

constant, care au condus în general la rezultate destul de apropiate. Ruperea epruvetelor încovoiate s-a produs la aceleași deformații ca și cele din cazul cuburilor rupte prin întindere, ceea ce confirmă apropierea dintre valorile tensiunilor de întindere din cele două cazuri de solicitare.

8. *Tehnica de măsurare.* Solicitarea epruvetelor s-a făcut pe o mașină de încercat „Losenhausen" de tip mic, avînd scări de solicitare pentru valorile maxime 400 kg, 1 000 kg și 2 000 kg.

Pentru evaluarea deformațiilor specifice s-a folosit tensometria rezistivă cu traductori avînd baza de 6 mm. Pentru citirea deformațiilor specifice s-au utilizat punți tensometrice RFT. Înregistrarea progresivă a deformației specifice s-a făcut cu un oscilograf cu bucle RFT cu 3 canale de înregistrare plus baza de timp. În general s-au înregistrat deformații pe 1—2 canale : longitudinal și transversal pentru cuburi și prisme comprimate, transversal pentru cuburi despicate (întinderi) longitudinal la fața superioară și la fața inferioară la prismele încovoiate.

Pentru trasarea diagramelor caracteristice $\sigma - \varepsilon$ a fost conceput și realizat un sistem simplu și precis de semnalizare la intervale egale de creștere a forței de solicitare a epruvetei. Semnalizarea se înregistra pe banda pe care se imprima variația deformației specifice în dreptul deformației care-i corespundea. Oscilograma astfel obținută (fig. 6) permite evaluarea în trepte a forțelor de solicitare a epruvetei și continuu a deformațiilor specifice corespunzătoare. De asemenea, se pot evalua vitezele de încărcare, vitezele de deformare, curgerea lentă pentru încărcare de durată.

II. FENOMENOLOGIA MICROBETONULUI

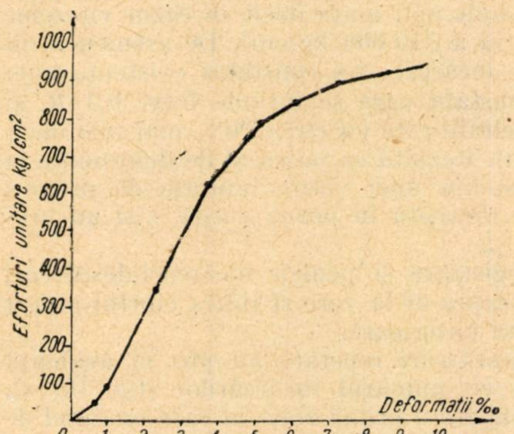
1. *Curbe caracteristice.* Încercările efectuate și înregistrările pe oscilograme au permis trasarea curbelor caracteristice pentru compresiune pe cub, întindere pe cub prin despicare, compresiune și întindere maximă pe prisme încovoiate în porțiunea momentului încovoietor constant precum și întinderea transversală care însoțește comprimarea longitudinală a cuburilor și prismelor.

În figura 7 se poate vedea că diagrama caracteristică la compresiune este foarte asemănătoare cu aceea a betonului (curba caracteristică convențională) [4]. După cum se vede, ca și la beton, coeficientul de plasticitate $\lambda = \frac{\varepsilon_p}{\varepsilon_b} = 0{,}5$.

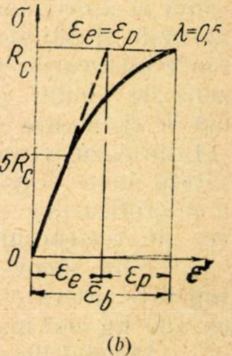
Deși diagrama prezentată aci este una reală și nu o curbă medie, așa cum era și de așteptat, nu la toate încercările s-a pus în evidență aceeași valoare $\lambda = 0{,}5$ a coeficientului de plasticitate. În general, mult mai des coeficientul de plasticitate a depășit valoarea 0,5 ajungînd la 0,7 și numai rar a rămas la 0,4. Și la beton coeficientul de plasticitate atinge 0,8 pentru cimenturi belitice, cu adaosuri.

De asemenea, nici porțiunea liniară din diagrama prezentată nu a apărut de aceeași lungime la toate încercările, iar limita de proporționalitate era în general mai mare decît 0,5 R_c(R_c=rezistența la compresiune).

Modulul de elasticitate obținut la numeroase încercări a gravitat în majoritatea cazurilor în jurul valorii de 190 000 kg/cm^2 cu abateri de $\pm 15\%$.



(a)



(b)

Fig. 7. — Curba caracteristică a deformației microbetonului la compresiune (a) și curba caracteristică convențională a betonului (b).

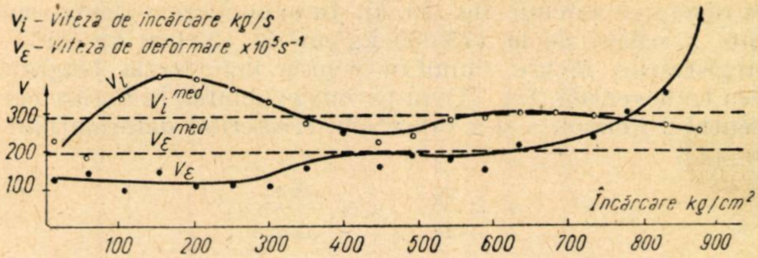


Fig. 8. — Variația vitezei de încărcare $\dot{\sigma}$ și a vitezei de deformare $\dot{\varepsilon}$ cu creșterea sarcinii, în cazul vitezei mari de încărcare.

În general, viteza obișnuită de încărcare a fost de aproape $\dot{\sigma} = 10$ kg/cm^2/s, iar viteza medie de deformare de $\dot{\varepsilon} = 6 \cdot 10^{-5}\text{s}^{-1}$. S-au făcut însă încercări și s-au trasat diagrame pentru viteze mai mici și mai mari decît cea normală. Vitezele cele mai mici de încărcare și de deformare realizate au fost de $\dot{\sigma} = 2$ kg/cm^2/s și $\dot{\varepsilon} = 1 \cdot 10^{-5}\text{s}^{-1}$. Pentru viteze mari s-au realizat în medie valorile : $\dot{\sigma} = 300$ kg/cm^2/s și $\dot{\varepsilon} = 200 \cdot 10^{-5}\text{s}^{-1}$. În general, a fost imposibil să se mențină o viteză constantă de încărcare, deoarece în cazul vitezelor mici reglarea se făcea vizual după rotirea acului indicator de forță, iar la viteze mari se declanșa creșterea forței cu viteza maximă permisă de mașină, iar viteza realizată depindea de corelația dintre cei doi factori : puterea mașinii și deformabilitatea epruvetei. Diagramele de variație a vitezei de încărcare paralel cu creșterea încărcării (fig. 8) arată că vitezele sînt la început mai mari decît valoarea medie cu circa 30% și apoi pe la o încărcare de 0,5 R_c viteza scade sub valoarea medie pentru ca apoi să se stabilizeze.

Încercările făcute cu vitezele menționate mai sus au pus în evidență faptul că la viteze mari modulul de elasticitate în prima parte a diagramei (pînă la aproximativ 0,5 R_c) este mult mai mare decît în cazul vitezelor normale și anume are valori în jurul a 340 000 kg/cm². De asemenea, în toate încercările cu viteză mare de încărcare s-a constatat existența unei zone de modul de elasticitate constant care se întinde între 0,4 R_c și 0,8 R_c și în care modulul de elasticitate este cu circa 20% mai mic decît cel din cazul vitezei normale (fig. 9). Rezultă că procesul de deformație la viteză mare implică pe lîngă existența unei viteze limitate de progres a microfisurilor — viteză care este depășită în prima etapă — și un proces de restructurare.

S-au făcut încercări cu înregistrare și pentru încărcări-descărcări repetate. Fiecare nouă încărcare începea de la zero și ridica efortul unitar cu 100 kg/cm² mai sus decît treapta anterioară.

Încercările cu încărcări și descărcări repetate au pus în evidență variația modulului de elasticitate cu numărul încărcărilor (fig. 10, *a*). Se vede că la încercarea cuburilor apare o primă zonă în care modulul de elasticitate este mic și crește repede — pînă la 200 kg/cm² — după care încărcarea n-a modificat sensibil modulul de elasticitate. Comprimarea pe prisme 1 : 3 a pus însă bine în evidență descreșterea modulului de elasticitate cu repetarea sarcinii (fig. 10, *b*). În experiențele făcute, modulul de elasticitate a scăzut de la 175 000 kg/cm² la 120 000 kg/cm².

Înregistrările făcute simultan pentru deformația longitudinală și pentru cea transversală (fig. 11) au permis evaluarea în fiecare caz în parte a coeficientului Poisson ν și a raportului creșterilor deformațiilor μ (conform cu [4]):

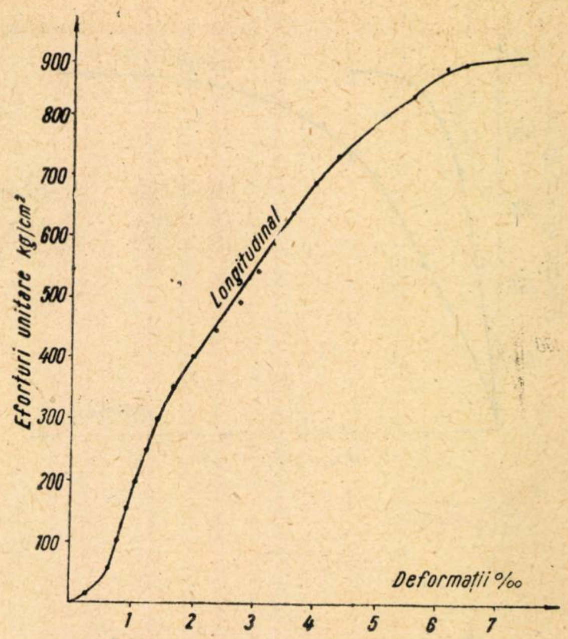
$$\nu = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}, \quad \mu = \frac{\Delta\, \varepsilon_2}{\Delta\, \varepsilon_1}.$$

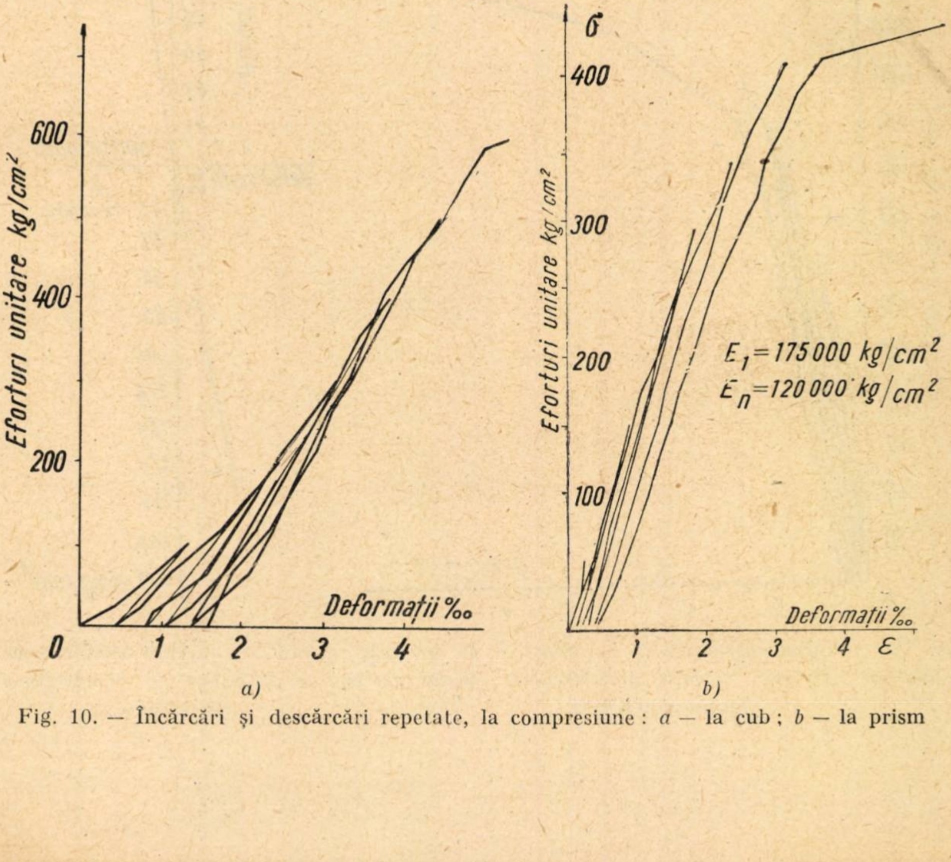
În general, valorile obținute au fost cam împrăștiate găsindu-se valori între 0,10 și 0,33 pentru domeniul de încărcare pînă la 80% din sarcina de rupere. La unele încercări de compresiune pe prisme s-au obținut în mod constant valori cuprinse între 0,175 și 0,200. Desigur că în apropierea ruperii atît ν cît și μ creșteau mult, uneori depășind valoarea de 0,5.

Curbe caracteristice au fost trasate și pentru întindere la cuburi comprimate și rupte prin despicare așa cum s-a arătat mai sus. În figura 12 se poate urmări variația deformației de întindere. Se poate de asemenea constata că prin repetarea încercării modulul de elasticitate la întindere a scăzut de la 175 000 kg/cm² la 113 000 kg/cm². În orice caz se constată că valoarea medie a modulului de elasticitate la întindere este, ca și în cazul betonului, inferioară celei de la compresiune. Unele încercări au condus la valori ale modulului de elasticitate la întindere chiar mai mici decît 100 000 kg/cm².

Încercările executate pe prisme încovoiate cu înregistrarea simultană a întinderii și compresiunii au pus în evidență (fig. 13) creșterea deformațiilor proporțional cu creșterea momentului încovoietor, deci în general o comportare aparent elastică. Încercările efectuate însă cu repetarea încărcării

Fig. 9. — Curba caracteristică la compresiune în cazul vitezelor mari de încărcare, a căror diagramă de variație este dată în figura 8.

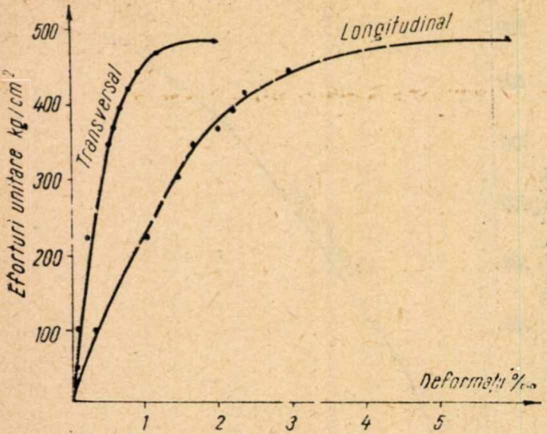




a) b)

Fig. 10. — Încărcări și descărcări repetate, la compresiune : *a* — la cub ; *b* — la prism

Fig. 11. — Comprimarea unei prisme 1 : 3, deformaţie longitudinală şi transversală.



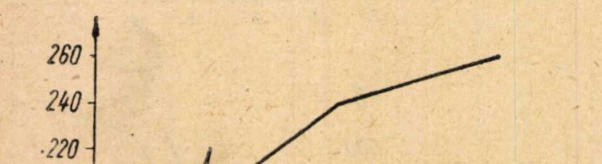


Fig. 12. — Curba caracteristică la întindere cu încărcări-descărcări repetate; variaţia modulului de elasticitate la întinderi repetate.

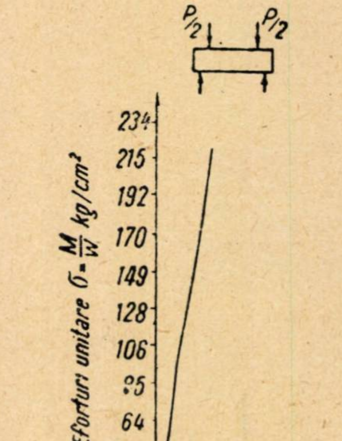


Fig. 13. — Curba caracteristică la întindere şi compresiune din încovoiere.

scot la iveală deformarea vîscos-plastică în zona întinderii. În figura 14 sînt prezentate diagramele de deformare pentru două moduri de realizare a încovoierii și se poate constata că în timp ce deformarea în zona comprimată este complet elastică, eforturile unitare fiind cu mult inferioare limitei convenționale de proporționalitate, la întindere deformarea remanentă crește cu fiecare reîncărcare iar panta traiectoriei de încărcare corespunzătoare modulului de elasticitate scade. Se poate totodată observa că ordinul de mărime al deformației de întindere la rupere este același cu cel obținut pe epruvetele rupte prin întindere realizată prin despicare (fig. 12),

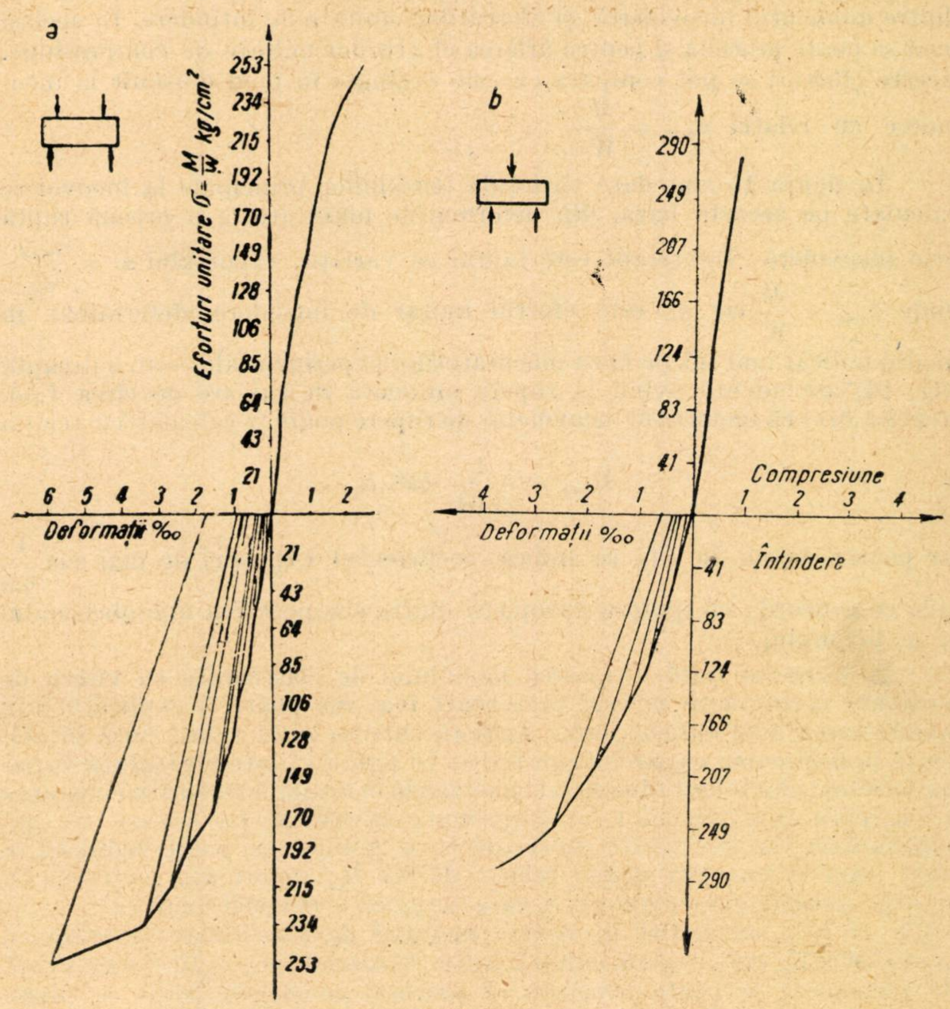


Fig. 14. — Curbe caracteristice la întindere și compresiune din încovoiere, cu încărcări-descărcări repetate.

ceea ce vine în sprijinul echivalenței celor două solicitări de întindere. Pornind de la deformațiile de întindere măsurate pe prisme încovoiate și utilizînd curba caracteristică, se poate trasa o curbă indicînd corespondența dintre momentul încovoietor și eforturilor unitare de întindere. În același mod se poate proceda și pentru aflarea eforturilor unitare de compresiune. Aceste eforturi se pot compara cu cele evaluate în mod obișnuit la încovoiere cu relația $\sigma_{max} = \frac{M}{W}$.

În figura 15 sînt date variațiile tensiunilor principale la încovoiere calculate pe această bază, din deformațiile măsurate la o prismă ruptă prin încovoiere. Interesant este faptul că variația raportului $\alpha = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_{tr}}$, unde $\sigma_{max} = \frac{M}{W}$ iar σ_{tr} este efortul unitar de întindere determinat în modul indicat mai sus pe baza măsurătorilor experimentale, este o dreaptă (fig. 16) ascendentă avînd la rupere ordonata în valoare de circa 1,65. Rezultă deci că momentul încovoietor de rupere poate fi calculat cu relația

$$M_{rup} = \frac{1}{3{,}64}\, bh^2\, R_{tr}$$

iar pentru beton în [4] se indică coeficientul expresiei de mai sus $\frac{1}{3{,}5}$ ceea ce concordă cu ipoteza apropierii dintre comportarea microbetonului și a betonului.

2. *Curgerea lentă.* Creșterea modulului de elasticitate cu viteza de încărcare menționate în cele prezentate mai sus poate fi explicată prin manifestarea unei curgeri lente. Această curgere lentă a fost pusă în evidență la încărcarea cu sarcini constante. În figura 17 este prezentată variația deformațiilor longitudinale și transversale în timpul menținerii constante a încărcării la o prismă 1 : 3 comprimată în trepte. La fiecare treaptă încărcarea a fost menținută constantă 5—6 minute. Se poate vedea că în acest timp la un efort unitar relativ de 0,7 R_{tr} deformația a crescut cu 5—6%. Aceasta corespunde la o caracteristică a curgerii lente [4]: $\varphi_t = 1{,}7 \cdot 10^{-4} \cdot t_{sec}$ sau avînd în vedere modulul de elasticitate instantaneu $E = 175\,000$ kg/cm², măsura curgerii lente [4] este deci $C_t = 10^{-9} \cdot t$ kg.s/cm². De asemenea, se poate constata că procesul de curgere lentă se manifestă printr-o creștere a coeficientului Poisson explicabilă prin faptul că deformația de întindere (transversală) are și caracterul unei deformații plastice.

Curgerea lentă a fost urmărită și la deformarea unei prisme supuse la încovoiere. În figura 18 se poate urmări cum au variat deformațiile de întindere la încovoiere atît în timpul creșterii încărcării cît și în timpul menținerii ei constante (la fiecare treaptă circa 1 minut).

De asemenea se poate urmări în figura 19 variația și creșterea vitezei de deformare atît la întindere cît și la compresiune. Se constată că începînd de la $M = 0{,}85\ M_r$ viteza de deformare la întindere crește foarte repede în legătură cu apropiata rupere. Se constată cu această ocazie și o accelerare a deformației la compresiune, explicată desigur printr-o de-

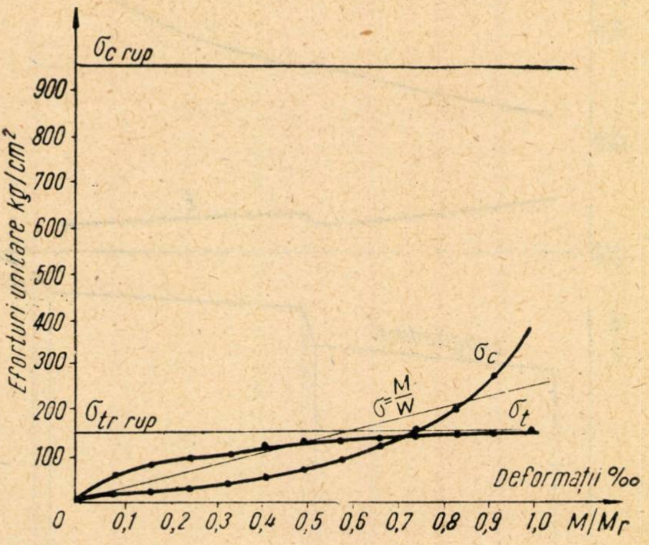


Fig. 15. — Variația eforturilor unitare de compresiune și întindere la încovoiere.

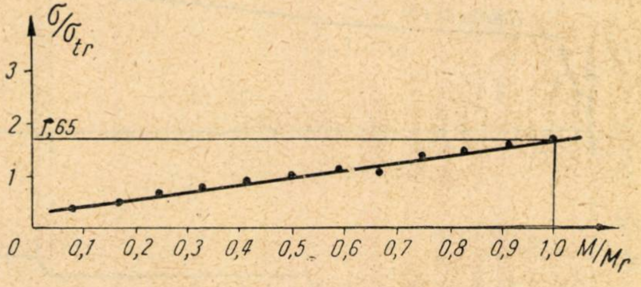


Fig. 16. — Comparație între efortul unitar de întindere din încovoiere stabilit pe cale experimentală și cel calculat cu relația $\sigma_{max} = \frac{M}{W}$.

plasare a axei neutre și limitarea capacității de rezistență a prismei la întindere.

În ceea ce privește modulele de elasticitate aparente, se poate constata și aci că modulul de elasticitate la întindere chiar și în condițiile curgerii lente este inferior celui de la compresiune (fig. 20).

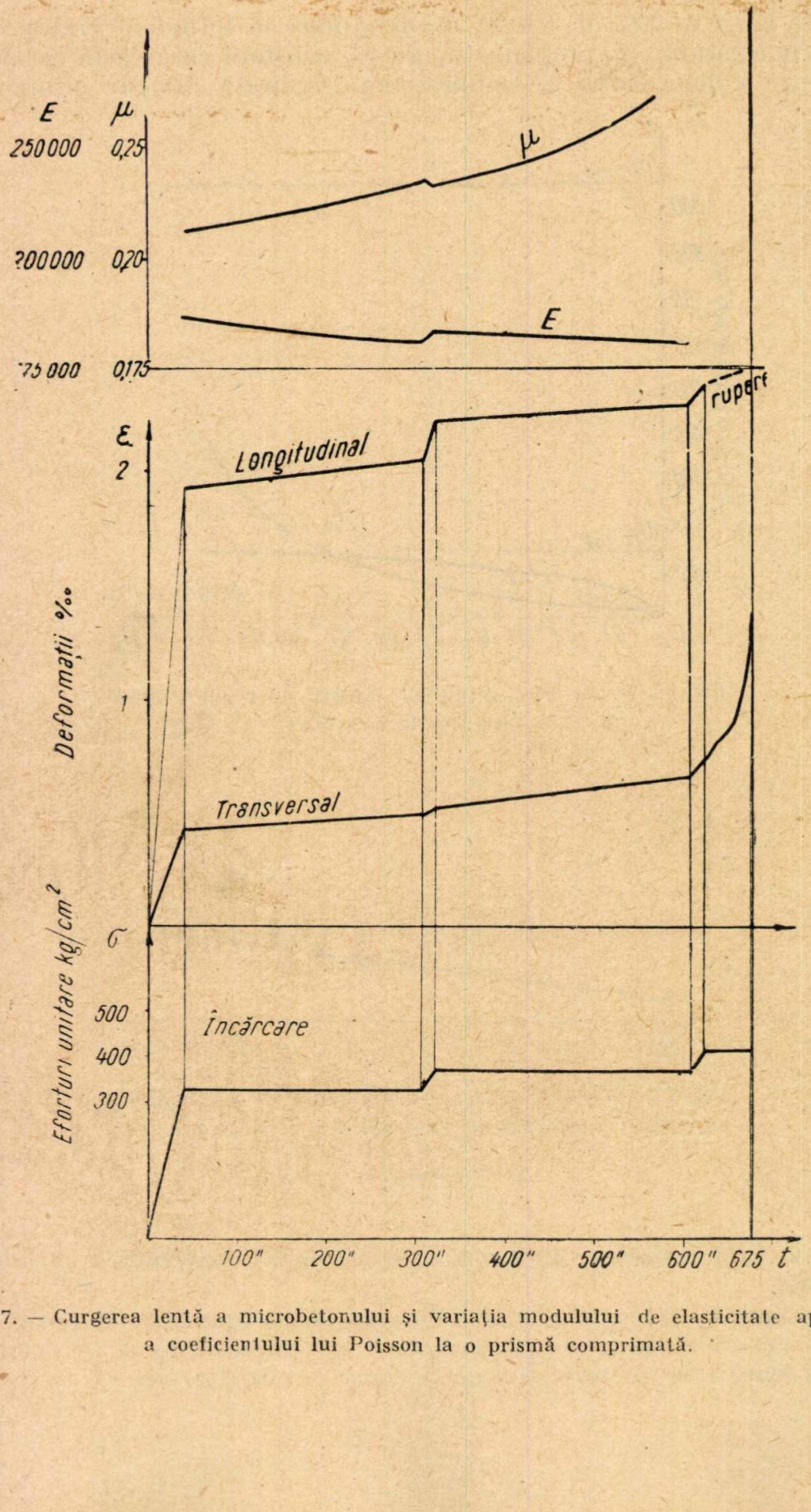


Fig. 17. — Curgerea lentă a microbetonului și variația modulului de elasticitate aparent și a coeficientului lui Poisson la o prismă comprimată.

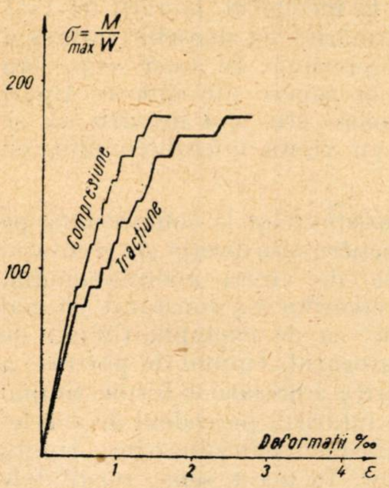


Fig. 18. — Deformaţia de întindere şi de comprimare prin încovoiere. Sarcina creşte în trepte şi la fiecare treaptă este menţinută constant circa 1 minut.

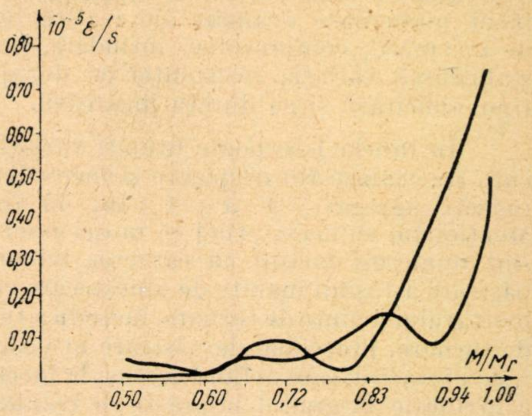


Fig. 19. — Variaţia vitezelor de deformare la întindere şi compresiune cu creşterea momentului încovoietor.

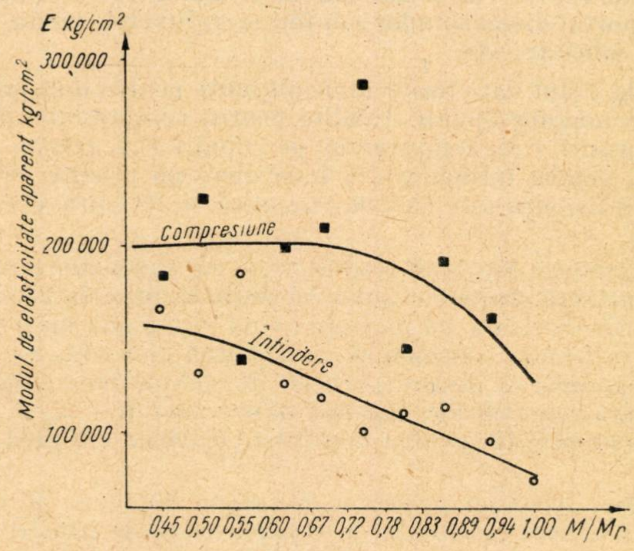


Fig. 20. — Variaţia modulului de elasticitate aparent la aceeaşi prismă ca la figurile 18 şi 19.

Efectul curgerii lente s-a manifestat, aşa cum se va arăta mai departe, şi în variaţia rezistenţei de rupere precum şi în variaţia săgeţii unei pînze subţiri încărcată cu o greutate constantă.

3. *Rezistențe.* Așa cum s-a menționat la începutul lucrării de față una dintre caracteristicile microbetonului urmărită cu deosebit interes a fost raportul rezistențelor la întindere și compresiune. În acest scop, s-au făcut numeroase evaluări ale rezistențelor la rupere din diferite tipuri de încercări: compresiune, întindere, încovoiere etc. S-a urmărit să se stabilească variația rezistenței cu dozajul, cu vîrsta microbetonului, cu tipul solicitării și cu durata încărcării.

În tabela 1 se poate urmări variația rezistențelor la compresiune pe cub, tracțiunea din despicare și încovoiere pentru șase dozaje (în greutate) rășină : agregat = 1 : 5 ÷ 1 : 10, în funcție de vîrsta microbetonului. Menționăm cu acest prilej că în decursul încercărilor s-a constatat că mai sînt numeroși factori cu caracter tehnologic, ca de exemplu timpul de păstrare a rășinii înainte de amestecare cu agregatul, timpul de păstrare a mortarului înainte de turnare, metodica turnării și a presării în forme, timpul de turnare, procedeul de păstrare în vederea întăririi, procedeul de accelerare a întăririi, care nefiind aceeași la încercările făcute au adus o importantă contribuție la gradul împrăștierii rezultatelor. În acest sens, rezultatele prezentate în aceste tabele sînt orientative cu privire la ordinul de mărime al valorilor ce exprimă diferențe calitative între dozaje, vîrste și tipuri de solicitare. Regularitățile constatate în aceste încercări, cu toate deosebirile de condiții, ne asigură că un studiu sistematic și diferențiat va permite obținerea unui microbeton cu rezistențe caracteristice fixate anterior. De asemenea, se vor putea stabili relații între rezistența microbetonului și raportul dimensiunilor sau forma epruvetei, vîrsta, dozajul sau condițiile de solicitare etc.

În tabela 2 sînt date rezistențele obținute pentru dozajul 1 : 5 la diferite vîrste ale microbetonului stabilite pentru compresiune pe cub, compresiune pe prismă 1 :4, compresiune pe cilindri 1 :2, pentru întindere pe cub despicat, pentru întindere din încovoiere pe prismă. Se vede că la compresiune rezistența este cu atît mai mică cu cît epruveta are o formă mai alungită.

Din diagramele variației rezistențelor cu vîrsta mortarului (fig. 21) rezultă că rezistența crește continuu cel puțin în primele 17 zile de la turnare. Încercările efectuate cu mortare avînd vîrste mai mari de două luni au arătat că rezistența continua să crească însă mai lent. Se poate totuși observa pe diagrame că deși rezistențele de compresiune și întindere continuă să crească raportul lor, *raportul rezistențelor* $R_c : R_{tr}$ *se menține constant la valoarea de 7,10* (pentru dozajul 1 : 5) chiar începînd de la vîrsta de 7 zile.

S-au făcut încercări pentru a desprinde influența pe care o are curgerea lentă asupra rezistenței la rupere. Se poate urmări în figura 22 cum pentru sarcini de durată mergînd pînă la 424″ rezistența unui microbeton în vîrstă de două zile scade de la 350 kg/cm^2 la 150 kg/cm^2.

4. *Elemente constructive din microbeton armat.* În lucrarea de față nu sînt prezentate rezultate privind valoarea aderenței microbetonului cu armătura, această problemă urmînd să fie studiată în viitor. Încercări preliminare au fost însă făcute, constatîndu-se o bună aderență cu sîrma

Tabela 1

Vîrsta în zile	Rezistența cubică la compres. [kg/cm²]						Rezistența cubică la tracțiune [kg/cm²]						Rezistența prismei la încovoiere [kg/cm²]					
	Dozaj						Dozaj						Dozaj					
	1 : 5	1 : 6	1 : 7	1 : 8	1 : 9	1 : 10	1 : 5	1 : 6	1 : 7	1 : 8	1 : 9	1 : 10	1 : 5	1 : 6	1 : 7	1 : 8	1 : 9	1 : 10
1	374	313	335	308	312	—												
2	—	395	406	382	413	62												
3	530	324	480	461	—	98												
4	616	—	431	429	—	114												
5	632	—	—	434	464	93	92			27		15	157			117		32
6	702	518	—	—	574	140	96				62	20					147	
7	643	472	574	—	417	111	74	56			70	22		116				
8		603	516	478		—	72	47	62				219		106			
9			567	543		—			35	34						121		
10						192				58								
11												27						49
12												35						
13							47											

Tabela 2

Rezistențe ale mortarului cu dozaj 1 : 5

Vîrsta în zile	R_c pe cub [kg/cm^2]	R_{tr} pe cub [kg/cm^2]	R_c pe prismă [kg/cm^2]	R_c pe cilindru [kg/cm^2]	R_{inc} pe prismă [kg/cm^2]
4	681 675 678	85 77 83	432 402	478 435	225 198
5	712 696 715	113 106	472 503	507 515	233 234
6	809 759 794	115 103	533	615 479 590	208 221
7	765	110			257
10	805		609		253 217 283
12	881 892	90	700		
14	920 865 931	158 146			
17	975	132			

de oțel moale subțire (0,5 mm). Aceasta a permis să se treacă la executarea unui element din microbeton armat pentru a se stabili tehnologia de execuție a unor modele la o scară de aproximativ 1 : 20. În acest scop, s-a turnat o placă în formă de paraboloid hiperbolic de dimensiuni 50 × 50 cm și de grosime 3 mm, armată cu o rețea de sîrmă de oțel moale cu ochiuri de 1 cm^2. Microbetonul s-a turnat peste un mulaj de ipsos (fig. 23) avînd forma respectivă și acoperit cu fîșii de plexiglas. Plexiglasul era necesar deoarece o primă turnare făcută direct pe mulaj n-a reușit fiindcă umiditatea ipsosului a inhibat procesul de polimerizare și microbetonul nu s-a mai întărit. Înainte de turnare plasa de sîrmă a fost bine întinsă, fiecare fir fiind fixat la capăt. Grosimea constantă a plăcii de microbeton s-a asigurat cu martori etalonați din plexiglas de 3 mm care apoi, cînd turnarea depășea vecinătatea lor, erau scoși și locul lor umplut cu mortar la același nivel.

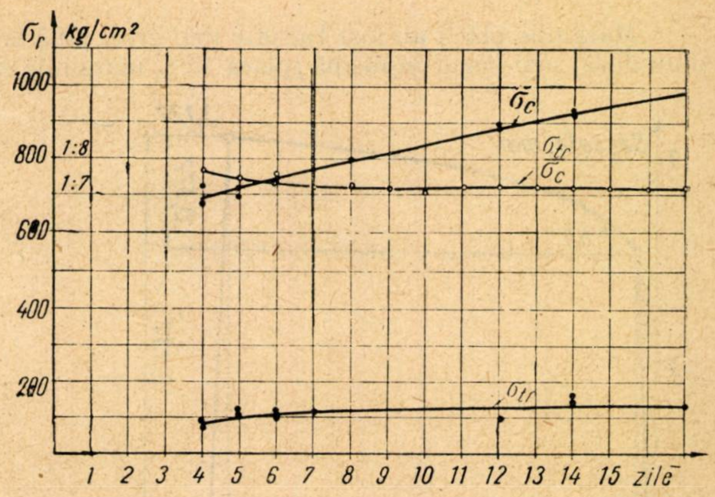


Fig. 21. – Variaţia rezistenţelor la compresiune, întindere şi a raportului lor, cu vîrsta mortarului (dozaj 1 : 5).

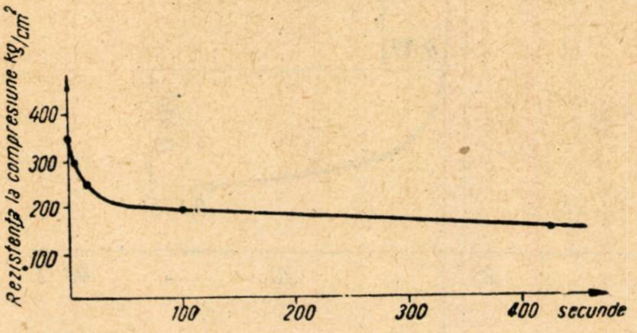
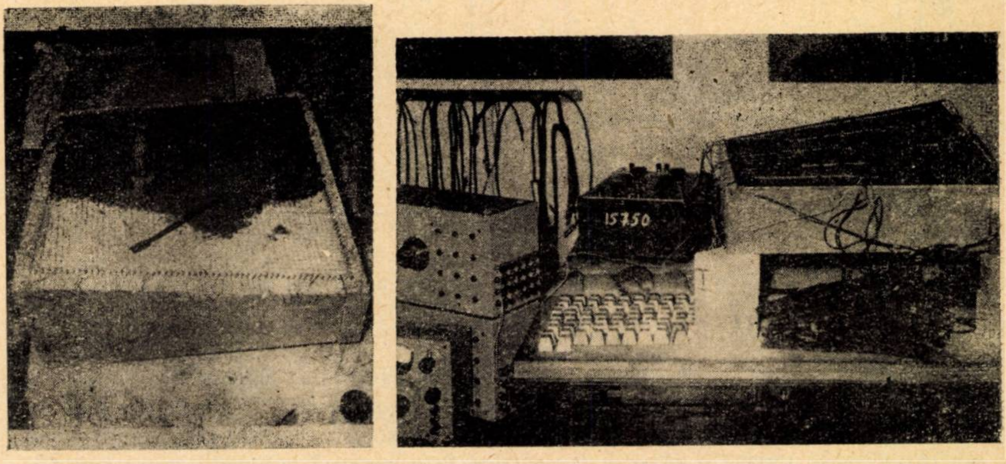


Fig. 22. – Variaţia rezistenţei la rupere prin compresiune la încărcări de durată.



a) b)

Fig. 23. – Turnarea (*a*) şi încercarea (*b*) unei plăci din microbeton de 3 mm grosime în formă de paraboloid hiperbolic.

Marginile plăcii au fost turnate mai gros, pînă la 8 mm, folosindu-se şi un dozaj mai bogat în răşină (placa 1 : 8, marginile ei 1 : 5).

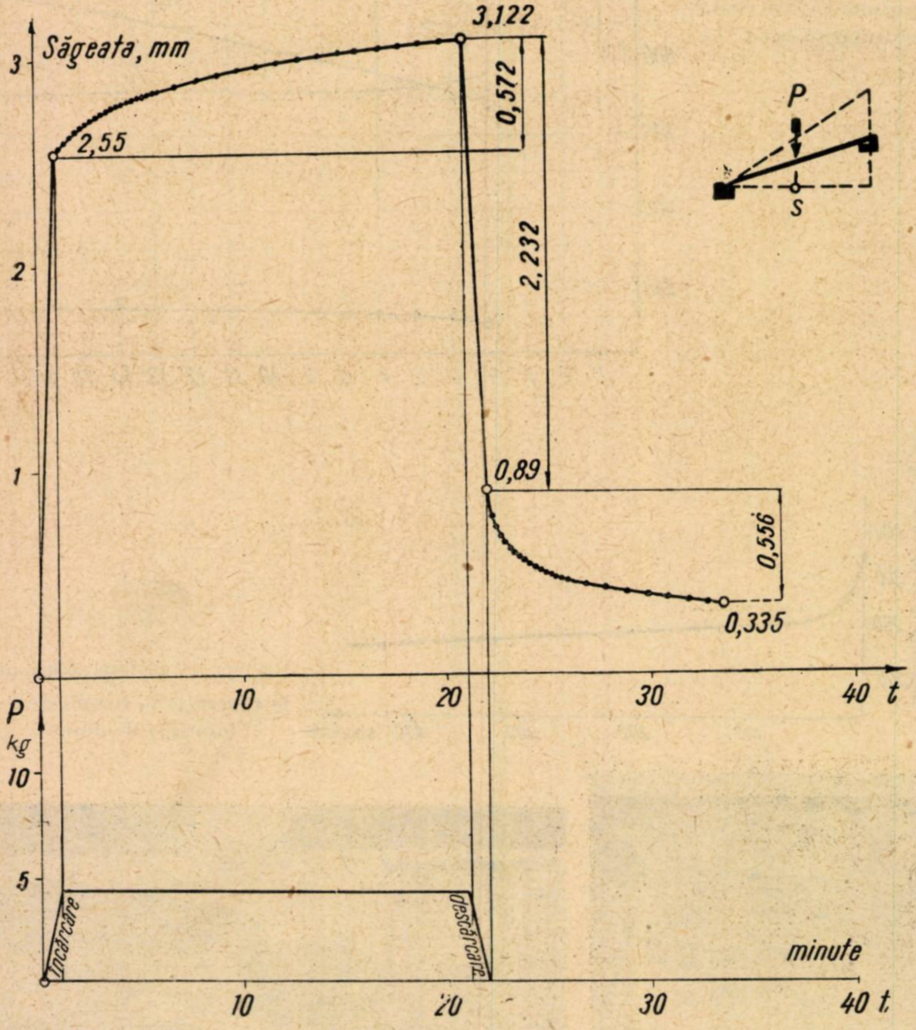


Fig. 24. — Variaţia în timp a săgeţii din mijlocul plăcii sub încărcare constantă şi după descărcare.

Placa a fost încercată la o încărcare producînd deformaţii elastice. Analiza rezultatelor precum şi studiul comportării ei dincolo de stadiul elastic va constitui subiectul unei cercetări separate. Menţionăm însă că s-a înregistrat variaţia săgeţii din mijloc la o sarcină centrală concentrată. Diagrama de variaţie a acestei săgeţi prezentată în figura 24 reproduce calitativ curba cunoscută a deformaţiei betonului sub o încărcare de durată [4]. Acest rezultat deschide perspectiva determinării formelor deformate ale unei construcții din beton datorite curgerii lente. Principalul avantaj ce rezultă de aici constă în faptul că deformația limită, care la beton se atinge în 3—4 ani, la microbetonul cu liant epoxidic prezentat în lucrarea de față se atinge în circa o oră. Studiul consecințelor statice și geometrice ale curgerii lente se va putea face într-un timp mult mai scurt. Desigur că este necesar în prealabil să se stabilească printr-un studiu adecvat corespondența punctuală între curbele de deformare la beton și la microbetonul cercetat, și pe această bază să se determine o scară de similitudine a timpurilor și una a săgeților cu ajutorul cărora să se poată trece direct de la săgețile măsurate pe model la un moment determinat la săgețile probabile ale construcției după un timp bine definit de la intrarea în funcțiune a construcției.

III. CONCLUZII

Cercetările, ale căror principale rezultate sînt prezentate în lucrarea de față, au avut ca obiectiv să studieze posibilitatea preparării unui material pentru executarea modelelor mici ale construcțiilor cu care să se stabilească comportarea acestor construcții dincolo de stadiul elastic, în stări limită.

Un astfel de material care prezintă suficiente proprietăți asemănătoare cu ale betonului este microbetonul avînd ca liant rășina epoxidică.

Microbetonul are curbe caracteristice la compresiune și întindere foarte asemănătoare cu ale betonului în ceea ce privește întinderea domeniului de proporționalitate, constantele elastice, forma curbei în zona deformațiilor elasto-plastice, coeficientul de plasticitate și manifestă același caracter vîscos-plastic al deformațiilor. Curgerea lentă a microbetonului oglindește manifestarea aceluiași fenomen la beton și influența pe care o are asupra variației modulului de elasticitate și coeficientului lui Poisson.

Astfel, viteza mare de încărcare duce la creșterea modulului de elasticitate, iar repetarea încărcării — descărcării conduce la micșorarea acestuia. Comportarea similară a celor două materiale se manifestă și în evaluarea momentului de rupere la încovoiere, care se face cu o formulă foarte apropiată de cea din cazul betonului. De altfel, caracterul ruperii, variația rezistențelor la compresiune, întindere și încovoiere corespund în mare măsură celor de la beton. Curgerea lentă se manifestă în mod similar la variația rezistențelor de rupere prin coborîrea valorilor lor în cazul încărcărilor de durată. Ca și la beton, în cazul microbetonului are loc un proces continuu de întărire care se manifestă prin creșterea rezistențelor (și probabil și a modulelor de elasticitate).

În ceea ce privește modelarea betonului armat, menționăm doar că aderența cu sîrmele de oțel moale permite să se stabilească și în această direcție caracteristicile unei similitudini.

Desigur că natura diferită a liantului face ca să existe și deosebiri esențiale între cele două materiale. Cele mai importante par a fi cele care se referă la rolul microfisurării gelului din piatra de ciment, pentru care nu se poate încă spune dacă există un echivalent satisfăcător, și la influența umidității. Examenul la microscop al microbetonului arată clar că agregatul este într-adevăr ,,înghețat'' într-o masă rășinoasă care cuprinde evident și goluri. Nu se poate însă spune ce efect au aceste porozități la solicitările mari locale, dacă ele conduc la propagarea microfisurilor sau la deformări locale elastice cu elasticitate neliniară sau cu deformații relativ mari. S-a putut constata însă că în procesul de rupere, ruperea propriu-zisă este precedată — de exemplu la cuburile comprimate — de conturarea planurilor de clivaj prin albirea locală a microbetonului. Examenul la microscop al acestei zone înainte de distrugerea cubului, cînd el mai manifestă încă rezistența maximă, arată că aci există o porozitate foarte accentuată. De asemenea, umiditatea nu poate să joace nici pe departe rolul pe care îl are în cazul pietrei de ciment deoarece rășina după polimerizare pare insensibilă la prezența apei. Totuși o asemenea cercetare ar fi necesară pentru că nu se poate spune nimic încă în legătură cu efectul de durată al apei.

Toate aceste deosebiri care sînt esențiale nu reduc totuși eficacitatea microbetonului ci doar o condiționează.

Cercetările întreprinse pînă acum și rezultatele obținute permit să se tragă concluzia că *microbetonul prezintă suficiente elemente și proprietăți structurale care să permită utilizarea sa în problemele similitudinii pentru construcțiile din beton armat.*

Primită la redacție la 21 ianuarie 1963

RESIN MICROCONCRETE WITH EPOXY BINDER FOR CONSTRUCTION MODELS

ABSTRACT

The paper presents results of the investigations carried out at the Research Institute for Constructions and Economy of Constructions in view of obtaining models for studying their behaviour at various limit states up to failure.

The main characteristics of a microconcrete using an epoxy resin which hardens at room temperature are shown. The microconcrete has characteristic curves in compression and tension similar to those of the concrete as regards the extension of the proportionality domain, the elastic constants, form of the test diagram of the state of elasto-plastic strains, plasticity coefficent and manifests the same visco-plastic character of the strains. The creep of the microconcrete reflects the manifestation of the same phenomenon in concrete, the influence exercised on the variation of young modulus, Poisson ratio and compressive and tensile strength.

The results obtained permit to assert that the microconcrete with epoxy binder presents sufficient elements to ensure its use in similarity problems for reinforced concrete structures.

BIBLIOGRAFIE

1. M. ARCAN, ED. NICOLAU, *Experimental Stress Analysis on Shells by models*. RILEM Symposium on Shell Research, Sept., 1961.
2. — *Studii asupra structurilor de rezistență ale construcțiilor cu ajutorul modelelor din mase plastice*. St. cerc. mec. apl., **XIII**, *3* (1962).
3. ED. NICOLAU, *Similitudinea modelului cu prototipul la cercetările pe modele de structuri funcționînd în stadiul elastic*. Buletinul INCERC — ISCAS, *1* (1962).
4. V. NICOLAU, *Betonul armat*. Edit. tehnică, București, 1962.

STUDII

VIBRAȚIILE DISIPATIVE ALE AUTOVEHICULELOR. I

DE

FL. DINCĂ

539.3 : 539.5

Vibrațiile autovehiculelor sînt tratate în literatura clasică în scheme mecanice corespunzătoare unui sistem cu două grade de libertate. Încercările de a se ține seamă de un număr sporit de grade de libertate măresc corespunzător sistemul de ecuații diferențiale care descriu fenomenul iar dificultățile de calcul legate de acest fapt sînt ocolite fie pe calea descompunerii sistemului inițial în subsisteme independente, pe considerații de simetrie (a se vedea de exemplu [4]) fie printr-un procedeu de aproximații succesive în care se ia ca primă aproximație soluția furnizată în schema corespunzătoare unui sistem cu două grade de libertate (a se vedea de exemplu [1]).

Prezența disipatorilor de energie în sistem măresc corespunzător dificultățile, fie că este vorba de amortizări vîscoase, care introduc termeni suplimentari, fie că este vorba de limitatori de cursă care introduc neliniarități.

În lucrarea de față se vor studia în prima parte aspecte legate de efectul unui număr sporit de grade de libertate asupra mișcării fundamentale (în tot ceea ce urmează se consideră mișcare fundamentală mișcarea în schema corespunzătoare unui sistem cu două grade de libertate). De asemenea, se va pune în evidență efectul amortizării mixte în regim de rezonanță. Toate considerațiile se referă la sisteme liniare.

1. ECUAȚII DE MIȘCARE. CONDIȚII INIȚIALE

Să considerăm schema de mișcare corespunzătoare unui sistem cu două grade de libertate (fig. 1).

Fie $\overline{A_1A_2}$ segmentul care trece prin centrul de greutate C al autovehiculului, egal și paralel cu segmentul care unește punctele de sprijin ale caroseriei pe suspensiile caracterizate prin operatorii P_i, Q_i și funcțiile $f_i(i = 1,2)$. Se va spune că P_i, Q_i și f_i caracterizează suspensia i dacă unei deplasări z_i a punctului A_i îi corespunde în suspensie o forță F_i dată de relația

$$P_i\,[F_i] = f_i\,(z_i) + Q_i\,[z_i]. \tag{1.1}$$

În cazul cel mai general, din punctul de vedere al fenomenelor care se urmăresc operatorii P_i și Q_i sînt operatori liniari integrodiferențiali cu coeficienți determinați experimental. Notînd cu $a_i = \overline{A_iC}$, cu z deplasarea lui C (raportată la o semiaxă orientată în sus cu originea în poziția lui C la echilibrul static), cu α rotația segmentului A_1A_2 în jurul lui C (sens pozitiv cel trigonometric) avem

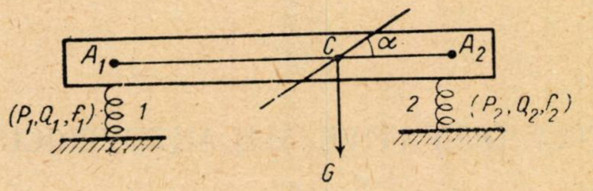


Fig. 1

$$\begin{aligned} z_1 &= z - a_1\alpha, \\ z_2 &= z + a_2\alpha, \end{aligned} \tag{1.2}$$

în cazul în care $tg\,\alpha \approx \alpha$; z_i este deplasarea pe verticală a punctului A_i măsurată de la poziția de echilibru static.

Forța care acționează de la suspensie la masă în punctul A_i este

$$\mathcal{F}_i = G_i' - F_i. \tag{1.3}$$

unde G_i' este greutatea care se repartizează din G reazemului A_i.

Ecuația de mișcare a centrului de greutate este

$$M\ddot{z} + F_1 + F_2 = 0 \qquad (1.4$$

iar ecuația de momente este

$$M\rho^2\ddot{\alpha} - F_1a_1 + F_2a_2 = 0. \qquad (1.5$$

În formulele (1.4) și (1.5) M este masa părții suspendate, ρ este raza de inerție a acesteia în raport cu un ax care trece prin C perpendicular pe planul mișcării. Aplicînd ecuațiilor (1.4) și (1.5) succesiv operatorii P_1, P_2 se obține sistemul echivalent

$$\begin{aligned} &P_1P_2\,[M\ddot{z}] + P_1P_2\,[F_1] + P_1P_2\,[F_2] = 0, \\ &P_1P_2\,[M\rho^2\ddot{\alpha}] - P_1P_2\,[a_1F_1] + P_1P_2\,[a_2F_2] = 0. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Pentru a obține sistemul de ecuații diferențiale corespunzător este necesar să se elimine F_1 și F_2 între ecuațiile (1.6) și ecuațiile (1.1). Vom remarca în prealabil că dacă capătul inferior al suspensiei i are o mișcare pe verticală descrisă de ecuația

$$\zeta_i = \zeta_i(t), \tag{1.7}$$

unde ζ_i se măsoară pe verticala ascendentă cu originea în punctul corespunzător mișcării neperturbate, atunci forța în suspensie se va exprima în funcție de diferența celor două deplasări adică în locul relației (1.1) este necesar să se utilizeze relația

$$P_i[F_i] = f_i(z_i - \zeta_i) + Q_i(z_i - \zeta_i). \tag{1.1'}$$

În ipoteza că produsul de operatori P_1P_2 este comutativ din (1.1′) și (1.6) se obține

$$\begin{aligned} &MP_1P_2[\ddot{z}] + P_2\{f_1(z_1 - \zeta_1) + Q_1[z_1 - \zeta_1]\} + \\ &\quad + P_1\{f_2(z_2 - \zeta_2) + Q_2[z_2 - \zeta_2]\} = 0, \\ &M\rho^2P_1P_2[\ddot{\alpha}] - a_1P_2\{f_1(z_1 - \zeta_1) + Q_1[z_1 - \zeta_1]\} + \\ &\quad + a_2P_1\{f_2(z_2 - \zeta_2) + Q_2[z_2 - \zeta_2]\} = 0. \end{aligned} \tag{1.8}$$

Derivînd ecuațiile (1.2) de două ori în raport cu timpul ele devin prin aplicarea operatorului P_1P_2

$$\begin{aligned} P_1P_2[\ddot{z}_1] &= P_1P_2[\ddot{z}] - a_1P_1P_2[\ddot{\alpha}], \\ P_1P_2[\ddot{z}_2] &= P_1P_2[\ddot{z}] + a_2P_1P_2[\ddot{\alpha}]. \end{aligned} \tag{1.9}$$

Explicitînd prima formulă (1.8) în raport cu $P_1P_2[\ddot{z}]$, pe cea de-a doua în raport $P_1P_2[\ddot{\alpha}]$ și introducînd rezultatele obținute în ecuațiile (1.9) rezultă, după o regrupare a termenilor :

$$\begin{aligned} &MP_1P_2[\ddot{z}_1] + \left(1 + \frac{a_1^2}{\rho^2}\right)P_2\{f_1(z_1 - \zeta_1) + Q_1[z_1 - \zeta_1]\} + \\ &\quad + \left(1 - \frac{a_1a_2}{\rho^2}\right)P_1\{f_2(z_2 - \zeta_2) + Q_2[z_2 - \zeta_2]\} = 0, \\ &MP_1P_2[\ddot{z}_2] + \left(1 - \frac{a_1a_2}{\rho^2}\right)P_2\{f_1(z_1 - \zeta_1) + Q_1[z_1 - \zeta_1]\} + \\ &\quad + \left(1 + \frac{a_1a_2}{\rho^2}\right)P_1\{f_2(z_2 - \zeta_2) + Q_2[z_2 - \zeta_2]\} = 0. \end{aligned} \tag{1.10}$$

Ecuațiile (1.10) se mai pot scrie sub o formă echivalentă din care prin particularizări se regăsesc ecuațiile clasice. Astfel, dacă se explicitează prima ecuație în raport cu $P_2\{f_1(z_1 - \zeta_1) + Q_1[z_1 - \zeta_1]\}$ și se introduce rezultatul obținut în cea de-a doua, iar cea de-a doua se explicitează în raport cu $P_1 \{f_2 (z_2 - \zeta_2) + Q_2 [z_2 - \zeta_2]$ și se introduce rezultatul obținut în prima, se obține sistemul echivalent

$$\begin{aligned} & MP_1P_2 \left[\ddot{z}_1 + \frac{a_1a_2 - \rho^2}{\rho^2 + a_2^2}\ddot{z}_2\right] + \frac{L^2}{\rho^2 + a_2^2} P_2\{f_1(z_1 - \zeta_1) + Q_1[z_1 - \zeta_1]\} = 0, \\ & MP_1P_2 \left[\ddot{z}_2 + \frac{a_1a_2 - \rho^2}{\rho^2 + a_1^2}\ddot{z}_1\right] + \frac{L^2}{\rho^2 + a_1^2} P_1\{f_2(z_2 - \zeta_2) + Q_2[z_2 - \zeta_2]\} = 0. \end{aligned} \tag{1.11}$$

La acest sistem se adaugă un ansamblu de condiții inițiale, depinzînd de operatorii P_1, P_2 și produsul de operatori P_1P_2, astfel încît sistemul obținut să admită soluție unică, sistemul de condiții inițiale fiind compatibil cu fenomenul.

În cazurile în care se poate considera că roțile urmăresc microprofilul drumului, funcțiile $\zeta_i(t)$ sînt funcții cunoscute de timp iar ecuațiile (1.11) vor descrie mișcarea perturbată a sistemului adoptat, sursa de perturbații constituind-o neregularitățile drumului.

În cazul în care această aproximație este nejustificată este necesar să se adopte schema corespunzătoare figurii 2.

În acest caz primele două ecuații de mișcare rămîn formal neschimbate cu singura diferență că de data aceasta operatorii P_i, Q_i și funcțiile f_i caracterizează porțiunea din suspensia i aflată în partea superioară a masei m_i. Presupunînd că suspensia inferioară masei m_i este caracterizată prin operatorii p_i și q_i și funcțiile φ_i ecuația de mișcare a masei m_i va fi :

$$\begin{aligned} & m_iP_ip_i\ddot{\zeta}_i - p_i \{f_i(z_i - \zeta_i) + Q_i[z_i - \zeta_i]\} + \\ & + P_i\{\varphi_i(\zeta_i - x_i) + q_i[\zeta_i - x_i]\} = 0. \end{aligned} \tag{1.12}$$

Funcțiile $x_i(t)$ sînt funcții cunoscute determinate de microprofilul drumului. În acest caz, sistemul care descrie fenomenul este format din ecuațiile (1.1) și (1.12) cu precizarea menționată asupra operatorilor P_i, Q_i, p_i, q_i, și a funcțiilor f_i și φ_i. Pentru studiul proceselor rapide este suficient să se adopte pentru operatorii P_i, Q_i, p_i, q_i forme diferențiale liniare cu coeficienți constanți :

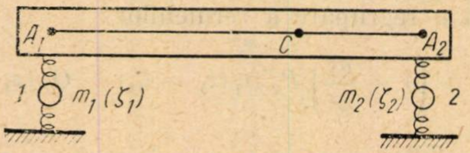


Fig. 2

$$P_i = \sum_{n=1}^{m_1} e_{in}\frac{d^n}{dt^n}, \quad Q_i = \sum_{n=1}^{m_2} f_{in}\frac{d^n}{dt^n} \tag{1.13}$$

și expresii asemănătoare pentru p_i și q_i. De asemenea, funcțiile $f_i(z)$, $\varphi_i(\zeta)$ se aleg de forma

$$f_i(z) = \sum_{n=0}^{m_3} g_{in}z^n, \quad \varphi_i(\zeta) = \sum_{n=0}^{m_4} h_{in}\zeta^n. \tag{1.14}$$

Constantele care intervin în formulele (1.13) şi (1.14) se determină experimental. În cazul particular în care se alege drept model pentru suspensie un model Hooke este necesar ca în formulele (1.13) şi (1.14) să se ia

$$\begin{aligned} &P_i = 1, && p_i = 1, \\ &Q_i = 0, && q_i = 0, \\ &f_i(z_i) = K_i z_i, && \varphi_i(\zeta_i) = K_i' \zeta_i, \end{aligned} \tag{1.15}$$

K_i fiind constanta elastică a suspensiei i iar K_i' fiind constanta elastică a pneului i.

În acest caz, ecuaţiile de mişcare devin :

$$\begin{aligned} &\ddot{z}_1 + c_1\ddot{z}_2 + \omega_1^2(z_1 - \zeta_1) = 0, \\ &\ddot{z}_2 + c_2\ddot{z}_1 + \omega_2^2(z_2 - \zeta_2) = 0, \\ &\ddot{\zeta}_1 + \mu_1^2(\zeta_1 - z_1) + \nu_1^2\zeta_1 = 0, \\ &\ddot{\zeta}_2 + \mu_2^2(\zeta_2 - z_2) + \nu_2^2\zeta_2 = 0. \end{aligned} \tag{1.16}$$

În scrierea ecuaţiilor precedente au fost introduse notaţiile :

$$\begin{aligned} &c_1 = \frac{a_1a_2 - \rho^2}{a_2^2 + \rho^2}, && c_2 = \frac{a_1a_2 - \rho^2}{a_1^2 + \rho^2}, \\ &\omega_1^2 = \frac{K_1L^2}{M(a_2^2 + \rho^2)}, && \omega_2^2 = \frac{K_2L^2}{M(a_1^2 + \rho^2)}, \\ &\mu_i^2 = \frac{K_i}{m_i}, && \nu_i^2 = \frac{K_i'}{m_i}. \end{aligned} \tag{1.17}$$

În cazul unui model Voigt (Kelvin), va trebui să se ia pentru operatorii P_i, Q_i, p_i, q_i şi funcţiile f_i şi φ_i expresiile :

$$\begin{aligned} &P_i = 1, && p_i = 1, \\ &Q_i = h_i \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}, && q_i = h_i' \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \\ &f(z_i) = K_i z_i, && \varphi_i(\zeta_i) = K_i'\zeta_i. \end{aligned} \tag{1.18}$$

În acest caz, ecuaţiile de mişcare devin

$$\begin{aligned} &\ddot{z}_1 + c_1\ddot{z}_2 + \omega_1^2 z_1 + \gamma_1\dot{z}_1 = \omega_1^2\zeta_1 + \gamma_1\dot{\zeta}_1, \\ &\ddot{z}_2 + c_2\ddot{z}_1 + \omega_2^2 z_2 + \gamma_2\dot{z}_2 = \omega_2^2\zeta_2 + \gamma_2\zeta_2, \\ &\ddot{\zeta}_i + (\mu_i^2 + \nu_i^2)\,\zeta_i + (\gamma_i + \gamma_i')\dot{\zeta}_i = \mu_i^2 z_i + \gamma_i\dot{z}_i + \nu_i^2 x_i + \gamma_i\dot{x}_i \quad (i = 1,2), \end{aligned} \tag{1.19}$$

cu notaţiile

$$\gamma_1 = \frac{h_1L^2}{M(\rho^2 + a_2^2)}, \quad \gamma_2 = \frac{h_2L^2}{M(\rho^2 + a_1^2)}, \quad \gamma_i' = \frac{h_i'}{m_i}, \tag{1.20}$$

h_i fiind o constantă ce se determină experimental. Pentru aceste ecuații condițiile inițiale sînt de forma

$$z_i(0) = \alpha_i, \quad \dot{z}_i(0) = \beta_i, \quad \zeta_i(0) = \gamma_i, \quad \dot{\zeta}_i(0) = \delta_i, \tag{1.21}$$

α_i, β_i, γ_i, δ_i fiind cunoscute.

2. FRECVENȚELE PROPRII ALE MIȘCĂRII FUNDAMENTALE ȘI INFLUENȚA ELASTICITĂȚII PNEURILOR ASUPRA ACESTORA

Frecvențele proprii fundamentale vor fi frecvențele proprii care corespund mișcării fundamentale în absența amortizării. Ecuațiile diferențiale corespunzătoare acestei mișcări se deduc din ecuațiile (1.16) în absența perturbațiilor, adică cu $\zeta_i = 0$ pentru $i = 1,2$. Acestea sînt

$$\begin{aligned} \ddot{z}_1 + c_1\ddot{z}_2 + \omega_1^2 z_1 &= 0, \\ \ddot{z}_2 + c_2\dot{z}_1^2 + \omega_2^2 z_2 &= 0. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Soluția generală a sistemului (2.1) se obține pe cale elementară făcînd schimbările de funcții necunoscute

$$\begin{aligned} z_1 &= -c_1 \ddot{V}, \\ z_2 &= \ddot{V} + \omega_1^2 V, \end{aligned} \tag{2.2}$$

V fiind o nouă funcție necunoscută. Introducînd expresiile (2.2) în (2.1) prima ecuație va fi satisfăcută oricare ar fi funcția V, iar cea de-a doua devine

$$(1 - c_1 c_2)\ddddot{V} + (\omega_1^2 + \omega_2^2)\ddot{V} + \omega_1^2\omega_2^2 V = 0, \tag{2.3}$$

a cărei ecuație caracteristică este

$$(1 - c_1 c_2)p^4 + (\omega_1^2 + \omega_2^2)p^2 + \omega_1^2\omega_2^2 = 0 \tag{2.4}$$

care este ecuația frecvențelor proprii căutate. Soluțiile acestei ecuații sînt

$$p^2 = \frac{-(\omega_1^2 + \omega_2^2) \pm \sqrt{(\omega_1^2 - \omega_2^2)^2 + 4c_1c_2\omega_1^2\omega_2^2}}{2(1 - c_1c_2)}. \tag{2.5}$$

Din faptul că

$$\omega_1^2 + \omega_2^2 > \sqrt{(\omega_1^2 - \omega_2^2)^2 + 4c_1c_2\omega_1^2\omega_2^2}, \tag{2.6}$$

inegalitate adevărată pentru orice valori ale lui ω_1 și ω_2 în cazul în care $c_1 c_2 < 1$ (ultima inegalitate fiind totdeauna îndeplinită în cazul autovehiculelor), rezultă că soluţiile ecuaţiei (2.4) sînt pur imaginare : $\pm i\Omega_1$ şi $\pm i\Omega_2$ cu

$$\begin{aligned} \Omega_1^2 &= \frac{(\omega_1^2 + \omega_2^2) + \sqrt{(\omega_1^2 - \omega_2^2)^2 + 4c_1c_2\omega_1^2\omega_2^2}}{2(1 - c_1c_2)}, \\ \Omega_2^2 &= \frac{(\omega_1^2 + \omega_2^2) - \sqrt{(\omega_1^2 - \omega_2^2)^2 + 4c_1c_2\omega_1^2\omega_2^2}}{2(1 - c_1c_2)}. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Ω_1 şi Ω_2 sînt tocmai frecvenţele proprii căutate. Pe aceste expresii se pot observa următoarele :

1) În cazul în care $c_1 c_2 = 0$ se obţine

$$\begin{aligned} \Omega_1^2 &= \omega_1^2 \\ \Omega_2^2 &= \omega_2^2 \end{aligned} \tag{2.8}$$

fapt pentru care ω_1 şi ω_2 sînt numite frecvenţele parţiale ale mişcării. În acest caz, se arată [2] că mişcările capetelor A_1 şi A_2 sînt independente una de alta executînd fiecare o oscilaţie proprie armonică simplă cu frecvenţa ω_i.

2) Ţinînd seama de faptul că $c_1 c_2 \ll 1$ (în ipoteza că $\omega_1 \neq \omega_2$) dezvoltînd expresiile (2.7) în serie după puterile lui $c_1 c_2$ se obţine

$$\begin{aligned} \Omega_1^2 &= \omega_1^2 + \frac{\omega_1^4}{\omega_1^2 - \omega_2^2} c_1 c_2 + \ldots, \\ \Omega_2^2 &= \omega_2^2 + \frac{\omega_2^4}{\omega_2^2 - \omega_1^2} c_1 c_2 + \ldots \end{aligned} \tag{2.9}$$

Aceste expresii permit să se calculeze frecvenţele Ω_1 şi Ω_2 în cazul în care $c_1 c_2$ este suficient de mic.

Pentru a pune în evidenţă efectul elasticităţii pneurilor asupra frecvenţelor proprii fundamentale se porneşte de la sistemul (1.16). Ecuaţia frecvenţelor proprii se obţine căutînd condiţiile în care sistemul respectiv admite soluţii de forma

$$z_1 = Ae^{ipt}, \quad z_2 = Be^{ipt}, \quad \zeta_1 = Ce^{ipt}, \quad \zeta_2 = De^{ipt}. \tag{2.10}$$

Pentru aceasta trebuie ca sistemul algebric

$$\begin{aligned} A(\omega_1^2 - p^2) - c_1p^2B - \omega_1^2C &= 0, \\ -c_2p^2A + B(\omega_2^2p^2) + \omega_2^2D &= 0, \\ -\mu_1^2A + (\mu_1^2 + \nu_1^2 - p^2)\,C &= 0, \\ -\mu_2^2B + (\mu_2^2 + \nu_2^2 - p^2)\,D &= 0, \end{aligned} \tag{2.11}$$

să admită soluții nebanale. Impunînd această condiție se obține ecuația frecvențelor proprii sub forma

$$\begin{vmatrix} \omega_1^2 - p^2 & -c_1 p^2 & -\omega_1^2 & 0 \\ -c_2 p & \omega_2^2 - p^2 & 0 & -\omega_2^2 \\ -\mu_1^2 & 0 & \mu_1^2 + \nu_1^2 - p^2 & 0 \\ 0 & -\mu_2^2 & 0 & \mu_2^2 + \nu_2^2 - p^2 \end{vmatrix} = 0. \qquad (2.12)$$

Ecuația obținută este de gradul 4 în p^2. Vom rezolva această ecuație utilizînd metoda aproximațiilor succesive în care luăm ca soluție de plecare soluția $p_0^2 = \omega_1^2$ în cazul în care urmărim modificarea lui Ω_1^2 din cauza prezenței pneurilor și $p_0^2 = \omega_2^2$ în cazul în care urmărim modificarea lui Ω_2^2. Aplicînd această metodă ecuației

$$\begin{vmatrix} \omega_1^2 - p^2 & -c_1 p^2 \\ -c_2 p^2 & \omega_2^2 - p^2 \end{vmatrix} = 0 \qquad (2.13)$$

se obține

$$\begin{vmatrix} \omega_1^2 - p^2 & -c_1 \omega_1^2 \\ -c_2 \omega_1^2 & \omega_2^2 - \omega_1^2 \end{vmatrix} = 0 \qquad (2.14)$$

care rezolvată în raport cu p^2 ne dă prima aproximație a frecvenței $\Omega_1^2 = p^2$:

$$\Omega_1^2 = \omega_1^2 + \frac{\omega_1^4}{\omega_1^2 - \omega_2^2} c_1 c_2 \qquad (2.15)$$

care coincide cu primii doi termeni în dezvoltarea în serie a soluției exacte după puterile lui $c_1 c_2$.

Procedînd în mod analog pentru frecvența Ω_2^2 se obține pornind de la această ecuație cu aproximația de ordin zero dată de $p_0^2 = \omega_2^2$

$$\Omega_2^2 = \omega_2^2 + \frac{\omega_2^4}{\omega_2^2 - \omega_1^2} c_1 c_2 \qquad (2.16)$$

pentru care rămîne valabilă observația făcută anterior.

Expresiile (2.15) și (2.16) ne dau efectul cuplajului asupra frecvențelor proprii fundamentale după neglijarea puterilor $\geqslant 2$ în dezvoltarea după puterile lui $c_1 c_2$.

Vom căuta influența pneului *1* asupra frecvențelor proprii fundamentale în ipoteza că pneul *2* este perfect rigid. În acest caz, ecuația frecvențelor proprii este

$$\begin{vmatrix} \omega_1^2 - p^2 & -c_1 p^2 & -\omega_1^2 \\ -c_2 p^2 & \omega_2^2 - p^2 & 0 \\ -\mu_1^2 & 0 & \mu_1^2 + \nu_1^2 - p^2 \end{vmatrix} = 0. \qquad (2.17)$$

Urmărind frecvența Ω_1^2 se obține, dacă se ia aproximația de ordin 0 $p_0^2 = \omega_1^2$, ecuația

$$\begin{vmatrix} \omega_1^2 - p^2 & -c_1\,\omega_1^2 & -\omega_1^2 \\ -c_2\,\omega_1^2 & \omega_2^2 - \omega_1^2 & 0 \\ -\mu_1^2 & 0 & \mu_1^2 + \nu_1^2 - \omega_1^2 \end{vmatrix} = 0 \tag{2.18}$$

care rezolvată în raport cu $p_1 = \Omega_1^2$ dă

$$\Omega_1^2 = \omega_1^2 + \frac{\omega_1^4}{\omega_1^2 - \omega_2^2}\, c_1\, c_2 + \frac{\mu_1^2\omega_1^2}{\omega_1^2 - \mu_1^2 - \nu_1^2} \tag{2.19}$$

și analog pentru frecvența Ω_2^2

$$\Omega_2^2 = \omega_2^2 + \frac{\omega_2^4}{\omega_2^2 - \omega_1^2}\, c_1\, c_2 + \frac{\mu_2\,\omega_2^2}{\omega_2^2 - \mu_2^2 - \nu_2^2} \tag{2.20}$$

care exprimă influența pneului *2* asupra frecvenței Ω_2^2 în cazul în care pneul *1* poate fi considerat rigid.

Vom remarca faptul că dacă se consideră în formula (2.19) pneul *1* perfect rigid, atunci $\nu_1^2 \rightarrow \infty$ și se regăsește pentru Ω_1^2 expresia (2.15). Observație analogă pentru (2.20).

Efectul integral al elasticității celor două pneuri asupra frecvenței Ω_1^2 în prima aproximație se obține din ecuația (2.12) dacă se ia drept aproximația de ordin zero $p_0^2 = \omega_1^2$. Se obține ecuația

$$\begin{vmatrix} \omega_1^2 - p^2 & -c_1\,\omega_1^2 & -\omega_1^2 & 0 \\ -c_2\,\omega_1^2 & \omega_2^2 - \omega_1^2 & 0 & -\omega_2^2 \\ -\mu_1^2 & 0 & \mu_1^2 + \nu_1^2 - \omega_1^2 & 0 \\ 0 & -\mu_2^2 & 0 & \mu_2^2 + \nu_2^2 - \omega_2^2 \end{vmatrix} = 0 \tag{2.21}$$

care conduce la soluția

$$\Omega_1^2 = \omega_1^2 + \frac{c_1 c_2 \omega_1^4 + \dfrac{\mu_1^2\omega_1^2\,(\omega_2^2 - \omega_1^2)}{\mu_1^2 + \nu_1^2 - \omega_1^2} - \dfrac{\mu_1^2\mu_2^2\omega_1^2\omega_2^2}{(\mu_1^2+\nu_1^2-\omega_1^2)\,(\mu_2^2+\nu_2^2-\omega_1^2)}}{\omega_1^2 - \omega_2^2 + \dfrac{\mu_2^2\omega_2^2}{\mu_2^2 + \nu_2^2 - \omega_1^2}} \tag{2.22}$$

și în mod analog pentru frecvența

$$\Omega_2^2 = \omega_2^2 + \frac{c_1\, c_2 \omega_2^4 + \dfrac{\mu_2^2\omega_2^2\,(\omega_1^2 - \omega_2^2)}{\mu_2^2 + \nu_2^2 - \omega_1^2} - \dfrac{\mu_1^2\mu_2^2\omega_1^2\omega_2^2}{(\mu_1^2+\nu_1^2-\omega_2^2)\,(\mu_2^2+\nu_2^2-\omega_2^2)}}{\omega_2^2 - \omega_1^2 + \dfrac{\mu_1^2\omega_1^2}{\mu_1^2 + \nu_1^2 - \omega_2^2}}. \tag{2.23}$$

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM KÖZPONTI KÖNYVTÁRA 1848

Se remarcă următoarele : în (2.22) dacă pneul *2* este rigid ($\nu_2 \to \infty$) se regăsește pentru Ω_1^2 expresia (2.19) iar dacă și pneul *1* este rigid se regăsește expresia (2.15). Observații asemănătoare pentru expresia (2.23). Expresiile (2.15), (2.16), (2.19), (2.20), (2.22), (2.23) permit o evaluare rapidă a frecvențelor proprii fundamentale ocolind dificultățile legate de rezolvarea numerică corespunzătoare fiecărui caz în parte, a ecuației (2.12).

Pentru valabilitatea dezvoltărilor precedente este necesar ca $\omega_1^2 \neq \neq \omega_2^2$, condiția de convergență a algoritmului utilizat reducîndu-se la aceasta.

3. MIȘCAREA FUNDAMENTALĂ PERTURBATĂ ÎN IPOTEZA DISIPĂRII VÎSCOASE

Pentru a studia acest caz se acceptă următoarele ipoteze :

1) Axele planetare urmăresc profilul drumului care la rîndul său este simetric față de linia medie. Prin această ipoteză funcțiile ζ_1 și ζ_2 devin funcții cunoscute de timp. 2) Autovehiculul trece de pe un drum perfect rectiliniu pe un drum cu microprofilul cunoscut.

În acest caz, ecuațiile de mișcare (1.19) devin

$$\begin{aligned} \ddot{z}_1 + c_1\ddot{z}_2 + \omega_1^2 z_1 + \gamma_1 \dot{z}_1 &= X_1, \\ \ddot{z}_2 + c_2\ddot{z}_1 + \omega_2^2 z_2 + \gamma_2 \dot{z}_2 &= X_2, \end{aligned} \tag{3.1}$$

condițiile inițiale fiind (conform cu ipoteza 2)

$$z_1(0) = \dot{z}_1(0) = z_2(0) = \dot{z}_2(0) = 0. \tag{3.2}$$

Funcțiile X_1 și X_2 au expresiile

$$\begin{aligned} X_1 &= \omega_1^2 \zeta_1 + \gamma_1 \dot{\zeta}_1, \\ X_2 &= \omega_2^2 \zeta_2 + \gamma_2 \dot{\zeta}_2. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Soluția generală a sistemului (3.1) cu condițiile inițiale (3.2) se obține în forma cea mai generală utilizînd transformata Laplace. Se introduc notațiile :

$$\begin{aligned} \bar{z}_i &= \int_0^\infty e^{-pt} z_i(t)\,dt, \\ \bar{X}_i &= \int_0^\infty e^{-pt} X_i(t)\,dt. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Înmulțind ambii membri ai ecuațiilor (3.1) cu e^{-pt} și integrînd de la 0 la infinit (în condițiile inițiale (3.2)) se obține sistemul algebric echivalent :

$$\begin{aligned} (p^2 + \gamma_1 p + \omega_1^2)\,\bar{z}_1 + c_1 p^2 \bar{z}_2 &= \bar{X}_1, \\ c_2 p^2 \bar{z}_1 + (p^2 + \gamma_2 p + \omega_2^2)\,\bar{z}_2 &= \bar{X}_2, \end{aligned} \tag{3.5}$$

pentru determinarea noilor funcții necunoscute $\overline{z_1(p)}$ și $\overline{z_2(p)}$. Soluțiile sistemului (3.5) sînt

$$\begin{aligned} \overline{z_1(p)} &= \frac{(p^2+\gamma_2 p+\omega_2^2)\,\bar{X}_1 - c_1 p^2 \bar{X}_2}{(p^2+\gamma_1 p+\omega_1^2)(p^2+\gamma_2 p+\omega_2^2) - c_1 c_2 p^4}, \\ \overline{z_2(p)} &= \frac{(p^2+\gamma_1 p+\omega_1^2)\,\bar{X}_2 - c_2 p^2 \bar{X}_1}{(p^2+\gamma_1 p+\omega_1^2)(p^2+\gamma_1 p+\omega_2^2) - c_1 c_2 p^4}. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Trecerea de la funcțiile $\overline{z_j(p)}$ la funcțiile $z_j(t)$ se face prin formulele cunoscute

$$z_j(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \overline{z_j(p)}\, e^{ipt} dt, \quad j = 1,2, \tag{3.7}$$

trecerea efectivă necesitînd cunoașterea funcțiilor $X_j(p)$, adică cunoașterea ecuațiilor care descriu microprofilul drumului.

În cazurile întîlnite în practică, microprofilul drumului poate fi reprezentat printr-un număr suficient de termeni dintr-o serie Fourier, deci printr-un polinom trigonometric.

În cazuri mai speciale, funcția care dă alura microprofilului va fi o funcție definită pe porțiuni. În ambele cazuri, funcțiile $\overline{X_j(p)}$ vor avea o reprezentare de forma

$$\overline{X_j(p)} = \frac{M_j(p)}{N_j(p)}, \quad j = 1,2, \tag{3.8}$$

unde $M_j(p)$ și $N_j(p)$ sînt polinoame în p. În acest caz formulele (3.4) devin :

$$\begin{aligned} \overline{z_1(p)} &= \frac{(p^2+\gamma_2 p+\omega_2^2)\,M_1(p)N_2(p) - c_1 p^2 M_2(p)\,N_1(p)}{N_1(p)\,N_2(p)[(p^2+\gamma_1 p+\omega_1^2)(p^2+\gamma_2 p+\omega_2^2) - c_1 c_2 p^4]}, \\ \overline{z_2(p)} &= \frac{(p^2+\gamma_1 p+\omega_1^2)\,M_2(p)\,N_1(p) - c_2 p^2 M_1(p)\,N_2(p)}{N_1(p)\,N_2(p)[(p^2+\gamma_1 p+\omega_1^2)(p^2+\gamma_2 p+\omega_2^2) - c_1 c_2 p^4]}. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Fie

$$p = s_j, \quad j = 1, 2, 3, 4,$$

rădăcinile ecuației

$$(p^2+\gamma_1 p+\omega_1^2)(p^2+\gamma_2 p+\omega_2^2) - c_1 c_2 p^4 = 0 \tag{3.10}$$

și

$$p = s_l \qquad l = 5, 6, \ldots, m, \tag{3.11}$$

rădăcinile ecuației $N_1(p)\,N_2(p) = 0$.

Vom presupune că atît rădăcinile s_j cît și s_l sînt simple și diferite între ele pentru orice j și l. În această ipoteză, aplicînd teorema reziduurilor față de polii simpli menționați în integralele (6.7) se obține :

$$z_1(t) = \sum_{n=1}^{m} \frac{(s_n^2 + \gamma_2 s_n + \omega_2^2)\, M_1(s_n)\, N_2(s_n) - c_1 s_n^2 M_1(s_n)\, N_1(s_n)}{\{N_1(p)\, N_2(p)[(p^2 + \gamma_1 p + \omega_1^2)(p^2 + \gamma_2 p + \omega_2^2) - c_1 c_2 p^4]\}'_{p=s_n}},$$

$$z_2(t) = \sum_{n=1}^{m} \frac{(s_n^2 + \gamma_1 s_n + \omega_1^2)\, M_2(s_n)\, N_1(s_n) - c_1 s_n^2 M_1(s_n)\, N_2(s_n)}{\{N_1(p)\, N_2(p)\,[(p^2 + \gamma_1 p + \omega_1^2)(p^2 + \gamma_2 p + \omega_2^2) - c_1 c_2 p^4]\}'_{p=s_n}}. \tag{3.12}$$

În paranteza de la numitor accentul indică derivarea în raport cu p. În sumele (3.12) există două grupuri de termeni: primul grup în care comportarea fiecărui termen în timp este determinată de rădăcinile ecuației (3.10), deci depind de caracteristicile sistemului, și un alt grup în care comportarea fiecărui termen din grup este determinată de rădăcinile ecuației (3.11), fiind prin urmare determinată de caracteristicile drumului.

Comportarea în timp a termenilor din primul grup rezultă imediat din următoarea proprietate a soluțiilor ecuației (3.10) :

Soluțiile acestei ecuații sînt complexe cu părți reale negative în ipoteza $c_1 c_2 < 1$.

Scriind ecuația sub forma

$$(1 - c_1 c_2) p^4 + (\gamma_1 + \gamma_2) p^3 + (\gamma_1\gamma_2 + \omega_1^2 + \omega_2^2)\, p^2 + + (\gamma_1\omega_2^2 + \gamma_2\omega_1^2)\, p + \omega_1^2\omega_2^2 = 0 \tag{3.13}$$

se vede imediat că coeficienții verifică condițiile teoremei lui Hurwitz, adică

$$\begin{gathered} 1 - c_1 c_2 > 0, \\ \gamma_1\omega_2^2 + \gamma_2\omega_1^2 > 0, \\ \omega_1^2\omega_2^2 > 0, \\ \gamma_1\gamma_2(\gamma_1 + \gamma_2)(\gamma_1\omega_2^2 + \gamma_2\omega_1^2) + (\gamma_1\omega_2^2 + \gamma_2\omega_1^2)\, c_1 c_2 + \\ + \gamma_1\gamma_2(\omega_1^2 - \omega_2^2)^2 > 0. \end{gathered} \tag{3.14}$$

care sînt necesare și suficiente ca proprietatea enunțată să fie adevărată [3].

Prin urmare, soluțiile sînt de forma

$$s_1 = -\alpha_1 + i\beta_1,\quad s_2 = -\alpha_1 - i\beta_1,\quad s_3 = -\alpha_2 + i\beta_2,\quad s_4 = -\alpha_2 - i\beta_2. \tag{3.15}$$

Notînd

$$X_1 = \mathrm{Re}\left\{\frac{(p^2 + \gamma_2 p + \omega_2^2) M_1(p)\, N_2(p) - c_1 p^2 M_2(p)\, N_1(p)}{\{N_1(p)\, N_2(p)[(p^2+\gamma_1 p + \omega_1^2)(p^2+\gamma_2 p + \omega_2^2) - c_1 c_2 \omega_1^2\omega_2^2]\}}\right\}_{s=-\alpha_1+i\beta_1},$$

$$Y_1 = \mathrm{Im}\left\{\frac{(p^2+\gamma_2 p+\omega_2^2)\, M_1(p)\, N_2(p) - c_1 p^2 M_2(p)\, N_1(p)}{\{N_1(p) N_2(p)[(p^2+\gamma_1 p+\omega_1^2)(p^2+\gamma_2 p+\omega_2^2) - c_1 c_2\, \omega_1^2\, \omega_2^2]\}}\right\}_{s=-\alpha_1+i\beta_2},$$

$$X_1' = \mathrm{Re}\left\{\frac{(p^2 + \gamma_2 p + \omega_2^2)\, M_1(p)\, N_2(p) - c_1 p^2 M_2(p)\, N_1(p)}{\{N_1(p) N_2(p)[(p^2+\gamma_1 p+\omega_1^2)(p^2+\gamma_2 p+\omega_2^2) - c_1 c_2\, \omega_1^2\, \omega_2^2]\}}\right\}_{s=-\alpha_2+i\beta_2},$$

$$
\begin{aligned}
Y_1' &= \mathrm{Im}\left\{\frac{(p^2+\gamma_2 p+\omega_2^2)\,M_1(p)\,N_2(p)-c_1p^2M_2(p)\,N_1(p)}{\{N_1(p)N_2(p)\,[(p^2+\gamma_1p+\omega_1^2)(p^2+\gamma_2p+\omega_2^2)-c_1c_2\omega_1^2\omega_2^2]\}}\right\}_{s=-\alpha_2+i\beta_2},\\
X_2 &= \mathrm{Re}\left\{\frac{(p^2+\gamma_1p+\omega_1^2)\,M_2(p)\,N_1(p)-c_2p^2M_1(p)\,N_2(p)}{\{N_1(p)\,N_2(p)[(p^2+\gamma_1p+\omega_1^2)(p^2+\gamma_2p+\omega_2^2)-c_1c_2p^4]\}'}\right\}_{p=-\alpha_1+i\beta_1},\\
Y_2 &= \mathrm{Im}\left\{\frac{(p^2+\gamma_1p+w_1^2)\,M_2(p)\,N_1(p)-c_2p^2M_1(p)\,N_2(p)}{\{N_1(p)\,N_2(p)\,[(p^2+\gamma_1p+\omega_1^2)(p^2+\gamma_2p+\omega_2^2)-c_1c_2p^4]\}'}\right\}_{p=-\alpha_1+i\beta_1},\\
X_2' &= \mathrm{Re}\left\{\frac{(p^2+\gamma_1p+\omega_1^2)\,M_2(p)\,N_1(p)-c_2p^2M_1(p)\,N_2(p)}{\{N_1(p)\,N_2(p)[(p^2+\gamma_1p+\omega_1^2)(p^2+\gamma_2p+\omega_2^2)-c_1c_2p^4]\}'}\right\}_{p=-\alpha_2+i\beta_2},\\
Y_2' &= \mathrm{Im}\left\{\frac{(p^2+\gamma_1p+\omega_1^2)\,M_2(p)\,N_1(p)-c_2p^2M_1(p)\,N_2(p)}{\{N_1(p)\,N_2(p)[(p^2+\gamma_1p+\omega_1^2)(p^2+\gamma_2p+\omega_2^2)-c_1c_2p^4]\}'}\right\}_{p=-\alpha_2+i\beta_2}.
\end{aligned}
\tag{3.16}
$$

Vom avea pentru grupul de termeni care este determinat de caracteristicile sistemului expresia

$$e^{-\alpha_1 t}(X_1\cos\beta_1 t - Y_1\sin\beta_1 t) + e^{-\alpha_2 t}(X_1'\cos\beta_2 t - Y_1'\sin\beta_2 t) \tag{3.17}$$

şi respectiv

$$e^{-\alpha_1 t}(X_2\cos\beta_1 t - Y_2\sin\beta_1 t) + e^{-\alpha_2 t}(X_2'\cos\beta_2 - Y_2'\sin\beta_2 t) \tag{3.18}$$

Termenii respectivi reprezintă oscilaţii armonice armonizate şi au efect important în cazul în care microprofilul drumului conduce la perturbaţii de scurtă durată, cum ar fi trecerea în viteză peste un obstacol caz în care sistemul oscilează în conformitate cu ecuaţiile (3.17) şi (3.18). În cazul în care durata perturbaţiei este suficient de mare, mişcarea se stabilizează şi efectul principal în expresiile (3.12) îl au termenii care sînt caracterizaţi de microprofilul drumului.

În cele ce urmează se va analiza cazul cel mai defavorabil, anume cazul în care microprofilul drumului induce perturbaţii periodice, ceea ce corespunde cazului în care microprofilul drumului însuşi este o funcţie periodică de punct. În acest caz, funcţiile X_1 şi X_2 sînt de forma:

$$X_i = \sum_0^\infty (A_n^i\cos\theta_n t + B_n^i\sin\theta_n t). \tag{3.19}$$

A_n^i, B_n^i fiind constante determinate.

Căutînd pentru sistemul (3.1) soluţii de forma

$$z_i(t) = \sum_{n=0}^\infty (a_n^i\cos\theta_n t + b_n^i\sin\theta_n t), \tag{3.20}$$

se obţine prin identificare următorul sistem algebric de ecuaţii pentru determinarea necunoscutelor a_n^i şi b_n^i:

$$
\begin{aligned}
a_n^1(\omega_1^2-\theta_n^2) - c_1\theta_n^2 a_n^2 + \gamma_1\theta_n b_n^1 &= A_n^1,\\
-c_2\theta_n^2 a_n^1 + a_n^2(\omega_2^2-\theta_n^2) + \gamma_2 b_n^2\theta_n &= A_n^2,\\
-\gamma_1\theta_n a_n^1 + b_n^1(\omega_1^2-\theta_n^2) - c_1\theta_n^2 b_n^2 &= B_n^1,\\
-\gamma_2\theta_n a_n^2 - c_2\theta_n^2 b_n^1 + b_n^2(\omega_2^2-\theta_n^2) &= B_n^2.
\end{aligned}
\tag{3.20'}
$$

Soluțiile sistemului (3.20) sînt date de expresiile

$$a_n^i = \frac{\Delta_{a_n^i}}{\Delta_n}, \quad b_n^i = \frac{\Delta_{b_n^i}}{\Delta_n}, \tag{3.21}$$

unde

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} \omega_1^2 - \theta_n^2 & -c_1\theta_n^2 & \gamma_1\theta_n & 0 \\ -c_2\theta_n^2 & \omega_2^2 - \theta_n^2 & 0 & \gamma_2\theta_n \\ -\gamma_1\theta_n & 0 & \omega_1^2 - \theta_n^2 & -c_1\theta_n^2 \\ 0 & -\gamma_2\theta_n & -c_2\theta_n & \omega_2^2 - \theta_n^2 \end{vmatrix} \tag{3.22}$$

iar $\Delta_{a_n^i}$ și $\Delta_{b_n^i}$ sînt determinanții ce se obțin din Δ după regula cunoscută.

Soluțiile sistemului vor fi

$$z_i(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\Delta_n} \left[\Delta_{a_n^i} \cos\theta_n t + \Delta_{b_n^i} \sin\theta_n t\right]. \tag{3.23}$$

Considerînd că rezonanța se produce după frecvențele proprii date de formulele (2.7) (presupunere care aproximează satisfăcător cazul real), soluțiile (3.23) devin în cazul rezonanței

$$z_i = \frac{1}{\Delta_n(\Omega)} \left[\Delta_{a_n^i}(\Omega) \cos\Omega t + \Delta_{b_n^i}(\Omega) \sin\Omega t\right], \tag{3.24}$$

unde Ω se înlocuiește cu Ω_1 sau Ω_2 după cum pierderea stabilității se produce după Ω_1 sau Ω_2. Ceilalți termeni în suma ce dă soluția (3.23) au fost suprimați fiind mici în comparație cu termenul după care se produce pierderea stabilității mișcării.

Impactul este dat de raportul

$$I_i = 1 + \frac{\ddot{z}_i}{g} \tag{3.25}$$

sau ținînd seama de formulele (3.24)

$$I_i = 1 - \frac{\Omega^2}{g\,\Delta_n(\Omega)} \left[\Delta_{a_n^i}(\Omega) \cos\Omega t + \Delta_{b_n^i}(\Omega) \sin\Omega t\right]. \tag{3.26}$$

Vom menționa în încheiere calea pe care se poate evalua, urmînd metoda energetică propusă de L.S. Iacobsen [6], efectele unei disipări mixte (culombiană - vîscoasă). În acest scop, vom scrie soluția (3.24) sub forma

$$z_i = L_i \sin(\Omega t - \alpha_i) \tag{3.27}$$

cu notațiile

$$L_i = \frac{\sqrt{\Delta^2_{a_n^i} + \Delta^2_{b_n^i}}}{\Delta_n}, \tag{3.28}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{\Delta_{a_n^i}}{\Delta_{b_n^i}},$$

unde în expresiile $\Delta_{a_n^i}$, $\Delta_{b_n^i}$, Δ_n s-a înlocuit θ_n cu frecvența Ω după care s-a produs pierderea stabilității. În cazul în care frecarea culombiană în suspensia i este caracterizată prin F_i iar cea vîscoasă prin h_i', în conformitate cu lucrarea citată, prin echivalarea energiilor disipate vîscos, respectiv mixt, se obține următoarea relație:

$$h_i = \frac{4F_i}{\pi L_i \Omega} + h_i' \tag{3.29}$$

în ipoteza că mișcarea este de aceeași formă adică $z_i = L_i \sin(\Omega t - \alpha_i)$; h_i astfel, obținuți vor trebui introduși în expresiile lui γ_i, adică noile expresii ale acestor mărimi vor fi:

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \left(\frac{4E_1}{\pi L_1 \Omega} + h_1'\right) \frac{L^2}{M(\rho^2 + a_2^2)}, \\ \gamma_2 &= \left(\frac{4F_2}{\pi L_2 \Omega} + h_2'\right) \frac{L}{M(\rho^2 + a_1^2)}. \end{aligned} \tag{3.30}$$

Introducînd aceste valori în mărimile L_i (3.28) acestea vor fi funcții determinate de L_i. Scriind că cele două mișcări sînt identice rezultă

$$\Delta^2_{a_n^i} + \Delta^2_{b_n^i} = \Delta_n^2 L_i^2 \tag{3.31}$$

care rezolvată în raport cu L_i dă mărimea amplitudinii mișcării în prezența disipării mixte.

Ecuația (3.31) nu poate fi rezolvată decît numeric. Impactul se determină în conformitate cu formula (3.26).

Primită la redacție la 3 martie 1963

LES VIBRATIONS DISSIPATRICES DES AUTOMOBILES. I

RÉSUMÉ

Dans la première partie de l'article, l'auteur établit les équations de mouvement des automobiles dans un schéma correspondant à un système ayant 4 degrés de liberté, en adoptant, pour caractériser la suspension, un

modèle général dont, par des particularisations, on peut retrouver les équations classiques.

Ensuite, il étudie l'influence des pneus sur le mouvement propre fondamental, ainsi que l'influence de la dissipation d'énergie mixte sur le même mouvement.

Dans la seconde partie, l'auteur exposera les calculs numériques, ainsi que les résultats expérimentaux concernant les problèmes traités.

BIBLIOGRAFIE

1. BIENIC M. P., *Suspension dynamics. Vehicole vibration analysed by a stohastic.* Automob. Engr., **50**, *4* (1960); *Исследования колебаний автомобиля при помощи теории случайных процессов.* Эксперecc-информация автомобилестроение и автотранспорт, *32* (1960).
2. ЧУДАКОВ Е. А., *Теория автомобиля.* Машгиз, Москва, 1950.
3. МАЛКИН И. Г., *Теория устойчивости движения.* Гостехиздат, Москва-Ленинград, 1952.
4. MANEA V., *Asupra oscilațiilor autovehiculului în mers rectiliniu cu viteza constantă.* St. cerc. mec. apl., *6* (1961).
5. РОТЕНБЕРГ Р. В., *Теория подвески автомобиля.* Машгиз, Москва, 1961.
5. TIMOSENKO S., *Théorie des vibrations.* Edit. Béranger, Paris-Liège, 1947.

TURAȚII CRITICE LA ÎNCOVOIERE ÎN TRANSMISIA CARDANICĂ A AUTOMOBILULUI

DE

FL. DUDIȚĂ[1]

621.01

Mărirea turației motoarelor cu ardere internă pe bază de benzină și introducerea unei trepte multiplicatoare în cutiile de viteze ale automobilelor, pe de o parte, și înlăturarea influenței nocive a vibrațiilor (zgomot, uzură, ruperi etc.), pe de altă parte, fac deosebit de actuală problema studierii amănunțite a vibrațiilor de încovoiere (determinarea turațiilor critice) ale transmisiei cardanice ținînd seama de condițiile reale de montaj și de particularitățile constructive.

Problema vibrațiilor de încovoiere ale rotorului elastic este amplu studiată în legătură cu perfecționarea turbinelor. Astfel, pentru determinarea cît mai precisă a spectrului pulsațiilor proprii — deci și a turațiilor critice — ale rotorului turbinei, s-a studiat, teoretic și experimental, influența rigidității reazemelor [3], [5], [9], [11], [13], [14], [18], [19], a neliniarității rigidității reazemelor [9], [17], [18], [19], a reazemelor elastice masive [14], a rigidității peliculei de ulei din lagăre [11], a echilibrării dinamice a rotorului [3], [9], [14] și a amortizoarelor [4], [9], [13], [14].

Deși este cunoscută importanța stabilirii corecte a turației critice a arborilor cardanici — care se calculează încă [8], [15] cu formula dedusă în 1913 de A. N. Krîlov [12] pentru un caz de rezemare simplificat : rigiditate transversală infinită și rigiditate unghiulară nulă (34) (fig. 7) — un studiu teoretic aprofundat, menit să prindă matematic influența multiplilor factori care caracterizează modul de rezemare și particularitățile constructive, a fost ocolit în monografii de specialitate [15] și în cercetări experimentale [16].

---

[1] Institutul politehnic, Brașov.

În această lucrare, autorul își propune să studieze și să stabilească, prin analogie cu cele realizate în domeniul turbinelor, turația critică fundamentală a arborelui cardanic (care, spre deosebire de turbine, se recomandă [8], [15] să fie superioară celei maxime posibile în exploatare) ținînd seama de particularitățile constructive și de montaj.

1. Automobilul, analizat comparativ cu alte mașini, este un mecanism complex cu multe mase, elemente elastice și amortizoare și cu multe grade de libertate. Cuprinderea completă a fenomenului vibrațiilor întregului mecanism al automobilului într-o descriere matematică — ecuații diferențiale — și rezolvarea lor, practic, sînt nerealizabile. De aceea, pentru studiul vibrațiilor, ca în orice alt domeniu al tehnicii, se face o simplificare, o aproximare a realității — model matematic — astfel încît rezultatele obținute prin studiul matematic al „modelului" să se apropie cu suficientă exactitate de realitate. Verificarea se face prin experiență. În cazul automobilului și modelul matematic este destul de complicat. Din această cauză, din mecanismul complex—modelul matematic inițial—se separă sisteme cu număr redus de mase, elemente amortizoare și elastice — „sisteme autonome" sau „sisteme vibrante echivalente" — care se studiază neglijîndu-se în primă aproximație legăturile dintre sisteme. Un studiu aprofundat al fiecăruia din sistemele autonome se realizează prin divizarea în „subsisteme" autonome etc.

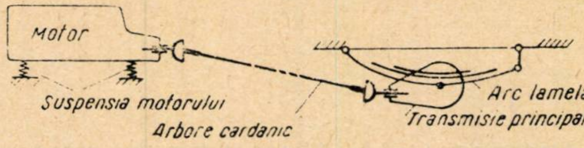


Fig. 1

2. Pentru studiul vibrațiilor de încovoiere ale arborelui transmisiei cardanice, după analiza soluției constructive, cu mare răspîndire, reprezentată în figura 1, modelul matematic potrivit este schematizat în figura 5 : rigiditate transversală nenulă, rigiditate unghiulară nulă și mase concentrate în reazeme.

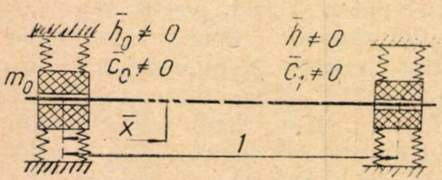


Fig. 2

Cu scopul evitării restrîngerii generalității se adoptă modelul matematic din figura 2 : rigidități transversale și unghiulare nenule și mase concentrate în reazeme.

Deoarece masele concentrate în reazeme se pot considera indirect (prin rigidități), în raționamentele pentru deducerea ecuației pulsațiilor proprii (ecuației seculare) se va adopta modelul din figura 3 care matematic este echivalent celui din figura 2.

3. Ecuația vibrațiilor de încovoiere ale rotorului rezemat elastic, modelat matematic în figura 3, în care se neglijează efectul frecărilor, al forțelor tăietoare și giroscopice este [9], [10], [12], [19]

$$EI\frac{\partial^4 y\,(x,\,t)}{\partial x^4}+\frac{\gamma}{g}A\frac{\partial^2 y(x,\,t)}{\partial t^2}=0 \tag{1}$$

în care s-a notat:

$y\,(x,\,t)$ — săgeata rotorului într-o secţiune oarecare în momentul t,
E — modul de rezistenţă,
I — moment ecuatorial de inerţie al secţiunii transversale,
γ — greutate specifică,
g — acceleraţia gravitaţiei,
A — aria secţiunii transversale.

Soluţia ecuaţiei diferenţiale (1) se va căuta de forma

$$y\,(x,\,t)=y\,(x)\cos\omega t, \tag{2}$$

unde

$y\,(x)$ — săgeata rotorului într-o secţiune oarecare,
ω — viteza unghiulară a rotorului.

Înlocuind soluţia (2) în ecuaţia diferenţială (1) se obţine

$$EI\frac{\mathrm{d}^4 y\,(x)}{\mathrm{d}x^4}-\frac{\gamma}{g}A\,\omega^2\,y\,(x)=0. \tag{3}$$

Derivatele succesive ale săgeţii rotorului au următorul sens fizic:

$$\frac{\mathrm{d}y\,(x)}{\mathrm{d}x}=\varphi\,(x)\text{ — unghi de rotire,}$$

$$EI\frac{\mathrm{d}^2 y\,(x)}{\mathrm{d}x^2}=-\,M(x)\text{ — moment de încovoiere,} \tag{4}$$

$$EI\frac{\mathrm{d}^3 y\,(x)}{\mathrm{d}x^3}=-\,T(x)\text{ — forţă tăietoare,}$$

$$EI\frac{\mathrm{d}^4 y\,(x)}{\mathrm{d}x^4}=q\,(x)\text{ — sarcină unitară.}$$

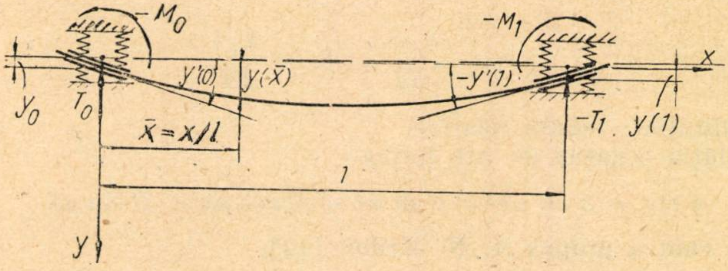


Fig. 3

În cazul rotorului elastic, așa cum reiese și din (3),

$$q(x) = \frac{\gamma}{g} A\, \omega^2\, y(x). \tag{5}$$

Caracteristicile reazemelor — rigiditatea transversală și unghiulară — care pot fi neliniare, le vom considera liniarizate printr-una din metodele cunoscute [9], [17].

Condițiile la limită pentru integrarea ecuației (3), ținînd seama de (4) sînt :

$$EI\frac{\mathrm{d}^2y(0)}{\mathrm{d}x^2} = h_{0_r}\frac{\mathrm{d}y(0)}{\mathrm{d}x}, \quad EI\frac{\mathrm{d}^3y(0)}{\mathrm{d}x^3} = -\,c_{0_r}\, y(0),$$

$$EI\frac{\mathrm{d}^2y(l)}{\mathrm{d}x^2} = -\,h_{1_r}\frac{\mathrm{d}y(l)}{\mathrm{d}x}, \quad EI\frac{\mathrm{d}^3y(l)}{\mathrm{d}x^3} = c_{1_r}\, y(l), \tag{6}$$

în care

c_{0_r}, c_{1_r} — rigiditățile reduse liniarizate la deformații transversale ale reazemelor respective,

h_{0_r}, h_{1_r} — rigiditățile reduse liniarizate la deformații unghiulare ale reazemelor respective.

Introducînd notațiile

$$\bar{x} = \frac{x}{l}, \quad \alpha^4 = \frac{\gamma}{g}\frac{Al^4}{EI}\,\omega^2,$$

$$\frac{\mathrm{d}^4 y(\bar{x})}{\mathrm{d}\bar{x}^4} = y^{\mathrm{IV}}(\bar{x}), \quad \frac{\mathrm{d}^2 y(\bar{x})}{\mathrm{d}\bar{x}^2} = y''(\bar{x}), \tag{7}$$

ecuația (3) devine

$$y^{\mathrm{IV}}(\bar{x}) - \alpha^4\, y(\bar{x}) = 0 \tag{8}$$

iar condițiile de integrare (6) se transcriu

$$y''(0) = \bar{h}_0\, y'(0), \quad y'''(0) = -\,\bar{c}_0\, y(0), \tag{9}$$

$$y''(1) = -\,\bar{h}_1\, y'(1), \quad y'''(1) = \bar{c}_1\, y(1), \tag{9'}$$

în care

$$\bar{c}_i = \frac{c_{i_r}\, l^3}{EI}, \quad \bar{h}_i = \frac{h_{i_r}\, l}{EI} \tag{10}$$

sînt rigiditățile reduse relative.

Soluția ecuației (8) are forma

$$y(\bar{x}) = A\,\mathrm{ch}\,\alpha\bar{x} + B\,\mathrm{sh}\,\alpha\bar{x} + C\cos\alpha\bar{x} + D\sin\alpha\bar{x} \tag{11}$$

sau, așa cum a propus A. N. Krîlov [12],

$$y(\bar{x}) = A\,S(\alpha\bar{x}) + B\,T(\alpha\bar{x}) + C\,U(\alpha\bar{x}) + D\,V(\alpha\bar{x}), \tag{12}$$

unde S, T, U, V sînt combinaţii liniare de funcţii hiperbolice şi trigonometrice :

$$\begin{aligned} S(\alpha x) &= \frac{1}{2}(\operatorname{ch} \alpha x + \cos \alpha x), \\ T(\alpha x) &= \frac{1}{2}(\operatorname{sh} \alpha x + \sin \alpha x), \\ U(\alpha x) &= \frac{1}{2}(\operatorname{ch} \alpha x - \cos \alpha x), \\ V(\alpha x) &= \frac{1}{2}(\operatorname{sh} \alpha x - \sin \alpha x). \end{aligned} \tag{13}$$

Derivatele acestor funcţii au proprietăţi de permutări circulare după cum se vede din tablou.

Ω	Ω'	Ω''	Ω'''	Ω^{IV}
$S(\alpha x)$	$\alpha V(\alpha x)$	$\alpha^2 U(\alpha x)$	$\alpha^3 T(\alpha x)$	$\alpha^4 S(\alpha x)$
$T(\alpha x)$	$\alpha S(\alpha x)$	$\alpha^2 V(\alpha x)$	$\alpha^3 U(\alpha x)$	$\alpha^4 T(\alpha x)$
$U(\alpha x)$	$\alpha T(\alpha x)$	$\alpha^2 S(\alpha x)$	$\alpha^3 V(\alpha x)$	$\alpha^4 U(\alpha x)$
$V(\alpha x)$	$\alpha U(\alpha x)$	$\alpha^2 T(\alpha x)$	$\alpha^3 S(\alpha x)$	$\alpha^4 V(\alpha x)$

(14)

Înlocuind în (12)

$$S(0) = 1, \quad T(0) = U(0) = V(0) = 0, \tag{15}$$

rezultă

$$y(0) = A, \quad y'(0) = \alpha B, \quad y''(0) = \alpha^2 C, \quad y'''(0) = \alpha^3 D. \tag{16}$$

Cu aceste precizări condiţiile (9) devin

$$C = \frac{\bar{h}_0}{\alpha} B, \quad D = -\frac{\bar{c}_0}{\alpha^3} A. \tag{17}$$

Ţinînd seama de (14) şi (17), condiţiile de integrare (9′) duc la sistemul omogen în A şi B

$$\begin{aligned} A\,L(\alpha) + B\,M(\alpha) &= 0, \\ A\,N(\alpha) + B\,P(\alpha) &= 0, \end{aligned} \tag{18}$$

unde

$$\begin{aligned} L(\alpha) &= \alpha^4 U(\alpha) - \bar{c}_0 \alpha T(\alpha) + \bar{h}_1 \alpha^3 V(\alpha) - \bar{c}_0 \bar{h}_1 U(\alpha), \\ M(\alpha) &= \alpha^4 V(\alpha) + (\bar{h}_0 + \bar{h}_1) \alpha^3 S(\alpha) + \bar{h}_0 \bar{h}_1 \alpha^2 T(\alpha), \\ N(\alpha) &= \alpha^6 T(\alpha) - (\bar{c}_0 + \bar{c}_1) \alpha^3 S(\alpha) + \bar{c}_0 \bar{c}_1 V(\alpha), \\ P(\alpha) &= \alpha^6 U(\alpha) + \bar{h}_0 \alpha^5 V(\alpha) - \bar{c}_1 \alpha^3 T(\alpha) - \bar{h}_0 \bar{c}_1 \alpha^2 U(\alpha). \end{aligned} \tag{19}$$

Prin anularea determinantului sistemului omogen (18) obținem ecuația seculară transcendentă

$$\begin{aligned} & A_2(\alpha)\alpha^{10} + \bar{h}_1 A_5(\alpha)\alpha^9 + \bar{c}_1 A_6(\alpha)\alpha^7 - \bar{c}_1 \bar{h}_1 A_1(\alpha)\alpha^6 + \\ & + \bar{h}_0[A_5(\alpha)\alpha^9 + \bar{h}_1 A_4(\alpha)\alpha^8 - \bar{c}_1 A_3(\alpha)\alpha^6 - \bar{c}_1 \bar{h}_1 A_5(\alpha)\alpha^5] + \\ & + \bar{c}_0[A_6(\alpha)\alpha^7 - \bar{h}_1 A_3(\alpha)\alpha^6 - \bar{c}_1 A_4(\alpha)\alpha^4 - \bar{c}_1 \bar{h}_1 A_6(\alpha)\alpha^3] - \\ & - \bar{c}_0 \bar{h}_0[A_1(\alpha)\alpha^6 + \bar{h}_1 A_5(\alpha)\alpha^5 + \bar{c}_1 A_6(\alpha)\alpha^3 - \bar{c}_1 \bar{h}_1 A_2(\alpha)\alpha^2] = 0 \end{aligned} \tag{20}$$

în care s-a notat :

$$\begin{aligned} A_1(\alpha) &= 2[S^2(\alpha) - T(\alpha)V(\alpha)] = \operatorname{ch}\alpha \cos\alpha + 1, \\ A_2(\alpha) &= 2[T(\alpha)V(\alpha) - U^2(\alpha)] = \operatorname{ch}\alpha \cos\alpha - 1, \\ A_3(\alpha) &= 2[S^2(\alpha) - U^2(\alpha)] = 2\operatorname{ch}\alpha \cos\alpha, \\ A_4(\alpha) &= 2[T^2(\alpha) - V^2(\alpha)] = 2\operatorname{sh}\alpha \sin\alpha, \\ A_5(\alpha) &= 2[S(\alpha)T(\alpha) - U(\alpha)V(\alpha)] = \operatorname{ch}\alpha \sin\alpha + \operatorname{sh}\alpha \cos\alpha, \\ A_6(\alpha) &= 2[T(\alpha)U(\alpha) - S(\alpha)V(\alpha)] = \operatorname{ch}\alpha \sin\alpha - \operatorname{sh}\alpha \cos\alpha. \end{aligned} \tag{21}$$

Tabele ale funcțiilor (13) și (21) se găsesc în [1].

Cunoscînd soluțiile ecuației seculare (20), turațiile critice se determină, ținînd seama de notația introdusă (7), cu formula

$$\omega = \frac{\pi n}{30} = \alpha^2 \sqrt{\frac{g}{\gamma} \frac{EI}{Al^4}} \; \frac{1}{\mathrm{s}} . \tag{22}$$

Deoarece arborele transmisiei cardanice se sprijină pe reazeme elastice ($\bar{c}_0 \neq 0$, $\bar{c}_1 \neq 0$) prin intermediul *articulațiilor cardanice* (fig. 4) ($\bar{h}_0 = \bar{h}_1 = 0$), ecuația seculară transcendentă (20) se simplifică simțitor devenind

$$A_2(\alpha)\alpha^6 + (\bar{c}_0 + \bar{c}_1) A_6(\alpha)\alpha^3 - \bar{c}_0 \bar{c}_1 A_4(\alpha) = 0. \tag{23}$$

Majoritatea cazurilor de rezemare ale arborelui transmisiei cardanice sînt cuprinse în ecuația (23) care pe de o parte poate fi utilizată pentru determinarea turației critice minime sau fundamentale cu formula (22) iar pe de altă parte pentru determinarea rigidităților necesare.

4. Ecuaţia generală (20) a fost dedusă pentru situaţia reprezentată în figura 3, deci ecuaţia seculară (23) – particularizare a ecuaţiei seculare (20) pentru transmisia cardanică ($\bar{h}_0 = \bar{h}_1 = 0$) — este valabilă pentru modelul reprezentat în figura 4. Aşa cum s-a arătat la început însă, modelul din figura 5, cu mase concentrate în reazeme, este mai apropiat de realitate.

Pentru descrierea vibraţiilor rotorului rezemat în reazeme masive (fig. 5) rămîne valabilă ecuaţia (8) unde vor trebui alese condiţii la limită adecvate.

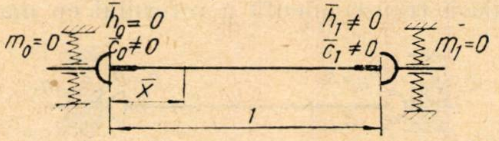


Fig. 4

Astfel, notînd (7)

$$\alpha^4 = \frac{\gamma}{g} \frac{Al^4}{EI} \omega^2 = \frac{ql^4}{EI} \omega^2, \tag{24}$$

conform cu (2) şi (24) pentru cele două reazeme obţinem, respectiv

$$\begin{aligned} y''(0, t)_{\max} &= -\omega^2 y(0) = -\alpha^4 \frac{EI}{ql^4} y(0), \\ y''(1, t)_{\max} &= -\omega^2 y(1) = -\alpha^4 \frac{EI}{ql^4} y(1). \end{aligned} \tag{25}$$

Forţa tăietoare totală (elastică plus inerţială), ţinînd seama de regula semnelor adoptată în cursurile de Rezistenţa materialelor, pentru cele două reazeme este, respectiv

$$\begin{aligned} T(0) &= \bar{c}_0 y(0) + m_0 y''(0, t)_{\max}, \\ T(1) &= -\bar{c}_1 y(1) - m_1 y''(1, t)_{\max}. \end{aligned} \tag{26}$$

Ştiind că $\bar{x} = \frac{x}{l}$, forţa tăietoare are expresia

$$\frac{EI}{l^3} y'''(\bar{x}) = -T(\bar{x}). \tag{27}$$

Deci, ţinînd seama de (25), (26) şi (27) condiţiile (9) şi (9′) pentru cazul reprezentat în figura 5 se transcriu

$$\begin{aligned} y'''(0) &= -c_0 \cdot y(0), \\ y'''(1) &= c_1 \cdot y(1), \end{aligned} \tag{28}$$

în care

$$
\begin{aligned}
c_{0e} &= \bar{c}_0 - \alpha^4 \frac{m_0}{ql} = \bar{c}_0 - \alpha^4 n_0, \\
c_{1e} &= \bar{c}_1 - \alpha^4 \frac{m_1}{ql} = \bar{c}_1 - \alpha^4 n_1.
\end{aligned}
\tag{29}
$$

Ecuația seculară transcendentă a rotorului cu mase concentrate în reazeme (cazul frecvent al arborelui transmisiei cardanice a automobilului), reprezentat în figura 5, se scrie, conform cu (23),

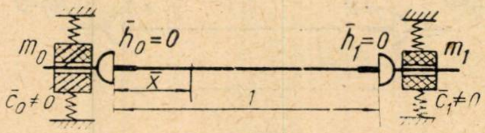


Fig. 5

$$A_2(\alpha)\,\alpha^6 + (c_{0e} + c_{1e})\,A_6(\alpha)\,\alpha^3 - c_{0e}\,c_{1e}\,A_4(\alpha) = 0. \tag{30}$$

Ecuația (30) se rezolvă grafic sau prin încercări cu ajutorul tabelelor existente [1] ale funcțiilor (21).

5. Turațiile critice ale rotorilor articulați care se întîlnesc în construcțiile de turbine (sistemul generator-turbină) au fost tratate detaliat, folosind metoda „rigidităților dinamice" dată de F. M. Dimentberg în [5] (a se vedea și [20]). S-a ajuns la concluzia, verificată experimental, că turațiile critice fundamentale ale rotorilor articulați sînt, respectiv, cu puțin inferioare turațiilor critice fundamentale ale rotorilor considerați separat.

Pentru determinarea turațiilor critice ale arborilor cardanici articulați, care se întîlnesc în transmisiile policardanice [6], [8], [15], cu suficient de bună aproximație se poate folosi ecuația seculară (30), luînd în considerare influența arborilor cardanici vecini asupra celui studiat indirect, prin mase reduse concentrate la extremități. Concluzia finală la care se ajunge pe această cale este aceeași cu cea din [5].

6. Aplicații.

a) Arbore cardanic liber:

$$m_0 = m_1 = \bar{c}_0 = \bar{c}_1 = 0.$$

Ecuația (30) cu aceste condiții devine

$$A_2(\alpha) = 0.$$

Prima soluție nenulă este $\alpha = 4{,}73$.
Aplicînd formula (22) se obține turația critică

$$n_{\text{cr}} = 214 \sqrt{\frac{g}{\gamma}\,\frac{EI}{Al^4}} \text{ rot/min.} \tag{31}$$

b) Arbore cardanic liber la o extremitate și încastrat la cealaltă (fig. 6):

$$m_0 = m_1 = \bar{c}_0 = \infty, \ \bar{c}_1 = 0.$$

Cu aceste condiții ecuația (30) devine

$$A_6(\alpha) = 0.$$

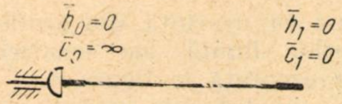


Fig. 6

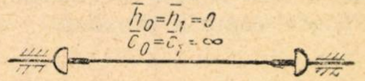


Fig. 7

Rezolvînd se găsește $\alpha = 3{,}93$. Prin înlocuirea acestei valori în (22) se obține

$$n_{cr} = 147{,}1 \sqrt{\frac{g}{\gamma} \frac{EI}{Al^4}} \text{ rot/min.} \tag{32}$$

c) Arbore cardanic montat rigid în ambele reazeme (fig. 7):

$$m_0 = m_1 = 0, \quad \bar{c}_0 = \bar{c}_1 = \infty.$$

Înlocuind în (30) se găsește ecuația

$$A_4(\alpha) = 0$$

a cărei primă soluție nenulă este $\alpha = \pi$.

Turația critică în acest caz este

$$n_{cr} = 94{,}3 \sqrt{\frac{g}{\gamma} \frac{EI}{Al^4}} \text{ rot/min.} \tag{33}$$

Pentru cazul practic al arborelui cardanic tubular, din oțel, de diametru exterior *D*, diametru interior *d* și lungime *l*, înlocuind în (33)

$$E = 2{,}1.10^6 \text{ kg/cm}^2, \ I = \frac{\pi}{64}(D^4 - d^4) \text{ cm}^4, \ A = \frac{\pi}{4}(D^2 - d^2) \text{ cm}^2,$$

$$\gamma = 8{,}1.10^{-3} \text{ kg/cm}^3, \ g = 981 \text{ cm/s}^2,$$

se ajunge la formula recomandată în lucrările de specialitate pentru determinarea turației critice la încovoiere a arborelui cardanic al automobilului [8], [15]:

$$n_{cr} = 1{,}2.10^7 \frac{\sqrt{D^2 + d^2}}{l^2} \text{ rot/min.} \tag{34}$$

d) Arbore cardanic rezemat elastic în lagăre imponderabile (fig. 4) :

$$m_0 = m_1 = 0, \quad \bar{c}_0 \neq 0, \ \bar{c}_1 \neq 0.$$

Turația critică are expresia (35), particularizare a formulei (22),

$$n_{cr} = 1{,}2.10^7 \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 \frac{\sqrt{D^2 + d^2}}{l^2} \text{ rot/min}, \tag{35}$$

în care α este soluție a ecuației (23).

Toate cazurile analizate se desprind cu ușurință din graficul cazurilor limită ale ecuației (23) reprezentată în figura 8.

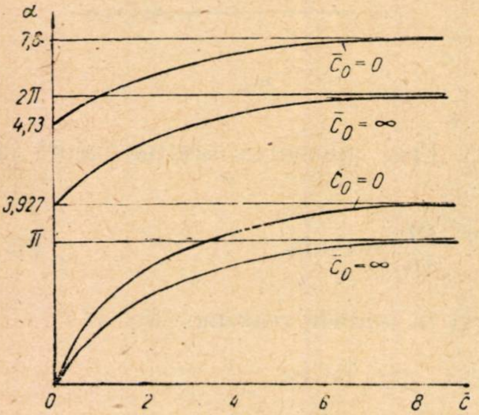


Fig. 8

e) Arborele cardanic montat în „trompă cardanică" :

Există, destul de rar, transmisii cardanice cu arborele montat în tub cilindric — transmisii cu trompă cardanică.

Pentru determinarea turației critice a acestui arbore cardanic, care se consideră încastrat în ambele reazeme, se folosește ecuația seculară generală (20) care cu condițiile de încastrare $\bar{c}_0 = \bar{c}_1 = \bar{h}_0 = \bar{h}_1 = \infty$ devine

$$A_2(\alpha) = 0$$

de unde rezultă $\alpha = 4{,}73$.

Folosind notațiile și constantele fizice ale cazului analizat (*c*) se obține expresia [8]

$$n_{cr} = 2{,}75.10^7 \frac{\sqrt{D^2 + d^2}}{l^2} \text{ rot/min}. \tag{36}$$

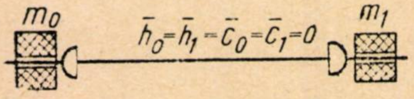


Fig. 9

f) Arbore cardanic montat în lagăre masive libere (fig. 9) :

$$m_0 \neq 0, \ m_1 \neq 0, \ \bar{c}_0 = \bar{c}_1 = 0.$$

Ecuația (30) pentru cazul analizat se scrie

$$n_0 n_1 A_4(\alpha)\, \alpha^2 + (n_0 + n_1) A_6(\alpha)\, \alpha - A_2(\alpha) = 0. \tag{37}$$

Cunoscînd prima soluție nenulă a acestei ecuații, turația critică la încovoiere se determină cu formula (35).

Diferitele cazuri particulare se pot analiza cu ajutorul graficului din figura 10 în care s-au reprezentat cazurile limită ale ecuației (37).

g) Arbore cardanic montat în lagăre masive sprijinite elastic (caz general real) :

$$n_0 \neq 0, \ n_1 \neq 0, \ \bar{c}_0 \neq 0, \ \bar{c}_1 \neq 0.$$

Turaţia critică are expresia (35) în care α este soluţie a ecuaţiei (30).

7. Analizînd cazurile limită de rezemare a arborelui cardanic *a*), *b*), *c*), ar fi greşit să se ajungă la concluzia că, prin micşorarea rigidităţii reazemelor, prima turaţie critică la încovoiere, comparativ cu cazul *c*), se măreşte [9].

Pentru rigidităţi finite şi nenule (cazurile reale) — $0 < \bar{c}_0 < \infty$, $0 < \bar{c}_1 < \infty$ — din ecuaţia (23) (fig. 8) rezultă că prima turaţie critică la încovoiere, comparativ cu cea corespunzătoare cazului *c*) — formula (34) recomandată în lucrările de specialitate [8], [15] — poate fi, în anumite condiţii, mai mare ($\alpha > \pi$) sau, cum se întîmplă în cazurile practice [5], mai mică ($\alpha < \pi$).

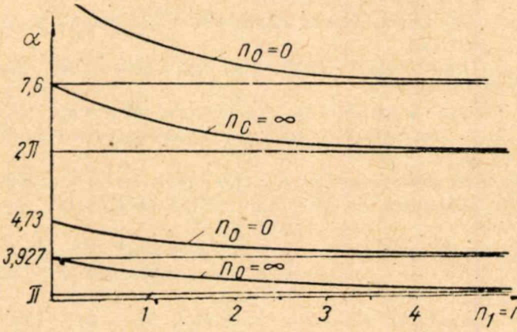


Fig. 10

Prin micşorarea rigidităţilor reazemelor, prima turaţie critică la încovoiere (35) se poate coborî (fig. 8) sub spectrul turaţiilor de regim. În acest caz, ţinînd seama şi de masele reduse concentrate în reazeme, turaţia critică de calcul a arborelui cardanic (35) este cea corespunzătoare soluţiei a doua (în ordine crescătoare) a ecuaţiei (30) care este superioară celei corespunzătoare formulei (34).

Ecuaţia (30) permite deci, ţinînd seama de particularităţile constructive, plasarea convenabilă a spectrului turaţiilor de regim în raport cu spectrul turaţiilor critice la încovoiere (între prima şi a doua) reuşindu-se, concomitent, obţinerea de gabarite reduse pentru arborii cardanici cu turaţii mari şi amortizarea vibraţiilor transmise la caroseria automobilului, ceea ce răspunde tendinţelor constructive amintite în introducere.

Primită la redacţie la 22 ianuarie 1963

КРИТИЧЕСКИЕ ОБОРОТЫ ПРИ ИЗГИБЕ В КАРДАННОЙ ПЕРЕДАЧЕ АВТОМОБИЛЯ

РЕЗЮМЕ

В работе, учитывая конструктивные особенности карданной передачи автомобиля (роторы шарнирно связанные карданными муфтами,

небольшие жесткости и массы опор) устанавливается трансцендентное уравнение собственных пульсаций (30) и общая формула критических оборотов при изгибе (35).

BIBLIOGRAFIE

1. АНАНЬЕВ И. В., *Справочник по расчету собственных колебаний упругих систем*. Гостехиздат, Москва, 1946.
2. БАТЬ М. И. и др., *Теоретическая механика в примерах и задачах*. Физматгиз, Москва, 1961, **II**.
3. BECKER H., *Über den unwuchtigen Läufer und die erzwungenen Maschinenschwingungen*. VDI–Z, **103**, *11* (1961).
4. ДИН-АВЕРНС Р., *Резина в автомобилестроении*. Машгиз, Москва, 1962.
5. ДИМЕНТБЕРГ Ф. М., *Изгибные колебания вращающихся валов*. Изд. АН СССР, Москва, 1959.
6. DUDIȚĂ FL., *Transmisii policardanice*. St. cerc. mec. apl., *1* (1962).
7. ГАНТМАХЕР Ф. Р., *Лекции по аналитической механике*. Физматгиз, Москва, 1960.
8. ГОЛЬД Б. В., *Конструирование и расчет автомобиля*. Машгиз, Москва, 1962.
9. ГРИГОРЬЕВ Н. В., *Нелинейные колебания элементов и сооружений*. Машгиз, Москва, 1961.
10. КОЖЕШНИК Я., *Динамика машин*. Машгиз, Москва, 1961.
11. КОРОВИН Е. В., *Приближенная оценка критического числа оборотов систем ротор-подшипники качения быстроходных турбомашин*. Вестник машиностроения, *7* (1960).
12. КРЫЛОВ А. Н., *О некоторых дифференциальных уравнениях математической физики*. Гос. изд. тех. теор. лит., Москва, 1950.
13. КРЮЧКОВ Ю. С., ЧЕРНОВ С. К., *Влияние упругости опор роторов на вибрации механизмов*. Вестник машиностроения, *11* (1961).
14. ЛИСИЦЫН И. С., *О поперечных колебаниях вращающихся роторов с разными упруго массивными опорами*. Вестник машиностроения, *8* (1961).
15. МАЛАХОВСКИЙ Я. Э. и др., *Карданные передачи*. Машгиз, Москва, 1962.
16. KAYE M. C., *How to limit truck drive train vibration*. SAE-Journal, November (1961).
17. ПАНОВКО Я. Т., *Основы прикладной теории упругих колебаний*. Машгиз, Москва, 1957.
18. ⁂ *Поперечные колебания и критические скорости*. Изд. АН СССР, Москва, 1951.
19. ТИМОШЕНКО, *Колебания в инженерном деле*. Физматгиз, Москва, 1959.
20. ⁂ *Справочник машиностроителя*. Машгиз, Москва, 1962, **3**.

NOTE

DESPRE O APLICARE A INTEGRALELOR CURBILINII ÎN MECANICĂ

DE

P. A. LEBEDEV[1]

531.2

Integralele curbilinii își găsesc aplicare la rezolvarea diverselor probleme ale fizicii și tehnicii. Integralele curbilinii de tipul I se folosesc în speță pentru rezolvarea unor probleme de mecanică [1], [2]. Astfel sînt problemele determinării maselor, momentelor statice, momentelor de inerție, coordonatelor centrelor de greutate ale curbelor materiale, problema găsirii forțelor de atracție pe care o curbă materială le exercită

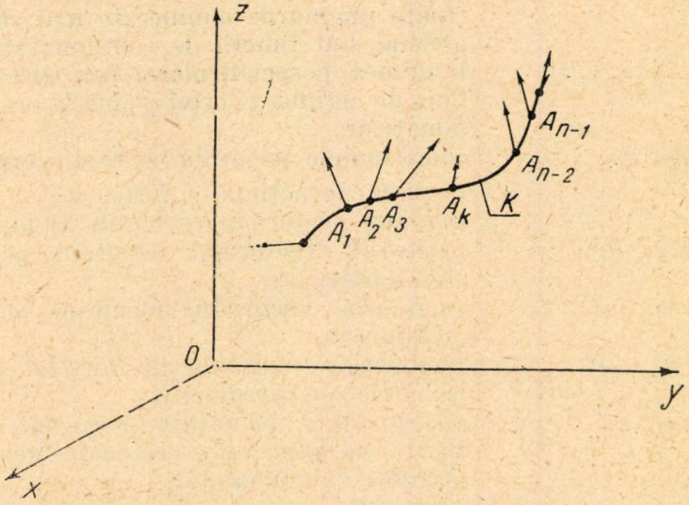


Fig. 1

---

[1] Institutul de textile „M. Kirov", Leningrad.

asupra unor puncte materiale și problema calculului ariei unei suprafețe generate prin rotația unei curbe plane în jurul unei axe din planul ei (teorema lui Pappus-Guldin).

În această notă se arată cum se pot aplica integralele curbilinii de tipul I la rezolvarea unei probleme de statică, determinarea vectorului rezultant și a momentului rezultant al forțelor, distribuite de-a lungul liniilor curbe, această rezolvare făcîndu-se în coordonate carteziene.

Fie dată într-un sistem de coordonate rectangulare o curbă strîmbă (fig. 1), în ale cărei puncte sînt aplicate forțe ale căror module și direcții variază de-a lungul curbei.

Este necesar să se găsească modulul, direcția și suportul vectorului rezultant și momentului rezultant al acestor forțe.

Introducem următoarele notații :

S — lungimea curbei,

q — modulul forțelor, aplicate de-a lungul curbei, sau, mai precis modulul forței care revine pe unitatea de lungime a arcului de curbă,

$\gamma, \delta, \varepsilon$ — unghiurile vectorului $\bar{q}$, într-un punct arbitrar al curbei, față de axele de coordonate, respectiv x, y și z,

ξ, η, ϑ — unghiurile de înclinare a perpendicularei coborîtă din originea coordonatelor pe linia de acțiune a forței $\bar{q}$, respectiv pe axele x, y și z (toate unghiurile enumerate mai sus în cazul general sînt funcții de coordonate),

$\Delta = \Delta(x, y, z)$ — lungimea perpendicularei sau distanța de la linia de acțiune a forței $\bar{q}$ pînă la originea coordonatelor,

x_k^0, y_k^0, z_k^0 — coordonatele piciorului acestei perpendiculare pe linia de acțiune a forței $\bar{q}$,

P — modulul vectorului rezultant al forțelor,

P_x, P_y, P_z — proiecțiile vectorului rezultant pe axele de coordonate,

λ, μ, ν — unghiurile vectorului rezultant cu axele de coordonate,

M_x, M_y, M_z — momentele rezultante ale forțelor q în raport cu axele de coordonate,

x_0, y_0, z_0 — coordonatele piciorului perpendicularei, coborîtă pe suportul vectorului rezultant din originea coordonatelor,

φ, χ, ψ — unghiurile formate de perpendiculara coborîtă pe suportul vectorului rezultant, cu axele de coordonate x, y și z,

D — lungimea perpendicularei coborîte din originea coordonatelor pe suportul vectorului rezultant,

A_k — un punct arbitrar pe curbă.

Vom diviza curba K într-o serie de elemente suficient de mici prin punctele $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$ și vom analiza fiecare din aceste porțiuni. Vom presupune că sarcina ce revine pe unitatea de lungime a curbei este constantă atît ca modul cît și ca direcție în limitele acestei porțiuni care, aproximativ, poate fi considerată rectilinie; cu aceste ipoteze, forța care acționează pe această porțiune de lungime S_k se exprimă aproximativ prin mărimea $\bar{q}\, S_k$. Proiecțiile acestei forțe pe axele de coordonate sînt

$$q\, S_k \cos\gamma, \quad q\, S_k \cos\delta, \; q\, S_k \cos\varepsilon.$$

Sumele

$$\sigma_x = \sum_{k=1}^{n} q\, S_k \cos\gamma, \; \sigma_y = \sum_{k=1}^{n} q\, S_k \cos\delta, \; \sigma_z = \sum_{k=1}^{n} q\, S_k \cos\varepsilon$$

reprezintă valorile aproximative ale proiecțiilor pe axele de coordonate x, y, z ale vectorului rezultant al forțelor, distribuite de-a lungul conturului.

În cazul cînd lunginea porțiunii maxime a curbei tinde către zero, aceste sume integrale se vor transforma în integrale curbilinii care reprezintă valorile exacte ale proiecțiilor pe axele x, y și z ale vectorului rezultant:

$$P_x = \int_s q \cos\gamma \, \mathrm{d}s, \quad P_y = \int_s q \cos\delta \, \mathrm{d}s, \quad P_z = \int_s q \cos\varepsilon \, \mathrm{d}s. \tag{1}$$

Modulul vectorului rezultant este

$$P = \sqrt{P_x^2 + P_y^2 + P_z^2}. \tag{2}$$

Cosinusurile directoare ale suportului vectorului rezultant sînt

$$\cos\gamma = \frac{P_x}{P}, \; \cos\mu = \frac{P_y}{P}, \; \cos\nu = \frac{P_z}{P}. \tag{3}$$

Pentru determinarea poziției suportului vectorului rezultant se alege un punct arbitrar, de exemplu originea coordonatelor. Distanța de la el pînă la suportul forței elementare, aplicată într-un punct oarecare al curbei, aleasă pe porțiunea considerată, se determină în următoarea succesiune:

Se scrie ecuația suportului forței elementare

$$\frac{x - x_k}{\cos\gamma} = \frac{y - y_k}{\cos\delta} = \frac{z - z_k}{\cos\varepsilon} \tag{4}$$

precum și ecuația perpendicularei coborîtă din originea coordonatelor pe această linie

$$\frac{x}{\cos\xi} = \frac{y}{\cos\eta} = \frac{z}{\cos\vartheta}, \tag{5}$$

unde

$$\cos\gamma\cos\xi+\cos\delta\cos\eta+\cos\varepsilon\cos\vartheta=0, \qquad (6)$$

$$\cos^2\zeta+\cos^2\eta+\cos^2\vartheta=1. \qquad (7)$$

Rezolvînd sistemul format de ecuațiile (4) — (7) se găsesc coordonatele x^0, y^0, z^0 apoi se determină lungimea perpendicularei $\Delta=\Delta(x, y, z)$.

Se scriu expresiile momentelor rezultante ale forțelor care acționează de-a lungul curbei, în raport cu axele de coordonate

$$M_x\approx\sum_{k=1}^{n} q\cos\varepsilon\,\Delta\cos\eta\, S_k-\sum_{k=1}^{n} q\cos\delta\,\Delta\cos\vartheta\, S_k,$$

$$M_y\approx\sum_{k=1}^{n} q\cos\gamma\,\Delta\cos\vartheta\, S_k-\sum_{k=1}^{n} q\cos\varepsilon\,\Delta\cos\xi\, S_k,$$

$$M_z\approx\sum_{k=1}^{n} q\cos\delta\,\Delta\cos\xi\, S_k-\sum_{k=1}^{n} q\cos\gamma\,\Delta\cos\eta\, S_k.$$

Cînd porțiunea maximă a curbei tinde către zero, la limită obținem valorile exacte ale proiecțiilor momentului principal pe axele de coordonate care se exprimă prin integralele curbilinii de tipul I :

$$\begin{aligned}
M_x&=\int_s q\cos\varepsilon\,\Delta\cos\eta\,\mathrm{d}s-\int_s q\cos\delta\,\Delta\cos\vartheta\,\mathrm{d}s,\\
M_y&=\int_s q\cos\gamma\,\Delta\cos\vartheta\,\mathrm{d}s-\int_s q\cos\varepsilon\,\Delta\cos\xi\,\mathrm{d}s, \qquad (8)\\
M_z&=\int_s q\cos\delta\,\Delta\cos\xi\,\mathrm{d}s-\int_s q\cos\gamma\,\Delta\cos\eta\,\mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

Aceleași proiecții, în cazul cînd sistemul de forțe este echivalent cu o forță unică, se pot exprima și în funcție de proiecțiile vectorului rezultant

$$\begin{aligned}
M_x&=P_z y_0-P_y z_0,\\
M_y&=P_x z_0-P_z x_0, \qquad (9)\\
M_z&=P_y x_0-P_x y_0.
\end{aligned}$$

În ultima ecuație coordonatele piciorului perpendicularei, coborîtă din originea coordonatelor pe linia de acțiune a vectorului rezultant, reprezintă brațele proiecțiilor ei în raport cu originea coordonatelor.

Din ecuațiile (9) rezultă direct :

$$M_x P_x+M_y P_y+M_z P_z=0. \qquad (10)$$

Pentru determinarea poziției suportului vectorului rezultant

$$\frac{x - x_0}{\cos \lambda} = \frac{y - y_0}{\cos \mu} = \frac{z - z_0}{\cos \nu} \tag{11}$$

este necesar să găsim coordonatele punctului de intersecție al ei cu perpendiculara

$$\frac{x}{\cos \varphi} = \frac{y}{\cos \chi} = \frac{z}{\cos \psi} \tag{12}$$

coborîtă din originea coordonatelor. Aceste coordonate satisfac ecuația (12) și de aceea

$$\frac{x_0}{\cos \varphi} = \frac{y_0}{\cos \chi} = \frac{z_0}{\cos \psi}. \tag{13}$$

Sînt evidente următoarele relații :

$$\begin{gathered}\cos \lambda \cos \varphi + \cos \mu \cos \chi + \cos \nu \cos \psi = 0, \\ \cos^2 \varphi + \cos^2 \chi + \cos^2 \psi = 1.\end{gathered} \tag{14}$$

Rezolvarea sistemului format de ecuațiile liniar independente două cîte două (9) cu ecuațiile (12), (13) și (14) permite să se găsească coordonatele :

$$\begin{aligned} x_0 &= P^{-2} (P_y M_z - P_z M_y), \\ y_0 &= P^{-2} (P_z M_x - P_x M_z), \\ z_0 &= P^{-2} (P_x M_y - P_y M_x), \end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned} x_0 = P^{-2} \Big\{ & P_y \Big[\int_s q \Delta \cos \delta \cos \xi \, ds - \int_s q \Delta \cos \gamma \cos \eta \, ds \Big] - \\ & - P_z \Big[\int_s q \Delta \cos \gamma \cos \vartheta \, ds - \int_s q \Delta \cos \varepsilon \cos \xi \, ds \Big] \Big\}, \\ y_0 = P^{-2} \Big\{ & P_z \Big[\int_s q \Delta \cos \varepsilon \cos \eta \, ds - \int_s q \Delta \cos \delta \cos \vartheta \, ds \Big] - \\ & - P_x \Big[\int_s q \Delta \cos \delta \cos \xi \, ds - \int_s q \Delta \cos \gamma \cos \eta \, ds \Big] \Big\}, \\ z_0 = P^{-2} \Big\{ & P_x \Big[\int_s q \Delta \cos \gamma \cos \vartheta \, ds - \int_s q \Delta \cos \varepsilon \cos \xi \, ds \Big] - \\ & - P_y \Big[\int_s q \Delta \cos \varepsilon \cos \eta \, ds - \int_s q \Delta \cos \delta \cos \vartheta \, ds \Big] \Big\}. \end{aligned} \tag{16}$$

Ecuațiile (1), (8) și (16) dau tocmai soluția căutată a problemei reducerii sistemului de forțe. Menționăm că în cazul în care sistemul de forțe nu este echivalent cu o forță unică, ecuațiile (16) determină coordonatele piciorului perpendicularei coborîte din originea O pe axa centrală a sistemului de forțe, cum se poate ușor verifica. În acest din urmă caz ecuația (10) nu mai este satisfăcută. Lungimea perpendicularei este

$$D = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}$$

iar cosinusurile directoare ale perpendicularei sînt

$$\cos\varphi = \frac{x_0}{D}, \quad \cos\chi = \frac{y_0}{D};$$

$$\cos\psi = \frac{z_0}{D}.$$

Într-o lucrare publicată anterior [3] se dă soluția unei probleme analoge sub formă vectorială.

Tot acolo sînt studiate problemele reducerii sistemelor de forțe distribuite de-a lungul liniilor curbe în plan și în spațiu.

Rezultatele obținute în acest articol se aplică și la studiul forțelor de interacțiune a elementelor cuplelor cinematice elicoidale [4].

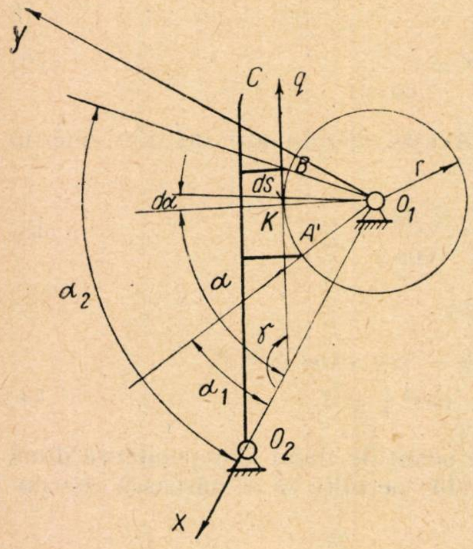


Fig. 2

Vom analiza acum aplicarea rezultatelor obținute la teoria frînelor mașinilor de ridicat.

Exemplu. Să se determine linia de acțiune a rezultantei forțelor de frecare a sabotului fixat rigid de pîrghia O_2C de roata care se rotește în jurul axei O_1 (fig. 2).

Introducem următoarele notații:

p — intensitatea presiunii specifice normale a roții asupra sabotului într-un punct arbitrar,

$p_{\max}$ — valoarea maximă a presiunii specifice normale pe suprafața de contact a sabotului și a roții,

r — lungimea razei suprafeței cilindrice a roții și sabotului,

α — unghiul care determină raza radială a punctului de contact a sabotului și roții,

$\alpha_0 = \alpha_2$ — α_1 (a se vedea figura 2),

P_x, P_y — proiecțiile rezultantei forțelor de frecare pe axele de coordonate,

μ — coeficientul de frecare al sabotului de roată.

Vom presupune $p = p_{\max} \sin\alpha$.

În acest caz, intensitatea forței de frecare care acționează pe un element al suprafeței de contact între roată și sabot este

$$q = \mu\, p_{\max}\ B \sin\ \alpha\, \mathrm{d}s.$$

Avînd în vedere că în cazul considerat

$$\gamma = \frac{\pi}{2} + \alpha, \qquad \delta = \alpha, \qquad \varepsilon = \frac{\pi}{2},$$

$$\xi = \alpha, \qquad \eta = \alpha - \frac{\pi}{2}, \quad \vartheta = \frac{\pi}{2},$$

$$\Delta = r,$$

$$x_k^0 = r \cos \alpha, \qquad y_k^0 = r\ \sin\ \alpha, \quad z_k^0 = 0,$$

găsim din egalitățile (1) mărimile componentelor vectorului principal al forțelor de frecare.

La calcularea integralelor curbilinii arătate mai sus este comod să trecem la coordonatele polare, făcînd înlocuirea

$$\mathrm{d}s = r\, \mathrm{d}\alpha \qquad (\alpha_1 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_2).$$

Atunci egalitățile (1) capătă această formă

$$P_x = -\,\mu\, p_{\max}\, B\, r \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sin^2 \alpha\, \mathrm{d}\alpha = -\frac{1}{4}\,\mu\, p_{\max}\ Br\, (2\alpha_0 + \sin 2\alpha_1 - \sin 2\alpha_2),$$

$$P_y = \mu\, p_{\max}\ B\, r \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sin \alpha \cos \alpha\, \mathrm{d}\alpha = \frac{1}{4}\,\mu\, p_{\max}\ B\, r\, (\cos 2\alpha_1 - \cos 2\alpha_2),$$

$$P_z = 0.$$

Modulul vectorului principal este

$$P = \sqrt{P_x^2 + P_y^2 + P_z^2} = \frac{1}{2}\,\mu p_{\max}\, Br \sqrt{\alpha_0^2 + \alpha_0(\sin 2\alpha_1 - \sin 2\alpha_2) + \sin^2(\alpha_2 - \alpha_1)}.$$

Cosinusurile directoare ale vectorului rezultant se determină din egalitățile (3)

$$\cos \lambda = \frac{P_x}{P} = -\frac{1}{2}\,\frac{2\alpha_0 + \sin 2\alpha_1 - \sin 2\alpha_2}{\sqrt{\alpha_0^2 + \alpha_0\,(\sin 2\alpha_1 - \sin 2\alpha_2) + \sin^2(\alpha_2 - \alpha_1)}},$$

$$\cos \mu = \frac{P_y}{P} = \frac{1}{2}\,\frac{\cos 2\alpha_1 - \cos 2\alpha_2}{\sqrt{\alpha_0^2 + \alpha_0\,(\sin 2\alpha_1 - \sin 2\alpha_2) + \sin^2(\alpha_2 - \alpha_1)}}.$$

Proiecțiile pependicularei coborîte din originea coordonatelor pe linia de acțiune a vectorului rezultant (în această problemă vectorul rezultant este rezultantă) se determină din egalitățile (16) care pentru sistemul de forțe distribuite de-a lungul curbelor dispuse în planul de coordonate xy capătă forma

$$x_0 = P^{-2}\left\{P_v\left[\int_s q\ \Delta \cos \delta \cos \xi \,\mathrm{d}s - \int_s q\ \Delta \cos \gamma \cos \eta \,\mathrm{d}s\right]\right\} =$$

$$= r\frac{(\cos 2\alpha_1 - \cos 2\alpha_2)(\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2)}{\alpha_0^2 + \alpha_0(\sin 2\alpha_1 - \sin 2\alpha_2) + \sin^2(\alpha_2 - \alpha_1)},$$

$$y_0 = -P^{-2}\left\{P_x\left[\int_s q\ \Delta \cos \delta \cos \xi \,\mathrm{d}s - \int_s q\ \Delta \cos \gamma \cos \eta \,\mathrm{d}s\right]\right\} =$$

$$= -r\frac{(2\alpha_0 + \sin 2\alpha_1 - \sin 2\alpha_2)(\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2)}{\alpha_0^2 + \alpha_0(\sin 2\alpha_1 - \sin 2\alpha_2) + \sin^2(\alpha_2 - \alpha_1)},$$

$$z_0 = 0.$$

Lungimea perpendicularei coborîtă din originea coordonatelor O_1 pe suportul rezultantei P, se determină din egalitatea

$$D = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2} = r\frac{2(\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2)}{\sqrt{\alpha_0^2 + \alpha_0(\sin 2\alpha_1 - \sin 2\alpha_2) + \sin^2(\alpha_2 - \alpha_1)}}.$$

Direcția perpendicularei D se determină din egalitățile

$$\cos(D, x) = \cos \varphi = \frac{x_0}{D} =$$

$$= \frac{\cos 2\alpha_1 - \cos 2\alpha_2}{2\sqrt{\alpha_0^2 + \alpha_0(\sin 2\alpha_1 - \sin 2\alpha_2) + \sin^2(\alpha_2 - \alpha_1)}},$$

$$\cos(D, y) = \cos \chi = \frac{y_0}{D} =$$

$$= -\frac{2\alpha_0 + \sin 2\alpha_1 - \sin 2\alpha_2}{2\sqrt{\alpha_0^2 + \alpha_0(\sin 2\alpha_1 - \sin 2\alpha_2) + \sin^2(\alpha_2 - \alpha_1)}},$$

$$\cos(D, z) = \cos \psi = \frac{z_0}{D} = 0.$$

Primită la redacție la 17 noiembrie 1962

ON AN APPLICATION OF THE CURVILINEAR INTEGRALS IN MECHANICS

ABSTRACT

The author considers a space curve at the points of which forces whose modulus and orientation vary with the position of the point on the curve are continuously applied; with the aid of curvilinear integrals

the resultant force and the resultant moment of these forces [1], [8], [16] are determined. The results obtained are applied to the calculation of the friction force resultant acting upon a brake shoe.

BIBLIOGRAFIE

1. Г. М. ФИХТЕНГОЛЬЦ, И. П. НАТАНСОН, *Криволинейные и кратные интегралы.* ОНТИ, Москва-Ленинград, 1937.

2. Г. М. ФИХТЕНГОЛЬЦ, *Курс дифференциального и интегрального исчисления.* ГИТТЛ, Москва-Ленинград, 1949, III.

3. П. А. ЛЕБЕДЕВ, *Аналитический метод суммирования нагрузки, распределенной вдоль кривых линий и его приложения к теории низших кинематических пар.* Труды Ленинградского текстильного института, 8 (1958).

4. — *К теории виниловых кинематических пар*, in ,,Труды семинара по теории механизмов и машин''. АН СССР, *96*. (sub tipar).

-MANIFESTĂRI ȘTIINȚIFICE PESTE HOTARE-

A DOUA CONFERINȚĂ ASUPRA VIBRAȚIILOR NELINIARE ORGANIZATĂ DE ACADEMIA POLONEZĂ DE ȘTIINȚE ÎMPREUNĂ CU ACADEMIA CEHOSLOVACĂ DE ȘTIINȚE

VARȘOVIA, 18–21 SEPTEMBRIE 1962

DE

D. MANGERON

A doua conferință asupra vibrațiilor neliniare, organizată de către academiile de științe ale R.P. Polone și R. S. Cehoslovace la Varșovia (18–21 septembrie 1962), a constituit, atît din punct de vedere al numărului participanților cît și prin anvergura lucrărilor prezentate de mulți specialiști cu renume mondial din U.R.S.S., din țările de democrație populară și din alte țări, o valoroasă continuare a recentului simposion internațional asupra oscilațiilor neliniare, desfășurat la Kiev sub egida Uniunii internaționale de Mecanică teoretică și aplicată (IUTAM) și sub patronajul Academiei de Științe a R.S.S. Ucrainiană [1], precum și a celei de-a doua Conferințe de dinamica mașinilor din R.S.C. (Smolenice/Bratislava, 18–20 octombrie 1961) [2].

1. Inaugurată și desfășurată în condiții optime grație grijii competente și permanente a secretariatului Comitetului organizatoric, constituit din acad. prof. dr. S. Ziemba, J. M. Skowroński și J. Szadkowski, conferința a trecut în revistă la plenarele de deschidere și închidere importante probleme noi în domeniul mecanicii neliniare a vibrațiilor, creație de seamă a academicienilor sovietici N. M. Krîlov și N. N. Bogoliubov. Referatele ținute în această ordine de idei se datoresc acad. Yu. A. Mitropolski, prof. dr. R. M. Rosenberg (Berkeley, S.U.A.), T. Yoshizawa (Nipon University, Tokyo, Japonia), R. Kulikowski (Academia de științe a R. P. Polone, Varșovia) și S. Ziemba (Academia de științe a R.P. Polone, Varșovia) fiind consacrate respectiv următoarelor teme: *Asupra unor probleme de teoria vibrațiilor neliniare*, *Asupra liniarității și neliniarității*, *Stabilitatea mulțimii și sisteme perturbate*, *Oscilații optimizate în sisteme de control optimal.*

Prima temă este reprezentativă pentru lucrările *secției întîia* a Conferinței, consacrate *metodelor analitice*. Acad. Yu. A. Mitropolski dezvoltă în cadrul studiului sistemelor oscilatoare cu mai multe grade de libertate apropiate de cele liniare, o nouă metodă, numită *metoda frecvenței unice*, punînd-o apoi în corespondență cu metoda varietăților integrale, expusă de același autor la Kiev [3].

Celelalte două teme se încadrează în lucrările *secției a doua*, consacrate *teoriei calitative a stabilității*. În prima din ele se examinează sisteme hamiltoniene H, se demonstrează că locul special atribuit sistemelor H liniare nu este justificat și se expun motivările pentru o nouă subdiviziune în sisteme omogene și neomogene. Cea de-a doua constituie o vastă extindere a problemei de stabilitate asimptotică a unei mulțimi și de comportare asimptotică a soluțiilor sistemelor perturbate în vecinătatea mulțimii, expusă de autor la Kiev.

A patra temă expusă la plenara de închidere, se încadrează în lucrările *secției a treia* și ultima, consacrată *aplicațiilor teoriei oscilațiilor neliniare la probleme de fizică și tehnică.* Ea tratează cazul important al unor procese dinamice, observate de exemplu în reactori chimici și în aviație, în care schematizarea matematică a fenomenelor nu s-a putut face prin apelarea exclusivă la operatori sau la ecuații diferențiale, ci doar prin considerarea unui proces de optimizare în mai multe trepte (programare dinamică [4], [5]).

2. Din cele 25 de lucrări prezentate la secția întîia, S. Maezawa (Yamanaschi University, Japonia) și C.P. Atkinson (Berkeley, S.U.A.), tratează prin metode noi în lucrările lor, consacrate respectiv rezonanței subarmonice în sisteme fragmentar liniare și tehnicii suprapunerii în unele sisteme neliniare, unele clase de probleme de mecanică neliniară a vibrațiilor. Astfel, pentru studiul rezonanței subarmonice partea neliniară se reprezintă sub forma unei serii Fourier procedînd după 1/2 sau 1/3 din perioada funcției perturbatoare (presupusă armonică), iar pentru obținerea soluțiilor aproximative ale ecuațiilor diferențiale neliniare se expune *metoda superpoziției neliniare* care permite obținerea soluțiilor sistemelor neliniare complicate prin suprapunerea soluțiilor exacte ale unor sisteme simple. Lucrările prezentate de O.B. Lîkova (Academia de științe a R.S.S. Ucraineană, Kiev, U.R.S.S.), A. N. Filatov (Academia de științe a R.S.S. Uzbecă, Tașkent, U.R.S.S.), și de noi, continuă și adîncesc metode noi elaborate respectiv de Yu. A. Mitropolski (Metoda varietăților integrale), W. Gröbner (Innsbruck, Austria), A. N. Filatov (Metodă de rezolvare a problemei lui Cauchy pentru sisteme enumerabile de ecuații diferențiale neliniare cu un număr enumerabil de necunoscute de forma $\frac{\mathrm{d}x_s}{\mathrm{d}t} = f_s(t, x_1, x_2, \ldots), s = 1, 2, \ldots$) și D. Mangeron [6] (Metoda ecuațiilor integrale în mecanica neliniară), prima din ele fiind prezentată la Kiev și la Congresul internațional al matematicienilor de la Stockholm [7], iar cea de-a treia la Kiev și la Academia Sinica din Pekin, R. P. Chineză. Multe lucrări, ca de exemplu cele consacrate respectiv studiului proprietăților dinamice ale sistemelor neliniare cu amortizator de vibrații prin șocuri,

proprietăților asimptotice ale sistemelor cu mică întîrziere, rezonanței interne a unui sistem neliniar cu două grade de libertate și determinării vibrațiilor naturale și forțate ale unui sistem neliniar cu două grade de libertate, și elaborate respectiv de I. Ballo (Academia Slovacă de științe, Bratislava, R. S. Cehoslovacă), Yu. A. Riabov (M.G.U., U.R.S.S.), A. Tondl (Institutul național de termotehnică, Praga, R. S. Cehoslovacă), W. Szemplińska-Stupnicka (Universitatea tehnică din Varșovia, R.P. Polonă), ajung la rezultate interesante prin aplicarea unor metode recente ce devin rapid clasice, ca de exemplu metoda asimptotică a micului parametru, metoda balanței armonice (N. M. Krîlov—N. N. Bogoliubov), metoda mediatizării sau metoda aproximațiilor succesive.

Numeroase lucrări, constituind de regulă continuarea valoroasă a unor lucrări anterioare proprii în domeniul aplicării metodelor analitice la probleme de mecanică neliniară a vibrațiilor, sînt consacrate, tot în cadrul secției întîia, următoarelor teme : *Șocuri aleatorii în sisteme dinamice neliniare* (baza de plecare a lucrării este inserată în ,,Sibirskii matematiceskii jurnal, **1**, *2*, 233—237 (1960)) de W. D. Millian și A. D. Myškis (Academia de științe a R.S.S. Ucraineană, Harkov, U.R.S.S.) ; *Teoremă de medie într-un interval de timp infinit* de V. M. Volosov (M.G.U., U.R.S.S.) ; *Analiză calitativă și cantitativă a proceselor ce se produc într-un sistem electromecanic neliniar cu două grade de libertate interesînd unele sisteme de programare* de H. Kramarz (Varșovia, R. P. Polonă) ; *Influența amortizării neliniare asupra înălțimii maximelor curbelor de rezonanță ale unui sistem cu mai multe grade de libertate* de I. Pust (Academia de științe a R. S. Cehoslovace, Institutul de teoria mașinilor, Praga) ; *Principiul mediatizării și aplicațiile sale la unele probleme interesînd ecuații cu derivate parțiale slab neliniare* de J. Kurzweil (Academia de științe a R.S. Cehoslovace, Praga) ; *Studiul elongațiilor oscilațiilor stocastice ale unor oscilatori neliniari cu amortizare slabă* de S.H. Crandall (Institutul tehnologic din Massachusetts, Cambridge, S.U.A.) ; *Calculul perioadei de oscilație ca funcție de amplitudine cu ajutorul metodei pertubațiilor de* R. Chaléat (Universitatea din Besançon, Franța) ; *Stabilirea unor formule de recurență în sisteme neliniare, de pildă în cvadripol neliniar cu funcția de intrare* $u = V \cos \varphi$ de G. Papadopulov (Institutul de telecomunicații, Sofia, R. P. Bulgaria) ; *Comportarea asimptotică a soluțiilor ecuațiilor diferențiale cu un mic argument întîrziat* de M. V. Vasilieva (M.G.U., U.R.S.S.) ; *Studiul oscilațiilor neliniare ale unui sistem conservativ cu două grade de libertate prin determinarea integralei complete a ecuației cu derivate parțiale de primul ordin a lui Hamilton-Jacobi, corespunzătoare sistemului de ecuații diferențiale ordinare care schematizează sistemul* de R. Gutowski (Varșovia, R. P. Polonă) ; *Sisteme optimale cu întîrziere și unele probleme noi de teoria ecuațiilor diferențiale cu diferențe finite* de A.Halanay (Universitatea din București) ; *Comportarea sistemelor neautonome excitate în vecinătatea unei familii de cilindri* de K. W. Zadiraka (Academia de științe a R.S.S. Ucraineană, Kiev, U.R.S.S.) ; *Aplicarea teoremei lui Arzelà la reducerea sistemului recurent de ecuații diferențiale neliniare, echivalent la limită cu ecuația neliniară a sistemelor autonome cu un grad de libertate* de S. Dubiel (Varșovia, R. P.Polonă) ; *Existența mișcărilor periodice* *și asimptotice ale unui pendul matematic cu n grade de libertate cu legături elastice* de G. Bradistilov și G. Boiadjiev (Institutul de construcții, Sofia, R. P. Bulgaria); *Propagarea undei neliniare sferice descărcătoare într-un mediu stratificat* de S. Kaliski și E. Wodarczyk (Academia de științe, Varșovia, R. P. Polonă); *Propagarea undelor plane periodice magnetoplastice în semispațiu într-un cîmp magnetic* de S. Kaliski și J. Osecki (Academia de științe, Varșovia, R.P. Polonă).

3. În cadrul lucrărilor consacrate teoriei calitative și stabilității cităm următoarele comunicări, schițînd pe alocuri și ideile principale pe care le conțin : *Comportarea sistemelor dinamice în apropierea domeniului granițelor de stabilitate* de N. N. Bautin (Institututul de hidrotehnică, Gorki, U.R.S.S.), în care se discută critic metoda lui K. Magnus; *Forme normale ale oscilațiilor neliniare cu două grade de libertate* de W. Bogusz (Academia de mine și metalurgie, Cracovia, R. P. Polonă), în care, pornind de la un șir de lucrări ale lui R.M. Rosenberg, se elaborează o nouă metodă de studiu legată de mișcarea centrului de masă al sistemului considerat în planul de fază : *Soluții periodice ale unei corzi slab neliniare* de O. Vejvoda (Academia de științe a R.S. Cehoslovace, Praga), într-un caz ce permite o extindere a metodei micului parametru (Poincaré); *Asupra stabilității structurale a unui sistem dinamic într-un domeniu mărginit închis* de E. Leantovici-Andronova (Institutul de cercetări de fizică și tehnică, Gorki, U.R.S.S.), în care, după ce se discută definițiile stabilității structurale date de A. Andronov, L. Pontriaghin, L. Marcus ș.a., se propune o altă definiție ce pare a fi mai avantajoasă; *Asupra stabilității regimurilor periodice* de V. M. Starjinski (Institutul Unional fără frecvență de textile și industrie ușoară, Moscova, U.R.S.S.), în care se extinde metoda lui Liapunov de evaluare a constantelor caracteristice; *Asupra problemei de stabilitate asimptotică în mare a soluțiilor ecuațiilor pseudo-liniare* de J. Muszynski (Universitatea tehnică, Varșovia, R. P. Polonă), în care se extind mai multe din criteriile cunoscute prin aplicarea metodei de construcție a curbelor de intrare în planul de fază (x, $\dot{x}$); *O teoremă asupra stabilității la perturbații și aplicarea ei la sisteme de reglare cu relee* de P. Seibert (Universitatea din Notre Dame, S.U.A.), care se bazează pe o lucrare a acad. A. P. Filippov ce se referă la sisteme neautonome generale într-un spațiu metric; *Asupra existenței și stabilității soluțiilor periodice referitoare la sisteme autonome* de C. Olech (Academia de științe a R. P. Polone, Varșovia), în care se extind unele rezultate recente datorite lui G. Borg, ce urmează a fi publicate, în colaborare cu Ph. Hartmann, în TAMS; *Unele rezultate limitative relative la o ecuație diferențială neliniară de ordinul al patrulea* de I.O.C. Ezeilo (University College, Ibadan, Nigeria); *Asupra soluțiilor periodice ale unui sistem hamiltonian de ecuații diferențiale în plan* de S. Sedziwy (Universitatea tehnică, Cracovia, R. P. Polonă), care constituie o contribuție la o lucrare recentă a lui Z. Opial; *Influența amortizării asupra soluțiilor ecuației lui Duffing* de R. Miklaszewski (Academia de științe a R.P. Polone, Varșovia) stabilită cu ajutorul unei mașini de calcul analogice; *Numărul de tipuri topologice pentru sisteme diferențiale polinomiale în care se studiază structura tuturor curbelor-soluții ale unui sistem diferențial autonom real de prima speță, într-un spațiu*

numeric real R^n cu n dimensiuni de L. Marcus (Universitatea din California, Berkeley, S.U.A.); *Limitarea domeniului „în mare" pentru sisteme mecanice neliniare cu amortizare parțial negativă* de J. M. Skowroński și S. Ziemba (Academia de științe a R.P. Polone, Varșovia), care constituie extinderea în mare a rezultatelor obținute recent de autori și prezentate la Kiev și Berkeley (USA National Congress on Applied Mechanics, 1962); *Studiul stabilității sistemelor cu parametri depinzînd de timp* de E. G. Woschni (Institutul de construcții de mașini, Karl Marx-Stadt, R. D. Germană), în care, cu ajutorul analizei energetice și a reprezentării în planul de fază, se obțin o serie de rezultate în domeniu, pe altă cale decît cele obținute de Floquet și Ince; *Variații parametrice ale domeniului de frontieră pentru sisteme mecanice neliniare* de J. M. Skowronski și S. Ziemba (Academia de științe a R.P.Polone, Varșovia), în care, luînd ca punct de plecare rezultatele prezentate de autor la Kiev și Berkeley precum și altele pregătite pentru a fi expuse la al doilea Congres IFAC din 1963, se consideră analiza dimensiunilor ca problemă de programare; *Asupra vibrațiilor libere și forțate ale sistemelor neliniare forte cu mai multe grade de libertate* de R. M. Rosenberg (Universitatea din California, Berkeley, S.U.A.); *Asupra unui caz limită al oscilațiilor de relaxare* ce Z. Vorel (Academia de științe a R.S. Cehoslovace, Praga); *Asupra existenței stărilor limită la sisteme dinamice* de J. Szadkowski (Academia de științe a R.P. Polone, Varșovia); *Analogie între sisteme neliniare și unele probleme de dinamică clasică* de R.W. Liu și G.H. Fett (Universitatea din Notre Dame, S.U.A); *Partiția spațiului de fază ca criteriu de stabilitate și performanță a sistemelor de reglare neliniare* de Y. H. Ku și D.W.C. Shen (Universitatea din Pennsylvania, Philadelphia, S.U.A.); *Varietăți integrale singulare ale sistemelor periodice neautonome, apropiate de sistemele autonome structural stabile* de L. N. Beliustina (Institutul de cercetări de fizică și tehnică, Gorki, U.R.S.S.); *Determinarea soluțiilor periodice ale sistemelor autonome cvasiliniare cu mai multe grade de libertate* de A. P. Proskuriakov (Academia de științe a U.R.S.S., Moscova); *Studiul vibrațiilor unui arbore elastic în rotație în cazul unei relații neliniare între tensiuni și deformații, în prezența frecării interne neliniare* de C. Broniarek și Z. Osiński (Academia de științe a R.P. Polone, Varșovia); *Aplicarea metodelor de analiză funcțională la studiul stabilității sistemelor dinamice neliniare* de J. Kudrewicz (Academia de științe a R.P. Polone, Varșovia); *Dimensiunea domeniului de frontieră pentru sisteme mecanice neliniare* de J. M. Skowroński (Academia de științe a R.P. Polone, Varșovia), care constituie o continuare a cunoscutelor lucrări ale autorului prezentate la Kiev și Berkeley.

4. Lucrările prezentate la secția a treia a Conferinței au o varietate mai mare. Dintre acestea, adăugînd uneori și scurte informații asupra conținutului, cităm: *Cercetări recente în domeniul vibrațiilor neliniare promovate la facultatea de inginerie mecanică din Delft* de A.D. de Pater (Universitatea tehnică, Delft, Olanda), în care, luînd ca bază unele rezultate prezentate la Kiev de acad. A. I. Lurie de la Institutul politehnic din Leningrad, se studiază prin metoda „cusăturilor" și a seriilor Fourier sisteme fragmentar liniare; *Calculul perioadei și a decrementului logaritmic al vi-*

brațiilor amortizate neliniare forte de L. Dobrzański și Z. Osiński (Universitatea tehnică, Varşovia, R.P. Polonă), în care rezultatele obținute cu o mașină cifrică de calcul se compară cu cele obținute prin metoda micului parametru; *Aplicarea metodei tehnice la analiza oscilațiilor armonice generate de o diodă-tunel de* L. Knoch și J. Mysliwiec (Universitatea tehnică, Gdansk, R.P. Polonă); *Starea de rezistență a îmbinărilor simple și complexe de inele în rotație rapidă ajustate prin presare* de S.T. Thamm (Biroul de construcții, Budapesta, R.P. Ungară); *Vibrații neliniare ale sistemelor conectate neliniar* de M. Mișicu (Institutul de mecanică aplicată „Traian Vuia", București), în care se continuă cu succes teoria geometrică a sistemelor cu proprietăți reologice, elaborată de autor și prezentată în parte și la prima conferință de oscilații neliniare; *Metode de circuit echivalent pentru cercetări de laborator în domeniul optimizării amortizorilor de vibrații cu conexiuni de relaxare ce includ efecte neliniare* de W. W. Soroka (Universitatea din California, Berkeley, S.U.A.), care constituie o continuare a cercetării autorului prezentată la cel de al X-lea Congres Internațional de mecanică aplicată de la Stresa (Italia, 1960); *Stabilitatea unor sisteme de reglare automată* de R. Gawroński (Academia de științe a R.P. Polone, Varşovia); *Starea de tensiune și de deformație a solurilor sub acțiunea șocurilor* de A. Lisowski (Universitatea tehnică din Cracovia, R.P. Polonă), în care se ține seama de teoria neliniară a elasticității; *Studiul oscilațiilor subarmonice în unele sisteme de reglare* de J. C. Gille (Universitatea tehnică națională de astronautică, Paris, Franța), J. Q. Paquet (Universitatea Laval, Quebec, Canada) și S. Wegrzyn (Institutul politehnic din Silezia, Gliwice, R.P. Polonă); *Acțiunea dinamică neliniară a sarcinilor asupra stabilității învelișurilor cilindrice* de M. Kozarov (Academia de științe a R.P. Bulgaria, Sofia), în care se aplică metoda variațională a lui Galerkin -Bukov și metoda Adams; *Unele observații relative la vibrațiile neliniare laterale ale barelor* de J. Szidarowsky (Universitatea tehnică, Budapesta, R.P. Ungară); *Probleme de vibrații neliniare în domeniul seismologiei* de R. Tanabashi (Universitatea din Kyoto, Japonia); *Ecuații diferențiale neliniare separabile de primul ordin în teoria mașinilor sincrone în cazul proceselor asincrone* de F. Csaki (Institutul de automatică, Budapesta, R.P. Ungară), în care se elaborează o metodă utilă în elucidarea şi descrierea fenomenelor fizice în cazul proceselor asincrone în turbogeneratoare; *Utilizarea părții liniare a unei mașini analogice pentru rezolvarea circuitelor neliniare cu caracteristică fragmentar-liniară* de K. Janayc şi S. Vojtášek (Academia de științe a R.S. Cehoslovace, Institutul de teoria informațiilor și automatică, Praga); *Unele probleme de programare dinamică pentru sisteme neliniare* de Ya. N. Roytenberg (M.G.U., U.R.S.S.); *Rezonanță subarmonică a unui sistem torsional cu roți dințate* de V.C. Haloupka (Institutul național de termotehnică, Praga, R. S. Cehoslovacă); *Asupra condițiilor de stabilitate asimptotică ale soluțiilor sistemului de ecuații diferențiale de mișcare al unui amortizor dinamic de vibrații în cazul prezenței forței centrifuge* de R. Radziszewski (Academia de științe a R.P. Polone, Varşovia), în care se utilizează metoda grafică *delta* şi maşina analogică de calcul; *Unele proprietăți ale circuitelor electrice neliniare echilibrate* de M.S. Libkind (Institutul electrotehnic „Krzyžanowski", Moscova, U.R.S.S.); *Noua metodă de calcul a antivibratorului pendular în cazul oscilațiilor neliniare ale pendulelor* de J. Böhm (Universitatea tehnică, Budapesta, R.P. Ungară), prin care se realizează atît greutatea minimală a pendulelor cît și eficacitatea necesară în diapazonul de lucru al numerelor de rotație, inclusiv frontiera acestuia; *Unele aspecte ale vibrațiilor forțate ale construcțiilor, tratate ca probleme neliniare* de K. Piszczek (Universitatea tehnică, Cracovia, R.P. Polonă) ș.a.m.d. [8].

5. A doua conferință asupra vibrațiilor neliniare, organizată de către academiile de științe din R.P. Polonă și R.S. Cehoslovacă, depășind cu mult prin numărul participanților (207), numărul referatelor (80) și numărul țărilor reprezentate (16) prima conferință de acest gen, s-a încadrat din plin, prin tematica multilaterală și de înalt nivel abordată și prin anvergura discuțiilor creatoare și fructuoase purtate, pe calea sigură a promovării înțelegerii reciproce [9].

ВТОРАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ ПО НЕЛИНЕЙНЫМ КОЛЕБАНИЯМ, ОРГАНИЗОВАННАЯ ПОЛЬСКОЙ И ЧЕХОСЛОВАЦКОЙ АКАДЕМИЯМИ НАУК

ВАРШАВА, 18—21 СЕНТЯБРЯ 1962 г.

РЕЗЮМЕ

Дается описание конференции, проводившей свою работу, кроме заслушивания докладов на заключительном и вступительном пленарных заседаниях, по трем секциям: 1. Аналитические методы, II. Качественная теория и устойчивость и III. Применение теории нелинейных колебаний к физическим и техническим задачам. Помимо научного вклада, внесенного представленными на конференции работами многочисленных ученых стран народной демократии и других стран, отмечается благоприятная атмосфера, созданная для проведения дискуссий по научным проблемам, — следствие четкой ортанизационной деяельности Оргкомитета и, в частности, его секретариата, состоявето из академиков С. Зиемба, Я. Сковроньского и Я. Шадковского.

Вторая конференция по нелинейным колебаниям, организованная Польской и Чехословацкой академиями наук, намного превзойдя широкие и плодотворные научные дискуссии первой конференции как по количества присутствующих специалистов (207 участников), так и по числу рефератов (80) и числу представленных на конференции стран (НР Болгария, ГДР, ФРГ, Канада, Нигерия, Голландия, Румынская НР, Польская НР, Сенегал, СССР, США, Венгерская НР, Чехословацкая СР, ФСР Югославия, Франция и Япония), явилась новым звеном в успешном укреплении международных связей, идя — как было сказано в статье, недавно опубликованной в ,,Вестнике высшей школы'' — по ,,верному пути к взаимопониманию'' [9].

BIBLIOGRAFIE

1. D. Mangeron, *Simpozionul internațional asupra oscilațiilor neliniare, Kiev, 12—18 septembrie 1961.* St. cerc. mec. apl., **XIII**, *1*, 241—246 (1962).
2. R. Bogdan, D. Mangeron, *A doua Conferință generală cehoslovacă de dinamica mașinilor, Smolenice, 18—20 octombrie 1961.* St. cerc. mec. apl. (va apărea).
3. * * * Proceedings of the IUTAM symposium on nonlinear Vibrations, Acad. Sc. Ukrainian SSR, Kiev, 1963.
4. R. Bellman, *Dynamic Programming.* A Rand Corporation Research Studies, Princeton University Press, Princeton, 1957.
5. D. Mangeron, E. Croitoru, *Equazioni di programmazione dinamica concernenti i problemi al contorno a derivate totali.* Accademia Naz. dei Lincei, Rend. Cl. Sci. fis. mat. nat. s. VIII, **XXXII**, *5*, 619—623 (1962).
6. D. Mangeron, *The integral equations method in nonlinear Mechanics.* IUTAM, Acad. Sci. Ukrainian RSS, Kiev, 1961.
7. * * * *International Congress of Mathematicians*, Programme, Stockholm, 1962, 78.
8. * * * *Вторая Конференция по нелинейным колебаниям* (резюме докладов). Польская Академия Наук вместе с Чехословацкой Академией Наук, Варшава, 18—21 сентября, 1962, 130.
9. К. И. Иванов, *Верный путь к взаимопониманию.* Вестник Высшей Школы, **11**, 79 (1962).

MANIFESTĂRI ȘTIINȚIFICE PESTE HOTARE

A IV-A SESIUNE POLITEHNICĂ A UNIVERSITĂȚII TEHNICE DIN DRESDA

(7–9 NOIEMBRIE 1962)

DE

D. MANGERON

Universitatea tehnică din Dresda organizează sesiuni științifice la fiecare doi ani, începînd din anul 1956. Lucrările celei de-a IV-a sesiuni politehnice [1], [2], cea mai recentă de la această Universitate tehnică (fondată în 1828), au fost grupate în patru secții: Mașini unelte, Termotehnică, Frigotehnică și Teoria mecanismelor și mașinilor, conduse respectiv de prof. dr. ing. Berthold, Boie, Jungnickel și W. Lichtenheldt. Paralel cu desfășurarea lucrărilor în aceste patru secții, s-au mai ținut o serie de conferințe generale, urmate de discuții, centrate în jurul referatului, *Valorificarea și dirijarea muncii științifice* prezentat de prof. dr. ing. W. Albing, decan al facultății de construcții de mașini și director al Institutului de teoria scurgerii. Cu acest prilej s-au pus în lumină o serie de probleme de actualitate, scoțîndu-se totodată pregnant în lumină înrîurirea constructivă a muncii de cercetare științifică asupra dezvoltării ulterioare a tehnicii.

Menționînd în cele ce urmează tematica lucrărilor prezentate la cele patru secții, ne propunem să relevăm îndeosebi conținutul comunicărilor din cadrul secției de teoria mecanismelor și mașinilor, care marchează cea de-a 20-a sesiune științifică consacrată acestei discipline 1), de fundamentală importanță în rezolvarea cu succes a problemei de automatizare a proceselor de producție.

I. **Mașini unelte.** 1. Tlustý (VÚOSO Praga, R.S.C.) și Tauber (Institut de mașini unelte, Karl Marx-Stadt, R.D.G.): *Încercări și ridicări de carac-*

---

1) Zece din aceste sesiuni s-au desfășurat la Dresda în anii 1926, 1928, 1930, 1933, 1939, 1953, 1956, 1958, 1960, 1962, celelalte avînd loc în anii 1931 (Karlsruhe), 1935 (Berlin), 1937 (Düsseldorf), 1942 (Chemnitz), 1951 (Berlin), 1953 (Stuttgart), 1955 (Bingen), 1957 (Konstanz), 1959 (Aachen) și 1961 (Bad Kissingen). Sesiunile imediat următoare sînt programate pentru 1963 (Wiesbaden) și 1964 (Karl Marx-Stadt).

teristici la strunguri; 2. B.S. Balakschin (Stankin, Moscova, U.R.S.S.) : *Problematica și metodica prelucrării bunurilor prezentate sub formă de modele la mașini unelte*; 3. F. Lettner (Universitatea tehnică, Budapesta, R.P.U.) : *Unele probleme legate de ridicări de caracteristici la mașini unelte*; 4. H. Berthold (Universitatea tehnică, Dresda, R.D.G.) : *Rezultate asupra ridicării caracteristicilor dinamice la mașini turnante*; 5. Hajdu (Institut de mașini unelte, Budapesta, R.P.U.) : *Problema preciziei geometrice la mașini unelte*; 6. Sniechowski (IOS, Cracovia, R.P.P.) : *Măsurarea sgomotului-criteriu de discernămînt tehnic la ridicări de caracteristici la mașini unelte*; 7. O. Dobenecker (Universitatea tehnică, Dresda, R.D.G.) : *Noi lucrări relative la controlul mișcării de propulsie la mașini unelte*; 8. Haberacker (Școala superioară de construcție de mașini, Karl Marx-Stadt, R.D.G.) : *Contribuții la ridicări de caracteristici dinamice la mașini abrazive*; 9. Wiele (Școala superioară de construcție de mașini din industria constructoare de mașini, Magdeburg, R.D.G.) : *Determinarea erorilor periodice la mașini de frezat prin măsurarea ondulațiilor la roți de probă*; 10. Jermakow (Stankin, Moscova, U.R.S.S.) : *Metode de stabilizare a celor mai scurte parcursuri la sisteme hidrostatice de la mașini unelte*; 11. Fritsche (ZEK Hydraulik, Leipzig, R.D.G.) : *Precizia dispozitivelor hidrostatice de mecanică fină*; 12. J. Prokeš (Institutul politehnic, Praga, R.S.C.) : *Precizia și durabilitatea dispozitivelor hidraulice, asamblate din elemente tipizate*; 13. Haimovici (Institutul politehnic, Kiev, U.R.S.S.) : *Precizia și durabilitatea sistemelor hidrostatice de copiat*; 14. Klaus (Institutul de mașini unelte, Karl Marx-Stadt, R.D.G.) : *Forțe de deplasare la generatoare hidraulice cu piston radial și influența lor în cazul acțiunilor scurte și rapide asupra reversibilității dinamice la dispozitive hidrostatice*; 15. E. P. Handke (VEB Industriewerke, Karl Marx-Stadt, R.D.G.) : *Caracteristici și aplicații ale unui cursor de distribuție cu opt muchii.*

II. **Termotehnică**. 1. H. Loemke (Academia de Mine, Freiberg, R.D.G.) și E.F. Goetz (VEB Mitteldeutscher Feuerungsbau, Leipzig, R.D.G.) : *Asupra dezvoltării morilor de praf de cărbune autoaspiratoare de înaltă productivitate*; 2. W. Altmann (VEB Kraftwerk, Trattendorf, R.D.G.) : *Procese de curgere în trioarele morilor ventilatoare*; 3. K. Maschke (VEB Kraftwerk, Lübbenau, R.D.G.) : *Cercetări tehnice asupra pulberii în trioarele și conductele de praf de la mori ventilatoare*; 4. W. Herrmann (Institutul politehnic „Otto von Guericke", Magdeburg, R.D.G.) : *Încercări asupra materialelor de ardere bogate în cenușă la Kraftwerk Lübbenau*; 5. H. Gast, W. Voelkel (VEB Mitteldeutscher Feuerungsbau, Leipzig, R.D.G.) : *Studii asupra distribuției temperaturilor și a CO_2 în cuptorul de ardere al unui cazan cu aburi* 160-t/h; 6. K. Anacker (VEB Chemische Werke, Buna, R.D.G.) : *Reconstrucția conductelor și a coșurilor de fum la cazane cu aprindere frontală*; 7. N. Pănoiu, G. Singer (Institutul de energetică al Academiei R.P.R., București) : *Asupra măcinării și capacității de ardere în pulbere a lignițilot romînești*; 8. M. Sasiadek (Institutul politehnic, Wroclaw, R.P.P.) : *Studii asupra măcinării cărbunilor cu aer comprimat*; 9. G. Seidel (Institutut de termotehnică și automatizare a industriei miniere a silicaților, Jena-Burgau, R.D.G.) : *Studii asupra aprinderii combustibililor solizi și gazoși în cuptoare turnante*; 10. J. Kanter

(VEB Institutul de proiectări și încercări de mașini hidraulice, Dresda, R.D.G.) : *Studii asupra măcinatoarelor turnante* ; 11. W. Schneider (Universitatea tehnică, Dresda, R.D.G.) : *Aplicarea cromatografiei gazelor la probleme speciale de analiza fumurilor.*

III. **Frigotehnică.** 1. J. Homér (ČKD, Praga, R.S.C.) : *Condensator giroscopic pentru instalații frigotehnice* ; 2. V. Daněk (ČKD, Praga, R.S.C.) : *Cercetări asupra roților cu mers radial în cazul numerelor Mach mari* ; 3. C. Cvejn (ČKD, Praga, R.S.C.) : *Turboinstalații frigorifere* ; 4. Bierhold (Institut de Chimie și instalații frigotehnice, Dresda, R.D.G.) : *Studii asupra ventilelor compresoare frigorifere în circuit închis* ; 5. Beyer (Institutul pentru studiul laptelui, Oranienburg, R.D.G.) : *Probleme de răcire a laptelui* ; 6. Heinze (VEB Kühlanlagebau, Dresda, R.D.G.) : *Circuit de răcire-lapte* ; 7. Jasper (Institut de cercetări pentru răcire și refrigerare, Magdeburg, R.D.G.) : *Conservarea păsărilor prin frig* ; 8. Bewilogua (Universitatea tehnică, Dresda, R.D.G.) : *Neon ca mijloc de răcire* ; 9. W. Otto (Institutul de chimie și instalații frigorifere, Dresda, R.D.G.) : *Obținerea amestecurilor de Krypton-Xenon* ; 10. Badykles (Institutul unional de cercetări, Moscova, U.R.S.S.) : *Cuplări între mașini frigorifere absorbante, compresoare și radiante* ; 11. Mahadeva (Universitatea tehnică, Dresda, R.D.G.) : *Comportarea termodinamică și viscozitatea amestecului frigorifer oleaginos R 142—51 KM 45.*

IV. **Teoria mecanismelor și mașinilor.** 1. F. G. Altmann (Școala politehnică din Hanovra, R.F.G.) : *Mecanisme de control.* Este caracteristic pentru aceste mecanisme mecanice cu acțiune continuă transformarea mișcării uniforme de propulsie-rotație într-o mișcare pulsatorie, a cărei amplitudine poate varia în vederea modificării raportului de transmisie. Mișcarea pulsatorie este *rectificată*, fiind iarăși transformată într-o mișcare de rotație, *uniformizată* printr-o cuplare în paralel a mai multor mecanisme pulsatorii cuplate în *paralel.* Se pot folosi mai multe feluri de mecanisme patrulatere articulate, în afară de mecanismul cu manivelă și balansor. Astfel, de exemplu, se poate folosi ca bază (fig. 1) un mecanism cu două manivele. Constructorul va putea găsi soluții simple pentru introducerea în dispozitivul complex și cuplarea în paralel a mecanismelor componente. În lucrare se arată că raportul de transmisie poate fi ușor determinat în mecanismele de control preconizate cu ajutorul planului vitezelor și a ciclogramelor. La mecanisme cu acțiune ramificată se distinge acțiunea exterioară de cea interioară. Figura 2 reprezintă un mecanism cu acțiune de ramificare interioară. Raportul de transmisie se modifică în urma variației lungimii manivelei (excentricității). Se menționează cu acest prilej noi construcții de mecanisme, ca de exemplu mecanismul GUSA, mecanismul ZERO-Max ș.a.

2. I. I. Artobolevski (Institutul de teoria mașinilor, Moscova, U.R.S.S.) : *Mișcarea mecanismelor plane cu masă variabilă.* După expunerea principiului *solidificării* unui sistem mecanic cu masă variabilă și a ecuațiilor lui Lagrange de speța a doua pentru *sisteme solidificate*, se aplică principiul solidificării la studiul dinamic al mecanismelor plane. Lucrarea se încheie cu scoaterea în evidență a particularităților ecuațiilor de mișcare

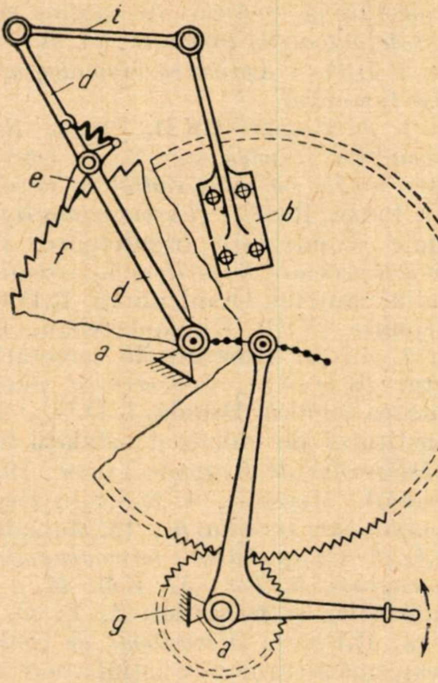


Fig. 1

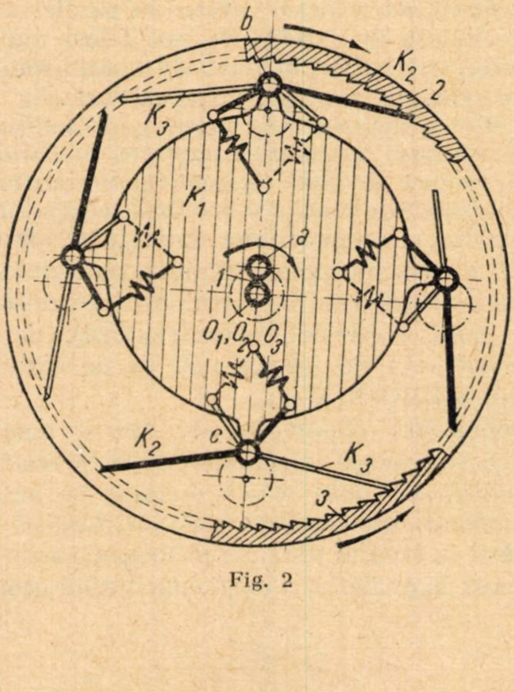

b
K_2
2
K_3
K_1
a
1
O_1, O_2, O_3
K_2
c
K_3
3

Fig. 2

a mecanismelor cu masă variabilă și cu ilustrări date printr-o serie de exemple.

3. Bereis (Universitatea tehnică, Dresda, R.D.G.) : *Asupra aplicării numerelor duale la probleme de cinematică spațială.* Pornind de la principiul transferului formulat de E. Study, care permite reprezentarea dreptelor din spațiu prin punctele sferei unitare dacă se face apel la numere duale și la vectori duali, se poate ajunge la tratarea numeroaselor probleme de cinematică spațială. Astfel, de exemplu, rezultatul cunoscutei teoreme a lui Peterson-Morley relativă la trei drepte în spațiu și perpendicularele lor comune capătă o interpretare duală pe sfera unitate. Ca urmare a aplicării cuaternionilor se pot rezolva probleme relative la rotațiile snopilor de drepte în jurul punctului lor comun. O combinație a principiului transferului al lui Study cu metoda cuaternionilor conduce la bicuaternioni. Se poate face să corespundă oricărei drepte din spațiu un bicuaternion, putîndu-se astfel trata mișcările în spațiul dreptelor. Se menționează aplicații ale acestor rezultate geometrice în geometria angrenării spațiale precum și în unele probleme de cinematică plană, ca de exemplu în problema normalelor afine.

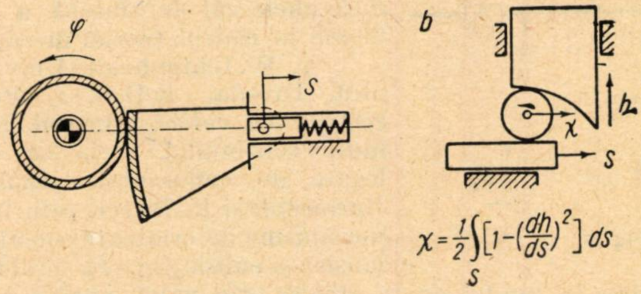

φ
S
b
h
χ
S
$\chi=\frac{1}{2}\int_{s}\left[1-\left(\frac{dh}{ds}\right)^{2}\right]ds$

Fig. 3

4. G. Bögelsack (Universitatea tehnică, Dresda, R.D.G.) : *Bazele cinematice ale mecanismelor cu curbe în fricțiune.* Mecanismele de genul celor menționate în titlul lucrării au fost valorificate în unele dispozitive cu pîrghii folosite la mașini de scris electrice. Mișcarea lor impusă se datorește acțiunii simultane a forței și frecării, asigurată prin aplicarea unui strat de gumă, poliamid ș.a. Întrucît aplicarea pe scară largă a acestor mecanisme este mărginită din punct de vedere cinematic îndeosebi de legătura ce intercede între unghiul de frecare și panta curbei, autorul a elaborat un număr de tabele de construcție ce pun în evidență diferiți parametri. Figurile 3*a* și 3*b* ilustrează unele serii de astfel de mecanisme.

5. B. Dizioglu (Școala politehnică, Braunschweig, R.F.G.) : *Bilanțul forțelor în mecanisme simple.* Autorul, continuînd studiile sale relative la eficiența dinamică a mecanismelor, cristalizată deja în stabilirea unor relații referitoare la mecanisme simple, începînd cu mecanisme de bielă-manivelă, ce leagă — în ipoteza rigidității organelor mecanismului — forța sau cuplul din articulație cu numărul de rotații ale organului conducător și masele organelor conduse, arată dificultățile la care dă naștere problema

considerată în cazul cînd se ține seamă de elasticitatea organelor. Schematizarea ei matematică conduce la ecuații diferențiale, problema de închidere a forțelor constituind condiție la limită.

6. K. Hain (Braunschweig, R.F.G.) : *Dispozitive de pretensionare complicate.* Autorul, subliniind că problema de acționare în locuri și cu tensiuni fixate dinainte asupra unui obiect dat este rezolvată prin realizarea numeroaselor mecanisme cărora li se aplică o singură forță într-un loc dat, indică unele căi de sinteză a acestei probleme în cadrul teoriei mecanismelor.

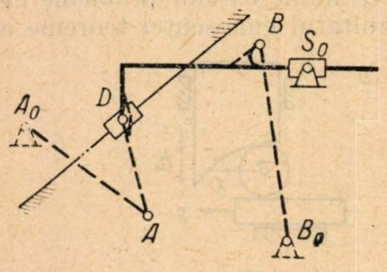


Fig. 4

7. W. Ichtenheldt (Universitatea tehnică, Dresda, R.D.G.) : *Metoda balansierului cu culisă.* Autorul rezolvă ingenios, continuînd seria sa de cercetări legate de cunoscutele rezultate ale lui Burmester și R. Bayer, prin folosirea unor mecanisme determinate constituite din balansier și culisă (fig. 4), problema de ghidaj a unui plan în așa fel ca să treacă prin patru poziții date dinainte.

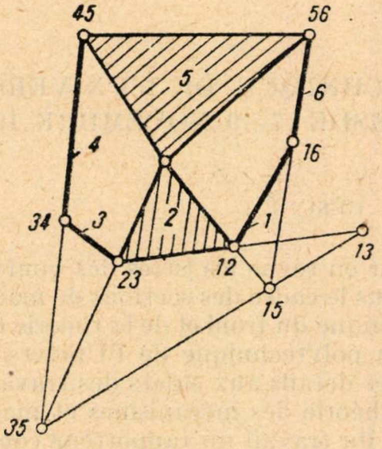
8. P. Lohse (Stuttgart, R.F.G.) : *Curbe polare ca mijloace auxiliare de construcție a mecanismelor cu manivelă.* Autorul, folosind rezultatele expuse în [3], arată modul în care pot fi folosite curbele polare (centroide) pentru sinteza patrulaterelor articulate menite a realiza relații funcționale de mișcare prescrise.

9. D. Mangeron (Institutul politehnic, Iași, R.P.R.) : *Metoda geometriei tangențiale în studiul mecanismelor.* Continuînd seria de cercetări relative la elaborarea de noi metode de studiu a mecanismelor, se expune metoda geometriei tangențiale interesînd analiza și sinteza mecanismelor plane și spațiale [4], [5]. Avantajele metodei elaborate sînt subliniate în studiul concret al mecanismelor de trasare a curbelor de bielă de înfășurare liniară, studiate recent prin metodele geometriei punctuale de acad. I. I. Artobolevski [6].

10. J. Oderfeld (Institutul politehnic din Varșovia, R.P.P.) : *Determinarea centrelor instantanee în mecanisme plane.* Autorul elaborează o metodă de determinare a unui anume centru momentan dintr-un mecanism cu mai multe organe, care nu reclamă decît cunoașterea unui număr *minim* de centre momentane ale altor organe. Figura 5 ilustrează, de exemplu, programarea, în sensul fixat, de determinare a centrului momentan *13*. Detalii și demonstrația se găsesc în [7].

11. D. Stündel (Universitatea tehnică, Dresda, R.D.G.) : *Contribuții la sinteza mecanismelor spațiale.* Ținînd seama de un șir de rezultate datorite lui Schoenflies, ca de exemplu faptul că o dreaptă în spațiu poate fi adusă dintr-o poziție într-alta printr-o rotație în jurul unei axe, pentru n poziții ale unei atare drepte există $\frac{1}{2}\, n\, (n-1)$ astfel de axe de rotație ș.a.m.d. autorul rezolvă unele probleme de sinteza mecanismelor, ca de exemplu a celor din figura 6, folosite la mașini de scris.

Terminînd această scurtă trecere în revistă a problemelor de teoria mecanismelor și mașinilor expuse la cea de-a IV-a sesiune politehnică a



Matricea

	1	2	3	4	5	6
1		1	3c	3a	2b	1
2	1		1	2a	1	2b
3	3c	1		1	2a	3b
4	3a	2a	1		1	3d
5	2b	1	2a	1		1
6	1	2b	3b	3d	1	

Schema operaților		
2a	23 25 34 45 24	35
2b	12 25 16 56 26	15
3a	12 15 24 45 14	25
3b	23 35 26 56 36	25
3c	12 15 23 35 13	25
3d	24 45 26 56 46	25

Programul pentru 13		
3c	12 15 23 35 13	
2a	23 25 34 45	35
2b	12 25 16 56	15

Fig. 5

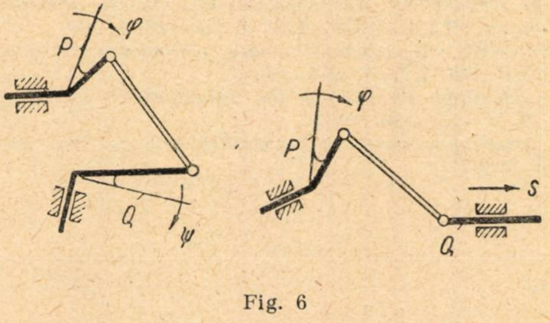


Fig. 6

Universității tehnice din Dresda, subliniem utilitatea unor astfel de manifestații științifice. Ele se încadrează din plin în îndemnul de promovare a legăturilor internaționale între institutele de învățămînt superior, formulat recent de „Vestnik Vîsșei Școlî" [8], iar cunoașterea conținutului lor corespunde cu una din datoriile cercetătorilor noștri de a fi la curent cu știința și tehnica mondială.

IVe SESSION POLYTECHNIQUE DE L'UNIVERSITÉ TECHNIQUE DE DRESDE (7–9 NOVEMBRE 1962)

RÉSUMÉ

Le rapport, tout en passant en revue les titres des conférences générales et des travaux présentés dans le cadre des sections de machines-outils, de la thermotechnique, de la technique du froid et de la théorie des machines et mécanismes, à la IVe session polytechnique de l'Université technique de Dresde, s'arrête, avec quelques détails aux sujets des travaux présentés dans la section consacrée à la théorie des mécanismes et machines. On y trouve en particulier un résumé du travail du rapporteur consacré à l'application de la cinématique tangentielle à l'étude des mécanismes. Ce travail est directement lié à la série de travaux récents dus à M.I.I. Artobolevski, de l'Académie des Sciences de l'U.R.S.S. [6], et à quelques travaux du rapporteur, élaborés en collaboration [4]–[5].

BIBLIOGRAFIE

1. * * * *IV Polytechnische Tagung (7–9 November 1962). Kurzfassung der Vorträge.* Technische Universität Dresden, 1962.
2. J. Volmer, *Tagung der Getriebelehre, Dresden 1962.* Das Industrie-blatt, Stuttgart, Dez., 1962.
3. P. Lohse, *Polartkurven als Hilfsmittel zur Konstruktion von Gelenkgetrieben.* ZAMM, **38**, *1/2*, 20–28 (1958).
4. D. Mangeron, E. Croitoru, *Contribuții la teoria generală a accelerațiilor reduse in coordonate punctuale și tangențiale.* St. cerc. mec. apl., **XIII** (1962).
5. Д. Манжерон, Е. Кройтору, *Исследование механизмов методом тангенциальной кинематики.* ДАН СССР, **148**, *1*, 24—26 (1963).
6. И. И. Артоболевский, *Кривизна линейно огибающих циклоидальных кривых.* ДАН СССР, **145**, *3*, 541—544 (1962).
7. J. Oderfeld, *An algorithm for finding the instantaneous centres.* Archiwum Budowy Maszyn, **9**, *2*, 173–189 (1962).
8. * * * *Развивать международные связи высшей школы.* Вестник Высшей Школы, *7*, 3—6 (1962).

ANIVERSĂRI ȘTIINȚIFICE DE SEAMĂ

UN DECENIU DE ACTIVITATE CENTRALIZATĂ DE INFORMAȚIE ȘTIINȚIFICĂ ÎN DOMENIUL MECANICII TEORETICE ȘI APLICATE

DE

D. MANGERON

Aprecierea la justa valoare făcută în U.R.S.S. a dependenței funcționale directe între eficacitatea lucrărilor de cercetare științifică și tehnico-experimentală și nivelul de organizare a informației științifice [1]) a avut drept consecință apariția, acum un deceniu, sub egida Academiei de Științe a U.R.S.S., a seriei de reviste de referate ,,Referativnîi jurnal''. Prin domeniile îmbrățișate și prin competența cu care s-au efectuat și se efectuează analizele lucrărilor științifice publicate, a devenit cea mai de seamă revistă de referate științifice cu caracter internațional.

Astăzi, seria ,,Referativnîi jurnal'' apare sub egida Comitetului de Stat pentru coordonarea lucrărilor de cercetare științifică (GNTK) și a Academiei de Științe a U.R.S.S. (AN SSSR), fiind încredințată — în cadrul pregătirii centralizate a informației asupra lucrărilor publicate în domeniul științelor naturii și tehnicii (în afară de construcții și arhitectură) — Institutului Unional de informație științifică și tehnică (VINITI). VINITI primește literatura de specialitate din 102 țări în 64 de limbi, dintre care 22 aparțin popoarelor din U.R.S.S., avînd legături de schimb stabilite cu peste 1 400 instituții științifice din străinătate. Pe lîngă aceasta VINITI mai publică alte 27 serii de fascicule, îmbinînd într-însele unele subdomenii combinate.

,,Referativnîi jurnal'' publică referate asupra edițiilor periodice, neperiodice și seriale cu periodicitate neregulată și după numărul de referate ocupă primul loc din lume. În vederea ușurării căutării bibliografiei necesare cercetătorilor, toate seriile revistei ,,Referativnîi jurnal'' editează indicatoare anuale de nume de autori și de materii, precum și indicatoare sistematice de brevete și formule.

---

[1]) Pentru a putea aprecia mișcarea științifică mondială, merită să subliniem aici, cu toate limitările inerente unei situații statistice globale, faptul că, potrivit datelor statistice publicate de U.N.E.S.C.O., în zilele noastre activitatea de cercetare științifică pe întregul glob se dublează ca volum la fiecare zece ani, în timp ce alte activități, nelegate direct de știință, ating un nivel asemănător abia într-o perioadă de patruzeci de ani.

Dată fiind importanța fundamentală a operei centralizate desfășurată de seriile de reviste ,,Referativnîi jurnal'', acestea sînt folosite pe scară largă în institutele de proiectări și de cercetări și în învățămîntul superior și — cel puțin deocamdată — pe scară mult mai redusă în cabinetele tehnice din uzine și fabrici.

,,Referativnîi jurnal mehanika'' a apărut pentru prima oară la sfîrșitul anului 1953. În anul 1954 au apărut 12 fascicule (fascicula a 12/1954 conține indice de nume cuprinzînd 5 890 de referate de specialitate).

Tomul pe 1955 conține 6 481 referate, fascicula a 12-a fiind consacrată indicelui de nume de autori. Cele 12 fascicule din aceeași revistă pe anul 1956 conțin 8 755 referate, indicele de nume fiind cuprins într-o fasciculă separată. Volumul pe 1957 conține 13 649 referate, indicele de autori și de materii fiind conținut în fascicula a 12-a. Volumele pe anii 1958 și 1959 conțin fiecare în cîte 11 fascicule lunare, respectiv 13 733 și 14 750 referate, ultima fasciculă din an fiind destinată indicilor de nume de autori și de materii. Începînd cu anul 1960 toate cele 12 fascicule lunare sînt consacrate referatelor. Tot din 1960 apar cîte două fascicule separate conținînd tabele de nume de autori și de materii, la a căror elaborare se folosesc sistematic mașini electronice de calcul cu programare adecvată. O dată cu apariția primei fascicule pe anul 1961, ,,Referativnîi jurnal mehanika'' s-a subdivizat în trei sectoare: A. Probleme generale de mecanică. Mecanică generală; Б. Hidromecanică; B. Elasticitate și plasticitate. Ele cuprind respectiv referate asupra materialelor de specialitate *publicate în toate colțurile lumii* repartizate pe mai multe rubrici: Generalități. Activitatea institutelor de cercetare științifică, Conferințe, Congrese, Istoria mecanicii, Sboruri cosmice, Probleme generale de mecanica mediilor continue, Metodele mecanicii. Mecanică generală: Balistică cerească, Bazele mecanicii și mecanica sistemului, Stabilitatea mișcării, Vibrații, Teoria reglării automate, Teoria mecanismelor și mașinilor. Magnetohidrodinamică și mișcarea plasmei. Dinamica gazelor și aerodinamică: Mișcări într-o singură dimensiune, Unde de șoc, explozii, detonație, Acustică (teoria hidrodinamică), Gaze rarefiate, Mișcări bi- și tridimensionale, Aerodinamica aripii și elicei, Aerodinamica aeroplanului și elicopterului, Aerohidroelasticitate, Rachete și proiectile, Aerodinamica canalelor și a jeturilor de gaze, Motoare cu gaz, Aerodinamica motoarelor, Aerodinamică experimentală. Hidrodinamică și hidraulică: Hidrodinamică generală, Unde și curenți marini, Teoria navei, Cavitația, Jeturi și mișcarea picăturilor, Hidraulică generală, Hidraulica conductelor și a sistemelor sub presiune, Lovituri de berbec și camere de echilibrare, Hidraulică fluvială, Hidraulica construcțiilor hidrotehnice, Hidrodinamica mașinilor hidraulice. Fluide vîscoase. Strat limită. Transfer de căldură, difuzie: Teoria generală a mișcării fluidelor vîscoase. Teoria hidrodinamică a ungerii, Straturi limită, Transfer de căldură, Aerodinamica combustiei, Reacții chimice în curent. Difuzie și transfer de masă. Turbulență. Meteorologia dinamică. Mișcarea amestecurilor de lichide și gaze și transfer de particule în suspensie. Proprietăți ale lichidelor și gazelor. Mișcarea fluidelor cu proprietăți speciale. Mișcarea lichidelor și gazelor în medii poroase: Probleme generale, Mișcare stabilizată, Mișcare nestabilizată, Aplicații. Măsurarea curenților, aparate. Probleme generale (de elasticitate și plasticitate). Teoria elasticității: Probleme spațiale de teoria elasticității, Probleme plane de teoria elasticității, Încovoiere și torsionare, Învelișuri, Plăci, Unde elastice, Oscilația corpurilor elastice. Plasticitate, fluaj, mecanica solurilor: Plasticitate, Probleme tehnologice ale teoriei plasticității, Probleme dinamice ale teoriei plasticității, Dislocări, Fluaj și reologie, Degradare, Mecanica solurilor. Bare și sisteme de bare: Bare curbe și bolți, Rame, Grinzi, Bare cu pereți subțiri, Ferme. Rezistența construcțiilor: Construcții de avioane și nave, Dispozitive de construcții, Rezistența organelor de mașini. Rezistența materialelor: Rezistență statică și rezistență la șoc, Oboseală, Rezistență la temperaturi înalte, Proprietăți mecanice ale diferitelor materiale, Materiale plastice și polimeri, Metode experimentale. Indice de autori.

Într-o ședință recentă comună a Colegiului Comitetului de Stat de pe lîngă Consiliul de Miniștri al U.R.S.S. pentru coordonarea lucrărilor de cercetare științifică și a Prezidiului Academiei de Științe a U.R.S.S., subliniindu-se faptul că VINITI a reușit să cuprindă în referatele elaborate o extrem de bogată literatură de specialitate publicată în lumea întreagă, s-a hotărît să se micșoreze intervalele de timp ce se scurg între apariția lucrărilor și publicarea referatelor în seriile corespunzătoare din ,,Referativnîi jurnal'' și să îmbunătățească calitatea revistelor de referate și s-a propus realizarea de către VINITI în decursul anilor 1962—1963 a unei mecanizări complexe a procesului tehnologic de elaborare a informației de specialitate tipărite. Mijloacele tehnice actuale de prelucrare automată a informației, combinate cu păstrarea și căutarea automată a ei, vor permite Institutului Unional de informație științifică și tehnică din U.R.S.S. să reducă și mai simțitor termenele de apariție a informației științifice, oferind astfel oamenilor de știință de pretutindeni izvoare de informație sigure asupra tezaurului de bibliografie științifică.

A DECADE OF CENTRALIZED ACTIVITY OF SCIENTIFIC INFORMATION IN THE FIELD OF THEORETICAL AND APPLIED MECHANICS

ABSTRACT

The paper reviews briefly the activity carried out in the last ten years by Referativnyi jurnal mekhanika. The fields in which papers are reviewed and the form of presentation of the material are shown. Meanwhile, some aspects of the activity of the All-Union Institute of Scientific and Technical Information of the U.S.S.R. are presented.

The important role VINITI and Referativnyi jurnal mekhanika play and are going to play in the development of science is also underlined.

RECENZII

ȘT. NĂDĂȘAN, B. HOROVITZ, AL. BERNATH, V. SAFTA, *Oboseala metalelor*. Edit. tehnică, București, 1962, 224 p.

Lucrarea prezintă o vedere generală asupra fenomenelor de oboseală a metalelor cu explicațiile științifice existente asupra acestui fenomen, tehnica de încercare la oboseală, calculul de rezistență ținînd seama de oboseala materialelor și contribuțiile romînești, în special ale autorilor, în acest domeniu.

Astfel, după o scurtă prezentare a tipurilor de solicitări care ar putea produce fenomenul de oboseală și aspectul ruperilor rezultate, se prezintă diferitele teorii existente pentru aplicarea acestui fenomen. Remarcăm printre ele teoriile moderne de dislocație și cele statistice.

Pe baza acestor teorii se prezintă metodele directe și indirecte de determinare experimentală a rezistenței la oboseală.

Ca metode directe se prezintă metoda clasică a lui Wöhler, metoda sarcinilor progresive a lui Prot și metoda Ivanova. Dintre metodele indirecte se prezintă cele bazate pe studiul săgeții, a coeficientului de dilatare liniară precum și cele bazate pe relațiile care există între rezistența la oboseală și alte caracteristici mecanice (rezistența la rupere statică, duritate etc.).

În capitolul următor se prezintă influența diferiților factori asupra rezistenței la oboseală.

Gruparea acestor factori se face în trei categorii. În prima categorie se includ factorii constructivi, respectiv forma piesei și modul de asamblare precum și mărimea piesei.

Factorii tehnologici constituie a doua categorie de factori ce influențează rezistența la oboseală și sînt grupați în cei care depind de material (compoziție chimică, factori metalurgici, incluziuni, macro și microstructura etc.) și cei care depind de calitatea suprafeței (prelucrări mecanice, termice și termo-chimice și acoperirile electrolitice) precum și în alți factori de mai mică importanță.

O ultimă categorie de asemenea factori îl constituie condițiile de exploatare. Aici sînt prezentate efectele felului solicitării, gradului de asimetrie al ciclului, suprasolicitărilor și subsolicitărilor de scurtă durată, șocurilor, frecvenței solicitării, temperaturii de lucru și activității chimice a mediului.

Influența acestor factori este analizată atît calitativ arătîndu-se sensul de variație a rezistenței la oboseală cît și cantitativ sub formă de diagrame și tabele de calcul.

Un paragraf special este destinat măsurilor care se pot lua pentru obținerea unei rezistențe la oboseală cît mai ridicate, în vederea realizării unor soluții constructive economice.

Capitolul al treilea se ocupă de calculul de rezistență la solicitări variabile.

Se prezintă aici metodele de calcul existente pentru ciclul simetric, pentru ciclul asimetric și pentru starea de solicitare biaxială. Este arătat de asemenea aici, calculul la o durabilitate limitată precum și cel pentru o încărcare nestaționară. Exemple de calcul ilustrează modul concret de aplicare a acestor metode.

Tehnica încercărilor de oboseală este prezentată în capitolul următor. După descrierea principială a diferitelor tipuri de mărimi de încercare la oboseală, se prezintă principalele forme de epruvete de încercat, precum și modul de confecționare ale acestora. Metodologiei de încercare efectivă îi este dedicat de asemenea un paragraf.

Un accent deosebit este pus pe prelucrarea științifică a datelor încercării care datorită dispersiei relativ mari a rezultatelor necesită acest lucru.

În ultimul capitol al lucrării se prezintă rezultatele încercărilor la oboseală ale oțelurilor carbon de calitate fabricate în R.P.R., încercări efectuate la Baza din Timișoara a Academiei R.P.R.

Sînt redate aici rezultatele obținute la încercările la oboseală prin încovoiere rotativă efectuate pe cinci calități de oțel carbon OLC35, OLC45, OLC60 (conf. STAS 880-60), OLC43AT și OLC47AT (conf. STAS 5725-57) atît în starea normalizată cît și în stare îmbunătățită.

Rezultatele obținute și prezentate în lucrare constituie una din contribuțiile importante ale autorilor în acest domeniu.

În rezumat, lucrarea prezentată constituie o monografie importantă în domeniul studiului oboselii materialelor, autorii aducînd o prețioasă contribuție atît în forma de expunere cît și în rezultatele practice obținute.

Numeroasele tabele și diagrame prezentate precum și rezultatele obținute privind caracteristicile principalelor oțeluri indigene, sub aspectul rezistenței la oboseală, fac ca lucrarea să constituie un prețios ajutor inginerilor noștri proiectanți. Lucrarea constituie de asemenea un important îndreptar pentru cei care doresc să cunoască și să aprofundeze acest domeniu.

Augustin Petre

M. HANGAN, *Construcții de beton armat. Introducere în alcătuirea și calculul structurilor statice*. Edit. tehnică, București, 1963, 720 p.

În ultimul timp, volumul construcțiilor de beton armat executate în țara noastră a crescut foarte mult, atît în ceea ce privește construcțiile civile cît și în ceea ce privește construcțile industriale și social-culturale, care pun probleme mai deosebite. De aceea, apariția unei lucrări de sinteză în această direcție, lucrare care prin amploarea și importanța materialului prezentat are caracterul unui tratat, este deosebit de utilă.

Inițial lucrarea a fost concepută pe întinsul a trei volume, dintre care au apărut volumele I și III, precum și un album cu date constructive pentru proiectare [1]; această carte cuprinde într-o formă condensată materialul conținut în volmul I, unele probleme tratate în volumul al III-lea și materialul ce urma să facă obiectul volumului al II-lea.

Autorul a căutat să scoată în evidență particularitățile structurilor de rezistență din beton armat, cartea sa constituind totodată un îndreptar pentru alcătuirea acestor structuri. În mare parte din capitole se dau și unele elemente introductive în calculul static; în general, aceste dezvoltări au fost limitate numai la problemele specifice construcțiilor de beton armat.

---

[1] Volumul I a fost recenzat în St. cerc. mec. apl., **VII**, *1*, 295 (1956), iar volumul al III-lea în aceeași revistă, **X**, *3*, 947 (1959).

Totuși, la unele capitole s-a făcut o expunere mai largă pentru a clarifica modul de comportare și de lucru al unor construcții, precum și pentru a arăta stadiul actual al metodelor de calcul. În unele cazuri s-au dat și justificări teoretice a rezultatelor prezentate, precum și tabele de calcul utile în practica de proiectare. Menționăm tratarea unor probleme mai rar întîlnite, specifice construcțiilor de beton armat, cum sînt efectul lățimii reazemelor în calculul planșeelor și platelajelor, efectul tasării reazemelor grinzilor de beton armat și efectul torsiunii în calculul planșeelor monolite de beton armat.

Tratatul cuprinde o introducere și 20 de capitole.

În introducere se fac considerații asupra utilizării betonului armat în construcții industriale și social-culturale. Se arată astfel care sînt structurile statice fundamentale, insistîndu-se asupra halelor și acoperișurilor în cadre de beton armat monolit, plăcilor curbe subțiri și acoperișurilor suspendate ; se consideră de asemenea construcțiile prefabricate sau preturnate, precum și construcțiile executate din beton precomprimat. Capitolul I are de asemenea un caracter introductiv, cuprinzînd o clasificare a elementelor de construcție după natura solicitărilor și a tensiunilor, cu aplicație la elementele de beton armat. Se prezintă apoi problema izolărilor termice și fonice la planșee și pereți, precum și problema fisurilor și crăpăturilor în construcțiile de beton armat.

În capitolul al II-lea se face o privire generală asupra grinzilor de beton armat. Se consideră astfel grinzile static determinate și grinzile static nedeterminate, în special cele cu moment de inerție variabil. O atenție deosebită este acordată modului de rezemare : rigiditatea reazemelor, încastrări parțiale etc. Menționăm de asemenea unele rezultate privind grinzile supuse la torsiune și grinzile curbe.

Capitolele III și IV sînt dedicate plăcilor plane și planșeelor de beton armat.Se dau ecuațiile generale de calcul, precum și unele rezultate folosind metoda diferențelor finite și — în particular — metoda relaxării. Se consideră în special plăcile cu armătură de rezistență pe una sau două direcții. Se studiază apoi planșeele monolite cu grinzi principale și secundare, planșeele fără grinzi (planșeele ciuperci), planșeele dală, planșeele prefabricate, precum și diferite planșee cu alcătuiri speciale ; cu această ocazie se dau rezultate și în ceea ce privește rețelele de grinzi.

În capitolul al V-lea se fac considerații în legătură cu calculul și alcătuirea grinzilor cu zăbrele și a grinzilor cadre ; se arată modul de calcul al momentelor încovoietoare și conlucrarea acestor elemente cu restul construcției. Grinzile pereți fac obiectul capitolului al VI-lea. Aici se dau unele relații generale de calcul, privind în special grinzile pereți de înălțime foarte mare (teoretic infinită), unele diagrame de repartiție a stării de tensiune, precum și elemente constructive utile în proiectare.

Construcțiile în cadre de beton armat sînt studiate în capitolul al VII-lea. După principiile de alcătuire și clasificare, se cercetează problema rigidității și articulațiilor, precum și starea de tensiune la colțurile și ramificațiile cadrelor. Pentru diferite tipuri de cadre de beton armat se dau norme de predimensionare și unele metode simplificate de calcul. Se iau în considerare de asemenea și tensiunile produse de variații de temperatură, contracții sau diverse deplasări ale cadrelor. În continuare se tratează construcțiile rigidizate prin diagrame în capitolul al VIII-lea. Aici se consideră modul de alcătuire și rigidizare a construcțiilor cu mai multe nivele, punîndu-se accentul pe rigiditatea diafragmelor și a diferitelor elemente de susținere. Se studiază comportarea statică a acestora, precum și momentele încovoietoare și forțele tăietoare ce apar în cadrele diafragme. Menționăm prezentarea modului de alcătuire a fundațiilor pereților diafragmei.

Capitolul al IX-lea este destinat calculului construcțiilor de beton armat cu considerarea proprietăților elasto-plastice ale materialelor. Se arată astfel cum se efectuează calculul structurilor prin alegerea poziției articulațiilor plastice, precum și determinînd, prin aproximații succesive, ordinea de apariţie a articulaţiilor plastice; în felul acesta se calculează grinzile static nedeterminate în domeniul plastic. De asemenea se dau rezultate pentru plăci plane şi planşee ciuperci.

În capitolul al X-lea se studiază bolţi şi arce. După unele consideraţii cu caracter general se prezintă bolţile de coincidenţă şi se face legătura dintre forma bolţii şi forma încărcării. Plăcile curbe subţiri, tratate mai detaliat, sînt cuprinse în capitolul al XI-lea. După o introducere cu caracter general, se studiază cupolele de beton armat, bolţile cilindrice subţiri şi plăcile curbe subţiri cu dublă curbură. Se pun de asemenea în evidenţă construcţiile autoportante alcătuite din plăci plane subţiri (construcţii prismatice sau poligonale). Se consideră apoi influenţa precomprimării, prefabricării şi a asamblării prin precomprimare.

Capitolul al XII-lea cuprinde rezultate privitoare la construcţiile din beton armat cu armături rigide; se fac unele consideraţii generale, insistîndu-se asupra utilităţii unor asemenea elemente de construcţie. Construcţiile prefabricate de beton armat sînt prezentate în capitolul al XIII-lea; se menţionează materialele utilizate pentru prefabricate, caracteristicile de calcul ale acestora, precum şi unele prevederi de execuţie. Autorul ia în considerare atît construcţii social-culturale şi de locuit cît şi construcţii industriale. O atenţie deosebită este acordată problemelor de asamblare, îmbinare şi rigidizare a pieselor prefabricate de beton armat. Principiile de realizare şi avantajele construcţiilor de beton precomprimat sînt cuprinse în capitolul al XIV-lea; se dau unele rezultate privitoare la grinzile static determinate şi la structurile static nedeterminate alcătuite în acest fel.

În capitolul al XV-lea se prezintă probleme referitoare la scările de beton armat. În afara unor consideraţii generale se arată modul de realizare al scărilor şi se dau detalii de execuţie. Menţionăm scările total sau parţial prefabricate, cercetate de autor.

Ţinînd seama de importanţa din ce în ce mai mare ce se acordă în ţara noastră calculului la sarcini seismice, autorul prezintă în capitolul al XVI-lea unele date privind comportarea şi calculul construcţiilor la cutremur. Se arată astfel modul de evaluare a sarcinilor seismice, unele metode simplificate de calcul, precum şi norme de proiectare. O atenţie deosebită se acordă terenului de fundaţie, alcătuirii fundaţiilor şi conformării antiseismice a structurilor.

În capitolul al XVII-lea se fac consideraţii asupra rolului şi alcătuirii fundaţiilor de beton şi beton armat. Se prezintă astfel fundaţii de mică adîncime, fundaţii izolate pentru stîlpi, fundaţii pe tălpi continue şi radiere de beton armat. Principiile de alcătuire şi calculul zidurilor de sprijin sînt cuprinse în capitolul al XVIII-lea.

Capitolul al XIX-lea este dedicat problemelor de încercări ale construcţiilor. Se arată astfel aparatele şi instalaţiile utilizate la încercări de construcţii, încercările de exploatare, încercările duse pînă la rupere; de asemenea, se pun în evidenţă probele şi încercările făcute la şantierul unei lucrări. Transformările şi consolidările de construcţii sînt prezentate în capitolul al XX-lea. Menţionăm astfel consolidări de betoane dezagregate, defecte şi consolidări de fundaţii, consolidarea stîlpilor, consolidarea de grinzi şi consolidarea plăcilor.

Scopul lucrării prof. Hangan este de a arăta modul în care lucrează construcţiile, precum şi posibilităţile de realizare şi extindere ce pot fi date în prezent diferitelor sisteme de construcţie. Asemenea lucrări sînt rare şi în literatura străină de specialitate. Cartea este cu atît mai valoroasă cu cît cuprinde multe realizări ale constructorilor romîni şi se bazează pe o bogată şi foarte interesantă experienţă personală a autorului. Ea este utilă atît pentru învăţămîntul tehnic superior, cît şi pentru toţi inginerii constructori care lucrează în proiectare sau cercetare ştiinţifică, îmbogăţind considerabil literatura noastră tehnică.

P. P. Teodorescu

N. N. PATRAULEA, *Studii de aerodinamica hipersustentației* (*Zborul cu decolare și aterizare scurtă sau la verticală*). Edit. Acad. R.P.R., București, 1962, 625 p.

Problema hipersustentației prezintă o importanță deosebită în aplicațiile practice ale aerodinamicii și a dat naștere încă de multă vreme la numeroase studii teoretice și experimentale. În ultimul timp, pe lîngă aspectele acestei probleme, pe care le-am putea numi clasice, au apărut altele legate de necesitatea de a se realiza avioane cu decolare și aterizare foarte scurtă sau verticală. Acestor aspecte moderne N. N. Patraulea le-a consacrat mai mulți ani de cercetări, rezultatele fiind cuprinse în volumul de care ne ocupăm. Pentru a oferi o imagine cît mai completă asupra subiectului tratat, autorul a utilizat, acolo unde a fost cazul, lucrările altor cercetători care s-au ocupat de această problemă.

Primul capitol, cu caracter introductiv, conține o serie de considerații generale, în legătură cu utilitatea aparatelor de zbor cu decolare și aterizare scurtă sau verticală, precum și o clasificare a acestor aparate și a dispozitivelor de hipersustentație a aripii de avion.

O serie de generalități matematice asupra mișcărilor fluide și în special în legătură cu teoria mișcărilor cu dîră, dezvoltată de autor, sînt cuprinse în capitolul al doilea. Tot aici sînt expuse teoria și aplicațiile metodei analogiilor electrice la determinarea mișcărilor fluide.

Intrarea propriu-zisă în materie se face în capitolul al treilea, consacrat dispozitivelor potențiale de hipersustentație. Sub această denumire, autorul înțelege acele dispozitive care au ca obiectiv realizarea unei mișcări în jurul profilului de aripă foarte apropiată de mișcarea potențială. O primă categorie o formează dispozitivele de recirculație, în care se încadrează voletul de curbură, bordul de atac deformabil, producerea unei turbulențe mărite, suflajul stratului limită prin metode pasive (fante și voleți de curbură cu fante) sau active, aspirația stratului limită precum și diversele tipuri de frontiere mobile în sensul curentului.

O a doua categorie de astfel de dispozitive cuprinde pe acelea de supercirculație, numite astfel deoarece circulația în jurul profilului poate fi mai mare decît aceea care corespunde mișcării irotaționale. În cadrul capitolului, se tratează supercirculația prin efect de sursă negativă precum și dispozitivele potențiale de supercirculație pentru aripile toroidale. În ambele cazuri se utilizează și analogia reoelectrică.

Următorul capitol conține teoria dispozitivelor de supercirculație bazate pe generarea dîrelor, prin care se creează forțe ce acționează asupra fluidului din vecinătatea profilului de aripă. Se prezintă pe scurt considerații asupra voleților de intrados sau extrados opaci și mai în amănunt teoria voleților permeabili. Capitolul se încheie cu tratarea aceleiași probleme pentru aripile inelare. Atît pentru profile cît și pentru aripile inelare se face uz și de analogia reoelectrică.

Capitolul al cincilea este dedicat problemei obținerii supercirculației prin interacțiunea dintre aripă și jeturile fluide, care a făcut obiectul unor cercetări teoretice și experimentale deosebit de ample ale autorului. Se tratează mai întîi problema profilului de aripă cu volet fluid (jet-flap), apoi aceea a aripilor de anvergură finită și a aripilor inelare prevăzute cu astfel de jeturi.

Un alt aspect este tratat în capitolul următor care se ocupă de producerea forțelor aerodinamice axiale, prin organe tractive sau de frînare. Remarcăm îndeosebi tratarea problemei măririi coeficientului de calitate a elicelor prin întubare sau prin utilizarea elicelor în tandem antagoniste, precum și expunerea referitoare la organele de frînare permeabile și cu pînză de jet.

În capitolul al șaptelea este expusă teoria elaborată de autor și colaboratorii săi pentru vehiculele bazate pe influența aerodinamică a solului (vehicule cu pernă de aer), care a condus la realizarea practică a unui astfel de vehicul.

În sfîrșit, în ultimul capitol se tratează problema obținerii hipersustentației prin superviteză efectivă, adică prin realizarea în dreptul sistemului portant a unei viteze mai mari decît aceea de deplasare a aparatului. Sînt studiate mai multe posibilități de realizare, fie cu aripi toroidale sau de alte forme, fie prin suflajul aripii.

Ceea ce se remarcă îndeosebi în acest volum este conținutul foarte bogat și tratarea matematică riguroasă a problemelor, fără a se neglija însă aspectele fizice care sînt minuțios analizate. Reușind să îmbine în mod fericit aspectele teoretice cu cele aplicative și prezentînd un mare număr de idei originale care pot conduce la realizarea practică a diverselor dispozitive de hipersustentație, autorul a reușit să dea o imagine completă a ansamblului de probleme tratate. Deși făcută la un nivel înalt, expunerea este clară și poate fi urmărită cu destulă ușurință.

Această carte, unică în genul ei în literatura de specialitate, prezintă în primul rînd un interes cu totul deosebit pentru cei ce se ocupă de astfel de probleme. Dată fiind însă actualitatea problemelor tratate, precum și ca urmare a faptului că metodele matematice utilizate au un caracter mai general, putînd da naștere și la alte aplicații, lucrarea lui N. N. Patraulea se adresează unor cercuri mai largi de cercetători și specialiști.

T. Oroveanu

T. OROVEANU, *Scurgerea fluidelor prin medii poroase neomogene*. Edit. Acad. R.P.R. București, 1963, 328 p.

Exploatarea rațională a zăcămintelor de hidrocarburi fluide implică cunoștințe ample și profunde referitoare la curgerea fluidelor compresibile și incompresibile prin medii poroase. Cu toate că mediul poros este admis în „hidraulica subterană”, care se ocupă cu studiul acestor probleme, ca fiind omogen și izotrop, aceasta a reușit să explice satisfăcător o serie de fenomene fizice, relativ simple, care apar în exploatarea sondelor de țiței și gaze.

Măsurătorile efectuate în condiții de laborator asupra proprietăților fizice ale mediului poros, permeabilitate și porozitate, au arătat că valorile acestora sînt foarte neuniforme, variind cu punctul și direcția, datorită neomogenității și anizotropiei. Din acest motiv, apar în mod frecvent discrepanțe mari dintre valorile parametrilor curgerii, debit și presiune, determinați din măsurători și cei obținuți teoretic. Pe de altă parte, numeroase anomalii observate în exploatarea zăcămintelor de hidrocarburi fluide nu pot fi explicate pe baza teoriilor obținute în hidraulica subterană, admițîndu-se supoziția mediului poros omogen și izotrop. Astfel, de exemplu, exploatarea primară cu menținerea presiunii, cu ajutorul injecției extraconturale sau intraconturale a fluidelor în strat, reclamă stabilirea cît mai exactă a poziției frontului de dislocuire, unde neuniformitatea mediului poros joacă un rol esențial pentru aplicarea cu succes a metodei.

Față de considerațiile sumare expuse mai sus, rezultă că necesitatea abordării și soluționării problemelor întîlnite în practica exploatării țițeiului și gazelor, ținînd seamă de neomogenitatea mediului poros, așa cum se prezintă acesta în natură, s-a impus ca o consecință firească a asigurării progresului tehnic în acest domeniu.

Lucrarea examinează în mod original numeroase probleme, din acest punct de vedere, fiind prima de acest gen apărută în literatură. Aceasta reprezintă sinteza studiilor efectuate de autor, de mulți ani, completate cu contribuțiile aduse și de alți cercetători, unde se remarcă rezultatele originale și de o reală utilitate practică obținute într-o varietate mare de cazuri actuale, întîlnite în exploatarea zăcămintelor de hidrocarburi fluide.

Primul capitol se ocupă, după ce în prealabil sînt expuse considerațiile de ordin fizic necesare introducerii în aspectele matematice ale problemelor tratate, cu stabilirea ecuațiilor fundamentale care descriu scurgerea fluidelor compresibile și incompresibile prin medii poroase neomogene. Rezultatele obținute în acest capitol au fost stabilite ținînd seamă că permeabilitatea și porozitatea variază cu punctul și direcția, după o funcție oarecare, ceea ce corespunde situațiilor reale. Este, de asemenea, examinată și problema propagării undelor de presiune printr-un fluid elastic care se scurge printr-un mediu poros, a cărei aplicație practică intervine mai ales în cazul scurgerii cu variații mari ale presiunii, sau debitului, într-un timp scurt. În ceea ce privește scurgerea gazelor, acestea sînt considerate reale, introducîndu-se factorul de abatere de la legea Boyle-Mariotte, în ipoteza evoluției izotermice, ceea ce permite eliminarea erorilor apărute în cazul presiunilor mari, aferente ipotezei gazelor ideale utilizată în prezent.

Capitolul II este consacrat studiului proprietăților generale ale ecuațiilor fundamentale, obținute în capitolul precedent, care sînt de tip eliptic cu coeficienți variabili, pentru cazul staționar, și de tip parabolic cu coeficienți variabili pentru scurgerea nestaționară. Sînt examinate, pe baza considerațiilor de ordin fizic, condițiile la limită și inițiale care apar în scurgerea fluidelor prin medii poroase neomogene, sub aspectul rezolvării ecuațiilor fundamentale.

În capitolul III autorul prezintă soluțiile exacte ale numeroaselor probleme privind scurgerea staționară a fluidelor incompresibile, pentru cazul unidimensional și plan radial. În acest scop, sînt tratate cazurile întîlnite în exploatarea petrolului, obținîndu-se soluția efectivă a problemei afluxului spre o sondă, pentru o distribuție oarecare a permeabilității, cînd presiunile pe conturul de alimentare și al sondei sînt arbitrare.

Problema scurgerii sub presiune a fluidelor incompresibile este studiată în capitolul IV, prezentîndu-se soluții aproximative în cazul unei sonde imperfecte hidrodinamic, după caracterul deschiderii acesteia. De asemenea, se studiază și scurgerea sub construcții hidrotehnice, prin medii care prezintă o variație lentă a permeabilității.

Capitolul V este consacrat problemelor de scurgere cu suprafață liberă, ținîndu-se seamă de neomogenitatea mediului, atît pentru cazul staționar cît și pentru cel nestaționar. Se obțin soluții pe baza utilizării diferitelor procedee de liniarizare a ecuațiilor fundamentale.

Un alt capitol, VI, studiază scurgerea fluidelor cu o compresibilitate redusă, cunoscute în literatură sub denumirea de fluide elastice, avînd o mare importanță în exploatarea zăcămintelor de țiței. Sînt soluționate problemele afluxului plan-radial și axial simetric spre o sondă, în cazul cînd variația permeabilității poate fi aproximată printr-un polinom de un grad oarecare, considerîndu-se cunoscute debitele pe ambele frontiere, și anume : conturul de alimentare și cel al sondei. O soluție aproximativă este prezentată tot pentru aceleași condiții la limită, însă pentru o distribuție oarecare a permeabilității.

Problemele referitoare la scurgerea gazelor, care au o mare aplicabilitate în exploatarea zăcămintelor de gaze, sînt redate în capitolul VII. Ca punct de plecare pentru descrierea matematică a scurgerii sînt utilizate ecuațiile fundamentale, stabilite în capitolul I, unde s-a considerat abaterea gazelor reale de la legea Boyle-Mariotte. Astfel, este rezolvată problema determinării debitului de gaze al sondei, în condițiile scurgerii staționare și nestaționare, atunci cînd distribuția permeabilității poate fi aproximată printr-o funcție cunoscută.

În sfîrșit, ultimul capitol examinează bazele teoretice ale scurgerii fluidelor eterogene prin medii neomogene, în ipoteza validității legii lui Darcy pentru fiecare fază, cu aplicații la dislocuirea țițeiului de către apă, ținîndu-se seamă de efectul capilarității. Un caz foarte interesant, referitor la această problemă, este examinat atunci cînd în zăcămînt există o distribuție inițială a saturației în apă. Rezultatele obținute, admițînd că cele două fluide, dislocuitul și dislocatul, sînt inmiscibile, permit stabilirea mai corectă a poziției frontului de dislocuire apă-țiței.

Din această succintă prezentare rezultă că lucrarea aduce o valoroasă contribuție la elucidarea cunoașterii particularităților de scurgere ale fluidelor compresibile și incompresibile prin medii poroase naturale. Deosebit de meritoriu, pentru autor, considerăm și faptul că acesta a reușit să înlăture, pentru prima oară, dificultățile matematice inerente rezolvării problemelor complexe care apar în general la studiul scurgerii fluidelor prin medii neomogene, prezentînd soluții aplicabile calculelor inginerești.

Dat fiind varietatea mare a problemelor actuale, rezolvate de autor, mai ales cele cu aplicații la exploatarea zăcămintelor de hidrocarburi fluide, unde au fost cercetate noi aspecte teoretice a căror importanță practică este astăzi unanim recunoscută, lucrarea este foarte utilă în numeroase studii care trebuie efectuate în scopul obținerii eficienței maxime a exploatării țițeiului și gazelor, adresîndu-se atît specialiştilor care doresc să aprofundeze problemele tratate cît și inginerilor care lucrează în acest domeniu.

H. Pascal

Я. Л. ГЕРОНИМУС, *Геометрический аппарат теории синтеза плоских механизмов* (Aparatajul geometric al teoriei sintezei mecanismelor plane). Гос. изд. физ.-мат. лит., Москва, 1962, 400 p.

În sinteza mecanismelor plane s-au conturat două şcoli remarcabile : una rusă inițiată de savantul rus P. L. Cebîșev, utilizînd un aparataj de calcul analitic, și continuată și dezvoltată de numeroși savanți sovietici, între care menționăm pe I.I. Artobolevski, Z. S. Bloch, N. I. Levițchi, L. Gheronimus, și alta germană întemeiată de savantul L. Burmester, avînd la bază metode geometrico-grafice, și care a fost dezvoltată între alții de H. Alt, R. Müller, V. Lichtenheldt, R. Beyer etc. Fiecare metodă, fie cea analitică fie cea geometrică, își are avantajele ei specifice și dacă uneori cea geometrică apare mai ușoară în alte probleme cea analitică dă soluții mai precise. Totodată metodele se pot completa și ajuta reciproc în rezolvarea problemelor complexe și de mare exactitate care să satisfacă cerințele actuale tot mai exigente în domeniul construcției de mașini, construcției de aparate și de automate. În sprijinul acestor afirmații profesorul I. L. Gheronimus prezintă în lucrarea sa aparatajul geometric utilizat în sinteza mecanismelor plane.Cu această ocazie, expunîndu-se problemele, rezolvările etc. ale sintezei mecanismelor plane, lucrarea contribuie deosebit la familiarizarea constructorilor cu metodele acestui domeniu de lucru.

Lucrarea are trei părți cu următoarele subiecte :

— elementele teoriei curbelor algebrice și ale geometriei proiective,
— elmentele geometriei diferențiale,
— elementele geometriei cinematice.

În prima parte sînt expuse noțiuni și probleme legate de puncte, drepte, curbe astfel : punct și dreapta la infinit, șiruri de puncte, rapoarte anarmonice, fascicule de drepte și de curbe, curbe de ordinul doi, proprietățile secțiunilor conice, proprietățile curbelor circulare de gradul trei, transformarea de coordonate și metodele constructive ale geometriei proiective.

Sînt redate clar o serie de teoreme principale necesare în studiul curbelor și se stăruie desigur asupra curbei lui Burmester expunîndu-se determinarea sa grafică și analitică. Totodată se prezintă metoda lui A. P. Kotelnicov.

Partea a doua tratează despre contactul curbelor plane, despre puncte și curbe caracteristice, despre curbele de bielă.

În ultima parte sînt date rezolvările problemelor geometriei cinematice, expunîndu-se cazurile pozițiilor vecine și infinit apropiate ale planului mobil. Diferite construcții geometrice și cercetarea unor puncte și curbe remarcabile, construcția Bobillier, Euler-Savary, punctul lui Ball, Cebîșev, punctele Burmester etc., sînt suficient de clar și de complet expuse. Această parte cuprinde astfel problemele puse direct în sinteza mecanismelor plane și rezolvarea lor corectă și bogată arată că lucrarea în totalitatea ei corespunde scopului propus. Pe de altă parte, capitolele sînt însoțite de numeroase exemple rezolvate ceea ce ușurează mai mult înțelegerea diverselor teoreme, construcții etc.

Lucrarea prezentată este astfel utilă constructorilor și cercetătorilor noștri care lucrează în sinteza mecanismelor.

Chr. Pelecudi

M. C. ЭЙДИНОВ, *Расчет зубчатых и червячных передач* (Calculul transmisiilor prin roți dințate și cu melc). Гос. научно-тех. изд. машиностр. лит., Москва-Свердловск, 1961, 220 p.

Datorită avantajelor pe care le prezintă, față de celelalte feluri de transmisii mecanice, transmisiile prin angrenaje au o largă răspîndire în cele mai diferite domenii ale construcției de mașini. Acest lucru a făcut ca în literatura de specialitate să apară o serie de lucrări care caută să rezolve diferite probleme legate de proiectarea, confecționarea și controlul acestor transmisii. Din cauza multiplelor probleme pe care autorii caută să le rezolve, precum și a complexității lor, în multe din aceste lucrări metodele moderne de calcul al angrenajelor au fost expuse într-o astfel de formă încît produc dificultăți la aplicarea lor în practică.

Cartea lui M. S. Eidinov își propune să elimine acest neajuns și să prezinte metode moderne de calcul al angrenajelor într-o formă cît mai accesibilă, pentru a putea fi ușor aplicate în practică.

Lucrarea începe cu o sumară prezentare a noțiunilor teoretice privitoare la angrenarea evolventică (cap. I) după care trece direct la prezentarea metodelor moderne de calcul.

În prima parte a cărții (cap. II—IV) este prezentat calculul roților dințate cilindrice cu dinți drepți și dinți înclinați. Aici sînt prezentate noțiuni despre parametrii de bază ai transmisiei, despre materialele din care se confecționează astfel de roți precum și despre corijarea danturilor.

Calculul roților dințate cilindrice este prezentat în funcție de tensiunea de contact care apare între 2 dinți în timpul funcționării transmisiei, de efortul la încovoiere și de solicitarea maximă. Aceste calcule sînt sintetizate la sfîrșitul acestei părți, unde se prezintă ordinea în care trebuie să se desfășoare un calcul modern de roți dințate cilindrice cu dinți drepți și înclinați.

Calculul roților dințate conice care este prezentat în continuare (cap. V—VI), se desfășoară identic cu cel al roților dințate cilindrice, bineînțeles scoțîndu-se în evidență elementele caracteristice acestei transmisii.

Capitolul VII al lucrării este consacrat studiului forțelor care apar în transmisiile cu roți dințate cilindrice și cu roți dințate conice.

Următoarele capitole (cap. VIII—X) sînt consacrate studiului angrenajelor cu melc. Este studiat atît angrenajul cu melc cilindric, cît și angrenajul cu melc globoidal.

După prezentarea parametrilor de bază și a materialelor din care se confecționează melcii și roțile melcate, autorul redă calculul acestor transmisii ținînd seama atît de tensiunea de contact cît și de solicitarea la încovoiere. De asemenea, se prezintă verificarea corpurilor melcilor la rigiditate, se determină reacțiunile de lagăre, precum și un calcul termic al transmisiei mecanice.

Lucrarea se încheie cu prezentarea calculului transmisiei prin roţi dinţate hipoide şi elicoidale, precum şi a transmisiei spiroidale (cap. XI).

Simplificînd cea mai mare parte a operaţiilor de calcul şi redînd numai noţiunile teoretice care erau absolut necesare, autorul a reuşit să-şi atingă scopul propus, acela de a oferi personalului tehnico-ingineresc din uzine şi institute de proiectare, care se ocupă cu calculul şi construcţia transmisiilor prin roţi dinţate, o lucrare despre metodele moderne de calcul al acestor transmisii la un nivel cît mai accesibil. În acest fel, aceste metode moderne de calcul vor pătrunde în practică, înlocuind vechile metode care de cele mai multe ori duceau la rezultate neconcludente.

C. Faraschiv

Т. П. БОЛОТОВСКАЯ, И. А. БОЛОТОВСКИЙ, В. Э. СМИРНОВ, *Справочник по корригированию зубчатых колес* (Îndreptar pentru corijarea roţilor dinţate). Машгиз, Москва-Свердловск, 1962, 240 p.

În prima parte a lucrării autorii prezintă într-o formă foarte concisă influenţa parametrilor de bază ai angrenajelor asupra cinematicii, geometriei şi rezistenţei acestora. Se arată că aplicarea unei corijări optime asigură mărirea capacităţii portante a roţilor dinţate cu 20—25 %, a durabilităţii angrenajelor cu 200 %, iar a rezistenţei la încovoiere cu 100 %. De asemenea, se dau cîteva exemple concrete de calcul.

În a doua parte a lucrării, care cuprinde aproximativ 90 % din volumul total al ei, se dau diagrame pentru alegerea raţională şi rapidă a coeficienţilor de deplasare de profil. Aceste diagrame sînt denumite de autori conture de blocare.

Conturele de blocare sînt formate dintr-o serie de curbe care reprezintă dependenţa parametrilor geometrici (ascuţirea dinţilor, interferenţa, subtăierea etc.) şi a indicilor de calitate (gradul de acoperire, alunecările specifice etc.), de coeficienţii de deplasare de profil ξ_1 şi ξ_2. Aceste conture sînt construite şi reproduse în carte pentru cele mai uzuale combinaţii ale numerelor de dinţi Z_1 şi Z_2, care corespund cremalierei de referinţă cu parametrii $\alpha_0 = 20°$, $f_0 = 1$ şi $C_0 = 0{,}25$. Astfel apare posibilitatea de a alege rapid pentru fiecare caz concret în parte valoarea cea mai raţională şi optimă a coeficienţilor de deplasare de profil ţinînd seamă de factorii multipli care influenţează funcţionarea angrenajului.

Conturele de blocare din îndreptar se pot folosi şi în cazul roţilor dinţate conice cu dinţi drepţi şi a roţilor dinţate cilindrice cu dinţi înclinaţi.

Este important de precizat că prelucrarea roţilor dinţate corijate nu pretinde cheltuieli suplimentare, nu schimbă şi nu complică de loc procesul tehnologic, nu cere folosirea unor scule speciale şi nici utilaj special. Cu toate acestea, roţile dinţate corijate nu au găsit pînă în prezent o aplicare largă, cu toate avantajele pe care le au, cu tot calculul lor accesibil oricărui proiectant. Această situaţie se explică prin faptul că la alegerea parametrului de bază al corijării, adică a coeficienţilor de deplasare de profil ξ_1 şi ξ_2, se întîmpină greutăţi. În prezent aceşti coeficienţi se aleg de către constructor într-o anumită măsură la întîmplare (pe baza unor recomandări făcute de diferiţi autori) şi în acelaşi timp orientîndu-se după experienţa acumulată şi simţul lor tehnic. După adoptarea unui coeficient de deplasare de profil oarecum optim este necesar să se efectueze o serie de calcule laborioase de control. Dacă în urma acestor calcule se dovedeşte că condiţiile de funcţionare ale angrenajului nu sînt cele optime atunci se adoptă o altă valoare a coeficientului de deplasare de profil şi se repetă toate calculele de control.

Folosind conturele de blocare, care sînt reproduse în cartea autorilor, se pot alege rapid şi precis coeficienţii de deplasre ξ_1 şi ξ_2 pentru fiecare caz concret în parte şi ca urmare se exclud complet calculele laborioase de tatonare pe care le face proiectantul pînă ce obţine valorile coeficienţilor de deplasare cele mai convenabile pentru cazul concret pe care-l are de proiectat.

Traducerea acestui îndreptar în limba romînă, va contribui atît la simplificarea şi uşurarea proiectării cît şi la îmbunătăţirea esenţială a calităţii angrenajelor, ceea ce duce la micşorarea gabaritelor şi greutăţii acestora. Ca urmare, pe plan naţional, se pot prevedea economii apreciabile numai prin simpla folosire a conturelor de blocare.

I. Székely

⁂ *Семинар по теории машин и механизмов* (Seminarul de teoria maşinilor şi mecanismelor). Труды Института машиноведения, Изд. АН СССР, Москва, **XXIII**, *91* (1962).

În nr. 91 sînt cuprinse un număr de 5 comunicări :

1. V. S. LOSCININ, *Cercetări asupra regimului de mişcare periodic la limită a unui agregat de maşini.*

Acest articol este o continuare a lucrării publicate în nr. 88, intitulată, „Studiul calitativ al ecuaţiei diferenţiale de mişcare a unui agregat de maşini".

În prezentul articol autorul analizează ecuaţia diferenţială de mişcare a elementului de reducere dintr-un agregat de maşini. Se presupune că momentele forţelor motoare şi ale forţelor rezistente sînt funcţie de doi parametri cinematici — viteza unghiulară şi unghiul de rotaţie — ai elementelor de reducere, iar momentul de inerţie redus o funcţie de unghiul de rotaţie care poate fi considerat constant.

Lucrarea a fost efectuată în scopul rezolvării următoarelor probleme. :

— realizarea procesului de iteraţie care să ducă la un regim periodic la limită $T = T_\xi(\varphi)$ şi care să nu depindă de alegerea arbitrară a condiţiilor iniţiale φ_0 şi T_0 nici de mărimea intervalului de integrare ;

— cercetarea calitativă a procesului de iteraţie şi aprecierea criteriilor de convergenţă ;

— construirea unui algoritm convenabil care să prezinte programarea întregului proces de calcul pentru determinarea regimului de mişcare periodic la limită al unui agregat de maşini.

2. V. A. MERCULOV, *Cercetarea dinamicii unui transformator hidraulic reglabil cu legătură inversă după viteză.*

În această lucrare sînt expuse rezultatele cercetărilor teoretice şi experimentale ale proceselor dinamice ale unui transformator hidraulic reglabil cu reacţie după viteză. Acest tip de transmisie a fost realizat la întreprinderea de maşini-unelte „Orjonikidze" din Moscova în scopul de a obţine o variere continuă, fără trepte, a vitezei de lucru la maşinile unelte.

Lucrarea este interesantă şi utilă pentru proiectanţii de maşini-unelte.

3. I. V. EPSTEIN şi E. P. RAPOTA, *Asupra eficienţei metodelor de echilibrare exterioară optimă, a maselor unei maşini.*

În acest articol sînt expuse rezultatele echilibrării uniforme optime a motorului cu 2 cilindri D 16 de la un camion construit de uzina de tractoare din Harcov. Se dă de asemenea şi o verificare experimentală a rezultatelor teoretice. Amplitudinea oscilaţiilor unghiulare ale şasiului scade după introducerea contragreutăţilor de echilibru pînă la 2,5 ori, ceea ce permite o mai bună utilizare a capacităţii de încărcare a utilajelor. Rezultatele echilibrării motorului

D 16 dezvăluie posibilitatea îmbunătățirii dinamicii unui foarte mare număr de mașini — mai ales utilaj agricol—proiectat pentru a lucra la viteze mărite.

4. V. L. VEIT și V. L. DOBROVSLAVSKI, *Unele probleme ale dinamicii mașinilor cu acționare electrică.*

Este prezentat un sistem de analogii dinamice, pe baza caracteristicii dinamice generalizate a unui motor de curent continuu sau alternativ și care lucrează într-un sistem complex de reglare automată. Se arată calea rezolvării numerice a ecuației de mișcare a unei mașini cu motor cît și metoda de găsire a soluției periodice a acestei ecuații.

5. L. V. KORCEMNII, *Cercetarea cinematicii mecanismelor plane cu came, la care elementul condus are un profil cu o curbură variabilă.*

În această lucrare sînt date rezultatele cercetărilor legate de analiza și sinteza unui mecanism plan cu came, format din 3 elemente, pentru cazul cel mai general posibil, cînd profilul elementului condus este format de o curbă continuă oarecare. Pentru rezolvarea acestei probleme sînt utilizate funcțiile complexe de argument real.

L. Calmaciuc

WILHELM MÜLLER, *Theorie der elastischen Verformung* (Teoria deformației elastice). Akademische Verlagesellschaft, Leipzig, 1959, XI + 327 p.

Această carte nu se mărginește numai la expunerea teoriei generale a deformației elastice a corpurilor, așa cum ar părea că indică titlul ei, ci pe lîngă prima parte, care este dedicată acestui subiect, conține și o a doua în care sînt tratate o serie de probleme reprezentative din diverse capitole ale teoriei elasticității.

Primele două capitole sînt consacrate introducerii noțiunilor referitoare la deformațiile și tensiunile dintr-un corp elastic. În loc de formalismul obișnuit al calculului tensorial care este astăzi foarte răspîndit în tratarea acestor probleme, autorul utilizează calculul cu diade, noțiune care este prezentată în introducerea lucrării. În fond nu este vorba decît de un mod diferit de scriere care este preferat de unii autori pe motivul că face inutile anumite abstracțiuni. Se afirmă astfel, chiar și de către autor în prefața cărții, că metoda calculului diadic poate fi privită ca o bază naturală pentru întreaga fizică teoretică. Argumentul pare a fi acela că diada se introduce ca produs general a doi vectori, iar noțiunea de vector este ușor de conceput din punct de vedere fizic și în același timp fundamentală. Argumentul pare a avea o oarecare valoare dar este infirmat într-o anumită măsură de faptul că formulele sînt mai puțin compacte decît cele ale calculului tensorial obișnuit. De asemenea, avem impresia că introducerea directă a tensorilor de ordinul al doilea nu este atît de abstractă încît să fie dificil înțeleasă.

Capitolul următor are ca obiect relația între deformații și tensiuni și stabilirea ecuațiilor diferențiale ale elasticității liniare. Se introduce apoi noțiunea de energie de deformație, teoremele generale ale energiei și lucrului mecanic, în capitole separate. Un alt capitol este dedicat problemei fundamentale de minim al calculului variațiilor, cu exemplificări referitoare la încovoierea pură a barelor, încovoierea plăcilor subțiri și teoria învelitorilor cu simetrie axială. Se trece apoi la prezentarea principiilor lui Castigliano și Maxwell, iar ultimul capitol al primei părți conține stabilirea ecuațiilor diferențiale în diferite sisteme de coordonate curbilinii.

Partea a doua a lucrării conține capitole în care se tratează pe rînd torsiunea barelor cilindrice, încovoierea plăcilor subțiri de diverse forme geometrice simple și în mod separat aceea a plăcilor dreptunghiulare și cu alte genuri de frontiere rectilinii, teoria învelitorilor subțiri, problema stabilității elastice pentru bare și plăci, probleme de vibrații și unde elastice.

În ansamblul ei, cartea este bine scrisă, clară și cu o suficientă adîncire a problemelor pentru a constitui un bun manual introductiv în teoria elasticității. Semnalăm însă faptul că numărul de referințe bibliografice este destul de redus și nu conține lucrări mai recente care ar permite cititorului să adîncească unele probleme.

T. Oroveanu

G. GRIOLI, *Mathematical theory of elastic equilibrium (recent results)* (Teoria matematică a echilibrului elastic (rezultate recente)). Ergebnisse der angewandten Mathematik, 7, Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1962, VIII + 168 p.

Lucrarea prof. G. Grioli nu este scrisă cu intenția de a fi un tratat de teoria elasticității; de altfel, cadrul destul de restrîns al volumului nici nu ar fi permis aceasta. Dar, plecînd de la cercetări foarte recente, autorul prezintă unele probleme interesante și importante, puțin sau chiar deloc studiate în cele mai bune tratate dedicate acestei ramuri a științei. Aceste probleme, alese în special din cadrul teoriei neliniare, prezintă interes atît din punct de vedere fizic cît și din punct de vedere matematic ; ele au fost luate în considerare mai ales în legătură cu studiul corpurilor solide deformabile în ansamblul lor și în conexiune cu alte fenomene fizice. Multe din aceste probleme sînt încă deschise, ele fiind de-abia formulate, încă puțin studiate sau bazîndu-se pe ipoteze pe care practica urmează să le verifice în viitor.

Lucrarea este împărțită în 10 capitole, urmate de o bogată bibliografie privind problemele tratate.

Primele două capitole au un caracter introductiv. Aici se prezintă noțiunile de deplasare și deformație specifică și se stabilesc relațiile dintre ele în caz general. Se găsesc apoi ecuațiile de echilibru ale mediilor continue deformabile în exprimare euleriană (cea mai uzuală) sau sub formă lagrangeană.

Problema stabilirii legii constitutive a corpului solid elastic este tratată în diferite moduri de diverși autori. În special, pornind de la ideea dată de G. Green acum peste o sută de ani, se consideră structura analitică a potențialului termodinamic, luîndu-se un număr finit de termeni în dezvoltarea în serie a acestuia. G. Grioli folosește însă cîteva tipuri particulare de potențial termodinamic care nu au un caracter aproximativ dar se bazează pe ipoteze analitice sau de ordin fizic simple, cum sînt cele propuse de Tolotti sau Bordoni. În special menționăm utilizarea potențialului termodinamic al lui Signorini care conduce la elasticitatea de gradul al doilea ; aici componentele tensorului tensiune sînt funcții pătratice de componentele tensorului deformație specifică.

În capitolul al IV-lea se arată importanța studiului problemei clasice fundamentale a teoriei liniare a elasticității pentru problema neliniară ; într-adevăr, problema generală neliniară poate fi redusă la rezolvarea unei succesiuni de probleme liniare, pentru care se dau condițiile necesare și suficiente de existență și compatibilitate, în exprimare lagrangeană. Pe de altă parte, se arată că în unele cazuri valabilitatea soluției obținute în caz liniar este îndoielnică. Menționăm expunerea teoriei de ordinul al doilea a lui Rivlin.

Problema integrării sistemului de ecuații statice al elasticității neliniare este foarte dificilă și nu a fost rezolvată în întregime pînă în prezent, din punct de vedere al existenței soluției, al unicității, al posibilităților de dezvoltare în serie a soluției, al convergenței acestor serii etc. Autorul prezintă în capitolul al V-lea cîteva cazuri particulare, stabilind anumite teoreme interesante, bazate pe elemente moderne de analiză funcțională, rezultatele lui Stoppelli fiind deosebit de importante în această direcție.

Capitolul al VI-lea este dedicat unor probleme de elasticitate liniară. Autorul consideră că prezintă un interes deosebit stabilirea unor proprietăți de maximum pentru tensiuni și deplasări, deoarece, din punct de vedere practic, asemenea proprietăți sînt adesea suficiente pentru dimensionarea elementelor de construcție sau pentru alte probleme de aceeași natură. Se stabilesc astfel limite superioare în diferite condiții de acțiune a sarcinilor exterioare ; influența unei variații de temperatură într-o transformare adiabatică este de asemenea luată în considerare.

În capitolul al VII-lea se introduc unele metode generale de integrare pentru cazul liniar, bazate pe exprimarea deplasărilor sau chiar a tensiunilor sub o formă polinomială aproximativă, și pe aplicarea teoremelor clasice ale lui Menabrea și Betti. Observăm că aceste metode pot să ne conducă cu ușurință la soluții numerice cu ajutorul mașinilor electronice de calcul. Autorul arată că aceste metode de calcul pot fi adaptate și la rezolvarea problemelor corespunzătoare în caz neliniar. Menționăm expunerea metodei de integrare a lui M. Picone. Rezultatele obținute sînt aplicate la rezolvarea problemei statice a plăcii plane omogene de grosime variabilă și la rezolvarea problemei lui B. de Saint-Venant.

Problema plană a teoriei elasticității, în caz liniar (stare de deformație plană și stare de tensiune plană) este considerată pe scurt în capitolul al VIII-lea. Se determină în special structura analitică a funcției lui Airy, admițîndu-se și cazul prezenței unor dislocații.

Capitolul al IX-lea cuprinde o teorie recentă a solidelor deformabile, în care legea constitutivă este înlocuită printr-o relație între viteza de creștere a tensiunii și viteza de deformare : hipoelasticitatea. Bazat pe concepțiile lui C. Truesdell în această direcție, autorul formulează problemele atît din punctul eulerian de vedere cît și din punctul de vedere lagrangean. Se arată că această teorie este mai cuprinzătoare decît cea privitoare la deformațiile mari, putînd să intervină și în cadrul teoriei plasticității (posibilitatea de a determina trecerea din domeniul elastic în domeniul plastic fără a se folosi o condiție de plasticitate).

În ultimul capitol se tratează o problemă destul de puțin studiată : problema elasticității asimetrice. De obicei se consideră că asimetria tensiunilor tangențiale poate să apară în prezența unor momente masice, datorite unui cîmp electromagnetic. Autorul ia în considerare și posibilitatea apariției unei asimetrii (cel puțin locale), fără prezența momentelor masice ; aceasta se poate întîmpla sub acțiunea unor momente concentrate pe frontiera domeniului considerat. În felul acesta, singularitățile ce apar în teoria clasică și care nu corespund cu datele experimentale sînt înlăturate.

Monografia prof. Grioli prezintă, într-o formă clară, concisă și deosebit de precisă din punctul de vedere matematic, unele din cele mai moderne probleme ale teoriei elasticității ; prin bogata informație științifică, prin problemele pe care le ridică, prin sugestiile pe care le dă, această lucrare este deosebit de interesantă pentru toți cercetătorii din domeniul mecanicii solidelor deformabile.

P. P. Teodorescu

C.I.R.P. (Collège International Recherches Production) ANNALEN, X, *1*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 1962, 76 p.

Asocierea în cadrul C.I.R.P. a numeroși oameni de știință reprezentînd institute și centre de cercetări din peste 20 de țări, cu scopul de a promova, prin munca fiecăruia împărtășită la toți, progresul tehnic în domeniul producției de bunuri, constituie un exemplu de colaborare internațională, în slujba ridicării continue a nivelului de trai al oamenilor. Aderarea și a altor țări la acest colegiu, precum și difuzarea lucrărilor prin intermediul unei publicații unice C.I.R.P. ANNALEN, cu concursul UNESCO, nu pot fi decît salutate.

Din prima parte a materialului conținut în acest număr reiese că adunarea generală anuală pe 1961 a C.I.R.P. a avut loc în luna octombrie în R.S. Cehoslovacă, cu care prilej secreta ul general al colegiului P. Nicolau, a prezentat, conform tradiției, scopurile și lucrările asociației. Influența proprietăților materialului, geometria pieselor, interschimbabilitate, măsurători, automatizarea, adaptarea muncii la om, productivitate-economicitate sînt aspecte prin intermediul cărora se urmărește introducerea metodelor științifice în procesele tehnologice de prelucrare a materialelor în stare solidă.

În cadrul aceleiași teme generale de preocupări, revista publică cuvîntul de bun sosit la adunarea generală al lui F. Brabec, Praga, precum și darea de seamă asupra acestei a 11-a adunări a membrilor colegiului, făcută de către P. Nicolau. Sînt redate de asemenea dările de seamă ale următoarelor secțiuni de lucru : grupa C- așchiere ; grupa D- dicționar ; grupa E-prelucrarea prin deformarea plastică și grupa R- rugozitate.

În revistă sînt publicate apoi șapte lucrări și anume : J. Tlusty (Praga), *Numerical control of machine tools*, referat prin care se prezintă o vedere de ansamblu asupra sistemelor numerice de comandă la mașinile unelte și problemele constructive de concepție legate de acestea.

O. Kienzle (Stuttgart), *Der Stand des Gesenkschmiedens*, în care autorul relevă dezvoltarea deosebită luată în ultimii zece ani de operația de matrițare și economicitatea ei la producția pieselor de serie. Se studiază : materia primă și semiprodusele de matrițare, mărimile fizice din punct de vedere teoretic, procedee de lucru, mijloacele de producție precum și precizia dimensională a pieselor.

R. Weill (Arcueil, Seine), *Contribution à l'étude de la coupe avec util vibrant*, în care se prezintă încercările sistematice de așchiere efectuate cu scule tăietoare vibratoare, fiind scoase în evidență următoarele avantaje ale metodei : ruperea automată a așchiei, forțele și temperat u rile de așchiere în general mai reduse, eficacitatea mai mare a lichidului de tăiere și posibilitatea de a mări durabilitatea sculei.

E. Bodart (Liège), *Dispersion dans les essais de vie d'outils due à la coulée d'acier rapide*. În prima parte a lucrării se studiază împrăștierile în durabilitatea unei scule confecționate din același tip de oțel rapid însă de proveniență și din șarje diferite, iar în a doua parte influența asupra unei aceleiași scule a pieselor dintr-un oțel de aceeași calitate și proveniență însă din șarje diferite.

A. Wingard (Göteborg), *Gleichzeitige Rigistrierung von Daten bei Verschleissuntersuchungen*, în care autorul prezintă cercetările în cazul așchierii la strung pentru cuplul oțel rapid-oțel carbon nealiat, urmărind dinamica uzurii sculei cu ajutorul aprentelor de plumb, metodă dovedită a fi foarte precisă.

M. Polacek (Praga), *Die Figenscahften der Radialgleitlagerung von Spindeln*. Se prezintă avantajele lagărelor cu alunecare, mai ales cu suprafața activă sectorizată, la mașinile unelte la care se cere precizie și o funcționare liniștită la o gamă mare de turații.

S. Karlpakcioglu (Cincinati), *An experimental study of plastic deformation in power spinning*. Autorul prezintă un studiu privind deformația plastică la metale, în cazul formei geometrice cilindrice și conice a piesei. Aspectele de curgere a materialului sînt urmărite la suprafața piesei cu ajutorul rețelelor de linii și prin măsurarea microdurității, iar în masa materialului prin microfotografii de structură.

Cuprinsul revistei se încheie cu o dare de seamă asupra activității Institutului de cercetări pentru mașini-unelte și așchiere a metalelor (V.U.O.S.O.) din Praga, prezentată de J. Tlusty.

Gh. Vasilca

PUBLICAȚII PRIMITE PRIN SCHIMB LA REDACȚIE

M. A. Abdeev, *Polimetaliceskie ștein̂i i ih konvertirovanie*. Izd. AN Kazahskoi SSR, Alma-Ata, 1962, 225 p.

— *Nikolai Ivanovici Vavilov*. Izd. AN SSSR, Moskva, 1962, 89 p.

— *Dmitri Vladimirovici Skobelțin*. Izd. AN SSSR, Moskva, 1962, 49 p.

A. A. Prisniakov, *Fiziceskaia priroda anomalii plasticinosti u metalliceskih splavov*. Izd. AN Kazahskoi SSR, Alma Ata, 1963, 94 p.

R. A. Isakova, *Davlenie para sulfidov țvetnîh metallov*. Izd. AN Kazahskoi SSR, Alma Ata, 1963, 130 p.

A. A. Zborîkii ș.a., *Istoria tehniki*. Soțekghiz, Moskva, 1962, 772 p.

— *Novoe v pneumo-ghidravliceskoi avtomatike*. Izd. AN SSSR, Moskva, 1962, 160 p.

— *Avtomatizația proizvodstvennîh proțessov v mașinostroenii i priborostroenii*. Izd. AN SSSR, Latv. SSR, Riga, 1962, 119 p.

— Trudî Tbiliskogo Matematiceskogo Instituta, vol. XXVIII, 1962.

— Teoria mașin i mehanismov, nr. 92—93, 1962.

— *Trudî vsesoiuznogo soveșania po provetrivaniiu rudnikov i obespîllivaniiu rudnicinogo vozduha*. Izd. AN Kazahskoi SSR, Alma Ata, 1962, 257 p.

— Uspehi fiziceskih nauk, nr. 2, 3, 4, 1962; nr. 1, 2, 1963.

— Izvestia Akademii Nauk SSSR:
  — Metallurghia i topliva, nr. 6, 1962;
  — Energhetika i avtomatika, nr. 6, 1962;
  — Mehanika i mașinostroenie, nr. 6, 1962; nr. 1, 1963.
  — Vestnik Akademii Nauk SSSR, nr. 3, 1963.

A. Ia. Sagomonian, *Prostranstvennie zadaci po neustanovivșemusia dvijeniu sjimaemoi jidkosti*. Idz. Moskovskogo Universiteta, 1962, 80 p.

— *Nekotorie voprosî mehaniki*. Sbornik statei, Oboronghiz, Moskva, 1962, 205 p.

E. G. Kașarskii ș.a., *Naucino-metodiceskie voprosî sozdania serii krupnîh sinhronnîh mașin*. Izd. AN SSSR, Moskva, 1962, 154 p.

— Scientia Sinica, tom XI, nr. 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 1962.

— Acta Technica Academiae Scientiarum Hungaricae, tom 41, nr. 1—2, 3—4, 1962.

— Izvestia na instituta po vodno stopanstvo i stroitelstvo, Kniga 3, 1962.

— *Die Humboldt-Universität, Gestern-Heute-Morgen*. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1960, 250 p.

— *Internationales Spannungsoptisches Symposium Berlin*, 1961. Abhandlungen der Deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, nr. 4, 1962.

— *Bericht über die II. Internationale pulvermetallurghische Tagung in Eisenach, 1961*. Abhandlungen der Deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, nr. 1, 1962.

— *Proceedings of the fifth Japan Congress on Testing Materials*, Kyoto, 1962.

— Proceedings of the Automobile Division (The Institution of Mechanical Engineers), nr. 6, 7, 8, 9, 1961—1962.

- — Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, vol. 176, nr. 31, 32, 33, 34, 1962.
- — Reports and Memoranda, nr. 3279, 3285, 3288, 3289, 3291, 3292, 3293, 3295, 3300, 3302, 3303, 3308, 3309, 1962.
- — *Jahrbuch der Wissenschaftlichen Gesellschaft für Lufthart e. V. (WGL).* Braunschweig, 1961, 519 p.
- — *Základni problémy al stavhe spalovacich turbin CAV.* Praha, 1962, 627 p.
- — Travaux et Publications de l'Année 1962, Laboratoire d'Hydraulique et de Mécanique des Fluides, Toulouse.

De la Istituti di meccanica applicata e di aerodinamica del Politecnico di Torino (Reports)

Nr. 451, A. Muggia, *Regione di arresto per un solido di rotazione a prora schiacciata in corrente ipersonica assiale.*

Nr. 452, L. A. Povinelli, C. Ferrari, *A review of turbulent flame propagation.*

Nr. 454, *Interferenza di un getto fluido laterale con corrente ipersonica.*

Nr. 457, S. Nocilla, *On the interaction between stream and body in free-molecule flow.*

Nr. 458, C. Grillo, Pasçuarelli, *Ricerca di una legge ottima di variazione dell'assetto di un velivolo planante a velocita ipersonica per ridurne il riscaldamento aerodinamico.*

Nr. 459, C. Ferrari, *On the existence of a point with infinite acceleration in the transonic flow around a symmetrical wing profile at zero angle of attack.*

Nr. 460, S. Nocilla, *Risultati sperimentali su coni circolari senza incidenza ottenuti con la camera transonica del Politecnico di Torino.*

Nr. 445, E. Mattioli, *Experimental reserach on the mechanism of transition.*

De la Departament of Aeronautical Engineering, Kyoto University

G. Kamimoto, *Triple diaphragm type hypersonic shock tunnel.* Current Papers, nr. 1, 1962.

G. Kamimoto, *Effect of shock attenuation on reflected shock waves.* Current Papers, nr. 2, 1962.

De la Aeronautical Ressearch Institute of Sweden (Memoranda)

PE 13, Bo. K. O. Lundberg, *International long-term planning aiming to limit airport noise.*

PE 15, Bo. K. O. Lundberg, *Notes on the level of safety and the repair rate with regard to fatique in civil aircraft structures.*

Report 92/1962, R. G. Wilby, *The flow field about a hemispherecylinder body at a Mach-number of 7.3.*

De la University of Birmingham

S. C. Redshaw, *An electrical analogue for determining the stresses in a momentless shell of positive gaussian curvature.* 1962, 16 p.

S. C. Redshaw, *The use of a negative resistance for the solution of structural problems by electrical analogy.* 1961, 5 p.

Disertații primite de la Technische Hochschule Stuttgart

E. Grau, *Untersuchungen an hydrodynamischen und hydrostatischen Gleitlagern,* 1962, 194 p.

E. Lang, *Ventil — und Druckschwingungen in der Werkzeugmaschinenhydraulik,* 1962, 92 p.

R. Szillard, *Beitrag zur Schwingungsberechnung prismatischer Faltwerke*, 1962, 95 p.
E. Henze, *Räumliche homogene, stationäre und instationäre Irrfahrten im Gitter*, 1961, 44 p.
R. Pruschek, *Transportvorgänge in der turbulenten Strömung durch Füllkőrperrohre*, 1962, 11 p.

Disertaţii primite de la Université de Liège

F. Monfort, *Le processus markovkien de la carde*, 1962, 98 p.
J. Toussaint, *Essai sur une étude thermodynamique des semiconducteurs*, 1962, 111 p.

Disertaţii primite de la Technische Hochschule Karlsruhe

L. Reh , *Das Wirbeln von körnigem Gut im schlanken Diffusor als Grenzzustand zwischen Wirbelschicht und pneumatischer Förderung*, 1961, 140 p.
Tsunea Someya, *Stabilität einer in zylindrischen Gleitlagern laufenden, unwuchtfreien Welle. Beitrag zur Theorie des instationär belasteten Gleitlagers*, 1962, 110 p.

2557 F2557 40

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÎNE
INSTITUTUL DE MECANICĂ APLICATĂ „TRAIAN VUIA"

1964 MAR 24

5
ANUL XIV
1963

STUDII ŞI CERCETĂRI DE
MECANICĂ APLICATĂ

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

COMITETUL DE REDACŢIE

Redactor responsabil:

ACADEMICIAN E. CARAFOLI

Membri:

ACADEMICIAN N. PROFIRI;
ACADEMICIAN A. BELEŞ;
CR. MATEESCU, membru corespondent al Academiei R.P.R.;
N. TIPEI, membru corespondent al Academiei R.P.R.;
R. BOGDAN, conferenţiar la Institutul de petrol, gaze şi gologie, Bucureşti;
M. ARCAN, şef secţie, Institutul de cercetări în construcţii şi economia construcţiilor (INCERC), Bucureşti.

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ
APARE DE 6 ORI PE AN
Redacţia: INSTITUTUL DE MECANICĂ APLICATĂ „TRAIAN VUIA"
Str. Const. Mille 15, tel. 17.34.09

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÎNE
INSTITUTUL DE MECANICĂ APLICATĂ „TRAIAN VUIA"

STUDII ŞI CERCETĂRI DE
MECANICĂ APLICATĂ

5

ANUL XIV

1963

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

Revista

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

publică:

- Studii originale *de înalt nivel cu caracter fundamental de interes general ştiinţific şi reflectare în practică.*
- Note (*lucrări mai scurte*) *cu caracter original sau constituind o punere la punct a unei anumite chestiuni.*
- Referate ştiinţifice şi tehnice *în care se expune* : *stadiul actual al unei anumite probleme, subliniindu-se aspectul nou, observaţii şi discuţii asupra unor lucrări de mecanică aplicată.*
- Recenzii *asupra cărţilor şi studiilor romîne sau străine.*

Domeniile de specialitate ale revistei sînt :

- *Astrodinamică* (*optimizarea traiectoriilor, calculul orbitelor sau al segmentelor de orbite, optimizarea transferului interorbital, impactul vehiculelor spaţiale cu meteoriţii, orbite sincrone, astrorelativitate, zborul în atmosfera rarefiată, reintrarea în atmosfera densă, frînarea şi captarea aerodinamică a unui vehicul cosmic*).
- *Aeromecanică* (*mecanica fluidelor, aerodinamică, dinamica gazelor, mecanica avionului, aeroelasticitate, aerodinamica motoarelor cu ardere internă, termo-aerodinamica motoarelor cu reacţie, ventilaţie, aeromotori*).
- *Hidromecanică* (*hidraulică, construcţii hidrotehnice, irigaţie, turbine şi pompe, amenajări hidraulice*).
- *Construcţii de maşini* (*cinematica şi dinamica mecanismelor, frecare, ungere, uzură, metode moderne de calculul maşinilor, automatizare, studiul suprafeţelor, tehnologia mediilor solide continue*).
- *Mecanică generală* (*rezistenţa materialelor, elasticitate, plasticitate, vibraţii şi şocuri, stabilitate, analogii electrice şi hidraulice*).
- *Statica şi dinamica construcţiilor* (*metode pentru calculul static şi dinamic al construcţiilor, studiul materialelor neomogene, geotehnică, stabilitatea terenurilor, metode de executarea lucrărilor de construcţii*).
- *Tehnica măsurătorilor* (*aparate electronice pentru măsurarea mărimilor mecanice, utilizarea ultrasunetului şi a izotopilor radioactivi în tehnică*).

Revista urmăreşte stimulare aactivităţii ştiinţifice precum şi difuzarea lucrărilor valoroase, primind în acest scop spre publicare articole de la toţi specialiştii din ţară şi de la colaboratorii din străinătate.

★

Articolele vor fi redactate într-o formă concisă şi clară, evitîndu-se introduceri lungi referitoare la părţile cunoscute ale problemei.

Manuscrisele se vor preda în trei exemplare, dactilografiate la două rînduri, iar formulele vor fi scrise clar şi citeţ cu cerneală. Figurile şi graficele se vor desena în tuş pe hîrtie de calc. Se vor utiliza figuri numai cînd este absolut necesar şi în număr cît mai mic.

Literatura citată în text se va insera la sfîrşitul lucrării sub formă de bibliografie. Se va indica numele autorului, titlul lucrării, tomul, pagina, locul editura, anul de apariţie, iar pentru revistă se va indica şi numărul respectiv. Trimiteri la lucrări nepublicate nu se admit.

Pe lîngă text se vor înainta pentru fiecare exemplar rezumate în limba romînă, eventual în rusă, franceză, engleză şi germană. Rezumatele vor fi în medie una pagină dactilografiată la 20 pagini de text.

Aceleaşi norme sînt valabile şi pentru colaborările din străinătate, care pot fi redactate în limbile rusă, engleză, franceză sau germană.

Manuscrisele se vor trimite la sediul Institutului de mecanică aplicată, Bucureşti, str. C. Mille nr. 15, raionul „16 Februarie”.

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÎNE
INSTITUTUL DE MECANICĂ APLICATĂ „TRAIAN VUIA”

STUDII ȘI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

Tomul XIV, nr. 5 1963

SUMAR

Pag.

A XV-a aniversare a Academiei R.P.R. 991

STUDII

N. TIPEI, Efecte ale microgeometriei suprafețelor în lubrificație. I. Problema bidimensională 995
T. OROVEANU și AL. OSNEA, Asupra scurgerii liniare a unui lichid compresibil printr-un mediu poros 1011
D. PANTAZOPOL și TR. COMĂNESCU, Influența unei pînze de jet asupra devierii unui jet plan 1029
ȘT. N. SĂVULESCU și V. TOMA, Studiul experimental al tranziției provocate de interacțiunea unui jet de intensitate mică cu stratul limită incompresibil al unei plăci plane 1037
AUGUSTIN PETRE, Divergența aeroelastică la suprafețe portante în rotație, ținînd seama de efectul forțelor centrifuge 1065
AL. MARINESCU, Efectul comenzii la palele elastice ale rotorului de elicopter . . 1073
H. PASCAL, Determinarea proprietăților elastice ale rocilor sedimentare prin metode ultrasonice 1089
NICOLAE S. PÎRVULESCU, Turtirea superelastică a burlanelor 1115
MARCEL TANNENBAUM, Metode practice de calcul la starea limită de rezistență a elementelor de beton precomprimat solicitate la compresiune excentrică cu excentricitate mică 1131
V. MANEA, Construirea soluției ecuațiilor plăcilor plane elastice subțiri, din teoria fără ipoteza Love-Kirchhoff, prin metoda funcțiilor analitice 1145
I. JAKAB, I. RUGINĂ și A. ZAHARESCU, Automatizarea controlului de aspect al bilelor de rulmenți 1163
STELIAN A. MUNTEANU și MARIA VIDRAȘCU, Asupra nomografierii unor funcții cu patru variabile din domeniul hidraulicii canalelor (cu referire specială la canalele de amenajare a torenților) 1179

REFERATE ȘTIINȚIFICE ȘI TEHNICE

V. MARCU, Cercetări experimentale asupra lagărelor cu cuzineți din metale pulverizate 1201

MANIFESTĂRI ȘTIINȚIFICE PESTE HOTARE

D. MANGERON, Al XIII-lea congres internațional de astronautică, Varna, R. P. Bulgaria, 23–29 septembrie 1962 1217

RECENZII 1221

PUBLICAȚII PRIMITE PRIN SCHIMB LA REDACȚIE 1239

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

Le périodique

„STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ"
(ÉTUDES ET RECHERCHES DE MÉCANIQUE APPLIQUÉE)

publie:

- *des* études originales *à caractère hautement scientifique, recherches fondamentales d'intérêt général, orientées vers l'activité pratique* ;
- *des* notes (*communications brèves*) *à caractère général, ou constituant une mise au point d'une certaine question* ;
- *des* exposés scientifiques et techniques *où l'on expose* : *l'état d'un certain problème, en soulignant son aspect nouveau* ; *des remarques et discussions concernant certains travaux de mécanique appliquée* ;
- *des* notes bibliographiques *au sujet des livres et des études roumains et étrangers.*

Les domaines de spécialité de la revue sont les suivants :

- *astrodynamique* (*réalisation des trajectoires optimums, calcul des orbites, ou des segments d'orbites, obtention du transfert interorbital optimum, impact des véhicules spatiaux avec les météorites, orbites synchrones, astrorelativité, vol en atmosphère raréfiée, retour dans l'atmosphère dense, freinage et saisie aérodynamique d'un véhicule cosmique*).
- *aéromécanique* (*mécanique des fluides, aérodynamique, dynamique des gaz, mécanique de l'avion, aéroélasticité, aérodynamique des moteurs à combustion interne, thermo-aérodynamique des moteurs à réaction, ventilation, aéromoteurs*) ;
- *hydromécanique* (*hydraulique, constructions hydrotechniques, irrigation, turbines hydrauliques et pompes*) ;
- *constructions mécaniques* (*cinématique et dynamique des mécanismes, frottement, lubrification, usure, méthodes modernes de calcul des machines, automation, étude des surfaces, technologie des milieux solides continus*) ;
- *mécanique générale* (*résistance des matériaux, élasticité, plasticité, vibrations et chocs, stabilité, analogies électriques et hydrauliques*) ;
- *statique et dynamique des constructions* (*méthode de calcul statique et dynamique des constructions, étude des matériaux hétérogènes, mécanique des sols, stabilité des terrains, méthodes d'exécution des travaux de construction*) ;
- *technique des mesures* (*appareils électroniques pour la mesure des grandeurs mécaniques, utilisation des ultra-sons et des isotopes radioactifs en technique*).

La revue tend à stimuler la recherche scientifique et la diffusion des travaux méritoires en publiant, dans ce but, les articles scientifiques des collaborateurs roumains et étrangers.

★

Les articles seront rédigés dans un style concis et clair, étant évitées les introductions trop longues concernant les données connues des problèmes.

Les manuscrits seront envoyés en trois exemplaires, dactylographiés, aux formules écrites de manière lisible, à l'encre. Les figures, ainsi que les diagrammes, seront tracés à l'encre de Chine sur du papier calque. On utilisera le nombre de figures strictement indispensable.

Les références bibliographiques seront mentionnées à la fin de l'article. On y indiquera le nom de l'auteur, le titre de l'ouvrage, le tome, la page, le lieu de la parution et, pour les périodiques, on ajoutera le numéro auquel on se réfère. On ne fera pas mention des travaux non publiés.

Les manuscrits seront accompagnés d'un résumé en roumain ou, éventuellement, en russe, français, anglais ou allemand (environ une page pour 20 pages dactylographiées de texte).

Les mêmes normes sont valables pour les collaborateurs étrangers qui peuvent rédiger leurs travaux en russe, anglais, français ou allemand.

Les manuscrits seront envoyés à l'adresse suivante : *Institut de Mécanique Appliquée «Traian Vuia»*, 15, *str. Constantin Mille, Bucarest, Roumanie.*

Журнал

„ТРУДЫ И ИССЛЕДОВАНИЯ ПО ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКЕ"

публикует:

- Оригинальные исследования *высокого уровня, представляющие общий научный интерес, связанный с практикой.*
- Заметки (*краткие работы*) *оригинального характера, представляющие уточнение некоторого вопроса.*
- Научные и технические рефераты, *в которых излагаются: современное состояние определенной задачи с выявлением нового подхода к ней, замечания и обсуждения некоторых работ по прикладной механике.*
- Рецензии *на румынские или зарубежные книги и исследования. В журнале публикуются работы по следующим специальностям:*
- *Астродинамика (оптимальные траектории, расчет орбит или отрезков орбит, оптимальная межорбитальная теплопередача, удар космических экипажей о метеориты, полет в разреженной атмосфере, возвращение в плотную атмосферу, торможение и аэродинамическое улавливание космического экипажа).*
- *Аэромеханика (механика жидкостей и газов, аэродинамика, газодинамика, механика самолета, аэроупругость, аэродинамика двигателей внутреннего сгорания, термоаэродинамика реактивных двигателей, вентиляция, ветродвигатели).*
- *Гидромеханика (гидравлика, гидромеханические сооружения, орошение, гидравлические турбины и насосы, гидравлические устройства).*
- *Машиностроение (кинематика и динамика механизмов, трение, смазка, износ, современные методы расчета различных машин, автоматизация, исследование поверхностей, механика сплошных твердых сред).*
- *Общая механика (сопротивление материалов, упругость, пластичность, вибрация и удары, устойчивость, электрические и гидравлические аналогии).*
- *Статика и динамика сооружений (методы статистического и динамического расчета сооружений, исследование неоднородных материалов, механика грунтов, устойчивость грунтов, методы производства строительных работ).*
- *Техника измерений (электронные приборы для измерения механических величин, применение ультразвука и радиоактивных изотопов в механике.*

Журнал предназначен для стимулирования научной деятельности, а также для распространения выдающихся работ и принимает с этой целью к опубликованию статьи всех отечественных специалистов и зарубежных сотрудников.

* * *

Статьи должны быть написаны в сжатой и ясной форме, избегая длинных введений (относящихся к уже известным частям проблемы).

Рукописи следует направлять в трех экземплярах, напечатанных на машинке через два интервала, формулы должны быть вписаны чернилами четко и ясно. Рисунки и графики следует делать китайской тушью на кальке. Присылать рисунки следует только в случае совершенной необходимости и в ограниченном количестве.

Литература, цитированная в тексте, должна даваться общим списком в конце статьи. Нужно указывать инициалы и фамилию автора, заглавие, том, страницу, место издания, издательство, год издания, а для журналов — и соответствующий номер. Ссылки на неопубликованные работы не допускаются.

Кроме текста, для каждого экземпляра, нужно представлять резюме на румынском языке или же на русском, французском, английском или немецком языках. Резюме должно составлять 1 страницу, написанную на машинке, на 20 страниц текста. Эти же нормы относятся и к работам зарубежных сотрудников, редактированным на русском, английском, французском или немецком языках.

Рукописи препровождаются по адресу: Институт прикладной механики, Бухарест, ул. Константин Милле, № 15, район „16 Februarie".

A XV-A ANIVERSARE A ACADEMIEI R.P.R.

Eliberarea patriei noastre în 1944 a deschis calea spre o nouă treaptă istorică, aceea a construirii socialismului.

Sub conducerea Partidului Muncitoresc Romîn poporul nostru muncitor a început făurirea unei vieți noi, înregistrînd an de an succese în toate domeniile.

Ca urmare a sprijinului multilateral acordat de partid și guvern, știința a început să cunoască în țara noastră o dezvoltare cu totul deosebită. Crearea, în iunie 1948, a Academiei R.P.R. a reprezentat începutul unei noi activități, necunoscute încă pînă atunci la noi, aceea a cercetării științifice organizate.

Dacă vechea Academie Romînă era o instituție de consacrare, Academia R.P.R. este o instituție a cărei activitate se îmbină cu efortul creator al poporului muncitor. Preocupările sale sînt axate pe problemele majore ale științei contemporane, deschizătoare de noi căi, precum și pe cerințele mai apropiate sau de perspectivă ale producției, ale progresului tehnic. În vechea Academie științele naturii ocupau un loc redus, iar științele tehnice nu erau reprezentate. Astăzi însă, în institutele Academiei R.P.R. sînt atacate problemele cele mai noi și dificile de matematică, fizică, chimie, metalurgie, mecanică, energetică etc. Știința a devenit un factor important în activitatea de construire a socialismului, creîndu-i-se toate condițiile de dezvoltare și fiind pe deplin prețuită.

După puțin timp de la reorganizarea Academiei R.P.R., a fost creată o rețea de institute, în care azi lucrează mii de cercetători și personal auxiliar cercetării și care au obținut rezultate științifice și practice importante, apreciate atît în țară cît și peste hotare. Printre institutele înființate după reorganizarea pe noi baze a Academiei, a fost și Institutul de mecanică aplicată, care treptat a fost înzestrat cu numeroase laboratoare bine utilate.

Cu ajutorul cadrelor cu experiență au început să se formeze noi cercetători, creîndu-se mai tîrziu adevărate școli de cercetare științifică, recunoscute atît în țară cît și în străinătate. Pe măsura dezvoltării cercețării și a formării cadrelor s-au conturat mai precis secțiile și sectoarele de cercetare.

S-a reușit astfel în cursul celor 14 ani de activitate ca tematica să fie îmbogățită permanent în concordanță cu cerințele tehnicii moderne și cu dezvoltarea continuă a economiei noastre naționale.

Cercetarea problemelor de perspectivă rămîne mereu în centrul preocupărilor pentru crearea rezervei științifice a viitorului, care va putea contribui la progresul tehnic și științific din diferite ramuri tehnico-industriale.

Activitatea Institutului de mecanică aplicată a atras și colaborări din învățămîntul superior și industrie, colaborări care se reflectă și în paginile revistelor ce le publică.

În acord cu preocupările din practică au fost atacate probleme moderne și actuale în domeniul construcției de mașini, al construcțiilor generale și speciale, al construcțiilor hidrotehnice, al construcțiilor aerotehnice etc.

Studiile și cercetările s-au dezvoltat sistematic, ajungîndu-se la rezultate remarcabile în mai multe domenii. Concretizate în memorii, protocoale, comunicări la diferite manifestări științifice internaționale, sau publicate în periodicele institutului, ori în publicații de peste hotare, rezultatele activității cercetătorilor institutului reprezintă contribuții valoroase la patrimoniul științific, precum și un sprijin susținut adus producției.

S-au obținut astfel rezultate valoroase de înalt nivel științific în domeniul aerodinamicii vitezelor mari, în domeniul lubrificației, în acel al mișcării lichidelor grele cu suprafață liberă, privind suprafețele permeabile, hipersustentația, în probleme de stabilitatea avioanelor, în teoria mecanismelor, în domeniul elasticității, plasticității, reologiei etc.

Alte preocupări s-au îndreptat spre elaborarea metodelor moderne de măsură, electronice și cu izotopi radioactivi.

Alături de activitatea de cercetare, cu sprijinul forurilor conducătoare și prin munca entuziastă a cercetătorilor și a personalului auxiliar, s-au realizat o serie de aparate și instalații folosite cu succes în cercetare și care au îmbogățit baza materială a laboratoarelor.

Un mijloc deosebit de important pentru difuzarea rezultatelor cercetării științifice îl constituie tratatele, monografiile și publicațiile periodice.

Tratatele și monografiile apărute în acești ani s-au bucurat de aprecieri deosebite din partea specialiștilor noștri și din alte țări. Distinse cu premiul de stat sau cu premii ale Academiei R.P.R., unele dintre acestea au fost traduse sau sînt în curs de traducere în limbile rusă, engleză și germană.

Institutul de mecanică aplicată publică revista „Studii și cercetări de mecanică aplicată”, care apare cu 6 numere anual, iar pentru difuzarea lucrărilor noastre în străinătate, din 1956, revista în limbi străine „Revue de mécanique appliquée”, care apare de asemenea cu 6 numere anual. Ele urmăresc stimularea activității științifice în domeniul mecanicii aplicate, precum și difuzarea lucrărilor valoroase ale specialiștilor din țară și ale colaboratorilor cu renume de peste hotare. Ambele reviste se bucură de o bună apreciere, fiind trimise actualmente la peste 400 de instituții din 43 de țări. Prin acțiunea de schimb se asigură o cunoaștere mai largă a cercetărilor noastre și totodată se primesc materiale documentare utile și valoroase.

Activitatea desfășurată pînă acum cuprinde, putem afirma, rezultate științifice remarcabile care au contribuit la dezvoltarea științei în domeniul mecanicii aplicate și au condus la aplicații practice importante, sprijinind prin aceasta economia noastră națională. Rezultate similare s-au obținut și în alte institute ale Academiei R.P.R. Rodnica activitate de cercetare desfășurată cu elan și competență în unitățile Academiei a fost posibilă datorită înaltei prețuiri și sprijinului permanent pe care partidul și guvernul îl acordă științei. Toate rezultatele obținute, prestigiul de care se bucură, azi, știința romînească, reprezintă chezășia unor noi succese, fiind totodată și expresia dragostei față de conducătorul victoriilor poporului nostru, Partidul Muncitoresc Romîn.

Sărbătorirea a 15 ani de existență a Academiei a avut loc în etapa care, așa după cum spune tovarășul Gh. Gheorghiu-Dej în Raportul la cel de al III-lea Congres al P.M.R., „... deschide poporului nostru perspectiva luminoasă a victoriei depline a socialismului și trecerii treptate la comunism, cauză pentru care au luptat și s-au jertfit cei mai buni fii ai clasei muncitoare și ai întregului popor romîn"¹).

În această perspectivă luminoasă eforturile lucrătorilor din toate domeniile de activitate din țara noastră trebuie să fie mereu sporite pentru îndeplinirea multiplelor sarcini ce le stau în față. Cercetării științifice îi revine un rol important în îndeplinirea acestor sarcini. Cercetătorii din Institutul de mecanică aplicată se alătură cu tot entuziasmul celorlalți oameni ai muncii din țara noastră pentru înfăptuirea operei mărețe de desăvîrșire a construirii socialismului.

---

¹) Gh. Gheorghiu-Dej, *Raport la cel de al III-lea Congres al Partidului Muncitoresc Romîn.* Edit. politică, București, 1960, 125.

EFECTE ALE MICROGEOMETRIEI SUPRAFEȚELOR ÎN LUBRIFICAȚIE

I. PROBLEMA BIDIMENSIONALĂ

DE

N. TIPEI

532 : 621.01 : 621.89

Chiar la cele mai înalte grade de prelucrare, suprafețele solide care limitează piesele de mașini cu o alunecare relativă prezintă numeroase imperfecțiuni. Acestea creează un profil ce caracterizează suprafețele și care se datorește unui număr mare de factori cum sînt natura prelucrării, materialul, abraziunea etc. Profilul amintit determină o microgeometrie care se suprapune peste geometria de ansamblu, așa cum aceasta rezultă din așezarea relativă a suprafețelor. De multe ori, dimensiunile denivelărilor locale sînt de același ordin de mărime cu ale filmului lubrifiant și pot să influențeze sensibil condițiile de mișcare în pelicula fluidă dintre corpuri. În felul acesta, rezultă abateri față de rezultatele date de teoria hidrodinamică, care admite suprafețele perfect netede.

Microgeometria variază de la o zonă la alta pe aceeași suprafață și de la un corp la altul, în funcție de factorii amintiți. În genere are un caracter foarte neregulat, mai ales cînd între suprafețe apar și particule solide datorită abraziunii, impurităților din mediul lubrifiant și înconjurător sau altor cauze. Aceasta îngreunează foarte mult tratarea mai exactă a problemei, dîndu-i totodată un caracter aleatoriu; concomitent unele ipoteze general admise, cum ar fi neglijarea forțelor de inerție în ecuațiile de mișcare ale mediului fluid, pot fi mai puțin reale.

Lucrarea de față își propune să examineze cîteva cazuri în care denivelările ce constituie microgeometria au o dispoziție și o formă cu caracter de periodicitate, permițînd o exprimare matematică simplă, sau o dezvoltare în serie convenabilă. Se vor admite mai departe simplificările ecuațiilor Navier-Stokes, admise curent în teoria lubrificației, în ceea ce privește forțele de inerție și variația presiunilor și vitezelor pe normala la suprafețe, față de celelalte direcții. Rugozitatea provenită din diversele neregularități afectează ambele suprafețe solide care închid filmul de lubrifiant. În timpul mișcării relative, asperitățile se prezintă succesiv unele în fața celorlalte, fapt care face ca mișcarea să fie dependentă de timp cu o perioadă $T = \tilde{l}^{\star}/V$, în care V este viteza relativă iar $\tilde{l}^{\star}$ lungimea de undă corespunzătoare succesiunii periodice a neregularităților pe suprafața a cărei linie mediană este paralelă cu viteza relativă. În aceste condiții, geometria prezintă o periodicitate în timp, antrenînd totodată și un caracter semistaționar al fenomenelor ; dacă vectorul **V** nu îndeplinește condiția enunțată, întreaga mișcare a fluidului dintre suprafețe are un caracter nepermanent, chiar dacă vitezele suprafețelor sînt constante în mărime și în direcție.

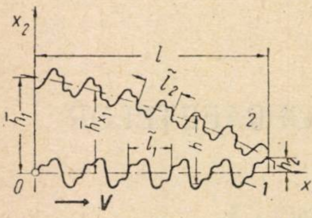


Fig. 1

Conform convențiilor curente în teoria lubrificației [1], se consideră un sistem ortogonal de axe : x_1 paralelă cu viteza relativă în fiecare punct și situată pe suprafața mediană a corpului *1*, x_2 normală la suprafață și x_3 perpendiculară pe primele. Fie $\bar{h}_{x_1}$ distanța dintre suprafețele mediane ale corpurilor *1* și *2*, măsurată într-un plan perpendicular pe axa x_3, $\tilde{h}_{x_3}$ un factor care ține seama de efectul ondulațiilor pe direcția x_3 și $\tilde{h}_{x_1}$ diferența $h - \bar{h}_{x_1} - \tilde{h}_{x_3}$ care introduce efectul ondulațiilor pe direcția x_1.

Distanța dintre suprafețe cu o dublă ondulație pe direcțiile x_1 și x_3 va fi

$$h = \bar{h}_{x_1} + \tilde{h}_{x_1} + \tilde{h}_{x_3}. \tag{1}$$

Problema bidimensională. Planul director este Ox_1x_2, fenomenele nu depind de coordonata x_3, iar $\tilde{h}_{x_3} \equiv 0$. Notînd cu $\bar{h}_1$, $\bar{h}_2$ valorile $\bar{h}_{x_1}$ la intrarea și ieșirea din zona lubrificată, se poate admite o variație a viscozității μ de forma [1]

$$\mu = \mu_1 \left(\frac{\bar{h}_{x_1}}{\bar{h}_1} \right)^q \tag{2}$$

iar presiunile pentru cazul suprafețelor care au o extindere infinită după Ox_3 se scriu [1]

$$p_\infty = \frac{6V\mu_1}{\bar{h}_1^q} \int \bar{h}_{x_1}^q \left(\frac{1}{h^2} - \frac{h_0}{h^3} \right) \mathrm{d}x_1 + C_2. \tag{3}$$

Dacă $\mathbf{V}_1$ și $\mathbf{V}_2$ sînt vitezele celor două suprafețe, notînd mai departe V_{ij} viteza suprafeței i după axa x_j, rezultă din (1)

$$\begin{aligned} h = \bar{h}_{x_1} + \sum_{n=1}^{\infty} \Bigg\{ \tilde{h}_{11}^{(n)} \cos\left[n2\pi \frac{x_1 + (V_{21} - V_{11})\,t}{\tilde{l}_1} + \chi_{1n} \right] + \\ + \tilde{h}_{21}^{(n)} \cos\left(n\,2\pi \frac{x_1}{\tilde{l}_2} + \chi_{2n} \right) \Bigg\} = \bar{h}_{x_1} + \tilde{h}\,(x_1, t). \end{aligned} \tag{4}$$

$h = h(x_1, t)$ conține astfel timpul ca parametru. Presiunile sînt date de (3) printr-o integrare al cărui rezultat depinde de expresia lui $\overline{h}_{x_1}$, adică de suprafețele mediane, fără neregularități, așa cum sînt considerate în teoria simplificată. Practic se poate elimina timpul, dacă se recurge la o mediere a presiunilor în raport cu acesta pe durata $T = \tilde{l}_1/(V_{21} - V_{11})$

$$p_{\infty\,\mathrm{med}} = \frac{V_{21} - V_{11}}{\tilde{l}_1} \int_0^T p_\infty (x_1, t)\,\mathrm{d}t. \tag{5}$$

Se vede imediat că $p_{\infty\,\mathrm{med}}$ este dat de (3) dacă se suprimă în dezvoltarea lui h termenii dependenți de timp.

Presupunînd asperitățile sensibil mai mici decît distanța dintre suprafețele mediane $\overline{h}_{x_1} \gg \tilde{h}(x_1, t)$ se obține, dacă se consideră mai departe valorile medii ale presiunilor și pentru simplificarea scrisului se pune $p_{\infty\,\mathrm{med}} = p_\infty$,

$$\begin{aligned} p_\infty &= \frac{6V\mu_1}{\overline{h}_1^q} \int \frac{1}{\overline{h}_{x_1}^{2-q}} \left[1 - 2\frac{\tilde{h}}{\overline{h}_{x_1}} - \frac{h_0}{\overline{h}_{x_1}}\left(1 - 3\frac{\tilde{h}}{\overline{h}_{x_1}}\right)\right] \mathrm{d}x_1 + C_2 = \\ &= \overline{p}_\infty - \frac{6V\mu_1}{\overline{h}_1^q} \int \frac{\tilde{h}}{\overline{h}_{x_1}^{3-q}} \left(2 - 3\frac{h_0}{\overline{h}_{x_1}}\right) \mathrm{d}x_1 + C_2. \end{aligned} \tag{6}$$

În formula (6) $\overline{p}_\infty$ reprezintă presiunea calculată în cazul suprafețelor perfect netede, minus $\overline{C}_2$, respectiv pentru suprafețele mediane din figura 1, dar cu constantele h_0 și C_2 stabilite pentru problema completă, adică ținînd seama de microgeometrie. În urma medierii în raport cu timpul efectul asperităților suprafeței paralele cu viteza relativă **V** dispare.

Suprafețe plane. După datele cunoscute

$$\overline{h}_{x_1} = \overline{h}_1 - \frac{\overline{h}_1 - \overline{h}_2}{l}\, x_1. \tag{7}$$

Ecuația (6) se scrie

$$\begin{gathered} p_\infty = \overline{p}_\infty + \frac{6\,V\mu_1 l}{\overline{h}_1^q(\overline{h}_1 - \overline{h}_2)} \int \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tilde{h}_{21}^{(n)} \cos\theta_{0n}\left(\alpha_n - \dfrac{\overline{h}_{x_1}}{\overline{h}_1}\right)}{\overline{h}_{x_1}^{3-q}} \left(2 - 3\frac{h_0}{\overline{h}_{x_1}}\right) \mathrm{d}\overline{h}_{x_1} + C_2, \\ \theta_{0n} = n\frac{2\pi}{\tilde{l}_2}\frac{l\,\overline{h}_1}{\overline{h}_1 - \overline{h}_2}, \quad \alpha_n = 1 + \frac{\chi_{2n}}{\theta_{0n}}. \end{gathered} \tag{8}$$

Mai departe, cu ajutorul relațiilor

$$I_{mn} = \int \frac{\cos\theta_{0n}\left(\alpha_n - \dfrac{\overline{h}_{x_1}}{\overline{h}_1}\right)}{\overline{h}_{x_1}^m}\, \mathrm{d}\overline{h}_{x_1} = -\frac{1}{m-1} \frac{\cos\theta_{0n}\left(\alpha_n - \dfrac{\overline{h}_{x_1}}{\overline{h}_1}\right)}{\overline{h}_{x_1}^{m-1}} -$$

$$- \frac{1}{(m-1)(m-2)} \frac{\theta_{0n}}{\bar{h}_1} \frac{\sin \theta_{0n}\left(\alpha_n - \frac{\bar{h}_{x_1}}{\bar{h}_1}\right)}{\bar{h}_{x_1}^{m-2}} -$$

$$- \frac{1}{(m-1)(m-2)} \frac{\theta_{0n}^2}{\bar{h}_1^2} I_{m-2,n}, \qquad (m > 2)$$

$$\begin{aligned} I_{0n} &= - \frac{\bar{h}_1}{\theta_{0n}} \sin \theta_{0n}\left(\alpha_n - \frac{\bar{h}_{x_1}}{\bar{h}_1}\right), \\ I_{1n} &= \cos \alpha_n \theta_{0n} \operatorname{ci} \theta_{0n} \frac{\bar{h}_{x_1}}{\bar{h}_1} + \sin \alpha_n \theta_{0n} \operatorname{si} \theta_{0n} \frac{\bar{h}_{x_1}}{\bar{h}_1}, \\ I_{2n} &= - \frac{\cos \theta_{0n}\left(\alpha_n - \frac{\bar{h}_{x_1}}{\bar{h}_1}\right)}{\bar{h}_{x_1}} + \frac{\theta_{0n}}{\bar{h}_1}\left(\sin \alpha_n \theta_{0n} \operatorname{ci} \theta_{0n} \frac{\bar{h}_{x_1}}{\bar{h}_1} - \right. \\ &\qquad \left. - \cos \alpha_n \theta_{0n} \operatorname{si} \theta_{0n} \frac{\bar{h}_{x_1}}{\bar{h}_1}\right), \end{aligned} \tag{9}$$

se deduce ecuația presiunilor

$$p_\infty = \bar{p}_\infty + \frac{6 V \mu_1 l}{\bar{h}_1^q (\bar{h}_1 - \bar{h}_2)} \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{h}_{21}^{(n)} (2 I_{3-q,n} - 3 h_0 I_{4-q,n}) + C_2. \tag{10}$$

Cu ajutorul condițiilor la limită $p_\infty = p_0$ pentru $x_1 = 0$ și $x_1 = l$, se găseşte apoi

$$\begin{aligned} h_0 &= \frac{\frac{1}{1-q}\left(\frac{1}{\bar{h}_2^{1-q}} - \frac{1}{\bar{h}_1^{1-q}}\right) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{h}_{21}^{(n)} [I_{3-q,n}(\bar{h}_2) - I_{3-q,n}(\bar{h}_1)]}{\frac{1}{2-q}\left(\frac{1}{\bar{h}_2^{2-q}} - \frac{1}{\bar{h}_1^{2-q}}\right) + 3 \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{h}_{21}^{(n)} [I_{4-q,n}(\bar{h}_2) - I_{4-q,n}(\bar{h}_1)]}, \\ C_2 &= p_0 - \frac{6 V \mu_1 l}{\bar{h}_1^q (\bar{h}_1 - \bar{h}_2)} \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{h}_{21}^{(n)} [2 I_{3-q,n}(\bar{h}_1) - 3 h_0 I_{4-q,n}(\bar{h}_1)] - \bar{p}_\infty(\bar{h}_1). \end{aligned} \tag{11}$$

Din expresia lui θ_{0n} (8) se vede că ordinul de mărime al acestuia este $2\pi n \frac{l}{\tilde{l}_2}$. Cum de obicei $l \gg \tilde{l}_2$ iar $\bar{h}_2 \leqslant \bar{h}_{x_1} \leqslant \bar{h}_1$, argumentul funcțiilor sinus și cosinus integral care intră în (10) și (11) este foarte mare. În acest caz

$$\lim \operatorname{si}(x)_{x \to \infty} = \frac{\pi}{2}, \quad \lim \operatorname{ci}(x)_{x \to \infty} = -0{,}5772.$$

Dacă $q = 0$ (viscozitatea constantă) apar în (10) expresiile I_{3n} și I_{4n}, a căror valoare este

$$\begin{aligned}
I_{3n} = & -\frac{1}{2}\,\frac{\cos\theta_{0n}\left(\alpha_n - \dfrac{\overline{h}_{x_1}}{\overline{h}_1}\right)}{\overline{h}_{x_1}^{2}} - \frac{1}{2}\,\frac{\theta_{0n}}{\overline{h}_1}\,\frac{\sin\theta_{0n}\left(\alpha_n - \dfrac{\overline{h}_{x_1}}{\overline{h}_1}\right)}{\overline{h}_{x_1}} - \\
& -\frac{1}{2}\,\frac{\theta_{0n}^{2}}{\overline{h}_1^{2}}\left[\cos\alpha_n\theta_{0n}\,\mathrm{ci}\,\theta_{0n}\frac{\overline{h}_{x_1}}{\overline{h}_1} + \sin\alpha_n\theta_{0n}\,\mathrm{si}\,\theta_{0n}\frac{\overline{h}_{x_1}}{\overline{h}_1}\right], \\
I_{4n} = & -\frac{1}{3}\,\frac{\cos\theta_{0n}\left(\alpha_n - \dfrac{\overline{h}_{x_1}}{\overline{h}_1}\right)}{\overline{h}_{x_1}^{3}} - \frac{1}{6}\,\frac{\theta_{0n}}{\overline{h}_1}\,\frac{\sin\theta_{0n}\left(\alpha_n - \dfrac{\overline{h}_{x_1}}{\overline{h}_1}\right)}{\overline{h}_{x_1}^{2}} + \\
& +\frac{1}{6}\,\frac{\theta_{0n}^{2}}{\overline{h}_1^{2}}\left[\frac{\cos\theta_{0n}\left(\alpha_n - \dfrac{\overline{h}_{x_1}}{\overline{h}_1}\right)}{\overline{h}_{x_1}} - \frac{\theta_{0n}}{\overline{h}_1}\left(\sin\alpha_n\theta_{0n}\,\mathrm{ci}\,\theta_{0n}\frac{\overline{h}_{x_1}}{\overline{h}_1} - \right.\right. \\
& \left.\left. - \cos\alpha_n\theta_{0n}\,\mathrm{si}\,\theta_{0n}\frac{\overline{h}_{x_1}}{\overline{h}_1}\right)\right],
\end{aligned} \tag{12}$$

$$I_{3n}(\overline{h}_1) = -\frac{1}{2\overline{h}_1^{2}}\left[\cos\chi_{2n} + \theta_{0n}\sin\chi_{2n} + \theta_{0n}^{2}(\cos\alpha_n\theta_{0n}\mathrm{ci}\,\theta_{0n} + \sin\alpha_n\theta_{0n}\sin\theta_{0n})\right]$$

$$\begin{aligned}
I_{4n}(\overline{h}_1) = & -\frac{1}{3\overline{h}_1^{3}}\left\{\cos\chi_{2n} + \frac{\theta_{0n}}{2}\sin\chi_{2n} - \frac{\theta_{0n}^{2}}{2}\left[\cos\chi_{2n} - \right.\right. \\
& \left.\left. - \theta_{0n}(\sin\alpha_n\theta_{0n}\,\mathrm{ci}\,\theta_{0n} - \cos\alpha_n\theta_{0n}\,\mathrm{si}\,\theta_{0n})\right]\right\}.
\end{aligned}$$

Rezultanta presiunilor se poate calcula apoi ușor

$$\begin{aligned}
W_\infty = & \int_0^l (p_\infty - p_0)\,\mathrm{d}x_1 = \overline{W}_\infty + (C_2 + p_0)\,l - \\
& - \frac{6V\mu_1 l^2}{\overline{h}_1^{q}(\overline{h}_1 - \overline{h}_2)^2}\int_{\overline{h}_1}^{\overline{h}_2}\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{h}_{21}^{(n)}(2I_{3-q,n} - 3h_0 I_{4-q,n})\,\mathrm{d}\overline{h}_{x_1}.
\end{aligned} \tag{13}$$

Pentru efectuarea calculelor se observă că există relațiile de recurență [2]

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_{mn} = & \int_{\overline{h}_1}^{\overline{h}_2} I_{mn}\,\mathrm{d}\overline{h}_{x_1} = -\frac{1}{m-1}\left\{ I_{m-1,n}\Big|_{\overline{h}_1}^{\overline{h}_2} - \right. \\
& - \frac{1}{(m-2)(m-3)}\,\frac{\theta_{0n}}{\overline{h}_1}\left[\frac{\sin\theta_{0n}\left(\alpha_n - \dfrac{\overline{h}_{x_1}}{\overline{h}_1}\right)}{\overline{h}_{x_1}^{m-3}}\Bigg|_{\overline{h}_1}^{\overline{h}_2} + \right. \\
& \left.\left. + \frac{\theta_{0n}}{\overline{h}_1}\left(\int_{\overline{h}_1}^{\overline{h}_2} I_{m-3,n}\,\mathrm{d}\overline{h}_{x_1} - \int_{\overline{h}_1}^{\overline{h}_2} I_{m-2,n}\,\mathrm{d}\overline{h}_{x_1}\right)\right]\right\},
\end{aligned} \tag{14}$$

$$\mathcal{J}_{1n} = \int_{\bar{h}_1}^{\bar{h}_2} I_{1n}\,\mathrm{d}\bar{h}_{x_1} = \Big[\bar{h}_2 \,\mathrm{ci}\, \theta_{0n} \frac{\bar{h}_2}{\bar{h}_1} - \bar{h}_1 \,\mathrm{ci}\, \theta_{0n} -$$

$$- \frac{\bar{h}_1}{\theta_{0n}} \left(\sin \frac{\theta_{0n}}{\bar{h}_1} \bar{h}_2 - \sin \theta_{0n}\right)\Big] \cos \alpha_n \theta_{0n} + \Big[\bar{h}_2 \,\mathrm{si}\, \theta_{0n} \frac{\bar{h}_2}{\bar{h}_1} - \bar{h}_1 \,\mathrm{si}\, \theta_{0n} +$$

$$+ \frac{\bar{h}_1}{\theta_{0n}} \left(\cos \theta_{0n} \frac{\bar{h}_2}{\bar{h}_1} - \cos \theta_{0n}\right)\Big] \sin \alpha_n \theta_{0n},$$

$$\mathcal{J}_{2n} = \int_{\bar{h}_1}^{\bar{h}_2} I_{2n}\,\mathrm{d}\bar{h}_{x_1} = - I_{1n}\Big|_{\bar{h}_1}^{\bar{h}_2} + \frac{\theta_{0n}}{\bar{h}_1} \Big\{ \sin(\alpha_n \theta_{0n}) (\mathcal{J}_{1n})_{\alpha_n = 0} -$$

$$- \cos(\alpha_n \theta_{0n}) \Big[\bar{h}_2 \,\mathrm{si}\, \theta_{0n} \frac{\bar{h}_2}{\bar{h}_1} - \bar{h}_1 \,\mathrm{si}\, \theta_{0n} -$$

$$+ \frac{\bar{h}_1}{\theta_{0n}} \left(\cos \theta_{0n} \frac{\bar{h}_2}{\bar{h}_1} - \cos \theta_{0n}\right)\Big]\Big\}.$$

Frecarea pe suprafețele solide se deduce apoi direct [1]

$$F_\infty = \mp \frac{V \mu_1 l}{q(\bar{h}_1 - \bar{h}_2)} \left(1 - \frac{\bar{h}_2^q}{\bar{h}_1^q} - \frac{1}{\bar{h}_1^q} \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{h}_{21}^{(n)} I_{2-q,n}\Big|_{\bar{h}_1}^{\bar{h}_2}\right) + \frac{\bar{h}_1 - \bar{h}_2}{2l} W_\infty, \; q \neq 0,$$

$$F_\infty = \mp \frac{V \mu_1 l}{\bar{h}_1 - \bar{h}_2} \left(\ln \frac{\bar{h}_1}{\bar{h}_2} - \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{h}_{21}^{(n)} I_{2,n}\Big|_{\bar{h}_1}^{\bar{h}_2}\right) + \frac{\bar{h}_1 - \bar{h}_2}{2l} W_\infty, \; q = 0; \tag{15}$$

semnul — se va lua pentru suprafața *1*, iar + pentru *2*. Debitul este apoi $Q = \frac{1}{2} V h_0$, astfel încît toate elementele utile calculelor de dimensionare sînt determinate. Forma expresiei $\tilde{h}(x_1)$ este foarte generală și permite luarea în considerare a unei mari varietăți de suprafețe. În cazuri simple se poate admite un singur termen în dezvoltarea lui $\tilde{h}$ ($n = 1$) și ca urmare în formulele (8) — (13) și (15) nu mai apar dezvoltări în serie.

Suprafețe cilindrice circulare. Fie $c = r_2 - r_1$ jocul radial, $\psi = c/r_1$, $\varepsilon = e/c$ excentricitatea relativă și θ unghiul de poziție, măsurat de la punctul unde $\bar{h}_{x_1} = \bar{h}_1$ [1] (fig. 2). Se constată ușor că există relațiile [1]

$$\bar{h}_{x_1} = c(1 + \varepsilon \cos \theta), \quad \tilde{h} = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{h}_{21}^{(n)} \cos(\alpha_n \theta + \chi_{2n}),$$

$$\alpha_n = n\, 2\pi \frac{r_1}{\tilde{l}_2}, \quad x_1 = r_1 \theta \tag{16}$$

iar ecuația (6) se scrie, cu ipotezele care au stat la baza deducerii acesteia,

$$p_\infty = \bar{p}_\infty - \frac{6V\mu_1 r_1}{\bar{h}_1^q c^{3-q}} \int \frac{\sum\limits_{n=1}^{\infty} \tilde{h}_{21}^{(n)} \cos(\alpha_n\theta + \chi_{2n})}{(1+\varepsilon\cos\theta)^{3-q}} \left[2 - \frac{3h_0}{c(1+\varepsilon\cos\theta)}\right] \mathrm{d}\theta + C_2. \tag{17}$$

Fie apoi integralele

$$I_{n\theta}^{(k)} = \int \cos(\alpha_n\theta + \chi_{2n}) \left[1 + \sum_{s=1}^{\infty} \binom{k}{s} \varepsilon^s \cos^s\theta\right] \mathrm{d}\theta = \frac{1}{\alpha_n} \sin(\alpha_n\theta + \chi_{2n}) + \sum_{s=1}^{\infty} \binom{k}{s} \varepsilon^s \int \cos(\alpha_n\theta + \chi_{2n}) \cos^s\theta \mathrm{d}\theta \tag{18}$$

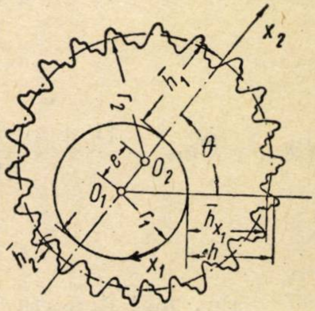


Fig. 2

de tipul acelora care intră în formula (17), dacă se ia $k = 3 - q$ sau $k = 4 - q$. Notînd mai departe $I_s^{(c)}$ valorile integralelor de sub semnul sumei (18), se observă că există formula de recurență

$$\left(s - \frac{\alpha_n^2}{s}\right) I_s^{(c)} = \cos(\alpha_n\theta + \chi_{2n}) \cos^{s-1}\theta \sin\theta - \frac{\alpha_n}{s} \sin(\alpha_n\theta + \chi_{2n}) \cos^s\theta + (s-1) I_{s-2}^{(c)}$$

$$I_1^{(c)} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\sin[(\alpha_n + 1)\theta + \chi_{2n}]}{\alpha_n + 1} + \frac{\sin[(\alpha_n - 1)\theta + \chi_{2n}]}{\alpha_n - 1} \right\}, \tag{19}$$

$$I_2^{(c)} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{\alpha_n} \sin(\alpha_n\theta + \chi_{2n}) + \frac{1}{2} \left[\frac{\sin[(\alpha_n + 2)\theta + \chi_{2n}]}{\alpha_n + 2} + \frac{\sin[(\alpha_n - 2)\theta + \chi_{2n}]}{\alpha_n - 2} \right] \right\},$$

cu ajutorul căreia se pot foarte ușor calcula toți termenii sumei (18). Rezultă deci

$$p_\infty = \bar{p}_\infty - \frac{6V\mu_1 r_1}{\bar{h}_1^q c^{3-q}} \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{h}_{21}^{(n)} \left[2I_{n\theta}^{(3-q)} - 3\frac{h_0}{c} I_{n\theta}^{(4-q)} \right] + C_2. \tag{20}$$

Componentele rezultantei, pe linia centrelor O_1O_2 şi pe normala la aceasta sînt [1], dacă θ_1 şi θ_2 sînt valorile lui θ, unde $p_\infty = p_0$,

$$W_{t\infty} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} (p_\infty - p_0)\, r_1 \cos\theta\, \mathrm{d}\theta, \quad W_{n\infty} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} (p_\infty - p_0)\, r_1 \sin\theta \mathrm{d}\theta. \tag{21}$$

Aceste componente pot fi uşor calculate, pornind de la formula (20); sub formă adimensională, ele se scriu, pentru unitatea de lăţime a lagărului,

$$\begin{aligned} Ct_\infty &= \overline{C}t_\infty + \frac{(1+\varepsilon)^q\, \psi^2\, (C_2 + p_0)}{6\, V\, \mu_1} (\sin\theta_2 - \sin\theta_1) - \\ &\quad - \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tilde{h}_{21}^{(n)}}{c} \left[2 I_{n\theta}^{(3-q)} - 3 \frac{h_0}{c} I_{n\theta}^{(4-q)}\right] \cos\theta \mathrm{d}\theta, \\ Cn_\infty &= \overline{C}n_\infty + \frac{(1+\varepsilon)^q\, \psi^2\, (C_2 + p_0)}{6V\, \mu_1} (\cos\theta_1 - \cos\theta_2) - \\ &\quad - \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tilde{h}_{21}^{(n)}}{c} \left[2 I_{n\theta}^{3-q} - 3 \frac{h_0}{c} I_{n\theta}^{(4-q)}\right] \sin\theta \mathrm{d}\theta. \end{aligned} \tag{22}$$

Fie, mai departe, expresiile

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{n\theta}^{(k)} &= \int_{\theta_1}^{\theta_2} I_{n\theta}^{(k)} \cos\theta\, \mathrm{d}\theta = \frac{1}{\alpha_n} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sin(\alpha_n \theta + \chi_{2n}) \cos\theta\, \mathrm{d}\theta + \\ &+ \sum_{s=1}^{\infty} \binom{k}{s} \varepsilon^s \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left[\cos\theta \int \cos(\alpha_n\theta + \chi_{2n}) \cos^s \theta \mathrm{d}\theta\right] \mathrm{d}\theta = \\ &= -\frac{1}{2\alpha_n} \left\{ \frac{\cos[(\alpha_n + 1)\theta + \chi_{2n}]}{\alpha_n + 1} + \frac{\cos[(\alpha_n - 1)\theta + \chi_{2n}]}{\alpha_n - 1} \right\}_{\theta_1}^{\theta_2} + \\ &+ \sum_{s=1}^{\infty} \binom{k}{s} \varepsilon^s \left[I_s^{(c)} \sin\theta + \frac{\cos(\alpha_n\theta + \chi_{2n}) \cos^{s+2}\theta}{s+2} + \frac{\alpha_n}{s+2} I_{s+2}^{(s)}(\theta) \right]_{\theta_1}^{\theta_2}, \end{aligned}$$

$$I_s^{(s)} = \int \sin(\alpha_n\theta + \chi_{2n}) \cos^s\theta\, \mathrm{d}\theta, \qquad I_0^{(s)} = -\frac{1}{\alpha_n} \cos(\alpha_n\theta + \chi_{2n}),$$

$$I_1^{(s)} = -\frac{1}{2} \left\{ \frac{\cos[(\alpha_n + 1)\theta + \chi_{2n}]}{\alpha_n + 1} + \frac{\cos[(\alpha_n - 1)\theta + \chi_{2n}]}{\alpha_n - 1} \right\},$$

$$\begin{aligned} I_2^{(s)} = -\frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{\alpha_n} \cos(\alpha_n\theta + \chi_{2n}) + \frac{1}{2} \left[\frac{\cos\{(\alpha_n + 2)\theta + \chi_{2n}\}}{\alpha_n + 2} + \right.\right. \\ \left.\left. + \frac{\cos\{(\alpha_n - 2)\theta + \chi_{2n}\}}{\alpha_n - 2} \right] \right\}, \end{aligned}$$

$$\left(s-\frac{\alpha_n^2}{s}\right) I_s^{(s)} = \sin\left(\alpha_n\,\theta+\chi_{2n}\right)\cos^{s-1}\theta\,\sin\theta +$$

$$+\frac{\alpha_n}{s}\cos\left(\alpha_n\theta+\chi_{2n}\right)\cos^s\theta+(s-1)\,I_{s-2}^{(s)}\,,$$

$$\mathscr{H}_{n\theta}^{(k)}=\int_{\theta_1}^{\theta_2} I_{n\theta}^{(k)}\sin\,\theta\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2\alpha_n}\left\{\frac{\sin\left[(\alpha_n-1)\theta+\chi_{2n}\right]}{\alpha_n-1}-\right.$$

$$\left.-\frac{\sin\left[(\alpha_n+1)\theta+\chi_{2n}\right]}{\alpha_n+1}\right\}_{\theta_1}^{\theta_2}+\sum_{s=1}^{\infty}\binom{k}{s}\varepsilon^s\left(I_{s+1}^{(c)}-I_s^{(c)}\cos\,\theta\right)_{\theta_1}^{\theta_2}. \qquad (23)$$

Cu ajutorul acestora, coeficienții Ct_∞, Cn_∞ vor fi

$$Ct_\infty=\bar{C}t_\infty+\frac{(1+\varepsilon)^q\,\psi^2\,(C_2+p_0)}{6V\mu_1}(\sin\,\theta_2-\sin\,\theta_1)-$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\tilde{h}_{21}^{(n)}}{c}\left[2\,\mathscr{J}_{n\theta}^{(3-q)}-3\,\frac{h_0}{c}\,\mathscr{J}_{n\theta}^{(4-q)}\right],$$

$$(24)$$

$$Cn_\infty=\bar{C}n_\infty+\frac{(1+\varepsilon)^q\,\psi^2\,(C_2+p_0)}{6V\mu_1}(\cos\,\theta_1-\cos\,\theta_2)-$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\tilde{h}_{21}^{(n)}}{c}\left[2\,\mathscr{H}_{n\theta}^{(3-q)}-3\,\frac{h_0}{c}\,\mathscr{H}_{n\theta}^{(4-q)}\right].$$

Utilizînd rezultatele binecunoscute [1] se obține apoi unghiul Φ de poziție a rezultantei presiunilor față de linia centrelor, $\mathrm{tg}\,\Phi=-Cn_\infty/Ct_\infty$ precum și momentul de frecare rezultant pe fus, notat cu indicele 1, sau pe cuzinet (indicele 2)

$$Cm_{\infty\,1,2}=\frac{M_{\infty\,1,2}\,\psi}{\pi V\mu_1 r_1}=\frac{\psi}{\pi V\mu_1 r_1}\left(\pm\,r_{1(2)}\,r_1\,\frac{V\mu_1}{\bar{h}_1^q}\int_0^{2\pi}\frac{\bar{h}_{x_1}^q}{h}\,\mathrm{d}\theta+\frac{\varepsilon\,c}{2}\,W_{n\infty}\right). \qquad (25)$$

Această expresie dă coeficientul adimensional de moment, considerînd, ca și în formulele precedente, că forța $W_{n\infty}$ este raportată la unitatea de lărgime a ansamblului. Efectuînd calculele, se obține cu $r_1 \cong r_2$

$$Cm_{\infty 1,2}=\frac{1}{(1+\varepsilon)^q}\left\{\pm\,2\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}\frac{(q-1)\,(q-2)\ldots(q-2n)}{2n\,!}\binom{2n}{n}\varepsilon^{2n}\right]\mp\right.$$

$$(26)$$

$$\left.\mp\,\frac{1}{\pi c}\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{h}_{21}^{(n)}\left[I_{n\theta}^{(2-q)}(2\pi)-I_{n\theta}^{(2-q)}(0)\right]+\frac{3}{\pi}\,\varepsilon\,Cn_\infty\right\}.$$

Mișcări evasibidimensionale. În această categorie intră mișcările lubrifiantului între suprafețe de o formă oarecare, ce se extind indefinit pe direcția x_3, cu două frontiere paralele cu axa Ox_3, dar a căror microgeometrie este o funcție periodică de x_3. Deoarece mișcarea relativă are loc perpendicular pe direcția ondulațiilor (paralel cu Ox_1), timpul nu mai intervine dacă viteza este constantă, iar h va fi de forma (1)

$$h = \bar{h}_{x_1} + \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{h}_3^{(n)} \cos\left(n\, 2\pi \frac{x_3}{\tilde{b}} + \chi_{3n}\right). \tag{27}$$

Ecuația diferențială a presiunilor, pentru mișcarea tridimensională este [1]

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{h^3}{\mu}\frac{\partial p}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{h^3}{\mu}\frac{\partial p}{\partial x_3}\right) = 6V\frac{\partial h}{\partial x_1}. \tag{28}$$

Al doilea termen din membrul întîi al acestei ecuații conține derivata presiunilor în raport cu x_3. În condițiile enunțate mai înainte, presupunînd de asemenea $\tilde{h}_{x_3} \ll \bar{h}_{x_1}$ (1), se poate neglija în prima aproximație variația presiunilor cu x_3 și deci termenul amintit din (28). Plecînd astfel tot de la ecuația (3) și considerînd variația lui μ cu x_1 după (2)

$$\frac{\partial p}{\partial x_1} \cong \frac{6V\mu_1}{\bar{h}_1^q}\cdot\frac{1}{\bar{h}_{x_1}^{2-q}}\left(1 - \frac{\tilde{h}_{x_3}}{\bar{h}_{x_1}}\right)^2\left[1 - \frac{h_0}{\bar{h}_{x_1}}\left(1 - \frac{\tilde{h}_{x_3}}{\bar{h}_{x_1}}\right)\right] \cong$$

$$\cong \frac{6V\mu_1}{\bar{h}_1^q}\cdot\frac{1}{\bar{h}_{x_1}^{2-q}}\left[1 - 2\frac{\tilde{h}_{x_3}}{\bar{h}_{x_1}} - \frac{h_0}{\bar{h}_{x_1}}\left(1 - 3\frac{\tilde{h}_{x_3}}{\bar{h}_{x_1}}\right)\right]. \tag{29}$$

Din aceasta, prin integrare, se pot deduce presiunile care au o formă analogă cu (6), dar care depind de x_3 prin intermediul lui $\tilde{h}_{x_3}$. Pentru suprafețele plane rezultă astfel

$$p_\infty = \bar{p}_\infty - \frac{6V\mu_1 l\tilde{h}_{x_3}}{\bar{h}_1^q(\bar{h}_1 - \bar{h}_2)\,\bar{h}_{x_1}^{2-q}}\left[\frac{2}{2-q} - \frac{3h_0(x_3)}{3-q}\frac{1}{\bar{h}_{x_1}}\right] + C_2(x_3). \tag{30}$$

Parametrii h_0 și C_2 trebuie considerați ca funcții de x_3. În $\bar{p}_\infty$ intră de asemenea h_0; ca și în cazurile precedente, prin $\bar{p}_\infty$ s-a notat soluția bidimensională a ecuației presiunilor pentru suprafețele perfect netede ($\tilde{h}_{x_1} = \tilde{h}_{x_3} = 0$). În consecință, forma lui $\bar{p}_\infty$ este identică cu aceea cunoscută cînd nu se ia în considerare microgeometria, dar constantele de integrare au alte valori, ce rezultă din aplicarea condițiilor pe frontiere pentru formula completă a lui p_∞. Aceste constante pot deveni chiar funcții de alte variabile, ca în cazul de față.

Formula (30) se mai scrie

$$p_\infty = \frac{6V\mu_1 l}{\bar{h}_1^q(\bar{h}_1 - \bar{h}_2)}\cdot\frac{1}{\bar{h}_{x_1}^{1-q}}\left(\frac{1}{1-q} - \frac{2\tilde{h}_{x_3} + h_0}{2-q}\frac{1}{\bar{h}_{x_1}} + \frac{3h_0\tilde{h}_{x_3}}{3-q}\frac{1}{\bar{h}_{x_1}^2}\right) + C_2. \tag{31}$$

Cu ajutorul condițiilor cunoscute, $p = p_0$ pentru $\overline{h}_{x_1} = \overline{h}_1$ și $\overline{h}_{x_1} = \overline{h}_2$, se găsește

$$h_0 = \frac{\dfrac{1}{1-q}\left(\dfrac{1}{\overline{h}_2^{1-q}} - \dfrac{1}{\overline{h}_1^{1-q}}\right) - \dfrac{2}{2-q}\left(\dfrac{1}{\overline{h}_2^{2-q}} - \dfrac{1}{\overline{h}_1^{2-q}}\right)\tilde{h}_{x_3}}{\dfrac{1}{2-q}\left(\dfrac{1}{\overline{h}_2^{2-q}} - \dfrac{1}{\overline{h}_1^{2-q}}\right) - \dfrac{3}{3-q}\left(\dfrac{1}{\overline{h}_2^{3-q}} - \dfrac{1}{\overline{h}_1^{3-q}}\right)\tilde{h}_{x_3}},$$

$$C_2 = p_0 - \frac{6V\mu_1 l}{\overline{h}_1^2}\,\frac{\dfrac{1}{(1-q)(2-q)} - \dfrac{3\,\tilde{h}_{x_3}}{3-q}\left[\dfrac{1}{1-q}\left(\dfrac{1}{\overline{h}_2} + \dfrac{1}{\overline{h}_1}\right) - \dfrac{2\,\tilde{h}_{x_3}}{(2-q)\,\overline{h}_1\,\overline{h}_2}\right]}{\dfrac{1}{2-q}\left(1 - \dfrac{\overline{h}_2^{2-q}}{\overline{h}_1^{2-q}}\right) - \dfrac{3}{3-q}\left(1 - \dfrac{\overline{h}_2^{3-q}}{\overline{h}_1^{3-q}}\right)\dfrac{\tilde{h}_{x_3}}{\overline{h}_2}}. \tag{32}$$

Dacă al doilea termen al numitorului fracțiilor din expresiile lui h_0 și C_2 este sensibil mai mic decît primul ($\tilde{h}_{x_3} \ll \overline{h}_2$) și se neglijează termenul în $\tilde{h}^2_{x_3}/\overline{h}_1\,\overline{h}_2$, se poate scrie, simplificat,

$$\begin{aligned}
h_0 &\cong \frac{(2-q)\,\overline{h}_2\left(1 - \dfrac{\overline{h}_2^{1-q}}{\overline{h}_1^{1-q}}\right)}{(1-q)\left(1 - \dfrac{\overline{h}_2^{2-q}}{\overline{h}_1^{2-q}}\right)}\left\{1 - \left[\frac{2\,(1-q)}{2-q}\,\frac{1 - \dfrac{\overline{h}_2^{2-q}}{\overline{h}_1^{2-q}}}{1 - \dfrac{\overline{h}_2^{1-q}}{\overline{h}_1^{1-q}}} - \right.\right. \\
&\qquad \left.\left. - \frac{3\,(2-q)}{3-q}\,\frac{1 - \dfrac{\overline{h}_2^{3-q}}{\overline{h}_1^{3-q}}}{1 - \dfrac{\overline{h}_2^{2-q}}{\overline{h}_1^{2-q}}}\right]\frac{\tilde{h}_{x_3}}{\overline{h}_2}\right\} = a_1 + a_2\,h_{x_3}, \\
C_2 &\cong p_0 - \frac{6V\mu_1 l}{(1-q)\overline{h}_1^2}\,\frac{1}{1 - \dfrac{\overline{h}_2^{2-q}}{\overline{h}_1^{2-q}}}\left\{1 - \frac{3\,(2-q)}{3-q}\left[1 + \frac{\overline{h}_2}{\overline{h}_1} - \right.\right. \\
&\qquad \left.\left. - \frac{1 - \dfrac{\overline{h}_2^{3-q}}{\overline{h}_1^{3-q}}}{1 - \dfrac{\overline{h}_2^{2-q}}{\overline{h}_1^{2-q}}}\right]\frac{\tilde{h}_{x_3}}{\overline{h}_2}\right\} = a_3 + a_4\,\tilde{h}_{x_3}.
\end{aligned} \tag{33}$$

Rezultanta presiunilor pe unitatea de lărgime a suprafețelor se obține prin integrarea expresiei $p_\infty - p_0$ între 0 și l în raport cu x_1 și între două limite oarecare x_{31} și x_{32} după axa x_3; rezultatul integrării în raport cu x_3 se împarte apoi cu distanța $b = x_{32} - x_{31}$. Se obține astfel, neglijînd de asemenea puterile lui $\tilde{h}_{x_3}$ mai mari decît unitatea,

$$W_\infty = (a_3 - p_0)\, l - \frac{6V\mu_1 l^2}{\bar{h}_1^q(\bar{h}_1 - \bar{h}_2)^2}\left\{\frac{\bar{h}_2^q - \bar{h}_1^q}{(1-q)\,q} + \right.$$

$$+ \frac{a_1}{(2-q)(1-q)}\left(\frac{1}{\bar{h}_2^{1-q}} - \frac{1}{\bar{h}_1^{1-q}}\right) + \left[\frac{2 + a_2}{(2-q)(1-q)}\left(\frac{1}{\bar{h}_2^{1-q}} - \frac{1}{\bar{h}_1^{1-q}}\right) - \right.$$

$$\left.\left. - \frac{3a_1}{(3-q)(2-q)}\left(\frac{1}{\bar{h}_2^{2-q}} - \frac{1}{\bar{h}_1^{2-q}}\right)\right]\frac{\tilde{b}}{n2\pi b}\sum_{n=1}^{\infty} \tilde{h}_3^{(n)} \sin\left(n2\pi\frac{x_3}{\tilde{b}} + \chi_{3n}\right)_{x_{31}}^{x_{32}}\right\} +$$

$$+ \frac{a_4 l\,\tilde{b}}{n2\pi b}\sum_{n=1}^{\infty} \tilde{h}_3^{(n)} \sin\left(n2\pi\frac{x_3}{\tilde{b}} + \chi_{3n}\right)_{x_{31}}^{x_{32}}. \tag{34}$$

Rezultanta pe unitatea de lărgime a zonei de acoperire a suprafețelor depinde de intervalul $x_{32} - x_{31}$, considerat. Dacă acest interval, respectiv b, tinde către ∞, adică medierea în raport cu x_3 se face pe toată zona, efectul coordonatei x_3 dispare, iar W_∞ are aceeași expresie ca și pentru suprafețele perfect netede. Valorile rezultantei diferă însă datorită faptului că h_0 și C_2 sînt deosebiți.

Pentru valorile $q = 1, 2, 3$, apar singularități în expresiile (31)—(34), care nu ridică însă dificultăți de principiu. Este suficient să se observe că integrarea introduce în aceste cazuri termeni logaritmici în formulele respective, iar coeficienții care conțin $1-q$, $2-q$, $3-q$ la numitor dispar.

Forțele tangențiale (de frecare) sînt, pentru unitatea de lărgime, ca și în cazul precedent (15)

$$F_\infty = \mp \frac{V\mu_1 l}{\bar{h}_1 - \bar{h}_2}\left[\frac{1}{q}\left(1 - \frac{\bar{h}_2^q}{\bar{h}_1^q}\right) - \frac{1}{1-q}\frac{1}{\bar{h}_1}\left(\frac{\bar{h}_1^{1-q}}{\bar{h}_2^{1-q}} - 1\right)\frac{\tilde{b}}{n2\pi b} \times \right.$$

$$\left. \times \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{h}_3^{(n)} \sin\left(n2\pi\frac{x_3}{\tilde{b}} + \chi_{3n}\right)_{x_{31}}^{x_{32}}\right] + \frac{\bar{h}_1 - \bar{h}_2}{2l} W_\infty, \quad q \neq 0\,; 1,$$

$$F_\infty = \mp \frac{V\mu_1 l}{\bar{h}_1 - h_2}\left[\ln\frac{\bar{h}_1}{h_2} - \left(\frac{1}{\bar{h}_2} - \frac{1}{\bar{h}_1}\right)\frac{\tilde{b}}{n\,2\pi b}\sum_{n=1}^{\infty} \tilde{h}_3^{(n)} \sin\left(n\,2\,\pi\frac{x_3}{\tilde{b}} + \chi_{3n}\right)_{x_{31}}^{x_{32}}\right] +$$

$$+ \frac{\bar{h}_1 - \bar{h}_2}{2l} W_\infty, \quad q = 0, \tag{35}$$

$$F_\infty = \mp \frac{V\mu_1 l}{\bar{h}_1 - \bar{h}_2}\left[\bar{h}_1 - \bar{h}_2 - \left(\ln\frac{\bar{h}_1}{\bar{h}_2}\right)\frac{\tilde{b}}{n\,2\pi b}\sum_{n=1}^{\infty} \tilde{h}_3^{(n)} \sin\left(n2\pi\frac{x_3}{\tilde{b}} + \chi_{3n}\right)_{x_{31}}^{x_{32}}\right] +$$

$$+ \frac{\bar{h}_1 - \bar{h}_2}{2l} W_\infty, \quad q = 1.$$

Pentru suprafețele cilindrice circulare, folosind notațiile din paragrafele precedente, ecuația (29) devine

$$p_\infty = \frac{6V\mu_1 r_1}{c^2(1+\varepsilon)^q}\int\left[1 - \frac{2\,\tilde{h}_{x_3} + h_0(x_3)}{c(1+\varepsilon\cos\theta)} + \right.$$
$$\left. + 3\,\frac{h_0(x_3)\,h_{x_3}}{c^2(1+\varepsilon\cos\theta)^2}\right]\frac{\mathrm{d}\theta}{(1+\varepsilon\cos\theta)^{2-q}} + C_2(x_3). \tag{36}$$

Fie funcțiile de θ

$$\mathscr{L}_k(\theta) = \int\frac{\mathrm{d}\theta}{(1+\varepsilon\cos\theta)^k}, \quad \mathscr{L}_k\big|_1^2 = \mathscr{L}_k(\theta_2) - \mathscr{L}_k(\theta_1). \tag{37}$$

Expresiile $h_0(x_3)$ și $C_2(x_3)$ se pot scrie cu ajutorul funcțiilor $\mathscr{L}_k(\theta)$, dacă se folosesc condițiile pe frontiere ($p_\infty = p_0$ pentru $\theta = \theta_1,\ \theta_2$)

$$h_0 = c\,\frac{\mathscr{L}_{2-q}\big|_1^2 - 2\,\mathscr{L}_{3-q}\big|_1^2\,\dfrac{\tilde{h}_{x_3}}{c}}{\mathscr{L}_{3-q}\big|_1^2 - 3\,\mathscr{L}_{4-q}\big|_1^2\,\dfrac{\tilde{h}_{x_3}}{c}},$$

$$C_2 = p_0 - \frac{6V\mu_1 r_1}{c^2(1+\varepsilon)^q}\left(\frac{\mathscr{L}_{2-q}(\theta_1)\,\mathscr{L}_{3-q}(\theta_2) - \mathscr{L}_{2-q}(\theta_2)\,\mathscr{L}_{3-q}(\theta_1)}{\mathscr{L}_{3-q}\big|_1^2 - 3\mathscr{L}_{4-q}\big|_1^2\,\dfrac{\tilde{h}_{x_3}}{c}} + \right.$$
$$\left. + \frac{\dfrac{3\,\tilde{h}_{x_3}}{c}\,\mathscr{L}_{4-q}(\theta_1)\mathscr{L}_{2-q}\big|_1^2 + \dfrac{6\,\tilde{h}_{x_3}^2}{c^2}\left[\mathscr{L}_{3-q}(\theta_1)\,\mathscr{L}_{4-q}(\theta_2) - \mathscr{L}_{3-q}(\theta_2)\mathscr{L}_{4-q}(\theta_1)\right]}{\mathscr{L}_{3-q}\big|_1^2 - 3\mathscr{L}_{4-q}\big|_1^2\,\dfrac{\tilde{h}_{x_3}}{c}}\right). \tag{38}$$

Cu aceleași aproximații ca și în cazurile anterioare, neglijînd puterile superioare ale lui $\tilde{h}_{x_3}/c$, h_0 și C_2 se pot exprima mai simplu ca funcții liniare de $\tilde{h}_{x_3}$, după cum urmează:

$$h_0 = c\,\frac{\mathscr{L}_{2-q}\big|_1^2}{\mathscr{L}_{3-q}\big|_1^2}\left[1 - \left(2\,\frac{\mathscr{L}_{3-q}\big|_1^2}{\mathscr{L}_{2-q}\big|_1^2} - 3\,\frac{\mathscr{L}_{4-q}\big|_1^2}{\mathscr{L}_{3-q}\big|_1^2}\right)\frac{\tilde{h}_{x_3}}{c}\right] = d_1 + d_2\,\tilde{h}_{x_3},$$

$$C_2 = p_0 - \frac{6V\mu_1 r_1}{c^2(1+\varepsilon)^q}\,\frac{\mathscr{L}_{2-q}(\theta_1)\,\mathscr{L}_{3-q}(\theta_2) - \mathscr{L}_{2-q}(\theta_2)\,\mathscr{L}_{3-q}(\theta_1)}{\mathscr{L}_{3-q}\big|_1^2}\left\{1 + \right. \tag{39}$$
$$\left. + 3\left[\frac{\mathscr{L}_{4-q}(\theta_1)\,\mathscr{L}_{2-q}\big|_1^2}{\mathscr{L}_{2-q}(\theta_1)\,\mathscr{L}_{3-q}(\theta_2) - \mathscr{L}_{2-q}(\theta_2)\,\mathscr{L}_{3-q}(\theta_1)} + \frac{\mathscr{L}_{4-q}\big|_1^2}{\mathscr{L}_{3-q}\big|_1^2}\right]\frac{\tilde{h}_{x_3}}{c}\right\} = d_3 + d_4\,\tilde{h}_{x_3}.$$

Ecuația presiunilor se poate scrie apoi direct ținînd seama de rezultatele stabilite în lucrări anterioare [1]. S-a găsit în acestea că pentru mişcarea bidimensională între suprafeţe perfect netede $\overline{p}_\infty$ este o funcţie de V, h_0, q, θ; introducînd în (36) rezultatele precedente, se obţine

$$p_\infty = \frac{6\, V\, \mu_1\, r_1}{c^2 (1+\varepsilon)^q} \int \left[1 - \frac{d_1 + (2 + d_2)\, \tilde{h}_{x_3}}{c\,(1 + \varepsilon \cos\theta)} + \right.$$

$$\left. + 3\, \frac{(d_1 + d_2\, \tilde{h}_{x_3})\, \tilde{h}_{x_3}}{c^2\, (1 + \varepsilon \cos\theta)^2} \right] \frac{\mathrm{d}\theta}{(1 + \varepsilon \cos\theta)^{2-q}} + d_3 + d_4\, \tilde{h}_{x_3}. \tag{40}$$

Dacă se notează $\overline{C}_2$ valoarea constantei C_2 pentru soluţia $\overline{p}_\infty$ cunoscută, $\overline{p}_\infty - \overline{C}_2$ reprezintă integrala de la (36) sau (40) pentru acest caz ($h_0 =$ constant, $\tilde{h}_{x_3} = 0$). Pentru simplificarea scrisului se poate omite mai departe $\overline{C}_2$ şi în acest caz soluţia se pune sub forma

$$p_\infty = \overline{p}_\infty\, (V, d_1, q, \theta) - \overline{p}_\infty \left(\frac{2 + d_2}{1 + \varepsilon}\, \frac{\tilde{h}_{x_3}}{c}\, V,\, 3\, \frac{d_1 + d_2\, \tilde{h}_{x_3}}{2 + d_2},\, q - 1, \theta \right) +$$

$$+ d_3 + d_4\, \tilde{h}_{x_3}. \qquad (41$$

Astfel, rezultatul se obţine cu ajutorul soluţiilor cunoscute [1], în prima h_0 fiind înlocuit prin d_1, iar a doua avînd parametri, în locul celor obişnuiţi, o viteză modificată $\frac{2 + d_2}{1 + \varepsilon}\, \frac{\tilde{h}_{x_3}}{c}\, V$, o valoare $3\, \frac{d_1 + d_2 \tilde{h}_{x_3}}{2 + d_2}$ funcţie de h_{x_3} în locul lui h_0 şi $q - 1$ în loc de q, adică o lege modificată de variaţie a viscozităţii.

Pe baza acestor rezultate, se deduc uşor coeficienţii Ct_∞ şi Cn_∞. Fie

$$\widetilde{H}\Big|_1^2 = \frac{\widetilde{b}}{n\, 2\pi\, b} \sum_{n=1}^{\infty} h_3^{(n)} \sin \left(n 2\pi\, \frac{x_3}{b} + \chi_{3n} \right)_{x_{31}}^{x_{32}}. \tag{42}$$

Neglijînd puterile superioare ale lui $\tilde{h}_{x_3}$, parametrul care înlocuieşte pe h_0 din p_∞, în al doilea termen (41), este $3d_1/(2 + d_2)$. Astfel se obţine

$$Ct_\infty = \overline{Ct}_\infty\, (d_1, q) - (2 + d_2)\, \frac{\widetilde{H}\big|_1^2}{c}\, \overline{Ct}_\infty \left(\frac{3d_1}{2 + d_2},\ q - 1 \right) +$$

$$+ \frac{(1 + \varepsilon)^q\, \psi^2}{6\, \mu_1 V}\, (d_3 + d_4\, \widetilde{H}\big|_1^2)\, (\sin\theta_2 - \sin\theta_1),$$

$$Cn_\infty = \overline{Cn}_\infty\, (d_1, q) - (2 + d_2)\, \frac{\widetilde{H}\big|_1^2}{c}\, \overline{Ct}_\infty \left(\frac{3\, d_1}{2 + d_2},\, q - 1 \right) +$$

$$+ \frac{(1 + \varepsilon)^q\, \psi^2}{6 V \mu_1}\, (d_3 + d_4\, \widetilde{H}\big|_1^2)\, (\cos\theta_1 - \cos\theta_2). \tag{43}$$

Ca şi presiunile, coeficienţii Ct_∞, Cn_∞ depind de h_0 şi q, respectiv de d_1, q sau $3d_1/(2 + d_2)$ şi $q - 1$, aşa cum s-a specificat în scrierea formulelor (43). În mod asemănător, se deduc apoi coeficienţii de moment [1]

$$
\begin{aligned}
Cm_{\infty\,1,2} &= \frac{\psi}{\pi\mu_1 V r_1}\left(\pm r_{1(2)}\, r_1 \frac{V\mu_1}{b\overline{h}_1^q}\int_0^{2\pi}\int_{x_{31}}^{x_{32}} \frac{\overline{h}_{x_1}^q}{\overline{h}_{x_1}+\tilde{h}_{x_3}}\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}x_3 + \frac{\varepsilon c}{2} W_{n\infty}\right) \cong \\
&\cong \frac{\psi}{\pi V\mu_1 r_1}\left[\pm r_{1(2)}\, r_1 \frac{V\mu_1}{\overline{h}_1^q}\int_0^{2\pi} \overline{h}_{x_1}^{q-1}\left(1-\frac{\widetilde{H}\big|_1^2}{\overline{h}_{x_1}}\right)\mathrm{d}\theta + \frac{\varepsilon c}{2} W_{n\infty}\right] = \\
&= \frac{1}{(1+\varepsilon)^q}\Bigg(\pm 2\Bigg\{1-\widetilde{H}\big|_1^2 + \qquad\qquad (44)\\
&+ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}\Bigg[\frac{\{q-1-\widetilde{H}\big|_1^2\,(q-2n-1)\}\,(q-2)\,(q-3)\,\ldots\,(q-2n)}{2n\,!}\times \\
&\times\binom{2n}{n}\varepsilon^{2n}\Bigg]\Bigg\} + \frac{3}{\pi}\,\varepsilon\, Cn_{\infty}\Bigg).
\end{aligned}
$$

Debitul se obţine de asemenea uşor, atît pentru suprafeţele plane, cît şi pentru acelea cilindrice circulare

$$
Q \cong \frac{1}{2} V h_0 = \frac{1}{2} V\,[a_1(d_1) + a_2\,(d_2)\,\widetilde{H}\big|_1^2]. \qquad (45)
$$

Se mai observă că, în formulele (43) — (45), $\widetilde{H}\big|_1^2 = 0$ dacă se consideră efectele medii pe lărgimea infinită a zonei lubrificate.

Funcţiile $\mathcal{L}_k\,(\theta)$ pot fi calculate în felul următor (k fracţionar) [2]

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_k(\theta) &= \int\left[1+\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\frac{k\,(k-1)\,\ldots\,(k-m+1)}{m\,!}\,\varepsilon^m\cos^m\theta\right]\mathrm{d}\theta = \\
&= \theta + \sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\frac{k\,(k-1)\,\ldots\,(k-m+1)}{m\,!}\,\varepsilon^m\Bigg[\frac{1}{2^m}\binom{m}{\frac{m}{2}}\theta + \qquad\qquad (46)\\
&\qquad + \frac{1}{2^{m-1}}\sum_{s=0}^{\frac{m}{2}-1}\binom{m}{s}\frac{\sin\,(m-2s)\,\theta}{m-2s}\Bigg],\quad m \text{ par},
\end{aligned}
$$

$$
\mathcal{L}_k\,(\theta) = \theta + \sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\frac{k(k-1)\ldots(k-m+1)}{m\,!}\,\varepsilon^m\frac{1}{2^{m-1}}\sum_{s=0}^{\frac{m-1}{2}}\binom{m}{s}\frac{\sin(m-2s)\,\theta}{m-2s},
$$

m impar.

Deoarece $\varepsilon < 1$ întotdeauna, dezvoltarea poate fi oprită la cîţiva termeni şi sumele finite de asemenea. Pentru k natural, integrarea se poate face direct, cu ajutorul formulelor de recurenţă cunoscute.

Un procedeu direct pentru determinarea coeficienţilor $d_1 \ldots d_4$ poate fi folosit scriind că ecuaţia (41) satisface condiţiile pe frontierele $\theta = \theta_1, \theta_2$

$(p_\infty = p_0)$. Se obțin astfel două relații între cei patru coeficienți. Alte două rezultă anulînd coeficienții lui $\tilde{h}_{x_2}^2$ în formulele care exprimă aceste condiții.

Primită la redacție la 25 iunie 1963

EFFECTS OF THE MICROGEOMETRY OF SURFACES IN LUBRICATION

ABSTRACT

1. THE TWO-DIMENSIONAL PROBLEM

The solutions of the hydrodynamic lubrication are established for the complex case in which the roughness of solid walls is considered. For this purpose, the expression of the film thickness at each point is determined under a very general form; this thickness is a time function. It is shown that the local pressure may be considered through its mean value, which permits in ordinary cases the consideration of the steady motion.

The solutions of the two-dimensional problem are then given, if the roughness is function of a single variable upon the direction of the relative motion, for plane middle surfaces or circular-cylindrical surfaces. Beside the pressure distribution, the author calculates the operating characteristics (load carrying capacity, friction moments, rates of flow), the effect of local irregularities being set into evidence.

Farther, the quasi-two-dimensional problem is treated, in which the surfaces extend indefinitely upon a direction normal to the relative velocity and the roughness is a periodic function of the variable upon this direction. Also, in this case the pressure distribution and the global elements of the solid surfaces are established.

For each particular problem treated, the additional effect of the surface irregularities is pointed out, as compared to the known solutions for perfectly flat surfaces.

BIBLIOGRAFIE

1. N. TIPEI, *Hidroaerodinamica lubrificației*. Edit. Acad. R.P.R., București, 1957.
2. I. RIJIK, I. GRADȘTEIN, *Tabele de integrale, sume, serii și produse*. Edit. tehnică, București, 1955.

STUDII

ASUPRA SCURGERII LINIARE A UNUI LICHID COMPRESIBIL PRINTR-UN MEDIU POROS

DE

T. OROVEANU și AL. OSNEA [1]

532 : 517.9

1. **Introducere.** Într-o lucrare anterioară [2], s-a stabilit o ecuație diferențială a presiunii în cazul scurgerii unui lichid compresibil printr-un mediu poros omogen, considerîndu-se în locul legii lui Darcy o relație cu caracter mai general între viteza de filtrare și gradientul de presiune. În această relație, se ține seama de influența forțelor de inerție asupra fenomenelor de scurgere, fapt care prezintă interes în special în cazul scurgerilor cu variații rapide de presiune. Plecîndu-se de la această idee, în lucrarea [3] s-a tratat, pe baza ecuației deduse în [2], problema creșterii presiunii într-o sondă după închiderea acesteia.

Este evident că ecuația poate fi utilizată în general pentru studiul scurgerii nestaționare a unui lichid compresibil printr-un mediu poros și în lucrarea [4] a fost tratată o problemă de acest fel. În cele ce urmează, ne propunem să întreprindem un studiu sistematic al scurgerii lichidelor compresibile prin medii poroase omogene pe baza ecuației deduse în [2]. Pentru început, vom considera scurgerile liniare, în cazul cărora ecuația are forma

$$m\beta_l\rho_0 \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + \frac{m\beta_l\mu}{k}\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}, \qquad (1)$$

m fiind porozitatea, β_l coeficientul de compresibilitate al lichidului, ρ_0 masa specifică a acestuia corespunzătoare unei presiuni de referință p_0, μ viscozitatea dinamică a lichidului și k permeabilitatea mediului poros.

Dacă introducem variabilele adimensionale

$$\xi = \frac{x}{l}, \quad \tau = \frac{k}{m\beta_l\mu}\frac{t}{l^2}, \qquad (2)$$

---

[1] Institutul de petrol, gaze și geologie din București.

l fiind o lungime de referinţă, ecuaţia (1) ia forma

$$\frac{1}{\alpha^2}\frac{\partial^2 p}{\partial \tau^2}+\frac{\partial p}{\partial \tau}=\frac{\partial^2 p}{\partial \xi^2}, \tag{3}$$

unde constanta α^2 are expresia

$$\alpha^2=\frac{m\beta_l\mu^2 l^2}{k^2\rho_0}. \tag{4}$$

Clasificarea problemelor o vom face cu ajutorul terminologiei introduse de A. Houpeurt [1] care are avantajul de a fi simplă şi sugestivă. Ca metodă de studiu, vom utiliza pe aceea a transformărilor integrale şi anume transformata Fourier finită care apare indicată pentru tratarea unitară şi cu dezvoltări de calcul mai reduse ca volum a acestor probleme.

2. **Alimentare cu presiune constantă la distanţă finită.** Să presupunem că mediul poros, de lungime l, se află în momentul iniţial ($t=0$) în echilibru la presiunea constantă p_c. Admiţînd că la $x=l$ presiunea rămîne egală cu p_c pentru orice $t>0$, la $x=0$ putem avea două situaţii şi anume fie o presiune constantă p_s ($p_s<p_c$), fie un debit constant Q_s. La aceste situaţii corespund două probleme, pe care le vom nota sintetic p_c-p_s şi p_c-Q_s, utilizînd, aşa cum am mai spus, terminologia lui A. Houpeurt.

2.1. *Problema* p_c-p_s. Consideraţiile precedente arată că rezolvarea acestei probleme revine la găsirea soluţiei ecuaţiei (1) care satisface condiţiile iniţiale.

$$t=0,\quad p=p_c;\quad t=0,\quad \frac{\partial p}{\partial t}=0, \tag{5}$$

şi condiţiile la limită

$$x=0,\quad p=p_s;\quad x=l,\quad p=p_c. \tag{6}$$

Deoarece presiunile p_c şi p_s sînt constante, vom introduce funcţia

$$\varpi=\frac{p-p_s}{p_c-p_s} \tag{7}$$

obţinînd astfel în loc de (3) ecuaţia

$$\frac{1}{\alpha^2}\frac{\partial^2 \varpi}{\partial \tau^2}+\frac{\partial \varpi}{\partial \tau}=\frac{\partial^2 \varpi}{\partial \xi^2}. \tag{8}$$

Pentru funcţia ϖ, condiţiile iniţiale sînt

$$\tau=0,\quad \varpi=1;\quad \tau=0,\quad \frac{\partial \varpi}{\partial \tau}=0, \tag{9}$$

iar condiţiile la limită iau forma

$$\xi = 0,\ \varpi = 0;\ \xi = 1,\ \varpi = 1. \tag{10}$$

Pentru rezolvarea problemei, vom aplica sinus-transformata Fourier finită, înmulțind ambii membrii ai ecuației (8) cu $\sin n\pi\xi d\xi$ și integrînd de la 0 la 1. Dacă ținem seama de proprietățile acestei transformări integrale [6] și de condițiile la limită ale problemei, obținem ecuația

$$\frac{1}{\alpha^2}\frac{d^2\overline{\varpi}_s}{d\tau^2} + \frac{d\overline{\varpi}_s}{d\tau} + n^2\pi^2\overline{\varpi}_s + n\pi\cos n\pi = 0, \tag{11}$$

în care

$$\overline{\varpi}_s = \int_0^1 \varpi \sin n\pi\xi d\xi \tag{12}$$

este sinus-transformata Fourier finită a funcției ϖ.

Aplicarea aceluiași procedeu de transformare la condițiile inițiale (9) ne dă imediat

$$\tau = 0,\quad \overline{\varpi}_s = \frac{1}{n\pi}(1 - \cos n\pi);\quad \tau = 0,\quad \frac{d\overline{\varpi}_s}{d\tau} = 0. \tag{13}$$

Soluția ecuației (11) este

$$\overline{\varpi}_s = C_1 e^{-\frac{\alpha^2-\omega_n}{2}\tau} + C_2 e^{-\frac{\alpha^2+\omega_n}{2}\tau} - \frac{\cos n\pi}{n\pi}, \tag{14}$$

unde

$$\omega_n = \alpha^2\sqrt{1 - 4\frac{n^2\pi^2}{\alpha^2}}\cdot \tag{15}$$

Condițiile (13) ne dau pentru constantele C_1 și C_2 expresiile

$$C_1 = \frac{\alpha^2 + \omega_n}{2n\pi\omega_n},\quad C_2 = -\frac{\alpha^2 - \omega_n}{2n\pi\omega_n} \tag{16}$$

astfel că soluția (14) ia forma

$$\overline{\varpi}_s = \frac{1}{2n\pi\omega_n}\left[(\alpha^2 + \omega_n)e^{-\frac{\alpha^2-\omega_n}{2}\tau} - (\alpha^2 - \omega_n)e^{-\frac{\alpha^2+\omega_n}{2}\tau}\right] - \frac{\cos n\pi}{n\pi}\cdot \tag{17}$$

Revenirea la ϖ se face cu ajutorul formulei de inversiune [6]

$$\varpi = 2\sum_{n=1}^{\infty} \overline{\varpi}_s(n)\sin n\pi\xi \tag{18}$$

din care rezultă

$$\varpi = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{2n\omega_n} \left[(\alpha^2 + \omega_n) e^{-\frac{\alpha^2 - \omega_n}{2}\tau} - (\alpha^2 - \omega_n) e^{-\frac{\alpha^2 + \omega_n}{2}\tau} \right] - \frac{\cos n\pi}{n} \right\} \sin n\pi\xi . \tag{19}$$

Dacă observăm că putem pune

$$\cos n\pi = -(-1)^{n-1} \tag{20}$$

şi ţinem seama de faptul că avem [5]

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \sin n\pi\xi}{n} = \frac{\pi\xi}{2}, \tag{21}$$

soluţia (19) devine

$$\varpi = \xi + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\omega_n} \left[(\alpha^2 + \omega_n) e^{-\frac{\alpha^2 - \omega_n}{2}\tau} - (\alpha^2 - \omega_n) e^{-\frac{\alpha^2 + \omega_n}{2}\tau} \right] \sin n\pi\xi . \tag{22}$$

Se constată cu uşurinţă că această soluţie satisface condiţiile (9) şi (10); pentru prima condiţie (9), trebuie avută în vedere formula [5]

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\pi\xi}{n} = \frac{\pi}{2}(1 - \xi).$$

Soluţia găsită poate fi pusă şi sub altă formă dacă observăm că, atunci cînd $n > \frac{\alpha}{2\pi}$, ω_n devine imaginar. Să notăm cu ν cea mai mare valoare a lui n pentru care mai avem $\nu < \frac{\alpha}{2\pi}$ şi să introducem notaţia

$$\tilde{\omega}_n = i\omega_n = \alpha^2 \sqrt{4\frac{n^2\pi^2}{\alpha^2} - 1}, \tag{23}$$

ceea ce ne permite să dăm soluţiei (22) expresia definitivă şi anume

$$\begin{aligned} \varpi = \xi &+ \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\nu} \frac{1}{n\omega_n} \left[(\alpha^2 + \omega_n) e^{-\frac{\alpha^2 - \omega_n}{2}\tau} - (\alpha^2 - \omega_n) e^{-\frac{\alpha^2 + \omega_n}{2}\tau} \right] \sin n\pi\xi + \\ &+ \frac{2}{\pi} \sum_{n>\nu}^{\infty} \frac{e^{-\frac{\alpha^2}{2}\tau}}{n} \left(\cos \frac{\tilde{\omega}_n}{2}\tau + \frac{\alpha^2}{\tilde{\omega}_n} \sin \frac{\tilde{\omega}_n}{2}\tau \right) \sin n\pi\xi . \end{aligned} \tag{24}$$

Cazul $\omega_n = 0$ nu trebuie luat în consideraţie deoarece ar însemna să avem $\alpha^2 = 4n^2\pi^2$, respectiv α^2 să fie un număr transcendent, ceea ce nu este practic posibil.

Pentru a calcula debitul, este necesar să găsim mai întîi viteza de filtrare. În acest scop, vom considera ecuația dată în [2]

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\mu}{\rho k} v \tag{25}$$

și o vom scrie în variabilele adimensionale introduse mai înainte (2), obținînd

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} + \alpha^2 \frac{\rho_0}{\rho} v = -\alpha^2 \frac{\rho_0}{\rho}\frac{k}{\mu l}\frac{\partial p}{\partial \xi}. \tag{26}$$

Prin integrarea acestei ecuații în raport cu τ găsim

$$v = C(\xi)\,\mathrm{e}^{-\alpha^2\rho_0\int\frac{d\tau}{\rho}} - \alpha^2\rho_0\,\frac{k}{\mu l}\,\mathrm{e}^{-\alpha^2\rho_0\int\frac{d\tau}{\rho}}\int\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial \xi}\,\mathrm{e}^{\alpha^2\rho_0\int\frac{d\tau}{\rho}}\,d\tau, \tag{27}$$

$C(\xi)$ fiind o funcție de ξ încă nedeterminată.

Procedînd ca în [4], vom introduce aproximația $\rho \approx \rho_0$, care este permisă deoarece lichidul este puțin compresibil și vom obține astfel expresia aproximativă a vitezei

$$v = C(\xi)\,\mathrm{e}^{-\alpha^2\tau} - \alpha^2\frac{k}{\mu l}\,\mathrm{e}^{-\alpha^2\tau}\int\frac{\partial p}{\partial \xi}\,\mathrm{e}^{\alpha^2\tau}\,d\tau. \tag{28}$$

Avem însă, din (7) și (24),

$$\begin{aligned}\frac{\partial p}{\partial \xi} &= (p_c - p_s)\frac{\partial \varpi}{\partial \xi} = (p_c - p_s)\Big\{1 + \sum_{n=1}^{\nu}\frac{1}{\omega_n}\Big[(\alpha^2 + \omega_n)\,\mathrm{e}^{-\frac{\alpha^2-\omega_n}{2}\tau} - \\ &-(\alpha^2 - \omega_n)\,\mathrm{e}^{-\frac{\alpha^2+\omega_n}{2}\tau}\Big]\cos n\pi\xi + 2\sum_{n>\nu}^{\infty}\mathrm{e}^{-\frac{\alpha^2}{2}\tau}\Big(\cos\frac{\tilde\omega_n}{2}\tau + \frac{\alpha^2}{\tilde\omega_n}\sin\frac{\tilde\omega_n}{2}\tau\Big)\cos n\pi\xi\Big\}\end{aligned} \tag{29}$$

de unde rezultă cu ușurință

$$\begin{aligned}\int\frac{\partial p}{\partial \xi}\,\mathrm{e}^{\alpha^2\tau}\,d\tau &= (p_c - p_s)\Big[\frac{1}{\alpha^2}\,\mathrm{e}^{\alpha^2\tau} + 2\sum_{n=1}^{\nu}\frac{1}{\omega_n}\Big(\mathrm{e}^{\frac{\alpha^2+\omega_n}{2}\tau} - \\ &-\mathrm{e}^{-\frac{\alpha^2-\omega_n}{2}\tau}\Big)\cos n\pi\xi + 4\sum_{n>\nu}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{\frac{\alpha^2}{2}\tau}}{\tilde\omega_n}\sin\frac{\tilde\omega_n}{2}\tau\,\cos n\pi\xi\Big]\end{aligned} \tag{30}$$

și

$$\begin{aligned}v &= C(\xi)\,\mathrm{e}^{-\alpha^2\tau} - \alpha^2\frac{k}{\mu l}(p_c - p_s)\Big[\frac{1}{\alpha^2} + 2\sum_{n=1}^{\nu}\frac{1}{\omega_n}\Big(\mathrm{e}^{-\frac{\alpha^2-\omega_n}{2}\tau} - \\ &- \mathrm{e}^{-\frac{\alpha^2+\omega_n}{2}\tau}\Big)\cos n\pi\xi + 4\sum_{n>\nu}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-\frac{\alpha^2}{2}\tau}}{\tilde\omega_n}\sin\frac{\tilde\omega_n}{2}\tau\cos n\pi\xi\Big].\end{aligned} \tag{31}$$

În momentul inițial, viteza de filtrare este nulă

$$\tau = 0, \quad v = 0 \tag{32}$$

și prin urmare

$$C(\xi) = \frac{k}{\mu l}(p_c - p_s), \tag{33}$$

respectiv

$$v = -\frac{k}{\mu l}(p_c - p_s)\Bigg\{1 - e^{-\alpha^2\tau} + 2\alpha^2\Bigg[\sum_{n=1}^{\nu}\frac{1}{\omega_n}\left(e^{-\frac{\alpha^2-\omega_n}{2}\tau} - e^{-\frac{\alpha^2+\omega_n}{2}\tau}\right)\cos n\pi\xi + 2\sum_{n>\nu}^{\infty}\frac{e^{-\frac{\alpha^2}{2}\tau}}{\tilde{\omega}_n}\sin\frac{\tilde{\omega}_n}{2}\tau\cos n\pi\xi\Bigg]\Bigg\}. \tag{34}$$

Debitul, considerat în valoarea absolută, pentru o suprafață oarecare S are expresia

$$Q = S\,\frac{k}{\mu}\,\frac{p_c - p_s}{l}\Bigg\{1 - e^{-\alpha^2\tau} + 2\alpha^2\Bigg[\sum_{n=1}^{\nu}\frac{1}{\omega_n}\left(e^{-\frac{\alpha^2-\omega_n}{2}\tau} - e^{-\frac{\alpha^2+\omega_n}{2}\tau}\right) + 2\sum_{n>\nu}^{\infty}\frac{e^{-\frac{\alpha^2}{2}\tau}}{\tilde{\omega}_n}\sin\frac{\tilde{\omega}_n}{2}\tau\Bigg]\Bigg\} \tag{35}$$

sau

$$Q = S\,\frac{k}{\mu}\,\frac{p_c - p_s}{l}\left[1 - e^{-\alpha^2\tau} + 4\alpha^2 e^{-\frac{\alpha^2}{2}\tau}\left(\sum_{n=1}^{\nu}\frac{\operatorname{sh}\frac{\omega_n}{2}\tau}{\omega_n} + \sum_{n>\nu}^{\infty}\frac{\sin\frac{\tilde{\omega}_n}{2}\tau}{\tilde{\omega}_n}\right)\right]. \tag{36}$$

Sub formă adimensională avem

$$\overline{Q} = \frac{Q}{S\,\frac{k}{\mu}\,\frac{p_c - p_s}{l}} = 1 - e^{-\alpha^2\tau} + 4\,\alpha^2 e^{-\frac{\alpha^2}{2}\tau}\left(\sum_{n=1}^{\nu}\frac{\operatorname{sh}\frac{\omega_n}{2}\tau}{\omega_n} + \sum_{n>\nu}^{\infty}\frac{\sin\frac{\tilde{\omega}_n}{2}\tau}{\tilde{\omega}_n}\right). \tag{37}$$

Producția cumulată, pentru un interval de timp $[0, t]$, are expresia

$$Q_c = \int_0^t Q \mathrm{d}t = \frac{m\beta_l \mu l^2}{k} \int_0^\tau Q \mathrm{d}\tau \tag{38}$$

și dacă ținem seama de (35) rezultă

$$\begin{aligned} Q_c = m\beta_l Sl(p_c - p_s) \Bigg[\tau + \frac{1}{\alpha^2} \mathrm{e}^{-\alpha^2\tau} + 4\alpha^2 \sum_{n=1}^{\nu} \frac{1}{\omega_n} \left(\frac{1}{\alpha^2 + \omega_n} \mathrm{e}^{-\frac{\alpha^2+\omega_n}{2}\tau} - \right. \\ \left. - \frac{1}{\alpha^2 - \omega_n} \mathrm{e}^{-\frac{\alpha^2-\omega_n}{2}\tau} \right) - 8\alpha^2 \sum_{n>\nu}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\frac{\alpha^2}{2}\tau}}{\tilde{\omega}_n(\alpha^4 + \tilde{\omega}_n^2)} \left(\tilde{\omega}_n \cos \frac{\tilde{\omega}_n}{2} \tau + \right. \\ \left. + \alpha^2 \sin \frac{\tilde{\omega}_n}{2} \tau \right) - \frac{1}{\alpha^2} + 8\alpha^2 \sum_{n=1}^{\nu} \frac{1}{\alpha^4 - \omega_n^2} + 8\alpha^2 \sum_{n>\nu}^{\infty} \frac{1}{\alpha^4 + \tilde{\omega}_n^2} \Bigg] \end{aligned} \tag{39}$$

sau

$$\begin{aligned} Q_c = m\beta_l Sl(p_c - p_s) \Bigg[\tau + \frac{1}{\alpha^2} \mathrm{e}^{-\alpha^2\tau} - 8\alpha^2 \sum_{n=1}^{\nu} \frac{\mathrm{e}^{-\frac{\alpha^2}{2}\tau}}{\omega_n(\alpha^4 - \omega_n^2)} \left(\omega_n \operatorname{ch} \frac{\omega_n}{2} \tau + \right. \\ \left. + \alpha^2 \operatorname{sh} \frac{\omega_n}{2} \tau \right) - 8\alpha^2 \sum_{n>\nu}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\frac{\alpha^2}{2}\tau}}{\tilde{\omega}_n(\alpha^4 + \tilde{\omega}_n^2)} \left(\tilde{\omega}_n \cos \frac{\tilde{\omega}_n}{2} \tau + \alpha^2 \sin \frac{\tilde{\omega}_n}{2} \tau \right) - \\ - \frac{1}{\alpha^2} + 8\alpha^2 \sum_{n=1}^{\nu} \frac{1}{\alpha^4 - \omega_n^2} + 8\alpha^2 \sum_{n>\nu}^{\infty} \frac{1}{\alpha^4 + \tilde{\omega}_n^2} \Bigg]. \end{aligned} \tag{40}$$

Sub formă adimensională obținem

$$\begin{aligned} \overline{Q}_c = \frac{Q_c}{m\beta_l Sl(p_c - p_s)} = \tau + \frac{1}{\alpha^2} \mathrm{e}^{-\alpha^2\tau} - 8\alpha^2 \sum_{n=1}^{\nu} \frac{\mathrm{e}^{-\frac{\alpha^2}{2}\tau}}{\omega_n(\alpha^4 - \omega_n^2)} \left(\omega_n \operatorname{ch} \frac{\omega_n}{2} \tau + \right. \\ \left. + \alpha^2 \operatorname{sh} \frac{\omega_n}{2} \tau \right) - 8\alpha^2 \sum_{n>\nu}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\frac{\alpha^2}{2}\tau}}{\tilde{\omega}_n(\alpha^4 + \tilde{\omega}_n^2)} \left(\tilde{\omega}_n \cos \frac{\tilde{\omega}_n}{2} \tau + \alpha^2 \sin \frac{\tilde{\omega}_n}{2} \tau \right) - \\ - \frac{1}{\alpha^2} + 8\alpha^2 \sum_{n=1}^{\nu} \frac{1}{\alpha^4 - \omega_n^2} + 8\alpha^2 \sum_{n>\nu}^{\infty} \frac{1}{\alpha^4 + \tilde{\omega}_n^2}. \end{aligned} \tag{41}$$

Constanta α^2 are în general valori mari; atunci cînd α^2 tinde spre infinit, ecuația (3) se reduce la aceea existentă în literatura de specialitate [1]. Soluția corespunzătoare se obține din (22) ținînd seama de expresia (15) a lui ω_n. Dacă α^2 tinde spre infinit astfel ca să avem $4 \frac{n^2\pi^2}{\alpha^2} < 1$, rezultă

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM KÖZPONTI KÖNYVTÁRA 1848

$$\sqrt{1-4\frac{n^2\pi^2}{\alpha^2}}=1-2\frac{n^2\pi^2}{\alpha^2}-2\frac{n^4\pi^4}{\alpha^4}-4\frac{n^6\pi^6}{\alpha^6}-\cdots \tag{42}$$

şi prin trecerea la limită se obţine cu uşurinţă

$$\lim_{\alpha^2\to\infty}\frac{\alpha^2+\omega_n}{\omega_n}\mathrm{e}^{-\frac{\alpha^2-\omega_n}{2}\tau}=2\,\mathrm{e}^{-n^2\pi^2\tau} \tag{43}$$

şi

$$\lim_{\alpha^2\to\infty}\frac{\alpha^2-\omega_n}{\omega_n}\mathrm{e}^{-\frac{\alpha^2+\omega_n}{2}\tau}=0 \tag{44}$$

astfel că în loc de (22) rezultă formula cunoscută [1]

$$\varpi=\xi+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-n^2\pi^2\tau}}{n}\sin n\pi\xi. \tag{45}$$

De asemenea, formula (35) a debitului devine

$$Q=S\frac{k}{\mu}\frac{p_c-p_s}{l}\left(1+2\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{e}^{-n^2\pi^2\tau}\right) \tag{46}$$

fiind deci de forma care se găseşte în literatură [1].

2.2. *Problema* $p_c - Q_s$. Debitul constant Q_s are expresia

$$Q_s=S\frac{k}{\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_{x=0}, \tag{47}$$

iar dacă utilizăm coordonatele adimensionale şi funcţia ϖ introduse mai înainte, avem

$$Q_s=S\frac{k}{\mu}\frac{p_c-p_s}{l}\left(\frac{\partial\varpi}{\partial\xi}\right)_{\xi=0}, \tag{48}$$

p_s fiind presiunea constantă la $x=0$ corespunzătoare regimului staţionar, necesară pentru obţinerea debitului Q_s.

De aci rezultă

$$\left(\frac{\partial\varpi}{\partial\xi}\right)_{\xi=0}=1 \tag{49}$$

şi condiţiile la limită sînt

$$\xi=0,\ \frac{\partial\varpi}{\partial\xi}=1;\ \xi=1,\ \varpi=1, \tag{50}$$

condiţiile iniţiale rămînînd tot (9).

Dacă facem schimbarea de variabilă

$$\xi_1 = 1 - \xi \tag{51}$$

şi schimbarea de funcţie

$$\varpi_1 = \varpi - \xi = \varpi + \xi_1 - 1, \tag{52}$$

ecuaţia (8) păstrează aceeaşi formă pentru funcţia ϖ_1, condiţiile iniţiale fiind

$$\tau = 0, \quad \varpi_1 = \xi_1; \quad \tau = 0, \quad \frac{\partial \varpi_1}{\partial \tau} = 0, \tag{53}$$

iar condiţiile la limită devin

$$\xi_1 = 0, \quad \varpi_1 = 0; \quad \xi_1 = 1, \quad \frac{\partial \varpi_1}{\partial \xi_1} = 0. \tag{54}$$

Pentru rezolvarea acestei probleme cu condiţii la limită mixte se utilizează o altă formă a sinus-transformatei Fourier finite şi anume [7]

$$\bar{\varpi}_{1sr} = \int_0^1 \varpi_1 \sin \lambda_n \xi_1 \mathrm{d}\xi_1 \tag{55}$$

λ_n fiind rădăcinile ecuaţiei

$$\lambda \operatorname{ctg} \lambda = 0. \tag{56}$$

Se găseşte imediat

$$\lambda_n = (2n + 1)\frac{\pi}{2} \tag{57}$$

şi formula (55) devine

$$\bar{\varpi}_{1sr} = \int_0^1 \varpi_1 \sin (2n + 1)\frac{\pi}{2} \xi_1 \mathrm{d}\xi_1, \tag{58}$$

ecuaţia diferenţială pentru funcţia transformată $\bar{\varpi}_{1sr}$ avînd forma

$$\frac{\mathrm{d}^2\bar{\varpi}_{1sr}}{\mathrm{d}\tau^2} + \alpha^2 \frac{\mathrm{d}\bar{\varpi}_{1sr}}{\mathrm{d}\tau} + (2n+1)^2 \frac{\pi^2}{4} \alpha^2 \bar{\varpi}_{1sr} = 0. \tag{59}$$

Aplicarea transformării la condiţiile iniţiale (53) ne dă

$$\tau = 0, \; \bar{\varpi}_{1sr} = \frac{\sin (2n + 1)\frac{\pi}{2}}{(2n+1)^2\frac{\pi^2}{4}}; \quad \tau = 0, \; \frac{\mathrm{d}\bar{\varpi}_{1sr}}{\mathrm{d}\tau} = 0. \tag{60}$$

Ecuaţia (59) are soluţia

$$\bar{\varpi}_{1sr} = C_1 e^{-\frac{\alpha^2-\beta_n}{2}\tau} + C_2 e^{-\frac{\alpha^2+\beta_n}{2}\tau}, \tag{61}$$

unde

$$\beta_n = \alpha^2 \sqrt{1 - \frac{(2n+1)^2 \pi^2}{\alpha^2}}. \tag{62}$$

Cu ajutorul condiţiilor (60) găsim pentru constantele C_1 şi C_2 expresiile

$$C_1 = \frac{\alpha^2 + \beta_n}{2\beta_n} \frac{\sin(2n+1)\frac{\pi}{2}}{(2n+1)^2 \frac{\pi^2}{4}}, \quad C_2 = -\frac{\alpha^2 - \beta_n}{2\beta_n} \frac{\sin(2n+1)\frac{\pi}{2}}{(2n+1)^2 \frac{\pi^2}{4}}, \tag{63}$$

iar soluţia devine

$$\bar{\varpi}_{1sr} = \frac{1}{2\beta_n} \frac{\sin(2n+1)\frac{\pi}{2}}{(2n+1)^2 \frac{\pi^2}{4}} \left[(\alpha^2+\beta_n) e^{-\frac{\alpha^2-\beta_n}{2}\tau} - (\alpha^2-\beta_n) e^{-\frac{\alpha^2+\beta_n}{2}\tau}\right]. \tag{64}$$

Pentru a reveni la ϖ_1 se utilizează formula de inversiune [7]

$$\varpi_1 = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \bar{\varpi}_{1sr} \sin(2n+1)\frac{\pi}{2}\xi_1 \tag{65}$$

care ne dă

$$\begin{aligned} \varpi_1 = \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)\frac{\pi}{2}}{(2n+1)^2 \beta_n} \Big[(\alpha^2+\beta_n) e^{-\frac{\alpha^2-\beta_n}{2}\tau} - \\ -(\alpha^2-\beta_n) e^{-\frac{\alpha^2+\beta_n}{2}\tau}\Big] \sin(2n+1)\frac{\pi}{2}\xi_1. \end{aligned} \tag{66}$$

Se observă imediat că această soluţie satisface condiţiile la limită (54) şi a doua condiţie iniţială (53). Prima condiţie iniţială (53) este de asemenea îndeplinită, dacă ţinem seama de faptul că avem

$$\frac{8}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)\frac{\pi}{2}}{(2n+1)^2} \sin(2n+1)\frac{\pi}{2}\xi_1 = \xi_1. \tag{67}$$

Mai departe, din (51) şi (52) rezultă

$$\varpi = \xi + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2 \beta_n} \left[(\alpha^2 + \beta_n)\, e^{-\frac{\alpha^2 - \beta_n}{2}\tau} - \right. \tag{68}$$
$$\left. - (\alpha^2 - \beta_n)\, e^{-\frac{\alpha^2 + \beta_n}{2}\tau} \right] \cos (2n+1) \frac{\pi}{2} \xi$$

şi în cele din urmă, dacă observăm că putem scrie, cu ajutorul relaţiilor (48) şi (49),

$$\varpi = 1 - S \frac{k}{\mu} \frac{1}{lQ_s} (p_c - p_s), \tag{69}$$

obţinem expresia presiunii

$$p = p_c - \frac{\mu l Q_s}{Sk} \left\{ 1 - \xi - \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2\, \beta_n} \left[(\alpha^2 + \beta_n)\, e^{-\frac{\alpha^2 - \beta_n}{2}\tau} - \right. \right. \tag{70}$$
$$\left. \left. - (\alpha^2 - \beta_n)\, e^{-\frac{\alpha^2 + \beta_n}{2}\tau} \right] \cos (2n+1) \frac{\pi}{2} \xi \right\}.$$

La $\xi = 0$, rezultă

$$p = p_c - \frac{\mu l Q_s}{Sk} \left\{ 1 - \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2\, \beta_n} \left[(\alpha^2 + \beta_n)\, e^{-\frac{\alpha^2 - \beta_n}{2}\tau} - \right. \right. \tag{71}$$
$$\left. \left. - (\alpha^2 - \beta_n)\, e^{-\frac{\alpha^2 + \beta_n}{2}\tau} \right] \right\}.$$

Ca şi în problema tratată mai înainte, se poate arăta că atunci cînd α^2 tinde către infinit în aşa fel încît să avem $\frac{(2n+1)^2 \pi^2}{\alpha^2} < 1$, formulele (70) şi (71) devin acelea cunoscute din literatura de specialitate [1].

Pentru α^2 finit, atunci cînd $2n + 1 > \frac{\alpha}{\pi}$, β_n devine imaginar; dacă introducem notaţia

$$\widetilde{\beta}_n = i\beta_n = \alpha^2 \sqrt{\frac{(2n+1)^2 \pi^2}{\alpha^2} - 1} \tag{72}$$

şi procedăm ca în cadrul primei probleme tratate, soluţia (70) se scrie

$$p = p_c - \frac{\mu l Q_s}{Sk}\left\{1 - \xi - \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\nu}\frac{1}{(2n+1)^2\beta_n}\left[(\alpha^2+\beta_n)\,e^{-\frac{\alpha^2-\beta_n}{2}\tau} - \right.\right.$$
$$\left. -(\alpha^2-\beta_n)\,e^{-\frac{\alpha^2+\beta_n}{2}\tau}\right]\cos(2n+1)\frac{\pi}{2}\xi - \frac{8}{\pi^2}\sum_{n>\nu}^{\infty}\frac{e^{-\frac{\alpha^2}{2}\tau}}{(2n+1)^2}\left(\cos\frac{\widetilde{\beta}_n}{2}\tau + \right. \tag{73}$$
$$\left.\left. + \frac{\alpha^2}{\widetilde{\beta}_n}\sin\frac{\widetilde{\beta}_n}{2}\tau\right)\cos(2n+1)\frac{\pi}{2}\xi\right\},$$

ν fiind cea mai mare valoare a lui n pentru care mai avem $2n+1 < \frac{\alpha}{\pi}$; expresia corespunzătoare lui (71) se deduce imediat.

Din aceleaşi motive ca şi în problema precedentă, cazul $\beta_n = 0$, respectiv $\alpha^2 = (2n+1)^2\pi^2$, nu trebuie luat în considerare.

3. **Debit nul la distanţă finită.** În această categorie de probleme, vom admite de asemenea că mediul poros de lungime l se află în momentul iniţial ($t = 0$) în echilibru la presiunea constantă p_c. Extremitatea $x = l$ este ermetic închisă, debitul fiind acolo nul pentru orice $t \geqslant 0$, în timp ce la $x = 0$ putem avea pentru $t > 0$ fie o presiune constantă p_s, fie un debit constant Q_s. Ajungem astfel la două probleme pe care le vom nota cu $Q_{co} - p_s$, respectiv $Q_{co} - Q_s$.

3.1. *Problema* $Q_{co} - p_s$. Presiunea p_s fiind constantă putem utiliza funcţia ϖ care trebuie să fie o soluţie a ecuaţiei (8) cu condiţiile

$$\tau = 0,\ \varpi = 1; \qquad \tau = 0,\ \frac{\partial\varpi}{\partial\tau} = 0, \tag{74}$$

şi

$$\xi = 0,\ \varpi = 0; \quad \xi = 1,\ \frac{\partial\varpi}{\partial\xi} = 0, \tag{75}$$

ultima condiţie (75) exprimînd faptul că la $\xi = 1$, respectiv $x = l$, debitul este nul.

Deoarece avem tot condiţii la limită mixte, vom urma, pentru rezolvarea acestei probleme, aceeaşi cale ca şi în cazul precedent, utilizînd sinus-transformata Fourier finită sub forma

$$\bar{\varpi}_{sr} = \int_0^1 \varpi \sin(2n+1)\,\frac{\pi}{2}\,\xi\, d\xi\,. \tag{76}$$

Obţinem astfel ecuaţia

$$\frac{d^2\bar{\varpi}_{sr}}{d\tau^2} + \alpha^2\,\frac{d\bar{\varpi}_{sr}}{d\tau} + (2n+1)^2\,\frac{\pi^2}{4}\,\alpha^2\,\bar{\varpi}_{sr} = 0\,, \tag{77}$$

de aceeași formă cu (59), însă cu condițiile

$$\tau = 0, \quad \bar{\varpi}_{sr} = \frac{1}{(2n+1)\dfrac{\pi}{2}}\,; \quad \tau = 0, \quad \frac{d\bar{\varpi}_{sr}}{d\tau} = 0 \tag{78}$$

obținute de asemenea prin aplicarea formulei de transformare (76).

Soluția generală are forma

$$\bar{\varpi}_{sr} = C_1 e^{-\frac{\alpha^2-\beta_n}{2}\tau} + C_2 e^{-\frac{\alpha^2+\beta_n}{2}\tau}, \tag{79}$$

în care β_n este dat de (62). Condițiile (78) ne conduc la determinarea constantelor care au expresiile

$$C_1 = \frac{\alpha^2+\beta_n}{(2n+1)\pi\beta_n}, \quad C_2 = -\frac{\alpha^2-\beta_n}{(2n+1)\pi\beta_n}, \tag{80}$$

iar soluția (79) devine

$$\bar{\varpi}_{sr} = \frac{1}{(2n+1)\pi\beta_n}\left[(\alpha^2+\beta_n)e^{-\frac{\alpha^2-\beta_n}{2}\tau} - (\alpha^2-\beta_n)e^{-\frac{\alpha^2+\beta_n}{2}\tau}\right]. \tag{81}$$

Pentru revenirea la original, utilizăm o formulă de inversiune de aceeași formă cu (65) și obținem

$$\begin{aligned}\varpi = \frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)\beta_n}\Bigg[(\alpha^2+\beta_n)e^{-\frac{\alpha^2-\beta_n}{2}\tau} - \\ - (\alpha^2-\beta_n)e^{-\frac{\alpha^2+\beta_n}{2}\tau}\Bigg]\sin(2n+1)\frac{\pi}{2}\xi.\end{aligned} \tag{82}$$

Această soluție satisface condițiile (74) și (75); în particular, pentru îndeplinirea primei condiții (74) trebuie să ținem seama de faptul că avem

$$2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)\dfrac{\pi}{2}}\sin(2n+1)\frac{\pi}{2}\xi = 1. \tag{83}$$

Ca și în cazul precedent, putem scrie soluția (82) sub forma

$$\begin{aligned}\varpi = \frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\nu}\frac{1}{(2n+1)\beta_n}\Bigg[(\alpha^2+\beta_n)e^{-\frac{\alpha^2-\beta_n}{2}\tau} - \\ -(\alpha^2-\beta_n)e^{-\frac{\alpha^2+\beta_n}{2}\tau}\Bigg]\sin(2n+1)\frac{\pi}{2}\xi + \frac{4}{\pi}\sum_{n>\nu}^{\infty}\frac{e^{-\frac{\alpha^2}{2}\tau}}{2n+1}\left(\cos\frac{\widetilde{\beta}_n}{2}\tau + \right. \\ \left. + \frac{\alpha^2}{\widetilde{\beta}_n}\sin\frac{\widetilde{\beta}_n}{2}\tau\right)\sin(2n+1)\frac{\pi}{2}\xi,\end{aligned} \tag{84}$$

ν avînd aceeași semnificație, iar $\widetilde{\beta}_n$ fiind dat tot de (72). Debitul Q se poate calcula cu ușurință cu ajutorul formulei

$$Q = S\frac{k}{\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_{x=0} = S\frac{k}{\mu}\frac{p_c - p_s}{l}\left(\frac{\partial \varpi}{\partial \xi}\right)_{\xi=0}, \tag{85}$$

în care

$$\left(\frac{\partial \varpi}{\partial \xi}\right)_{\xi=0} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\beta_n}\left[(\alpha^2+\beta_n)\,e^{-\frac{\alpha^2-\beta_n}{2}\tau} - (\alpha^2-\beta_n)\,e^{-\frac{\alpha^2+\beta_n}{2}\tau}\right]. \tag{86}$$

Avem deci

$$\begin{aligned} Q = S\frac{k}{\mu}\frac{p_c-p_s}{l}\Bigg\{&\sum_{n=0}^{\nu}\frac{1}{\beta_n}\left[(\alpha^2+\beta_n)\,e^{-\frac{\alpha^2-\beta_n}{2}\tau} - (\alpha^2-\beta_n)\,e^{-\frac{\alpha^2+\beta_n}{2}\tau}\right] + \\ &+ 2\sum_{n>\nu}^{\infty} e^{-\frac{\alpha^2}{2}\tau}\left(\cos\frac{\widetilde{\beta}_n}{2}\tau + \frac{\alpha^2}{\widetilde{\beta}_n}\sin\frac{\widetilde{\beta}_n}{2}\tau\right)\Bigg\} \end{aligned} \tag{87}$$

sau

$$\begin{aligned} Q = 2S\frac{k}{\mu}\frac{p_c-p_s}{l}e^{-\frac{\alpha^2}{2}\tau}\Bigg[&\sum_{n=0}^{\nu}\left(\operatorname{ch}\frac{\beta_n}{2}\tau + \frac{\alpha^2}{\beta_n}\operatorname{sh}\frac{\beta_n}{2}\tau\right) + \\ &+ \sum_{n>\nu}^{\infty}\left(\cos\frac{\widetilde{\beta}_n}{2}\tau + \frac{\alpha^2}{\widetilde{\beta}_n}\sin\frac{\widetilde{\beta}_n}{2}\tau\right)\Bigg]. \end{aligned} \tag{88}$$

Sub formă adimensională, obținem

$$\begin{aligned} \bar{Q} = \frac{Q}{S\dfrac{k}{\mu}\dfrac{p_c-p_s}{l}} = 2\,e^{-\frac{\alpha^2}{2}\tau}\Bigg[&\sum_{n=0}^{\nu}\left(\operatorname{ch}\frac{\beta_n}{2}\tau + \frac{\alpha^2}{\beta_n}\operatorname{sh}\frac{\beta_n}{2}\tau\right) + \\ &+ \sum_{n>\nu}^{\infty}\left(\cos\frac{\widetilde{\beta}_n}{2}\tau + \frac{\alpha^2}{\widetilde{\beta}_n}\sin\frac{\widetilde{\beta}_n}{2}\tau\right)\Bigg] \end{aligned} \tag{89}$$

și utilizînd oricare dintre expresiile precedente ale debitului este posibil ca printr-un calcul simplu, asupra căruia nu insistăm să se găsească și producția cumulată, aplicîndu-se formula (38).

Este ușor de arătat că dacă α^2 tinde către infinit așa cum s-a indicat la problema precedentă, formulele găsite se reduc la acelea din literatura de specialitate.

3.2. *Problema* $Q_{c0} - Q_s$. Vom utiliza din nou funcția ϖ dată de (7) cu observația că p_s este presiunea constantă la $x = 0$, necesară pentru a se obține în regim staționar debitul constant Q_s, întocmai ca la problema $p_c - Q_s$. Trebuie deci să găsim o soluție a ecuației (8) care satisface condițiile inițiale (74) și condițiile la limită

$$\xi = 0,\quad \frac{\partial \varpi}{\partial \xi} = 1;\qquad \xi = 1,\quad \frac{\partial \varpi}{\partial \xi} = 0. \tag{90}$$

Dacă introducem funcția

$$\varpi_1 = 1 - \varpi \tag{91}$$

se constată imediat că aceasta este soluția unei ecuații de aceeași formă cu (8), satisfăcînd condițiile inițiale

$$\tau = 0, \quad \varpi_1 = 0 ; \quad \tau = 0, \quad \frac{\partial \varpi_1}{\partial \tau} = 0, \tag{92}$$

și condițiile la limită

$$\xi = 0, \quad \frac{\partial \varpi_1}{\partial \xi} = -1 ; \quad \xi = 1, \quad \frac{\partial \varpi_1}{\partial \xi} = 0. \tag{93}$$

De data aceasta vom recurge la aplicarea cosinus-transformatei Fourier finite, înmulțind ambii membrii ai ecuației (8), în care în loc de ϖ apare ϖ_1, cu $\cos n\pi\xi \mathrm{d}\xi$ și integrînd de la 0 la 1. Dacă luăm în considerare proprietățile acestei transformări integrale [7] și condițiile la limită ale problemei, ajungem la ecuația

$$\frac{1}{\alpha^2} \frac{\mathrm{d}^2 \bar{\varpi}_{1c}}{\mathrm{d}\tau^2} + \frac{\mathrm{d}\bar{\varpi}_{1c}}{\mathrm{d}\tau} + n^2\pi^2 \bar{\varpi}_{1c} - 1 = 0 , \tag{94}$$

în care

$$\bar{\varpi}_{1c} = \int_0^1 \varpi_1 \cos n\pi\xi \mathrm{d}\xi \tag{95}$$

este cosinus-transformata Fourier finită a funcției ϖ_1.

Transformînd în același mod condițiile inițiale (92), găsim

$$\tau = 0, \quad \bar{\varpi}_{1c} = 0 ; \quad \tau = 0 , \quad \frac{\mathrm{d}\bar{\varpi}_{1c}}{\mathrm{d}\tau} = 0. \tag{96}$$

Ecuația (94) are soluția

$$\bar{\varpi}_{1c} = C_1 \mathrm{e}^{-\frac{\alpha^2 - \omega_n}{2}\tau} + C_2 \mathrm{e}^{-\frac{\alpha^2 + \omega_n}{2}\tau} + \frac{1}{n^2\pi^2} \tag{97}$$

în care ω_n este dat de formula (15). Utilizarea condițiilor (96) ne permite să găsim pentru constantele C_1 și C_2 expresiile

$$C_1 = -\frac{\alpha^2 + \omega_n}{2n^2\pi^2\omega_n}, \quad C_2 = \frac{\alpha^2 - \omega_n}{2n^2\pi^2\omega_n}, \tag{98}$$

astfel că soluția (97) ia forma

$$\bar{\varpi}_{1c} = \frac{1}{2n^2\pi^2} \left(\frac{\alpha^2 - \omega_n}{\omega_n} \mathrm{e}^{-\frac{\alpha^2 + \omega_n}{2}\tau} - \frac{\alpha^2 + \omega_n}{\omega_n} \mathrm{e}^{-\frac{\alpha^2 - \omega_n}{2}\tau} + 2 \right). \tag{99}$$

Pentru revenirea la ϖ_1 utilizăm formula de inversiune [7]

$$\varpi_1 = \bar{\varpi}_{1c}(0) + 2\sum_{n=1}^{\infty} \bar{\varpi}_{1c}(n)\cos n\pi\xi. \tag{100}$$

Se observă imediat că pentru a calcula $\bar{\varpi}_{1c}(0)$ trebuie găsită limita expresiei

$$\frac{\alpha^2 - \omega_n}{n^2\omega_n}\, e^{-\frac{\alpha^2+\omega_n}{2}\tau} - \frac{\alpha^2 + \omega_n}{n^2\omega_n}\, e^{-\frac{\alpha^2-\omega_n}{2}\tau} + \frac{2}{n^2}$$

atunci cînd $n = 0$. Din (15) deducem însă

$$n^2 = \frac{\alpha^4 - \omega_n^2}{4\pi^2\alpha^2} \tag{101}$$

şi după înlocuire expresia precedentă devine

$$4\pi^2\alpha^2\left[\frac{1}{(\alpha^2 + \omega_n)\omega_n} e^{-\frac{\alpha^2+\omega_n}{2}\tau} - \frac{1}{(\alpha^2 - \omega_n)\omega_n} e^{-\frac{\alpha^2-\omega_n}{2}\tau} + \frac{2}{\alpha^4 - \omega_n^2}\right].$$

Limita acestei expresii trebuie calculată pentru $\omega_n = \alpha^2$ ceea ce corespunde la $n = 0$. Deoarece avem

$$\begin{aligned}\lim_{\omega_n \to \alpha^2}\left[\frac{2}{\alpha^4 - \omega_n^2} - \frac{1}{(\alpha^2 - \omega_n)\omega_n} e^{-\frac{\alpha^2-\omega_n}{2}\tau}\right] &= \lim_{\omega_n \to \alpha^2} \frac{2\omega_n - (\alpha^2 + \omega_n)\, e^{-\frac{\alpha^2-\omega_n}{2}\tau}}{(\alpha^4 - \omega_n^2)\,\omega_n} = \\ &= \frac{\tau}{2\alpha^2} - \frac{1}{2\alpha^4},\end{aligned} \tag{102}$$

rezultat care se obţine prin aplicarea regulei lui l'Hospital, găsim în cele din urmă

$$\begin{aligned}\lim_{\omega_n \to \alpha^2} 4\pi^2\alpha^2\left[\frac{1}{(\alpha^2 + \omega_n)\omega_n} e^{-\frac{\alpha^2+\omega_n}{2}\tau} - \frac{1}{(\alpha^2 - \omega_n)\omega_n} e^{-\frac{\alpha^2-\omega_n}{2}\tau} + \frac{2}{\alpha^4 - \omega_n^2}\right] &= \\ = \frac{2\pi^2}{\alpha^2}\left(e^{-\alpha^2\tau} - 1\right) + 2\pi^2\tau.\end{aligned} \tag{103}$$

Formula de inversiune (100) ne dă aşadar

$$\begin{aligned}\varpi_1 = \frac{1}{\alpha^2}\left(e^{-\alpha^2\tau} - 1\right) + \tau + \frac{1}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\Bigg(\frac{\alpha^2 - \omega_n}{\omega_n} e^{-\frac{\alpha^2+\omega_n}{2}\tau} &- \\ - \frac{\alpha^2 + \omega_n}{\omega_n} e^{-\frac{\alpha^2-\omega_n}{2}\tau} + 2\Bigg)\cos n\pi\xi,\end{aligned} \tag{104}$$

iar dacă ţinem seama de (91) găsim

$$\varpi = 1 + \frac{1}{\alpha^2}(1 - e^{-\alpha^2\tau}) - \tau + \frac{1}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\left(\frac{\alpha^2 + \omega_n}{\omega_n}e^{-\frac{\alpha^2-\omega_n}{2}\tau} - \right.$$
$$\left. - \frac{\alpha^2 - \omega_n}{\omega_n}e^{-\frac{\alpha^2+\omega_n}{2}\tau} - 2\right)\cos n\pi\xi. \tag{105}$$

Dacă observăm că avem [8]

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\pi\xi}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^2\xi}{2} + \frac{\pi^2\xi^2}{4}, \tag{106}$$

obţinem

$$\varpi = \frac{2}{3} + \frac{1}{\alpha^2}(1 - e^{-\alpha^2\tau}) - \tau + \xi - \frac{\xi^2}{2} + \frac{1}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2\omega_n}\left[(\alpha^2 + \omega_n)e^{-\frac{\alpha^2-\omega_n}{2}\tau} - \right.$$
$$\left. - (\alpha^2 - \omega_n)e^{-\frac{\alpha^2+\omega_n}{2}\tau}\right]\cos n\pi\xi. \tag{107}$$

Ca şi în problemele tratate mai înainte, rezultatul precedent se poate pune sub forma

$$\varpi = \frac{2}{3} + \frac{1}{\alpha^2}(1 - e^{-\alpha^2\tau}) - \tau + \xi - \frac{\xi^2}{2} + \frac{1}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\nu}\frac{1}{n^2\omega_n}\left[(\alpha^2 + \omega_n)e^{-\frac{\alpha^2-\omega_n}{2}\tau} - \right.$$
$$\left. - (\alpha^2 - \omega_n)e^{-\frac{\alpha^2+\omega_n}{2}\tau}\right]\cos n\pi\xi + \frac{2}{\pi^2}\sum_{n>\nu}^{\infty}\frac{1}{n^2}\left(\cos\frac{\tilde{\omega}_n}{2}\tau + \frac{\alpha^2}{\tilde{\omega}_n}\sin\frac{\tilde{\omega}_n}{2}\tau\right)\cos n\pi\xi, \tag{108}$$

$\tilde{\omega}_n$ avînd expresia (23) iar ν fiind cea mai mare valoare a lui n pentru care mai avem $\nu < \frac{\alpha}{2\pi}$.

Mai departe, din (108) şi (69) se obţine expresia presiunii

$$p = p_c - \frac{\mu l Q_s}{Sk}\left\{\frac{1}{3} - \frac{1}{\alpha^2}(1 - e^{-\alpha^2\tau}) + \tau - \xi + \frac{\xi^2}{2} - \right.$$
$$- \frac{1}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\nu}\frac{1}{n^2\omega_n}\left[(\alpha^2 + \omega_n)e^{-\frac{\alpha^2-\omega_n}{2}\tau} - (\alpha^2 - \omega_n)e^{-\frac{\alpha^2+\omega_n}{2}\tau}\right]\cos n\pi\xi - \tag{109}$$
$$\left. - \frac{2}{\pi^2}\sum_{n>\nu}^{\infty}\frac{1}{n^2}\left(\cos\frac{\tilde{\omega}_n}{2}\tau + \frac{\alpha^2}{\tilde{\omega}_n}\sin\frac{\tilde{\omega}_n}{2}\tau\right)\cos n\pi\xi\right\},$$

iar dacă α^2 tinde către infinit în condiţiile indicate mai înainte, regăsim rezultatul cunoscut în literatură [1].

4. **Concluzii.** Aşa cum am spus de la început, în această lucrare ne-am limitat la rezolvarea cîtorva probleme tipice pentru scurgerile liniare, utilizînd transformata Fourier finită care prezintă avantajul de a permite o tratare unitară şi de a simplifica în oarecare măsură calculele. Rezultatele obţinute conţin drept cazuri particulare pe acelea cunoscute, ce corespund situaţiei în care efectul inerţiei se neglijează. Calculele numerice pot arăta ce diferenţă cantitativă există între cele două tipuri de soluţii, dar acest lucru îl vom face pentru scurgerile plan-radiale al căror interes practic este mai mare.

Primită la redacţie la 27 mai 1963

SUR L'ÉCOULEMENT LINÉAIRE D'UN LIQUIDE COMPRESSIBLE DANS UN MILIEU POREUX

RÉSUMÉ

En prenant comme point de départ l'équation différentielle établie dans [2], les auteurs étudient quelques problèmes d'écoulement linéaire d'un liquide compressible dans un milieu poreux. Comme méthode d'étude, ils emploient la transformation intégrale finie de Fourier, dont les avantages sont la simplification des calculs et l'unité du traitement. Les problèmes étudiés ont trait à l'écoulement linéaire dans un gisement de pétrole. On considère le cas où la pression d'alimentation est constante, de même que celui où la frontière extérieure est imperméable. Dans les deux situations on étudie séparément l'exploitation sous pression constante et à débit constant.

On montre que les résultats contiennent, comme un cas limite, ceux qui se trouvent dans la litérature de spécialité [1].

BIBLIOGRAFIE

1. A. Houpeurt, *Éléments de mécanique des fluides dans les milieux poreux*. Société des Éditions Technip, Paris, 1957, 40–58.
2. T. Oroveanu, H. Pascal, *Asupra propagării undelor de presiune într-un lichid care curge printr-un mediu poros*. St. cerc. mec. apl., **IX**, *3* (1958).
3. T. Oroveanu, E. Silveanu, *Asupra creşterii presiunii într-o sondă după închiderea acesteia*. St. cerc. mec. apl., **X**, *4* (1959).
4. M. P. Rangao Rao, *Curgerea radială nestaţionară şi nedarcyană a unui lichid printr-un mediu poros*. St. cerc. mec. apl., **XII**, *2* (1961).
5. И. М. Рыжик, И. С. Градштейн, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*. ГИТТЛ, Москва-Ленинград, 1951, 52.
6. I. N. Sneddon, *Fourier Transforms*. McGraw-Hill Book Company, Inc., New York-Toronto-London, 1951, 71–76.
7. — *Functional Analysis*. Handbuch der Physik, Band II, Mathematische Methoden II, Springer Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1955, 308–311.
8. Г. П. Толстов, ***Ряды Фурье***. ГИТТЛ, Москва-Ленинград, 1951, 49.

STUDII

INFLUENŢA UNEI PÎNZE DE JET ASUPRA DEVIERII UNUI JET PLAN

DE

D. PANTAZOPOL şi TR. COMĂŇESCU

Studiul jeturilor bidimensionale de fluide perfecte incompresibile se face de obicei cu ajutorul funcţiilor analitice de variabilă complexă, ajungîndu-se în general la căutarea unei soluţii de tipul Helmholtz-Kirchhoff, privind scurgerile de fluide cu linii de discontinuitate, în lungul cărora presiunea este constantă [1], [2].

În cazul în care în lungul unei astfel de linii de discontinuitate presiunea variază, problema devine foarte complicată din punct de vedere matematic, datorită noilor condiţii la limită.

Un astfel de caz se întîlneşte în studiul mişcării a două jeturi bidimensionale, care se scurg unul în prezenţa celuilalt cu viteze asimptotice diferite, aşa cum se arată în figura 1.

În lungul liniei *ON*, care desparte cele două jeturi, presiunea nu mai este constantă.

Determinarea mişcării celor două jeturi nu mai poate fi făcută admiţînd existenţa unui potenţial armonic continuu în tot domeniul ocupat de fluidul în mişcare.

În lungul liniei *ON* există o discontinuitate a vitezelor ceea ce complică soluţionarea problemei cu atît mai mult cu cît nici linia *ON* nu este cunoscută a priori.

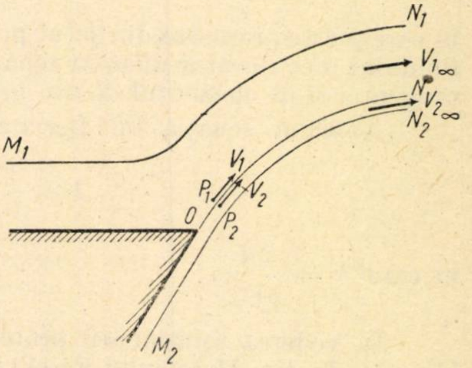


Fig. 1

Pînă în prezent în literatura de specialitate au apărut foarte puţine lucrări care tratează probleme de acest gen. În lucrările [3] şi [4] se studiază cazuri particulare, în care de-a lungul liniilor de tipul liniei *ON* din figura 1, nu există discontinuitate de viteze, şi astfel, făcîndu-se şi unele ipoteze suplimentare, problemele respective se reduc la căutarea unor soluţii de tip Helmholtz-Kirchhoff.

În lucrarea [5] se tratatează scurgerea în atmosferă a unui jet plan dintr-un ajutaj cu pereţi rectilinii, în prezenţa a două jeturi marginale foarte subţiri, admiţîndu-se o discontinuitate de viteze între jetul principal şi jeturile marginale, în cazul cînd scurgerea este puţin diferită de cea de la infinit aval şi se poate aplica liniarizarea ecuaţiilor de mişcare.

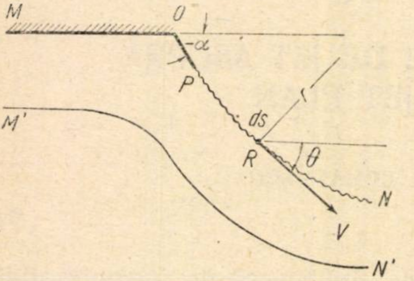


Fig. 2

În [6] se renunţă la liniarizare tratîndu-se cazul de mai sus în ipoteze mai generale.

În lucrarea de faţă, vom studia devierea unui jet plan cu ajutorul unui volet OP (fig. 2) din care ţîşneşte un jet marginal, foarte subţire în raport cu primul.

Pentru aceleaşi considerente expuse în lucrările [5] şi [6] se admite ca ipoteză principală că mărimea $\rho V q = I$, în care ρ, V, q sînt respectiv, densitatea, viteza şi debitul jetului subţire, este constantă în lungul liniei ON. Admitem de asemenea că, din punct de vedere matematic, jetul subţire poate fi considerat infinit de subţire, avînd forma unei suprafeţe a cărei urmă în planul mişcării este linia de discontinuitate PN (fig. 2).

Aplicînd teorema impulsului, se obţine într-un punct R (fig. 2)

$$\delta p = p - p_\infty = I \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s} = \frac{I}{r}, \tag{1}$$

în care p este presiunea din jetul principal, în punctul R, p_∞ este presiunea fluidului înconjurător aflat în repaus, r este raza de curbură, θ înclinaţia tangentei şi $\mathrm{d}s$ elementul de arc pe curba ON în punctul R.

Aplicînd ecuaţia lui Bernoulli, condiţia (1) devine

$$1 - \frac{V^2}{V_\infty^2} = k \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}, \tag{2}$$

în care $k = \dfrac{2I}{\rho V_\infty^2}$.

În vederea soluţionării problemei vom considera, la fel ca în problemele de tip Helmholtz-Kirchhoff, funcţia analitică

$$\omega(z) = \theta + i\tau, \tag{3}$$

unde θ este unghiul pe care viteza îl face cu axa Ox iar $\tau = \log \dfrac{V}{V_\infty}$.

Domeniul ocupat de fluidul în mișcare (fig. 2) îl vom reprezenta conform într-un plan $\zeta = \xi + i\eta$ pe domeniul indicat în figura 3, cuprins într-un sfert de cerc cu raza egală cu unitatea, cu corespondența frontierelor notate pe figura 3.

Pentru potențialul analitic $f(\zeta) = \varphi + i\psi$ condițiile la limită sînt :

$$\begin{aligned} &\text{pe } MN: \ \psi = -Q, \\ &\text{pe } NP: \ \psi = 0, \\ &\text{pe } PM: \ \psi = 0. \end{aligned} \tag{4}$$

În baza acestor condiții la limită se obține

$$f(\zeta) = \frac{2Q}{\pi} \ln \frac{2\zeta}{\zeta^2 - 1} + iQ. \tag{5}$$

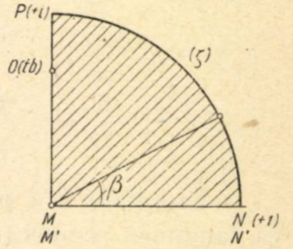


Fig. 3

Pentru a determina condițiile la limită în planul ζ pentru funcția $\omega(\zeta)$, vom considera mai întîi relația (2), pe care o vom scrie sub forma

$$1 - e^{2\tau} = k \frac{d\theta}{ds}. \tag{2'}$$

În formula cunoscută

$$dz = \frac{df}{w}, \tag{6}$$

în care $w = u - iv$ este viteza complexă, vom pune $dz = e^{i\theta}\, ds$, $w = V_\infty\, e^{-i\omega}$ și vom introduce derivata funcției $f(\zeta)$ dată de (5). Ținînd seama că pe arcul de cerc NP din figura 3 $\zeta = e^{i\beta}$, se obține din (6), după efectuarea unor calcule elementare,

$$\frac{d\beta}{ds} = -\frac{\pi V_\infty}{2Q} e^{\tau} \operatorname{tg} \beta. \tag{7}$$

Introducînd acest rezultat în (2′) și punînd $Q = V_\infty \sigma$, σ fiind secțiunea jetului principal la infinit aval, obținem

$$\operatorname{sh}\tau = \frac{\pi}{4} \frac{k}{\sigma} \operatorname{tg} \beta \frac{d\theta}{d\beta}. \tag{8}$$

Relația (8) reprezintă așadar condiția la limită pentru $\omega(\zeta)$ în planul ζ, pe arcul de cerc PN.

Pentru simplificarea tratării problemei, ne vom mărgini, la fel ca în [6], la cazul în care jetul marginal este puțin intens (adică mărimea I este mică în raport cu mărimea corespunzătoare a jetului principal sau cu alte cuvinte raportul $\frac{k}{\sigma}$ este mic). În acest caz, viteza în jetul principal pe linia de discontinuitate PN (fig. 2) nu diferă mult de V_∞ și deci τ are valori mici în lungul acestei linii. Vom putea pune în consecință

$$\operatorname{sh}\tau \simeq \tau.$$

Luînd în considerare această aproximare, condiţiile la limită pentru funcţia $\omega(\zeta)$ sînt, în planul ζ, următoarele :

$$\begin{aligned} &\text{pe } MN : \tau = 0, \\ &\text{pe } NP : \tau = \frac{\pi}{4} \frac{k}{\sigma} \operatorname{tg}\beta \frac{d\theta}{d\beta}, \\ &\text{pe } PO : \theta = -\alpha, \\ &\text{pe } OM : \theta = 0. \end{aligned} \tag{9}$$

Ordonata b a punctului O (fig. 3) poate fi aleasă arbitrar, urmînd ca lungimea segmentului OP (fig. 2) din planul fizic să fie determinată ulterior, aşa cum se obişnuieşte de altfel, pentru simplificarea calculelor, în problemele de tip Helmholtz-Kirchhoff.

Pentru determinarea funcţiei $\omega(\zeta)$ în condiţiile la limită (9) vom pune

$$\omega(\zeta) = \omega_0(\zeta) + \omega_1(\zeta) \tag{10}$$

ceea ce este întotdeauna posibil.

Funcţiei $\omega_0(\zeta) = \theta_0 + i\tau_0$ îi impunem să satisfacă următoarele condiţii la limită (fig. 3) :

$$\begin{aligned} &\text{pe } PO : \theta_0 = -\alpha, \\ &\text{pe } OM : \theta_0 = 0, \\ &\text{pe } MN : \tau_0 = 0, \\ &\text{pe } NP : \tau_0 = 0. \end{aligned} \tag{11}$$

Pe baza acestor condiţii la limită se obţine

$$\omega_0(\zeta) = \frac{i\alpha}{\pi} \ln \frac{\zeta - ib}{\zeta + ib} \cdot \frac{\zeta + i\dfrac{1}{b}}{\zeta - i\dfrac{1}{b}}. \tag{12}$$

Pe arcul de cerc PN, unde $\zeta = e^{i\beta}$, separînd în (12) partea reală de cea imaginară şi efectuînd calculele, se obţine

$$\theta_0 = -\frac{\alpha}{\pi} \operatorname{arc\,tg} \frac{-4b(1 - b^2)\cos\beta}{(1 - b^2)^2 - 4b^2\cos^2\beta} \tag{13}$$

şi

$$\frac{d\theta_0}{d\beta} = -\frac{4\alpha}{\pi} \frac{b(1 - b^2)\sin\beta}{(1 + b^2)^2 - 4b^2\sin^2\beta}. \tag{14}$$

Pentru ca $\omega(\zeta)$ să satisfacă condițiile (9), $\omega_1(\zeta)$ trebuie să satisfacă următoarele condiții la limită :

$$\begin{aligned} &\text{pe } PM:\ \theta_1 = 0, \\ &\text{pe } MN:\ \tau_1 = 0, \\ &\text{pe } NP:\ \tau_1 = \frac{\pi}{4}\frac{k}{\sigma}\operatorname{tg}\beta\left[\frac{\mathrm{d}\theta_0}{\mathrm{d}\beta} + \frac{\mathrm{d}\theta_1}{\mathrm{d}\beta}\right]. \end{aligned} \tag{15}$$

Se observă că $\omega_0(\zeta)$ reprezintă soluția problemei pentru cazul cînd lipsește jetul marginal, în timp ce $\omega_1(\zeta)$ reprezintă influența jetului marginal asupra scurgerii.

În baza primelor două condiții (15), funcția $\omega_1(\zeta)$ se poate prelungi analitic după principiul lui Schwarz în tot cercul de rază unitate și admite deci o dezvoltare Taylor de forma

$$\omega_1(\zeta) = \sum_0^\infty a_{2n+1}\,\zeta^{2n+1} \tag{16}$$

în care coeficienții a_{2n+1} sînt reali.

Se observă cu ușurință că forma (16) satisface primele două din condițiile (15).

Din (16) se deduce, pentru $\zeta = e^{i\beta}$,

$$\theta_1 = \sum_0^\infty a_{2n+1}\cos(2n+1)\beta, \tag{17}$$

$$\tau_1 = \sum_0^\infty a_{2n+1}\sin(2n+1)\beta, \tag{18}$$

$$\frac{\mathrm{d}\theta_1}{\mathrm{d}\beta} = -\sum_0^\infty (2n+1)\,a_{2n+1}\sin(2n+1)\beta. \tag{17'}$$

Înlocuind în ultima din condițiile (15) pe τ_1, $\frac{\mathrm{d}\theta_0}{\mathrm{d}\beta}$ și $\frac{\mathrm{d}\theta_1}{\mathrm{d}\beta}$ respectiv cu expresiile (18), (14) și (17'), se obține relația

$$\sum_0^\infty a_{2n+1}\sin(2n+1)\beta = \frac{\pi}{4}\frac{k}{\sigma}\operatorname{tg}\beta\left[-\frac{4\alpha}{\pi}\frac{b(1-b^2)\sin\beta}{(1+b^2)^2-4b^2\sin^2\beta} - \sum_0^\infty (2n+1)a_{2n+1}\sin(2n+1)\beta\right]. \tag{19}$$

Pentru a obține coeficienții $a_1, a_3, a_5, \ldots, a_{2n+1}, \ldots$ care intră în expresia funcției $\omega_1(\zeta)$ vom scrie relația (19) pentru n puncte de pe arcul de cerc PN, determinat prin valorile $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$. În acest mod rezultă un sistem de n ecuații cu tot atîtea necunoscute, din care se obțin valorile primilor n coeficienți a_{2n+1}, determinîndu-se astfel funcția $\omega_1(\zeta)$ cu precizia dorită.

Configurația mișcării din planul real se obține plecînd de la formula (6).

Astfel, ecuațiile parametrice ale curbei *PN* rezultă în felul următor: se calculează df din relația (5), pentru $\zeta = e^{i\beta}$, se introduce rezultatul în (6), unde în prealabil s-a pus $w = V_\infty e^{-i\omega}$, și despărțindu-se partea reală de cea imaginară se obține

$$\begin{aligned} dx &= -\frac{2\sigma}{\pi} e^{-\tau} \cos\theta \operatorname{ctg}\beta\, d\beta, \\ dy &= -\frac{2\sigma}{\pi} e^{-\tau} \sin\theta \operatorname{ctg}\beta\, d\beta, \end{aligned} \tag{20}$$

în care τ și θ sînt dați de (18), respectiv (13) și (17).

Coordonatele unui punct oarecare al curbei *PN*, corespunzător unui punct $\zeta = e^{i\beta}$ de pe arcul de cerc *PN* din planul auxiliar (ζ), se obțin prin integrare

$$\begin{aligned} x - x_p &= -\frac{2\sigma}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\beta} e^{-\tau} \cos\theta \operatorname{ctg}\beta\, d\beta, \\ y - y_p &= -\frac{2\sigma}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\beta} e^{-\tau} \sin\theta \operatorname{ctg}\beta\, d\beta. \end{aligned} \tag{21}$$

Efectuarea numerică a acestor integrale se poate face pe cale grafică, trasînd curbele care reprezintă funcțiile de sub semnul integralei și măsurînd suprafața cuprinsă între acestea, axa absciselor și perpendicularele pe axa absciselor duse din punctele $\frac{\pi}{2}$ și β.

Coordonatele x_p și y_p ale punctului *P* din planul fizic se obțin pe aceeași cale, calculînd pe df din (5), pentru $\zeta = i\eta$ și făcînd $\theta = -\alpha$. Dacă presupunem că originea axelor de coordonate din planul fizic se află în *O*, atunci rezultă

$$\begin{aligned} x_p &= \frac{2\sigma}{\pi}\cos\alpha\int_b^1 e^{-\tau}\,\frac{1-\eta^2}{1+\eta^2}\,\frac{d\eta}{\eta}, \\ y_p &= \frac{2\sigma}{\pi}\sin\alpha\int_b^1 e^{-\tau}\,\frac{1-\eta^2}{1+\eta^2}\,\frac{d\eta}{\eta}. \end{aligned} \tag{22}$$

Integralele se efectuează numeric tot pe cale grafică, calculîndu-se din formulele (12) și (16).

Lungimea segmentului *OP* va fi deci

$$OP = \sqrt{x_p^2 + y_p^2}\,\cdot \tag{23}$$

Devierea jetului la infinit aval, θ_∞, se obține din (13) și (17) făcînd $\beta = 0$ ($\zeta = 1$).

Exemplu de calcul

Pentru a ilustra metoda expusă mai sus vom reda rezultatele obținute în urma efectuării unor calcule numerice.

S-a constatat că condiția la limită (19) este aproximată destul de bine luînd în dezvoltare cel puțin 4 coeficienți. Astfel, alegînd

$$b = 0{,}6, \quad \alpha = \frac{\pi}{2}, \quad \frac{k}{\sigma} = 0{,}1 \qquad (24)$$

și scriind pe (19) pentru $\beta = 30°, 60°, 75°$ și $87°$, rezultă un sistem de 4 ecuații cu 4 necunoscute.

Prin rezolvarea sistemului de ecuații s-au obținut următoarele valori ale coeficienților :

$$\begin{aligned} a_1 &= -\,0{,}2859, \\ a_3 &= 0{,}1746, \\ a_5 &= 0{,}0674, \\ a_7 &= 0{,}1546. \end{aligned}$$

S-a calculat deviația jetului la infinit aval (θ_∞), și lungimea voletului (OP) cu aceleași date (24), obținîndu-se $\theta_\infty = 34°{,}4$ (față de $\theta_{0\infty} \simeq 28°$) și $OP = 0{,}35\ \sigma$.

Semnalăm că pentru efectuarea integralelor (22), care prezintă o singularitate în punctul O, s-a utilizat lucrarea [2] (p. 17).

Cu ajutorul relației (6) se poate trasa configurația scurgerii din planul fizic, obținîndu-se frontierele domeniului ocupat de fluidul în mișcare în mod analog cu cel în care s-au obținut de exemplu relațiile (21).

Primită la redacție la 20 aprilie 1963.

INFLUENCE OF A JET SHEET ON THE DEFLECTION OF A PLANE JET

ABSTRACT

The authors treat the deflection of a twodimensional jet flowing along a plat wall by placing in its way a flap from which a very thin jet gushes out. The flow is examined by assuming that the magnitude $I = \rho V q$ which-refers to the thin jet remains approximately constant along this jet and it has a low intensity with respect to the first one.

By setting the boundary conditions along the surfaces discontinuity and by obtaining an approximate solution, Kirchhoff's classical problem is generalized in a certain sense.

An example of calculation showing the influence of the thin jet on the deflection is given.

BIBLIOGRAFIE

1. E. Carafoli, T. Oroveanu, *Mecanica fluidelor*. Edit. Acad. R.P.R., București, 1952, **I**.
2. C. Iacob, *Introducere matematică în mecanica fluidelor*. Edit. Acad. R.P.R., București, 1952.
3. F. F. Ehrich, *Penetration and deflection of jets oblique to a general stream*. Journal of the aeronautical sciences, *2*, 99–104 (1953).
4. M. Kadosch, *Mécanisme de la déviation des jets propulsifs*. Publications scientifiques et techniques du Ministère de l'air, Bulletin des services techniques, n° 124, 1959.
5. N. N. Patraulea, *Contribution théorique à l'étude des profils à volet fluide* (Jet-Flap). IX-e Congrès International de Mécanique appliquée, Actes, Bruxelles, 1957, **I**, 457.
6. D. Pantazopol, C. S. Ioan, *O metodă pentru studiul jeturilor plane compresibile mărginite de pînze de jet subțiri*, St. cerc. mec. apl., **XII**, *4* (1963).

STUDIUL EXPERIMENTAL AL TRANZIȚIEI PROVOCATE DE INTERACȚIUNEA UNUI JET DE INTENSITATE MICĂ CU STRATUL LIMITĂ INCOMPRESIBIL AL UNEI PLĂCI PLANE

DE

ȘT. N. SĂVULESCU și V. TOMA

I. INTRODUCERE

Această lucrare reprezintă continuarea articolului anterior [1] consacrat expunerii metodei de provocare a tranziției printr-un jet de intensitate mică și descrierii varietăților de mișcare întîlnite în stratul limită incompresibil al plăcii, investigat cu ajutorul firului cald.

Caracterul primei părți era calitativ, conținînd numeroase observații și interpretări.

Scopul acestei continuări este prezentarea unor date cantitative care să confirme observațiile anterioare, relative în special la interpretarea semnalului firului cald în prezența spoturilor turbulente dezvoltate, precum și la influența geometriei orificiului jetului asupra caracteristicilor tranziției.

În lucrarea de față vor fi prezentate următoarele rezultate experimentale :

A) Distribuția vitezelor medii în secțiunile stratului limită : $x=0{,}3\text{m}$; $x = 0{,}35$ m ; $x = 0{,}4$ m ; $x = 0{,}45$ m. Profilele de viteze vor fi rezultatul „compunerii" influențelor zonei tranziționale centrale a plăcii și zonelor tranziționale ale pereților, pînă la stabilirea turbulenței dezvoltate.

B) Distribuția intensității medii pătratice a fluctuațiilor longitudinale de viteză în secțiunile stratului limită : $x = 0{,}05$ m, $x = 0{,}06$ m, $x = 0{,}07$ m, $x = 0{,}08$ m, $x = 0{,}1$ m, $x = 0{,}15$ m, $x = 0{,}2$ m, $x = 0{,}25$ m, $x = 0{,}3$ m, $x = 0{,}35$ m, $x = 0{,}4$ m, $x = 0{,}45$ m în două cazuri : strat limită perturbat (tranziție prin spoturi) și strat limită neperturbat.

Deși firul cald lucrează într-un regim neliniar în prezența spoturilor, totuși distribuția intensității fluctuațiilor de viteză confirmă faptul că într-o secţiune a stratului limită trecerea unui spot înseamnă alternarea profilului de viteze laminar şi al celui turbulent cu conservarea debitului în scurgere bidimensională.

C) Distribuţia spectrelor de frecvenţă ale fluctuaţiilor de viteză în anumite secţiuni ale stratului limită. Examinarea acestor spectre de frecvenţă confirmă existenţa frecvenţelor mari de instabilitate secundară, generate de interacţiunea strat limită laminar — jet laminar.

D) Influenţa parametrilor jetului perturbator : intensitatea şi geometria orificiului de ieşire şi a numărului Reynolds al stratului limită în secţiunea perturbată asupra caracteristicilor tranziţiei : valorile parametrilor la apariţia spotului şi la apariţia turbulenţei, extinderea zonei cu fluctuaţii de înaltă frecvenţă, forma semnalului electric la trecerea spoturilor. Curbele : numărul Reynolds al jetului la ieşire funcţie de numărul Reynolds al stratului limită în secţiunea perturbată indică posibilităţile de aplicaţie şi eficienţă ale jetului ca perturbator pentru provocarea tranziţiei.

Rezultatele obţinute sînt interpretate şi confruntate cu date recente teoretice şi experimentale [2], [3].

Aceste lucrări s-au efectuat la secţia de Aeromecanică a Institutului de mecanică aplicată „Traian Vuia”, în sufleria descrisă în articolul anterior [1], gama vitezelor utilizate fiind 4 — 20 m/s. Executarea îngrijită a sondelor şi funcţionarea în condiţii optime a instalaţiei experimentale se datoresc tehnicianului Niculescu Mihai, căruia autorii îi mulţumesc pe această cale pentru conştiinciozitatea şi acurateţa lucrărilor efectuate.

II. REZULTATE EXPERIMENTALE ŞI INTERPRETAREA LOR

Pentru a face legătura cu articolul anterior [1] socotim util să indicăm în figura 1 schema varietăţilor de mişcare întîlnite în zona de tranziţie a stratului limită al plăcii studiate.

A. PROFILE DE VITEZĂ MEDIE ÎN DREPTUL PUNCTELOR $x = 0{,}3\text{m}$; $x = 0{,}35\text{m}$; $x = 0{,}4\text{m}$; $x = 0{,}45\text{m}$

În articolul precedent [1] au fost date profilele de viteză medie în dreptul punctelor $x \leqslant 0{,}25$ m pentru 3 intensităţi de jet ($\Delta p = 0$, $\Delta p = 2{,}4$ mm col. alcool, $\Delta p = 3{,}1$ mm col. alcool). A rezultat că profilul Blasius este alterat sensibil, devenind profil inflexional, doar în zona $0{,}06\text{m} \leqslant x \leqslant 0{,}09$ m, în afara căreia efectul jetului perturbator prin spoturi dezvoltate nu se resimte. Într-adevăr, viteza medie în regim tranziţional este dată de relaţia cunoscută

$$U_{med}^2 = \gamma U_t^2 + (1 - \gamma)\, U_l^2,$$

unde

γ — factorul de intermitenţă,
U_t — viteza medie a profilului turbulent local,
U_l — viteza medie a profilului laminar local.

Cînd γ este mic (spoturi rare), $U_{med} \to U_l$.

Păstrînd ipoteza de alternare a profilului laminar şi celui turbulent cu conservarea debitului [1], s-au trasat în figura 2 profilele de viteză medie U_{med} pentru diferiţi γ.

Se observă că profilele corespunzătoare la $\gamma = 0{,}1$ şi $\gamma = 0{,}5$ se deosebesc mai clar în regiunea din apropierea peretelui şi sînt mai apropiate între ele spre exteriorul stratului limită. În acest sens trebuie interpretate profilele de viteză medie din dreptul punctelor $x = 0{,}3$ m; 0,35 m; 0,4 m; 0,45 m, obţinute în două cazuri: absenţa jetului perturbator ($\Delta p = 0$) şi jet de intensitate $\Delta p = 3{,}1$ mm col. alcool (fig. 3). Diferenţele dintre profile corespund valorilor diferite ale lui γ în secţiunea respectivă. Variaţia lui γ se explică atît prin extinderea spaţială a spotului, cît şi prin creşterea frecvenţei lor datorită influenţei pereţilor. Profilele din secţiunea $x = 0{,}3$ m corespund lui $\gamma < 0{,}5$, intersecţia lor (unul corespunzător lui $\gamma_{jet+pereţi}$ şi celălalt lui $\gamma_{pereţi}$) făcîndu-se la $y^* \sim 0{,}54\ \delta_l$ [1].

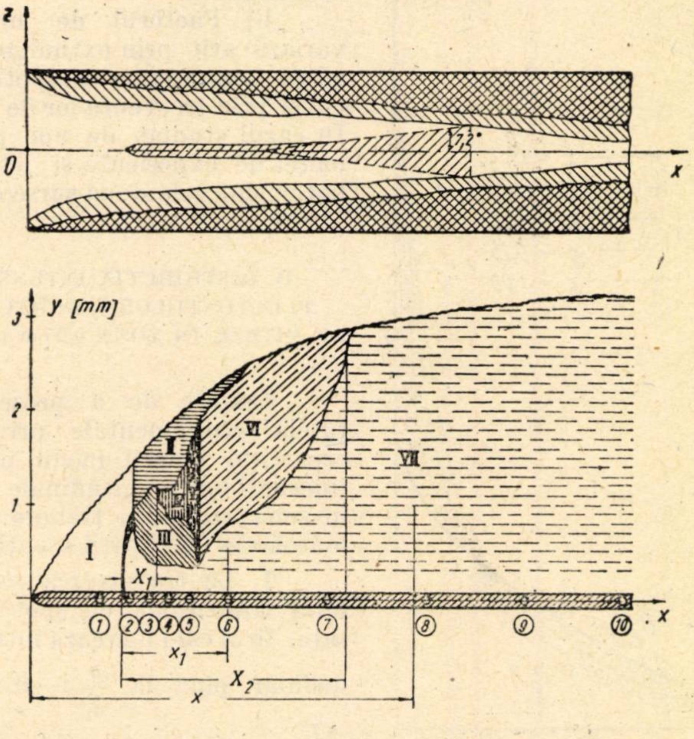


Fig. 1. — Zone de mişcări în stratul limită perturbat al plăcii plane. *a* — secţiune verticală, *b* — vedere orizontală.

Profilele din secţiunea $x = 0{,}35$ m corespund lui $\gamma > 0{,}5$ şi profilul corespunzător lui $\gamma_{pereţi}$ este cel laminar, perturbat prin spoturi datorite pereţilor, situaţie analogă celei din dreptul punctelor $x = 0{,}2$; 0,25 (spoturi datorite jetului), dar cu un γ mai mare. Profilele din dreptul punctelor $x = 0{,}4$ m şi $x = 0{,}45$ m fac trecerea spre $\gamma \to 1$, adică spre turbulenţa dezvoltată.

Reţinem din aceste prime rezultate experimentale următoarele :

a) Ipoteza conservării locale a debitului în scurgere bidimensională în stratul limită tranziţional poate să explice profilele de viteze medie obţinute pentru diferiţi factori de intermitenţă.

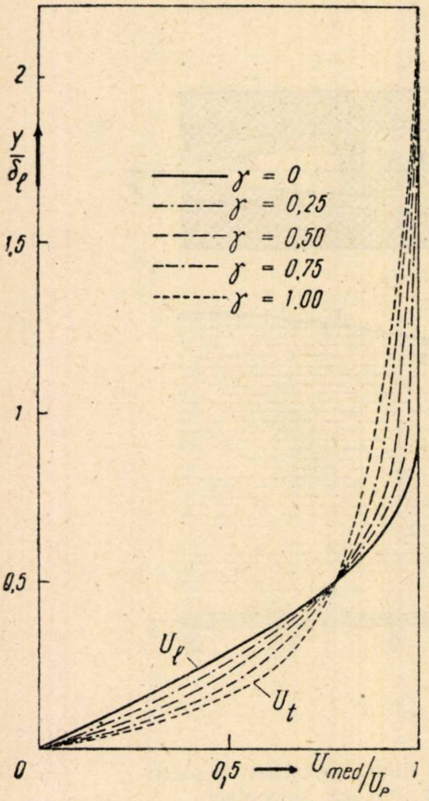


Fig. 2. — Repartiţia mărimii U_{med} pentru diferite grade de intermitenţă γ.

b) Factorul de intermitenţă variază atît prin extinderea spaţială adică suprapunerea spoturilor [4], cît şi prin frecvenţa lor de producere. În cazul studiat de noi pereţii camerei de experienţe şi jetul perturbator sînt cele două surse de spoturi.

B. DISTRIBUŢIA INTENSITĂŢII FLUCTUAŢIILOR LONGITUDINALE DE VITEZE ÎN ZONA $0{,}05 \text{ m} \leqslant x \leqslant 0{,}45$ m

Înainte de a prezenta rezultatele experimentale privitoare la repartiţia valorii medii pătratice a fluctuaţiilor longitudinale de viteză în zona studiată, trebuie făcute următoarele observaţii esenţiale :

1. La traversarea stratului limită tranziţional cu spoturi dezvoltate, firul cald lucrează într-un regim neliniar pînă la $\frac{y}{\delta_l} \simeq 0{,}3$ deoarece $\frac{\Delta U}{U} > 0{,}3$ [1]. În plus, pentru firul cald, apariţia spoturilor rare reprezintă un semnal de intrare cu o anumită frecvenţă, în timp ce fluctuaţiile existente supuse profilului de viteze medii au o gamă de frecvenţe mult superioare trecerii spoturilor. Urmează că circuitul *RC* al aparatului ar trebui să formeze două constante de timp diferite, ceea ce este imposibil. De aici rezultă marile dificultăţi la măsurarea intensităţii fluctuaţiilor de viteze în regim tranziţional cu spoturi dezvoltate şi rezultatele obţinute de noi trebuie privite ca *indicative*. Totuşi, examinarea unui număr mare de astfel de rezultate permite, statistic, deducerea unor concluzii generale.

2. Rezultatele obţinute corespund cazului în care n-avem jet perturbator ($\Delta p = 0$) şi cazului în care jetul perturbator generează spoturi ($\Delta p = 3{,}1$ mm col. alcool).

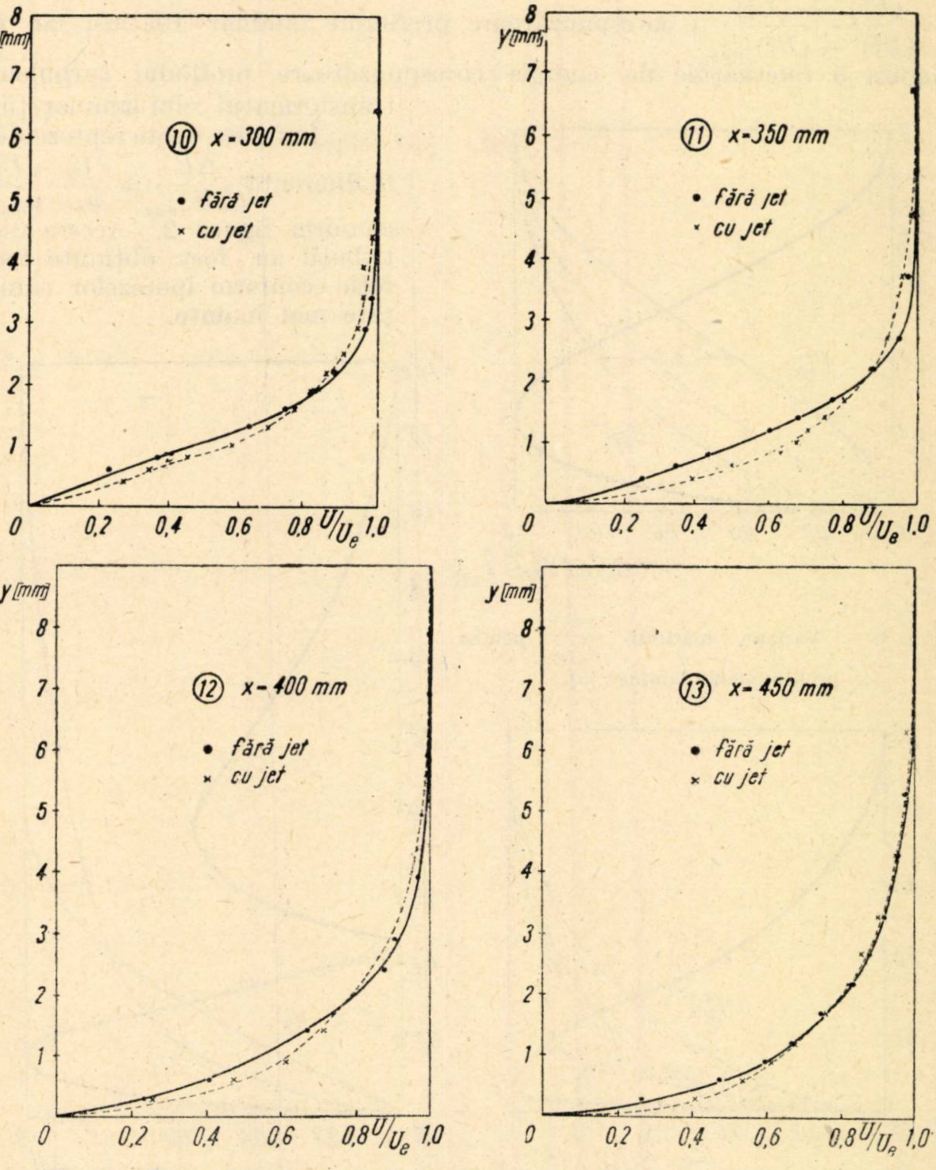


Fig. 3. — Repartiţiile vitezei medii în secţiunile $x = 0{,}3$ m; $x = 0{,}35$ m; $x = 0{,}4$ m; $x = 0{,}45$ m, cu jet şi fără jet.

Interpretarea acestor rezultate este legată pe de o parte de ipoteza alternării locale a profilelor de viteză laminar şi turbulent, cu conservarea debitului, iar pe de altă parte, de ipoteza de organizare statistică limitativă a fluctuațiilor, suprapuse unei distribuții medii de viteze [5].

În figura 4 sînt reprezentate distribuțiile fluctuațiilor de energie $\frac{(U_l^2)^\star - (U_l^2)}{|(U_l^2)^\star - (U_l^2)|_{max}}$, corespunzătoare profilului laminar Blasius, iar în figura 5 fluctuațiile de energie corespunzătoare profilului turbulent, transformatul celui laminar [5].

În figura 6 este reprezentată diferența $\frac{\Delta U}{|\Delta U|_{max}} = \frac{|U_l - U_t|}{|u_l - u_t|_{max}}$ conform figurii 2. Aceste distribuții au fost obținute teoretic conform ipotezelor enunțate mai înainte.

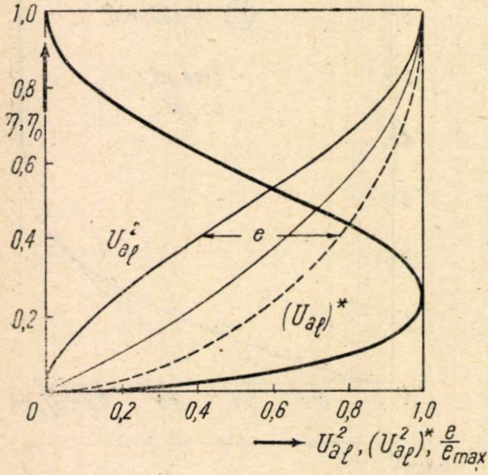


Fig. 4. — Variația mărimii $\frac{e}{e_{max}}$ pentru profilul mediu laminar [5].

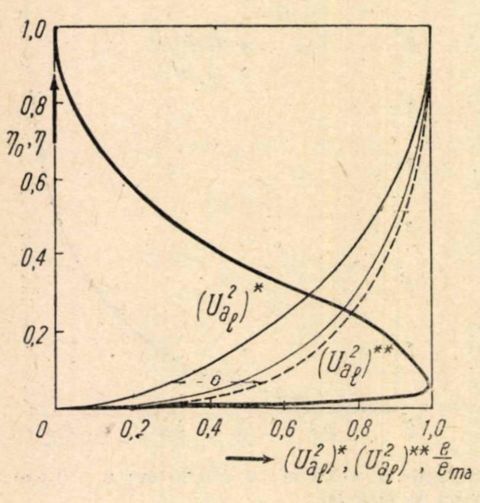


Fig. 5. — Variația mărimii $\frac{e}{e_{max}}$ pentru profilul mediu turbulent [5].

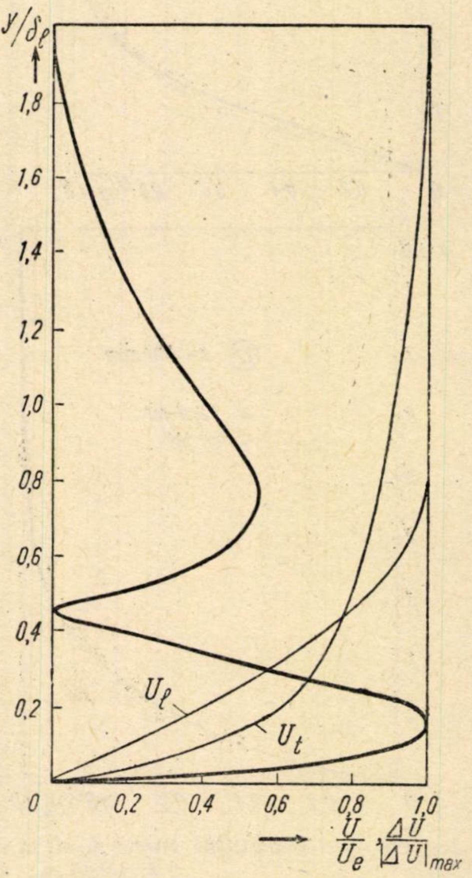


Fig. 6. — Variația mărimii $\Delta U = |U_t - U_e|$ în cazul alternării profilelor laminar și turbulent.

Rezultatele experimentale sînt prezentate în figurile 7, 8, 9.

Examinînd curbele din aceste figuri, remarcăm :

a) Repartiția valorii medii pătratice a fluctuațiilor corespunzătoare profilului laminar este în acord cu ipoteza organizării statistice a fluctuațiilor [5], atît ca variație cît și ca poziție a maximului (fig. 4 și fig. 7). Aceste fluctuații, prezente în stratul limită laminar, aparțin ramurii I a curbei de stabilitate Tollmien-Schlichting [6], avînd maximul $\frac{\sqrt{\overline{u'^2}}}{U_e} \simeq 1{,}5\%$ în dreptul secțiunii $x = 0{,}07$ m. Intensitatea fluctuațiilor scade treptat ajungînd la $\frac{\sqrt{\overline{u'^2}}}{U_e} \simeq 0{,}33\%$ în dreptul secțiunii $x = 0{,}25$ m. Distribuția din secțiunea $x = 0{,}3$ m aparține tot tipului descris mai sus, însă valoarea medie pătratică a crescut ca urmare a influenței complexe a pereților. Astfel, pot fi prezente aici fluctuații datorite zonei tranziționale ce însoțesc stratul limită turbulent al pereților (fig. 1), unele

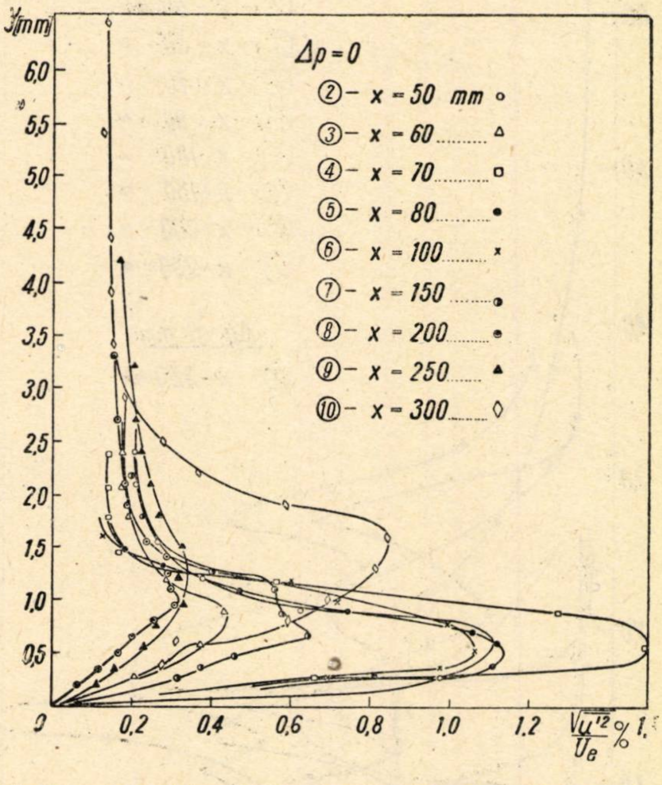


Fig. 7. — Repartiția valorii medii pătratice a fluctuațiilor longitudinale de viteză în zona $0{,}05 < x < 0{,}3$ m, fără jet perturbator.

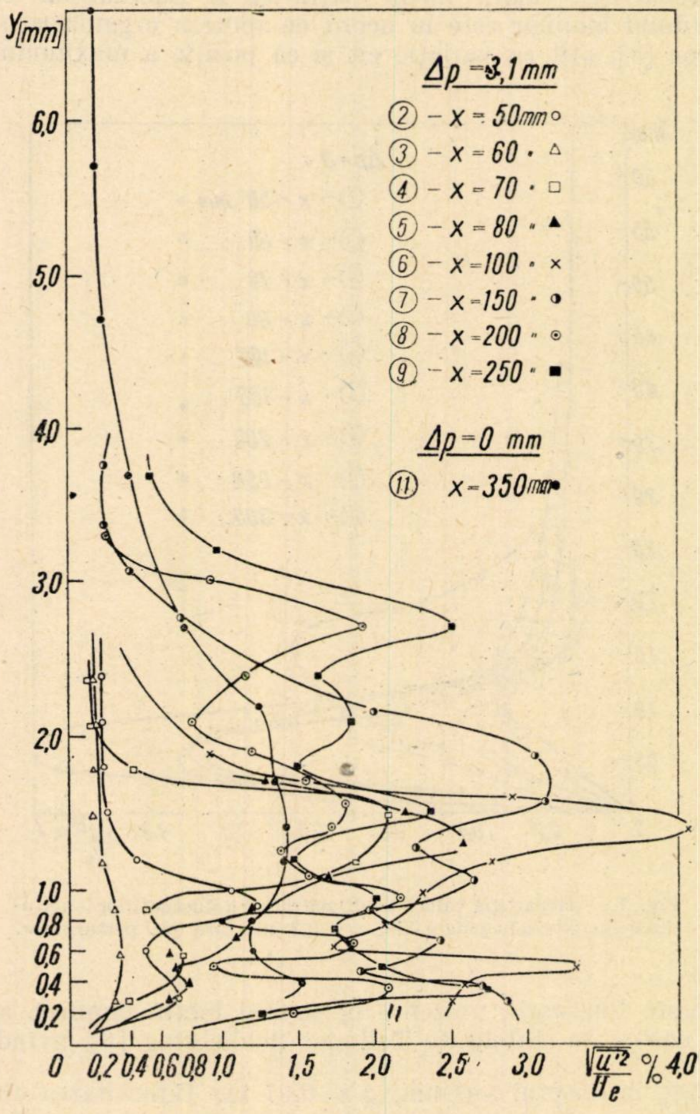


Fig. 8. — Repartiţia valorii medii pătratice a fluctuaţiilor longitudinale de viteză în zona tranziţională cu spoturi dezvoltate.

cu caracter spotic, altele continuu, însă pe ansamblu aceste fluctuaţii depind ca organizare statistică de profilul laminar al vitezelor medii.

b) Repartiţiile mărimii $\sqrt{\overline{u'^2}}$ din figura 8, aparţinînd stratului limită în regim de tranziţie, se pot compara cu variaţia mărimii $\frac{\Delta U}{|\Delta U|_{max}}$ din figura 5, în ciuda condiţiilor de lucru neliniare ale firului cald. Întradevăr, se observă valori mari ale mărimii $\sqrt{\overline{u'^2}}$ atît în apropierea pere-

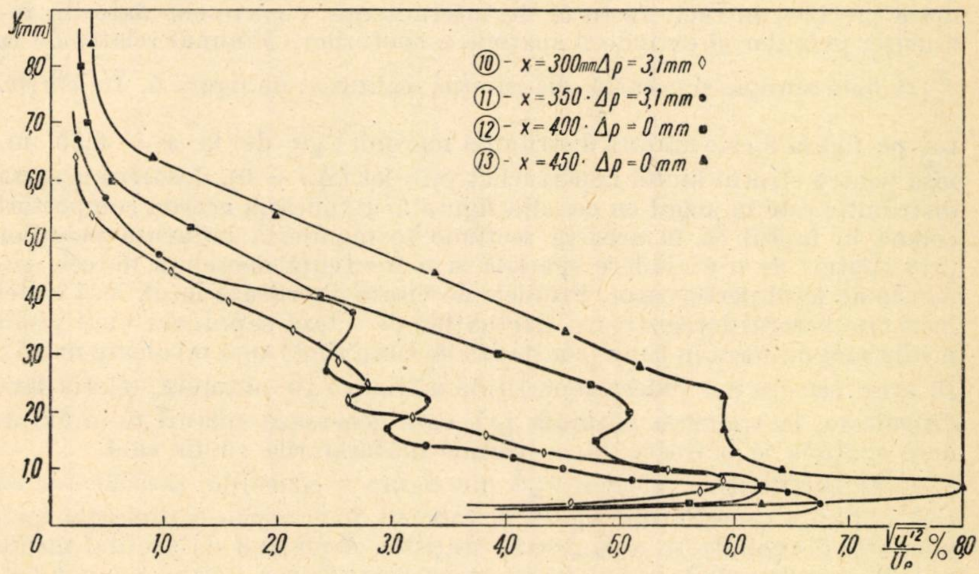


Fig. 9. — Repartiţia valorii medii pătratice a fluctuaţiilor longitudinale de viteză în zona $0,3 < x < 0,45$ m, cu jet perturbator. Secţiunile 12 şi 13 nu mai resimt influenţa jetului.

ţilor, cît şi spre exteriorul stratului limită. Un exemplu clar în această privinţă este repartiţia de la $x = 0,1$ m. Distribuţiile de la $x = 0,05$ m şi $x = 0,06$ m nu sînt deosebite de cele obţinute în cazul $\Delta p = 0$, întrucît interacţiunea jet-strat limită n-a generat încă fluctuaţiile de înaltă frecvenţă care să se suprapună peste fluctuaţiile existente în stratul neperturbat.

Secţiunea de la $x = 0,07$ m arată însă o situaţie schimbată; mărimea $\sqrt{\overline{u'^2}}$ depăşeşte cu 50% pe cea corespunzătoare scurgerii laminare neperturbate. Maximul mărimii $\sqrt{\overline{u'^2}}$, situat spre exteriorul stratului limită, atestă efectul jetului perturbator care a generat fluctuaţiile de înaltă frecvenţă (vîrtejuri mici) care s-au suprapus peste profilul de viteze laminar modificîndu-l. În lucrarea precedentă [1] am observat că în această secţiune apar primele mişcări cu caracter spotic de forma unor grupe de fluctuaţii de înaltă frecvenţă, ce capătă brusc o viteză relativă faţă de viteza medie locală. Aceste mişcări pot fi interpretate ca o instabilitate secundară suprapusă unui profil inflexional [3].

Distribuţia mărimii $\sqrt{\overline{u'^2}}$ din secţiunea $x = 0{,}08$ m este asemănătoare celei precedente ($x = 0{,}07$ m), efectul jetului accentuîndu-se.

Distribuţiile mărimii $\sqrt{\overline{u'^2}}$ de la $x = 0{,}15$ m, $x = 0{,}2$ m şi $x = 0{,}25$ m sînt imprecise din cauza regimului de lucru al traductorului cu fir cald în prezenţa spoturilor dezvoltate.

Distribuţiile mărimii $\sqrt{\overline{u'^2}}$ de la $x = 0{,}3$ m a fost determinată cu mai mare precizie, întrucît factorul de intermitenţă γ a crescut datorită influenţei pereţilor şi extinderii spaţiale a spoturilor. Minimul relativ de la $\frac{y}{\delta} \simeq 0{,}64$ apropie şi această distribuţie, calitativ, de figura 5. În sfîrşit, tot pe figura 8 este arătată distribuţia mărimii $\sqrt{\overline{u'^2}}$ de la $x = 0{,}35$ m, însă pentru stratul limită neperturbat prin jet ($\Delta p = 0$), deoarece această distribuţie este în acord cu cea din figura 5. Explicaţia acestei comportări constă în faptul că în această secţiune se manifestă influenţa pereţilor prin spoturi de o extindere spaţială şi o frecvenţă deosebită de cele generate de jetul perturbator. Profilele de viteză alternează local, însă astfel încît traductorul înregistrează fluctuaţiile de viteză suprapuse unui profil mediu mai uniform în timp (constanta de timp tinde spre o valoare unică). În acest sens se pot judeca repartiţiile mărimii $\sqrt{\overline{u'^2}}$ obţinute, relativ fără dificultate, în tranziţia naturală [4], care generează spoturi de o extindere spaţială şi o frecvenţă ce permit măsurătorile cu fir cald.

c) Distribuţiile mărimii $\sqrt{\overline{u'^2}}$ din figura 9 concordă satisfăcător cu cele obţinute teoretic din figura 6, întrucît fluctuaţiile turbulenţei incipiente şi dezvoltate se organizează statistic, depinzînd de profilul mediu [5]. Repartiţiile de la $x = 0{,}35$ m cu jet perturbator ($\Delta p = 3{,}1$ mm col. alcool) şi de la $x = 0{,}4$ m, $x = 0{,}45$ m corespund unor factori de intermitenţă mari, fiind rezultatul efectelor combinate ale jetului perturbator şi pereţilor, care au condus la o nouă organizare statistică a fluctuaţiilor de viteză, corelate cu profilul vitezelor medii prin transformata acestui profil [5]. Distribuţiile mărimii $\sqrt{\overline{u'^2}}$ din figura 9 verifică pe de o parte ipoteza organizării statistice limitative a fluctuaţiilor de energie turbulentă [5] şi, în plus, dau un criteriu pentru caracterizarea regimului de scurgere local (turbulenţă incipientă, dezvoltată, fluctuaţii continue suprapuse profilului laminar etc.).

C. REPARTIŢIA COMPONENTELOR DE FRECVENŢĂ ALE FLUCTUAŢIILOR LONGITUDINALE DE VITEZĂ ÎN SECŢIUNILE STRATULUI LIMITĂ TRANZIŢIONAL

Oscilogramele prezentate în lucrarea anterioară [1] arătau existenţa unor zone cu fluctuaţii de înaltă frecvenţă generate de interacţiunea jetului perturbator cu stratul limită laminar. În lucrarea de faţă se prezintă *spectrograme* obţinute cu un analizor de frecvenţă prevăzut cu un înregistrator automat. Se confirmă astfel cantitativ existenţa acestor frecvenţe înalte ale fluctuaţiilor ce preced formarea spoturilor turbulente.

Figurile 10, 11, 12, 13 arată spectrele de frecvenţă obţinute la traversarea stratului limită din secţiunile $x = 0{,}07$; $0{,}08$; $0{,}10$, $0{,}25$ m. Aceste diagrame, realizate direct de către inscriptor, corespund la două intensităţi de jet : $\Delta p = 0$ şi $\Delta p = 3{,}1$ mm col. alcool şi sînt astfel trasate ca să pună în evidenţă deosebirea dintre cele două regimuri de scurgere.

Din examinarea acestor spectrograme cît şi din cele pe care nu le mai reproducem aici se constată următoarele :

a) Frecvenţele fluctuaţiilor de viteză din stratul limită laminar neperturbat prin jet ($\Delta p = 0$) — dar perturbat natural prin efectele curentului exterior, al pereţilor etc. — au valori mari ale amplitudinilor în intervalul 20—800 Hz. Evoluţia fluctuaţiilor de viteze cuprinse în această gamă de frecvenţă se poate interpreta conform teoriei stabilităţii prin mici perturbaţii, ţinînd seama că numărul Reynolds al stratului limită creşte o dată cu distanţa de la bordul de atac al plăcii ($x = 0$).

Astfel, secţiunile de la $x = 0{,}05$ m şi $x = 0{,}06$ m au $\mathcal{R}e_{\delta^*} < \mathcal{R}e_{\delta^*\,critic}$ şi, prin urmare, factorul de amplificare $e^{\beta_i t}$ are $\beta_i < 0$. Amplitudinea fluctuaţiilor scade, ceea ce se remarcă pe figura 7.

Secţiunile de la $x = 0{,}06$ m şi $x = 0{,}07$ m au de asemenea $\mathcal{R}e_{\delta^*} < \mathcal{R}e_{\delta^*\,critic}$, însă $\mathcal{R}e_{\delta^*}$ este foarte aproape de $\mathcal{R}e_{\delta^*}$ critic real (aproximativ 400). Factorul de amplificare pentru frecvenţe mai mari ca 800 Hz are $\beta_i > 0$, astfel că amplitudinile acestor frecvenţe cresc, aşa cum s-a observat şi în rezultatele experimentale.

Secţiunile cuprinse în intervalul $x = 0{,}07 \div 0{,}250$ m au $\mathcal{R}e_{\delta^*} = 418$ şi respectiv $\mathcal{R}e_{\delta^*} = 790$. Domeniul de instabilitate intersectat de aceste numere $\mathcal{R}e_{\delta^*}$ arată că numai frecvenţele din banda 129 $\div$ 253 Hz se amplifică cu un factor de amplificare variind de la 1 la maxim 4,5 pentru frecvenţa 200 Hz. Calculele au fost efectuate după curba de stabilitate [6], pe care o redăm în figura 14, pentru $U_e = x^m$.

Însă calculele efectuate pentru întreaga gamă de frecvenţe din stratul limită arată o amortizare a amplitudinilor acelor fluctuaţii, ceea ce se şi observă pe figura 7.

b) Fluctuaţiile stratului limită laminar perturbat prin jet ($\Delta p = 3{,}1$ mm col. alcool) au amplitudini importante în gama de frecvenţe 20—3 000 Hz. Amplitudinile fluctuaţiilor cu frecvenţe mai mari ca 1 000 Hz ar trebui să se amortizeze rapid conform teoriei liniare a stabilităţii [6]. Faptul că ele, dimpotrivă, se amplifică şi dau naştere spoturilor turbulente nu se poate explica prin teoria liniară a stabilităţii şi nici prin extinderi ale acestei teorii, întrucît gama de frecvenţe a fluctuaţiilor nu este aceeaşi pe toată grosimea stratului limită. Pentru a pune în evidenţă acest lucru am reprezentat în figura 15 repartiţia amplitudinilor fluctuaţiilor de viteze pentru anumite benzi de frecvenţe.

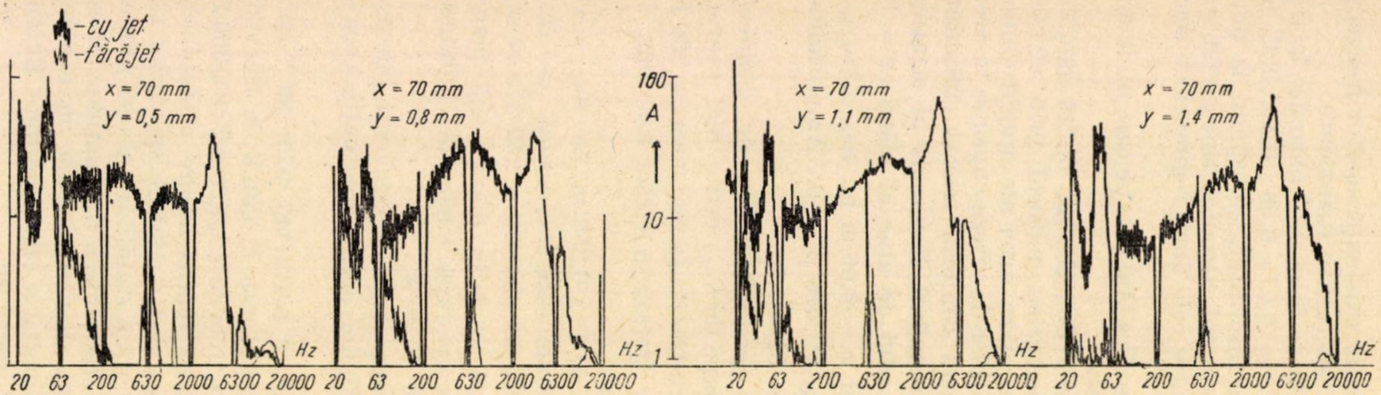


Fig. 10. — Spectre de frecvenţă ale fluctuaţiilor longitudinale de viteză în secţiunea $x = 0{,}07$ m, cu şi fără jet perturbator.

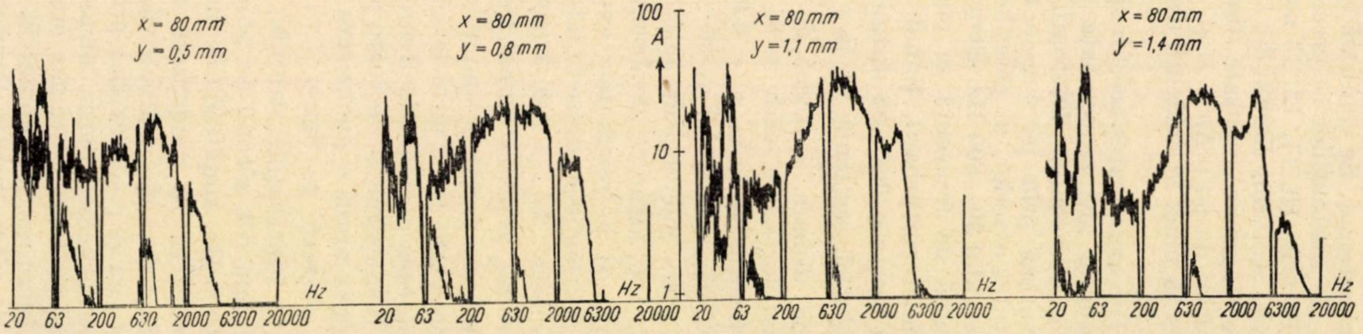


Fig. 11.— Spectre de frecvenţă ale fluctuaţiilor longitudinale de viteză în secţiunea $x = 0{,}08$ m, cu şi fără jet perturbator.

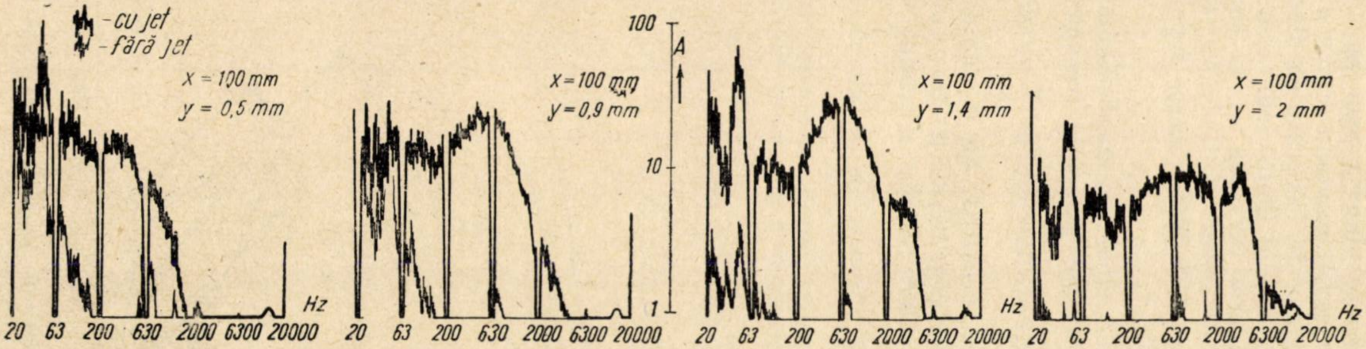


Fig. 12. — Spectre de frecvență ale fluctuațiilor longitudinale de viteză în secțiunea $x = 0{,}1$ m cu și fără jet perturbator.

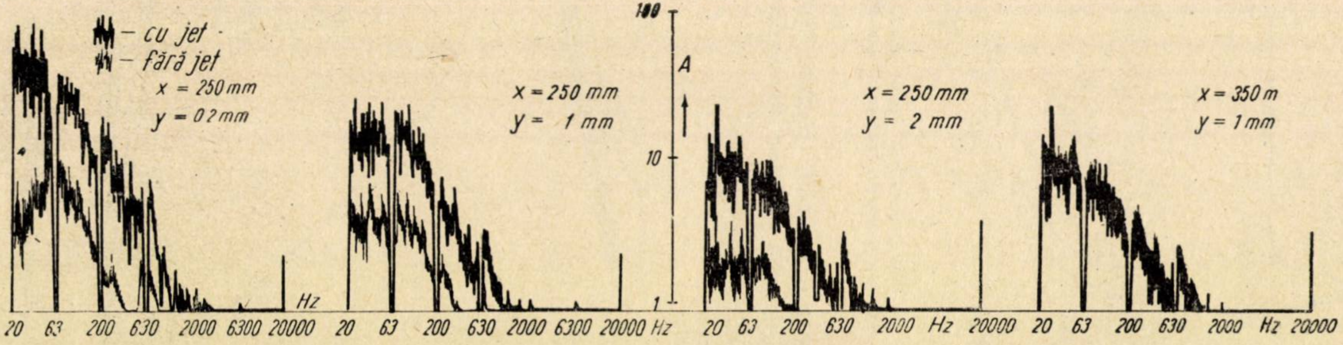


Fig. 13. — Spectre de frecvență ale fluctuațiilor longitudinale de viteză în secțiunea $x = 0{,}25$ m și în secțiunea $x = 0{,}35$ m, cu și fără jet perturbator.

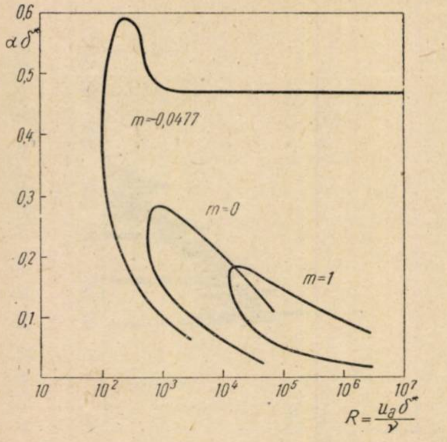


Fig. 14. — Curbe de stabilitate pentru profile de viteză în stratul limită Hartree ($U_e = x^m$).

Se poate observa uşor că, în timp ce repartiţiile amplitudinilor diferitelor game de frecvenţe ale fluctuaţiilor stratului limită laminar neperturbat prin jet ($\Delta p = 0$) sînt similare, în cazul din figura 15 există deosebiri între aceste repartiţii.

Astfel, repartiţia amplitudinilor corespunzătoare gamei de frecvenţe 63 — 200 Hz are maximul la $\frac{y}{\delta_a} \simeq 0{,}25$, în timp ce repartiţia amplitudinilor corespunzătoare bandei de frecvenţă 2 000 ÷ 6 300 Hz are maximul la $\frac{y}{\delta_e} \simeq 0{,}55$. Fluctuaţiile de viteză cu frecvenţe diferite în regiuni diferite ale stratului limită caracterizează tranziţia prin interacţiunea dintre jetul perturbator şi stratul limită.

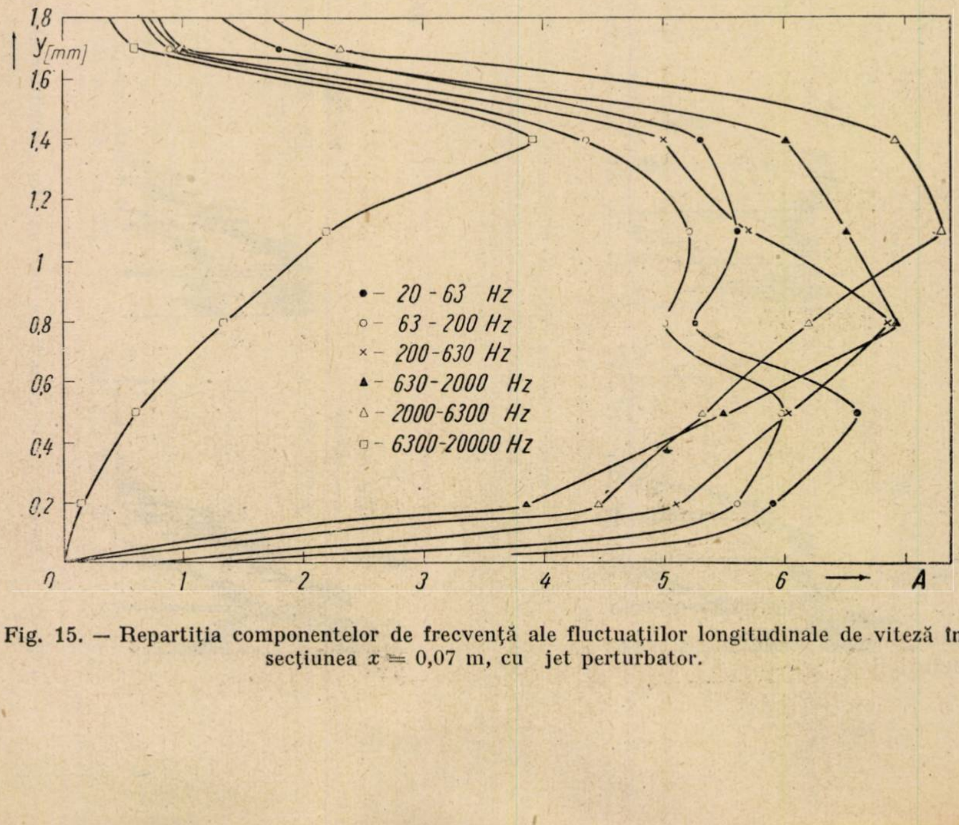
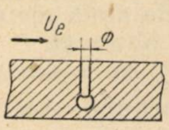
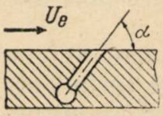
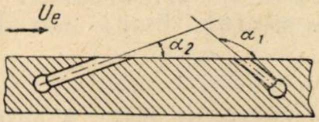
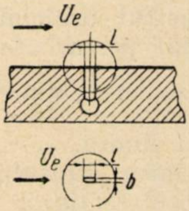


Fig. 15. — Repartiţia componentelor de frecvenţă ale fluctuaţiilor longitudinale de viteză în secţiunea $x = 0{,}07$ m, cu jet perturbator.

D. INFLUENŢA GEOMETRIEI ORIFICIULUI DE IEŞIRE ŞI A NUMĂRULUI REYNOLDS AL JETULUI PERTURBATOR ŞI A NUMĂRULUI REYNOLDS AL STRATULUI LIMITĂ ASUPRA TRANZIŢIEI

Urmărindu-se determinarea caracteristicilor de structură ale stratului limită tranziţional în condiţii de scurgere deosebite, au fost variaţi următorii parametri: geometria orificiului de ieşire a jetului perturbator, debitul jetului şi grosimea stratului limită prin viteza curentului exterior. În tabela 1 sînt arătate formele de orificii studiate. S-a folosit următoarea metodică de lucru:

Tabela 1

Schemele orificiului	Caracteristici
1 	a) orificiu cilindric perpendicular pe U_e: $\alpha = 90°$. Ø [mm] = 0,4; 0,5; 0,8; 1,3; 2.
2 	b) orificiu cilindric înclinat faţă de U_e: $\alpha = 36°; 55°; 125°; 144°$. Ø = 0,4 mm.
3 	c) două orificii cilindrice înclinate faţă de U_e, poziţiile I şi II: I $\alpha_1 = 125°$, $\alpha_2 = 36°$, Ø = 0,4 mm; II $\alpha_1 = 55°$, $\alpha_2 = 144°$, Ø = 0,4 mm.
4 	d) orificiu plat (paralelipipedic) aşezat cu latura mică în curentul U_e: $b = 0{,}15$ mm, $l = 2$ mm, $\beta = 0°$ (înclinarea axului longitudinal al fantei faţă de curentul U_e).

— s-a aşezat firul cald într-o astfel de poziţie în stratul limită ($x = 0{,}25$ m, $y \simeq 0{,}3\ \delta$), ca sensibilitatea lui să fie cît mai mare pentru detectarea evoluţiei perturbaţiei şi a comportării sale locale;

— s-au notat cele două intensităţi de jet, $h_{j_{\text{spot}}}$ şi $h_{j_{\text{turb}}}$ la care semnalul firului cald arată regim de spoturi rare dezvoltate şi respectiv de turbulenţă incipientă pentru diferitele cazuri studiate;

— s-a explorat de fiecare dată stratul limită tranziţional de la $x = 0$ la $x = 0{,}25$ m, pentru observarea particularităţilor de structură ale scurgerii.

Remarcăm că această investigaţie a depins de un criteriu subiectiv : aprecierea semnalului electric, aşa cum apărea în oscilogramă. Există însă următoarele considerente care au permis evaluarea cantitativă a „pragurilor" $h_{j_{\rm spot}}$ şi $h_{j_{\rm turb}}$:

— Claritatea oscilogramelor pentru cele două regimuri (spoturi şi turbulente), în condiţiile aparaturii şi instalaţiei experimentale este suficientă pentru fixarea acestor regimuri. În plus, s-a urmărit indicaţia e_f a voltmetrului, care reprezintă căderea de tensiune pe firul cald, adică viteza medie locală. Pragul $h_{j_{\rm spot}}$ era determinat de valoarea constantă a mărimii e_f egală cu cea din cazul regimului neperturbat, însă cu spoturi rare, vizibile pe oscilograme. Pragul $h_{j_{\rm turb}}$ era determinat de prima valoare constantă a mărimii e_f pentru care oscilogramele sînt caracteristice regimului turbulent. Menţionăm că saltul acesta de viteză locală este extrem de caracteristic pentru $y/\delta_e < 0{,}3$ şi că între cele două regimuri acul indicator al voltmetrului are fluctuaţii uşor de observat.

— Regăsirea aceloraşi valori $h_{j_{\rm spot}}$ şi $h_{j_{\rm turb}}$ la reproducerea fenomenului şi repetarea de un număr de ori a fenomenului. Aceste experienţe au dat siguranţa că parametrii jetului perturbator şi ai scurgerii reprezintă o configuraţie bine determinată pentru anumite valori ale acestor parametri.

Dificultăţile acestei metodici apar la numere Reynolds subcritice ale scurgerii în stratul limită, deoarece spotul şi turbulenţa sînt greu de definit în cazul unor fluctuaţii de viteză de mare amplitudine şi de frecvenţă mică. Asupra acestei chestiuni se va reveni mai departe :

În privinţa parametrilor jetului şi ai stratului limită s-au ales două numere Reynolds :

al jetului, $\mathcal{R}e_j = \dfrac{u_j d_j}{\nu}$, unde u_j = viteza de ieşire a jetului perturbator în stratul limită,
d_j = diametrul orificiului de ieşire a jetului perturbator ;

al stratului limită $\mathcal{R}e_\delta = \dfrac{U_e \delta_j}{\nu}$, unde U_e = viteza curentului exterior stratului limită,
δ_j — grosimea stratului limită în dreptul secţiunii unde se introduce jetul.

Gama de variaţie a vitezei U_e a fost $4 \div 20$ m/s, iar orificiul de ieşire al jetului a fost modificat conform tabelei 1. Rezultatele experimentale obţinute permit următoarele observaţii :

a) Cu mici deosebiri, structura zonei tranziţionale a stratului limită respectă schema din figura 1 [1]. Caracteristica principală a interacţiunii stratului limită laminar cu jetul laminar este zona în care apar fluctuaţii de viteză de mare frecvenţă. S-a notat cu X_1, distanţa de la poziţia orificiului de ieşire la secţiunea stratului limită unde încep să se observe frecvenţele mari ale fluctuaţiilor, iar cu X_2 distanţa la secţiune în care apar spoturile dezvoltate. Zonele de tranziţie observate de noi pentru acest mod particular de perturbare prin jet sînt următoarele :

Între $x_1 = 0$ şi $x_1 = X_1$ — instabilitate liniară pentru profilul inflexional ;

Între $x_1 = X_1$ şi $x_1 = X_2$ — instabilitate caracterizată prin efecte neliniare, tridimensionale. Fluctuaţii sinusoidale modulate cu frecvenţe înalte, factori de amplificare mari şi mişcări locale cu caracter spotic ;

pentru $x_1 > X_2$ — mişcări cu spoturi dezvoltate [1].

În figura 16 sînt trasate curbele $\dfrac{X_1}{\delta_j} = f(\mathcal{R}_{e_\delta})$, $\dfrac{X_2}{\delta_j} = f(\mathcal{R}_{e_\delta})$.

Cu toată subiectivitatea aprecierii mărimilor X_1, X_2 tendinţa generală apare limpede : la $\mathcal{R}_{e_\delta}$ mari, zona de frecvenţe înalte se micşorează, în timp ce pentru $\mathcal{R}_{e_\delta}$ mici această zonă se lărgeşte considerabil. Interpretăm acest fapt ca o consecinţă a factorului de amplificare $e^{\beta_i t}$, care are valori mai mici pentru $\mathcal{R}_{e_\delta}$ mici (deci fluctuaţiile au o „viaţă” mai lungă). Pentru $\mathcal{P}_{e_\delta}$ mari, $e^{\beta_i t}$ este mare şi fluctuaţiile au o scurtă zonă

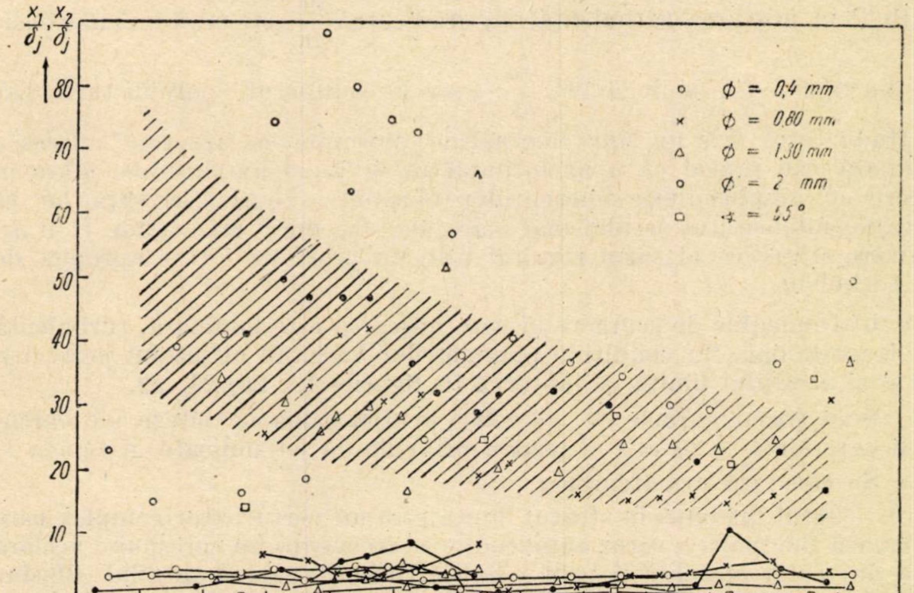


Fig. 16. — Extinderea zonei neliniare de tranziţie în funcţie de numărul Reynolds.

de evoluţie pînă la alterarea curgerii. Această constatare este adevărată şi pentru profile deosebite de profilul Blasius, de exemplu profilul inflexional [6].

În altă ordine de idei, mai trebuie observat că zona frecvenţelor mari are o extindere tridimensională de ordinul de mărime al diametrului jetului perturbator şi că delimitarea ei spaţială faţă de mişcarea laminară înconjurătoare este extrem de netă.

De asemenea, chestiunea formei semnalului în regim tranziţional cu spoturi la diferite numere Reynolds merită o atenţie deosebită. La numere $\mathcal{R}e_{\delta} > 1\,000$ forma semnalului este caracteristică trecerii unui volum de fluid bine delimitat, în mişcare turbulentă, sau alternării locale a profilelor de viteză laminar şi turbulent. Am numit aceste forme de semnal „spoturi explozive", ilustrate în figura 17.

Pentru $\mathcal{R}e_{\delta} < 1\,000$ forma semnalului este diferită, după cum se vede în figura 18.

Am numit aceste forme „spoturi lente" şi ele se pot interpreta ca o modificare locală a profilului de viteze în condiţii de scurgere apropiate de cele critice. Se observă că ele nu mai reprezintă trecerea unui volum de fluid în mişcarea turbulentă, iar gradientul $\frac{\partial u}{\partial t}$ este mult mai mic decît cel din figura 17, unde avem $\frac{\partial u}{\partial t} \rightarrow \infty$ la contactul spotului turbulent cu traductorul. Ele nu sînt fluctuaţiile obişnuite ce însoţesc mişcarea laminară prin faptul că apar întîmplător şi au o amplitudine mare în raport cu amplitudinea fluctuaţiilor obişnuite. Dacă frecvenţa lor se măreşte (intensitatea jetului mai mare, dar $\mathcal{R}e_{\delta}$ mic) ele conduc la o organizare statistică al cărui rezultat este un profil de viteze apropiat de cel turbulent.

b) Domeniile de scurgere în care mişcarea este laminară, turbulentă sau tranziţională, în condiţiile parametrilor variabili ai jetului perturbator şi ai stratului limită, se observă în figurile 19, 20, 21, 22.

S-au trasat curbele $\mathcal{R}e_{j} = f(\mathcal{R}e_{\delta})$ pentru gama de viteze ale curentului exterior $4 \div 20$ m/s şi pentru orificiile de jet indicate în tabela 1.

Se constată următoarele :

— Jetul introdus în stratul limită este un perturbator complex care generează fluctuaţii a căror amplitudine şi frecvenţă nu corespund acelora date de teoria stabilităţii prin mici perturbaţii pentru profilul Blasius [6], nici pentru porţiunea $0 \leqslant x_1 < X_1$. Pe fiecare diagramă 19—22 se observă că $\mathcal{R}e_{\delta} < \mathcal{R}e_{\delta}$ critic teoretic iar factorul de amplificare al fluctuaţiilor prezente în stratul limită ar trebui teoretic să fie mai mic decît unitatea (factor de amortizare).

Cea mai plauzibilă explicaţie a acestei neconcordanţe ar fi următoarea : domeniul $0 \leqslant x_1 < X_1$ este controlat de o instabilitate liniară corespunzătoare unui profil inflexional pentru care curba de stabilitate are $\mathcal{R}e_{\delta}$ critic mai mic şi factori de amplificare mari, conform figurii 14.

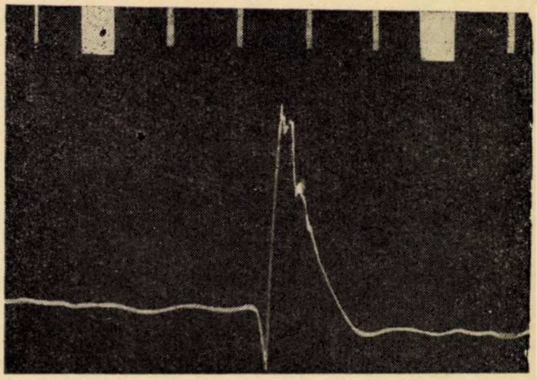
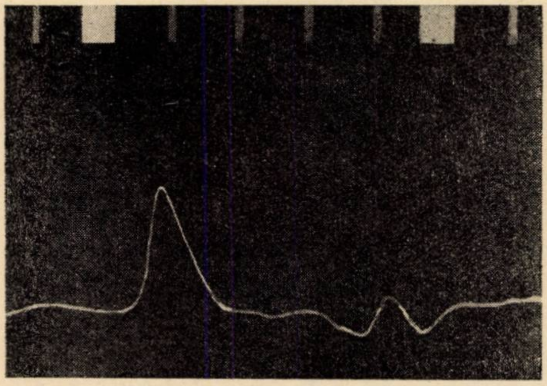


Fig. 17. — Înregistrare la oscilograf reprezentînd „spot exploziv" ($\mathcal{R}e_{\delta} > 1\,000$).



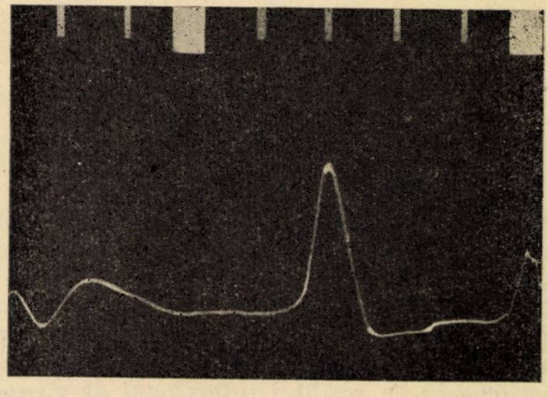


Fig. 18. — Înregistrare la oscilograf reprezentînd „spot lent" ($\mathcal{R}e_{\delta} < 1\,000$).

— Valoarea $\mathcal{R}e_j$ la care apar spoturile şi valoarea $\mathcal{R}e_j$ la care apare turbulenţa sînt independente de $\mathcal{R}e_\delta$ în domeniul $900 < \mathcal{R}e_\delta < 2\,000$. În jurul valorii $\mathcal{R}e_\delta \approx 900$, pentru a produce spoturi turbulente sau turbulenţă trebuie valori mari $\mathcal{R}e_j$ şi jetul devine un obstacol ce străbate stratul limită, interacţionînd cu scurgerea atît în interiorul stratului cît şi în exteriorul lui. Valoarea constantă $\mathcal{R}e_j$ în domeniul $900 < \mathcal{R}e_\delta < 2\,000$ arată că apariţia fluctuaţiilor de o anumită frecvenţă este caracteristica dominantă a acestui mod de tranziţie artificială, deoarece este clar că generarea unor astfel de fluctuaţii este substanţial condiţionată de numărul Reynolds al jetului ($\mathcal{R}e_j$). Pe de altă parte, aceste fluctuaţii interacţionează cu profilul inflexional al vitezelor medii, ducînd la stări cri-

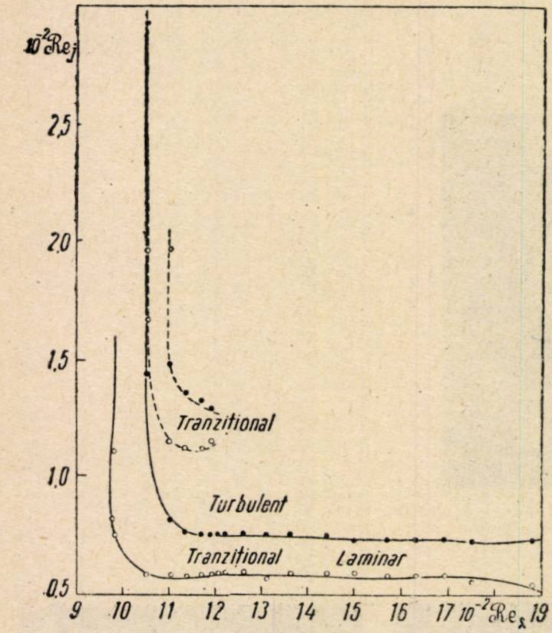


Fig. 19. — Domenii de mişcări delimitate de interacţiunea jetului perturbator ($\mathcal{R}e_j$) cu stratul limită ($\mathcal{R}e_\delta$). Diametrul orificiului $d = 0{,}5$ mm.

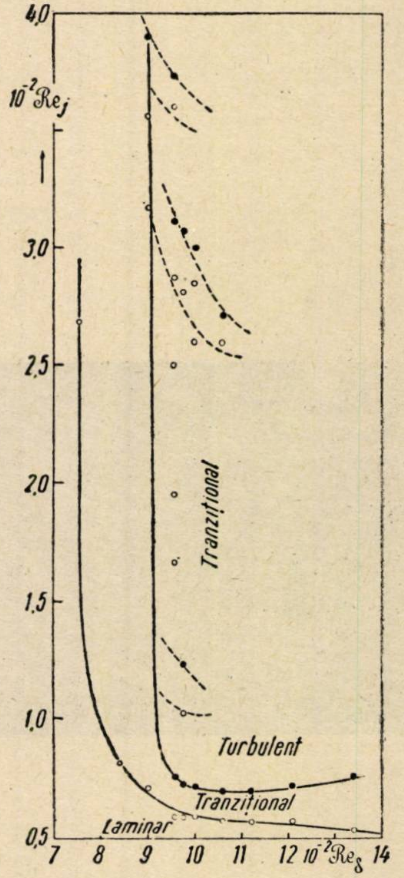


Fig. 20. — Domenii de mişcări delimitate de interacţiunea jetului perturbator ($\mathcal{R}e_j$) cu stratul limită ($\mathcal{R}e_\delta$). Diametrul orificiului $d = 0{,}8$ mm.

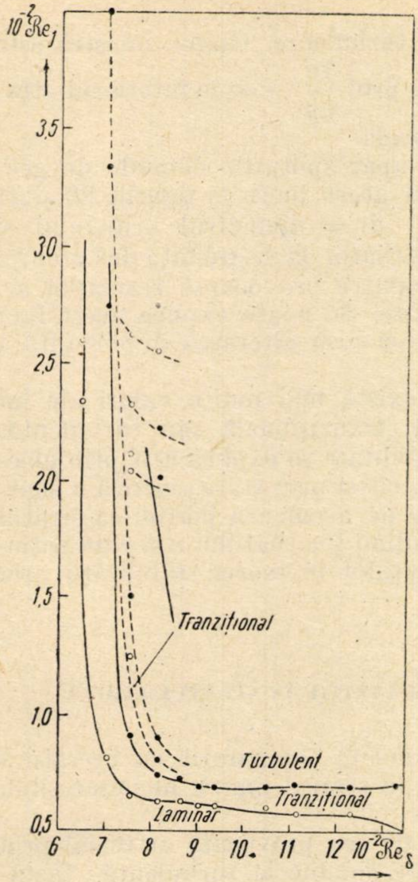


Fig. 21. — Domenii de mişcări delimitate de interacţiunea jetului perturbator ($\mathfrak{Re}_j$) cu stratul limită ($\mathfrak{Re}_\delta$). Diametrul orificiului $d = 1,3$ mm.

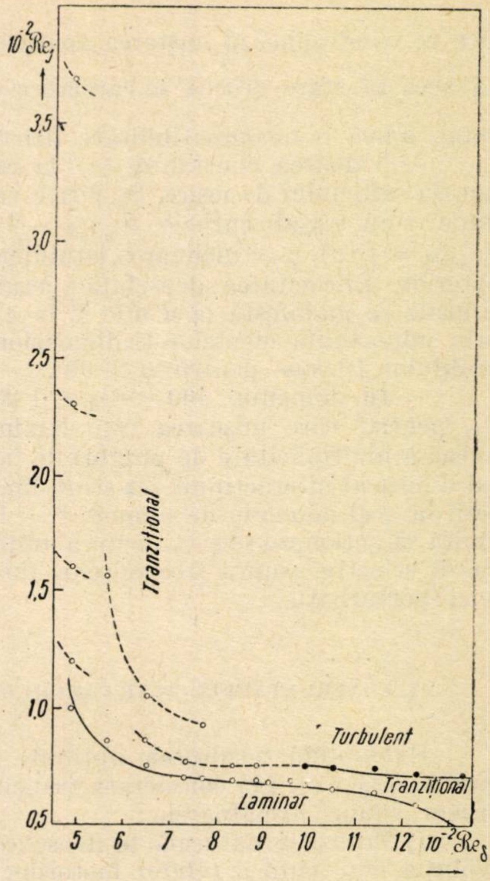


Fig. 22. — Domenii de mişcări delimitate de interacţiunea jetului perturbator ($\mathfrak{Re}_j$) cu stratul limită ($\mathfrak{Re}_\delta$). Diametrul orificiului $d = 2$ mm.

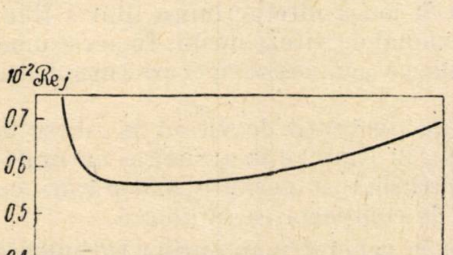


Fig. 23. — Influenţa diametrului de ieşire a jetului asupra valorii numărului $\mathfrak{Re}_j$ pentru provocarea tranziţiei.

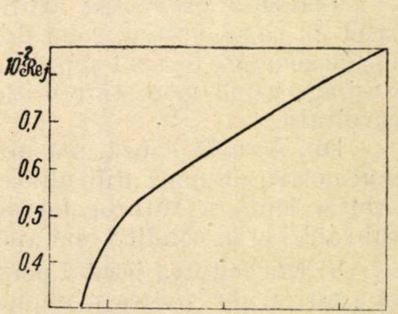


Fig. 24. — Influenţa unghiului de ieşire a jetului asupra valorii numărului $\mathfrak{Re}_j$ pentru provocarea tranziţiei.

tice ce condiționează nașterea spoturilor turbulente. Opinia noastră este că această stare critică se caracterizează prin $\frac{\vartheta u}{\vartheta y} \rightarrow \infty$ în interiorul stratului, adică o incompatibilitate fizică locală.

— Valoarea constantă $\mathcal{R}_{e_j}$ la care apar spoturile depinde de geometria orificiului de ieșire. Se poate vedea acest lucru în figurile 23 și 24 unde s-au trasat curbele $\mathcal{R}_{e_j \, \mathrm{spot}} = f(d)$, d = diametrul orificiului și $\mathcal{R}_{e_j \, \mathrm{spot}} = f_1(\varphi)$, φ = înclinarea jetului perturbator la ieșire față de curentul exterior. Eficacitatea deosebită a jetului pentru provocarea tranziției artificiale se manifestă la d mic și la φ mare. Se poate explica acest fapt prin importanța efectelor tridimensionale și prin alterarea importantă a profilului Blasius pentru $\varphi > 90°$.

— În domeniul $900 < \mathcal{R}_{e_\delta} < 1\,200$ există mai multe valori ale lui $\mathcal{R}_{e_j}$ pentru care mișcarea este laminară, tranzițională sau turbulentă. Această multiplicitate de praguri de instabilitate se explică atît prin efectul diferit al interacțiunii jet-strat limită, cît și prin starea critică a scurgerii în acel domeniu de numere $\mathcal{R}_{e_\delta}$. Este de asemenea posibil ca stratul limită să acționeze selectiv asupra amplitudinii fluctuațiilor așa cum acționează selectiv asupra frecvențelor fluctuațiilor în teoria stabilității prin mici perturbații.

III. CONFRUNTĂRI CU ALTE CAZURI DE TRANZIȚIE ÎN STRATUL LIMITĂ

Examinînd rezultatele obținute de noi în comparație cu literatura recentă [2], [3], [4] consacrată tranziției în stratul limită incompresibil, putem spune următoarele :

a) Tranziția naturală se deosebește de cea provocată artificial prin evoluția mai lentă a *tuturor* factorilor care conduc la turbulență : instabilitate liniară, efecte de neliniaritate, tridimensionale, de interacțiune a fluctuațiilor cu mișcarea medie, frecvența și locul de apariție a spoturilor turbulente.

Tranziția provocată artificial accentuează *unul* din acești factori. Astfel, în cazul nostru, rolul dominant îl joacă interacțiunea dintre fluctuațiile generate de spot și profilul inflexional de viteze medii. În acest mod se ajunge rapid la o stare critică locală ce generează spoturi turbulente dezvoltate.

Din această cauză, măsurătorile de fluctuații de viteză se izbesc în cazul nostru de mari dificultăți (fig. 8), în timp ce în tranziția naturală, evoluția lentă a tuturor factorilor perturbatori permite măsurători cu firul cald [4] în condiții mai apropiate de comportarea sa liniară.

b) Eficacitatea jetului perturbator în generarea spoturilor turbulente sau a mișcărilor spotice se explică prin teoria calitativă expusă în lucrarea [3]. Într-adevăr, profilul de viteze în avalul perturbatorului este inflexional, fluctuațiile ce se nasc au frecvențe de $5 \div 8$ ori mai mari decît cele corespunzătoare profilului Blasius iar salturile locale de energie cinetică sînt foarte mari (teoretic 10^2).

Dar, ceea ce nu explică această teorie este faptul că la o intensitate de jet mai mică profilul este de asemenea inflexional, există și frecvențe mari și totuși nu se nasc spoturi. În acest sens am investigat secțiunea de la $x = 0{,}07$ m pentru 4 intensități de jet și rezultatele se găsesc în figura 25 și tabela 2.

De asemenea, iată încă un fapt pe care nu-l explică teoria [3] : s-au obținut spoturi turbulente printr-o perturbație din exterior, fără ca să se observe fluctuații de frecvență mari în vreo zonă a stratului limită. Am ajuns astfel la concluzia că spotul turbulent este generat de o stare critică locală a fluidului, indiferent de modul cum este perturbat. Teoria [3] arată posibilitatea unei astfel de stări în cazul profilului inflexional și al frecvențelor mari, de instabilitate secundară. Dar această posibilitate nu este unică și în plus există valori critice ale acestor frecvențe corelate cu forma profilului de viteze medii, pe care teoria calitativă [3] nu le furnizează încă.

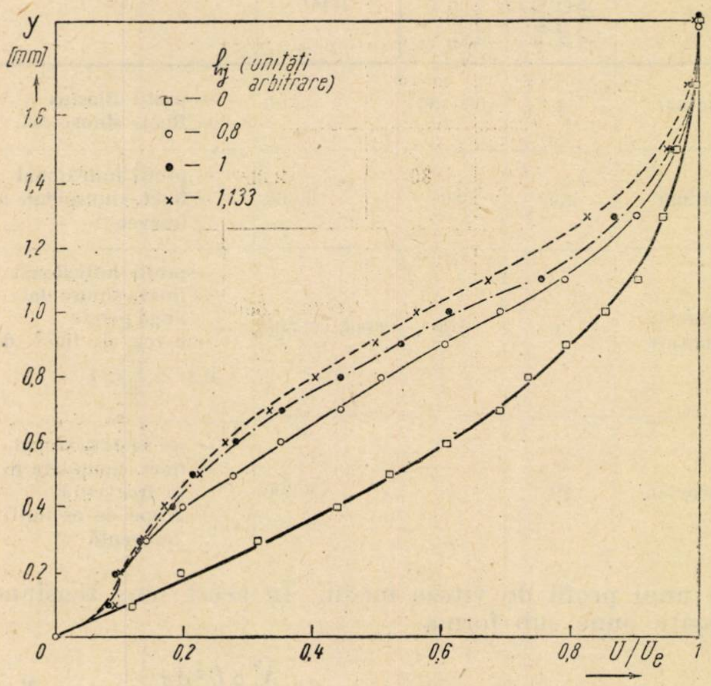


Fig. 25. — Profile de viteză în secțiunea $x = 0{,}07$ m pentru diferite intensități ale jetului perturbator.

Totuși, am construit un model matematic simplu care pune în evidență posibilitatea unei stări critice locale a profilului de viteze. Acest model se bazează pe ipoteza de organizare statistică [5] a oricăror fluctuații

Tabela 2

Intensitatea jetului perturbator [unităţi arbitr.]	Caracterul mişcării în aval	Amplitudinea fluctuaţiilor [unităţi arbitr.]	Frecvenţa primară a fluctuaţiilor [Hz]	Frecvenţa secundară a fluctuaţiilor [Hz]	Observaţii
0	laminar	1	60–80	600	– profil Blasius – fluct. sinusoidal
0,8	laminar	2,5	80	2 000	– profil inflexional – fluct. sinusoidale modulate în frecvenţă
1	tranzit. spoturi	4	100	3 000÷3 600	– profil inflexional – fluct. sinusoidale modulate lîngă perete – o reg. de fluct. de mare frec. $0{,}3 < \frac{y}{\delta} < 1$
1,133	turbulent	10	–	3 600	– profil inflexional. – fluct. modulate în amplitudine şi frecvenţă – grupe de oscilaţii de mare frecvenţă

suprapuse unui profil de viteze medii. În acest sens tensiunea de frecare se poate pune sub forma

$$\tau = [\mu + k(\eta_0 - \eta)]\frac{\partial U}{\partial y}, \quad \eta = \frac{\int_0^y \rho U^2 \mathrm{d}y}{\int_0^\delta \rho U^2 \mathrm{d}y}, \quad \eta_0 = \frac{y}{\delta}, \tag{1}$$

unde $k(\eta_0 - \eta)$ este un coeficient analog viscozităţii moleculare. Ecuaţia mişcării plane bidimensionale

$$\frac{\partial \tau}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial x} \tag{2}$$

are condiţiile la limită

$$y = 0, \quad U = 0, \quad \tau = \tau_w,$$
$$y = \delta, \quad U = U_e, \quad \frac{\partial U}{\partial y} \to 0. \tag{3}$$

Să punem $U_a = \frac{U}{U_e}$, $U = U(y)$, $\frac{\partial p}{\partial x} = \text{const.}$, $U = \text{const.}$, $\delta = \text{const.}$

Ecuaţia de mai sus se poate scrie sub forma

$$\left[1+\frac{k}{\mu}(\eta_0-\eta)\right]\frac{\mathrm{d}U_a}{\mathrm{d}\eta_0}=\frac{\tau_w}{\rho U_e^2}\cdot\mathcal{R}e_\delta(1-\eta_0),\ \mathcal{R}e_\delta=\frac{\rho U_e\delta}{\mu}. \qquad (4)$$

Luînd, în primă aproximaţie, $U_a = \eta_0^n$, avem $\eta = \eta_0^{1+2n}$ şi înlocuind în funcţie de U_a, obţinem

$$\left[1+\frac{k}{\mu}U_a^{\frac{1}{n}}(1-U_a^2)\right]\frac{\mathrm{d}U_a}{\mathrm{d}\eta_0}=\frac{\tau_w}{\rho U_e^2}\mathcal{R}e_\delta(1-\eta_0). \qquad (5)$$

Această ecuaţie dă pe $U_a(\eta_0, n, k)$. Pentru $k = 0$ avem soluţia laminară cunoscută $U_a = \eta_0(2-\eta_0)$. Este interesant de remarcat că *valori mici negative* ale lui k dau unele profile incompatibile fizic, după cum se vede în figura 26.

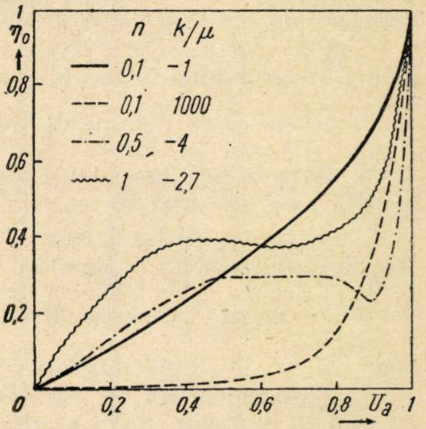


Fig. 26. — Exemple de profile de viteză deduse din ecuaţia (5).

c) Efectele tridimensionale ale acestui mod de perturbare prin jet sînt importante şi, în general, în concordanţă cu cele studiate în lucrarea [2]. Există încă o contradicţie între observaţiile noastre şi cele cuprinse în lucrare [2]: pe toată zona stratului limită tranziţional între X_1 şi X_2 noi am remarcat regiuni în care oscilogramele arătau creşteri faţă de viteza medie locală pentru $\frac{y}{\delta_l} < (0{,}5 \div 0{,}6)$ şi scăderi faţă de viteza medie locală pentru $\frac{y}{\delta_l} > (0{,}6 \div 0{,}7)$. În lucrarea [1] am explicat acest lucru pentru zona tranziţională cu spoturi dezvoltate prin alternarea locală a profilelor laminar şi turbulent ce se intersectează la $\frac{y}{\delta_l} \simeq 0{,}54$. Acest fenomen a fost observat acum şi în zonele unde nu există spoturi dezvoltate, ci numai fluctuaţii de mare frecvenţă.

Oscilogramele din lucrarea [2] prezintă însă numai scăderi faţă de viteza medie locală, pentru orice $\frac{y}{\delta_l}$.

Să admitem că semnalul electric se interpretează într-adevăr ca o variaţie a vitezei locale (în realitate echilibrul termic al traductorului este mai complex). Atunci această contradicţie se poate explica prin efectul dominant al vîrtejurilor longitudinale în tranziţia artificială provocată prin obstacole [2], în timp ce, în cazul nostru, importantă este alterarea locală a profilului de viteze.

IV. CONCLUZII

a) Tranziţia artificială studiată experimental în această lucrare, pune în evidenţă o zonă mare de instabilitate neliniară, caracterizată prin profil de viteze inflexional şi fluctuaţii de mare frecvenţă ($2 \div 3$ kHz), repartizate spre exteriorul stratului limită. Din această combinaţie apar mişcări spotice ce se dezvoltă pe o zonă de asemenea mare, caracterizată prin fluctuaţii de viteză ce reprezintă alternarea profilelor de viteze laminar şi turbulent intersectate la $y/\delta_e = 0{,}54$.

b) Stratul limită este selectiv pentru amplitudinea perturbaţiilor produse de jet în domeniul $300 < \mathcal{R}e_{\delta^*} < 400$. Numărul Reynolds al jetului la ieşire pentru care apar spoturile sau turbulenţa este aproximativ constant în domeniul $400 < \mathcal{R}e_{\delta^*} < 600$, pentru o anumită formă a orificiului de ieşire. Valoarea aceasta constantă este minimă pentru diametre mici ale orificiului de ieşire şi pentru viteze de ieşire îndreptate contrar direcţiei curentului general.

c) În jurul valorii $\mathcal{R}e_{\delta^*} \simeq 300$ forma semnalului electric a permis identificarea a două forme de spoturi : *explozive* (volume de fluid turbulente, $\frac{\partial u}{\partial t} \to \infty$) şi *lente* (volume de fluid neturbulente, $\frac{\vartheta u}{\vartheta t} \to$ finit). La frecvenţe mari de producere a acestor spoturi lente profilul vitezelor medii ce rezultă este apropiat de cel turbulent.

d) Starea critică locală a fluidului, premergătoare naşterii spotului este determinată de o *anumită distribuţie* a vitezelor medii, indiferent de modul de creare al acestei distribuţii . Se pare că gradientul $\frac{\partial u}{\partial y} \to \infty$ conduce la o incompatibilitate fizică locală, care este condiţia esenţială a apariţiei mişcărilor cu caracter spotic. Teoriile şi experienţele actuale nu pun în evidenţă acest stadiu de tranziţie.

Primită la redacţie la 17 iunie 1963.

EXPERIMENTELLES STUDIUM DES UMSCHLAGES LAMINAR-TURBULENT, HERVORGERUFEN DURCH DIE INTERAKTION ZWISCHEN EINEM STRAHL GERINGER INTENSITÄT UND DER INKOMPRESSIBLEN GRENZSCHICHT EINER EBENEN PLATTE

ZUSAMMENFASSUNG

In Fortsetzung einer früheren Arbeit zeigen die Verfasser quantitative Ergebnisse betreffend einige Charakteristiken der inkompressiblen Übergangsgrenzschicht. Der durch Einführung eines Störstrahls geringer Intensität künstlich hervorgerufene Umschlag zeigt eine kurze Zone liniarer Instabilität, eine ausgedehnte Zone nichtliniarer Instabilität (Ge-

schwindigkeitsprofil mit Wendepunkt, Fluktuationen hoher Frequenz, Längswirbel usw.) und eine ebenfalls ausgedehnte Zone voll entwickelter Flecken (Spots). Bei veränderlicher Strahlintensität und Geschwindigkeit des Außenstromes wurden in diesen Zonen folgende Größen bestimmt : Verteilung des quadratischen Mittelwertes der Längsfluktuationen, Verteilung der Frequenzkomponenten der Fluktuationen, Einfluß der Geometrie der Antrittsöffnung und der Grenzschichtdicke auf die Umschlagscharakteristiken (Intensität des Strahls beim Erscheinen der Flecken oder der Turbulenz, Ausdehnung der Zone nichtliniarer Instabilität, Form des elektrischen Signals bei Fleckenfluktuation). Die wichtigsten Ergebnisse sind folgende :

— die verschiedenen Frequenzkomponenten der Fluktuationen in einem Querschnitt der Grenzschicht haben keine ähnliche Amplitudenverteilung ;

— im Bereiche $300 < \mathcal{R}_{e\delta^{\cdot}} < 400$ ist die Grenzschicht gegenüber der Amplitude der Störfluktuationen selektiv ;

— nach der Form des elektrischen Signals konnten zwei flankenförmige Bewegungstypen festgestellt werden : explosive und langsame ;

— der der Entstehung des Spots vorausgehende kritische Zustand der Flüssigkeit ist durch eine lokale physikalische Inkompatibilität $\left(\frac{\partial u}{\partial y} \to \infty\right)$ gekennzeichnet, gleichgültig in welcher Weise das Geschwindigkeitsprofil gestört wurde.

BIBLIOGRAFIE

1. ŞT. N. SĂVULESCU, GH. DARIE, V. TOMA, *Aspecte tridimensionale ale tranziţiei provocate de un jet de intensitate mică pe o placă plană în scurgere incompresibilă.* St. cerc. mec. apl., *6* (1962).
2. P. S. KLEBANOFF K. D. TIDSTROM, L. M. SARGENT, *The three-dimensional nature of boundary-layer instability.* J. Fluid Mech., **12**, *1* (1962).
3. H. P. GREENSPAN, D. J. BENNY, *On shear-layer instability, breakdown and transition.* J. Fluid Mech., **15**, *1* (1963).
4. G. B. SCHUBAUER, P. S. KLEBANOFF, *Contributions on the Mechanics of Boundary-Layer Transition.* NACA — TN 3489, 1955.
5. ŞT. N. SĂVULESCU, *On a hypothesis of limitative statistical organisation of energy fluctuations, in the fully developed turbulent boundary-layer.* Rev. méc. appl., Acad. R.P.R., V, *6* (1960).
6. H. SCHLICHTING, *Entstehung der Turbulenz, Handbuch der Physik;* Band **VIII**/1, 1953, 370—390.

STUDII

DIVERGENŢA AEROELASTICĂ LA SUPRAFEŢE PORTANTE ÎN ROTAŢIE, ŢINÎND SEAMA DE EFECTUL FORŢELOR CENTRIFUGE

DE

AUGUSTIN PETRE

539.3 : 533

Studiul fenomenului de divergenţă pentru suprafeţe portante de secţiune constantă în rotaţie conduce la valori ale vitezei critice de divergenţă mai mari decît în cazul suprafeţelor portante în mişcare de translaţie. Pentru cazul mişcării de rotaţie, expresia vitezei critice de divergenţă corespunzătoare vîrfului palei este [1])

$$V_{cr} = 1{,}34774\frac{\pi}{2l}\sqrt{\frac{GI_d}{\frac{\rho}{2}ce\frac{dC_z}{di}}}, \tag{1}$$

unde :

GI_d — rigiditatea la răsucire a suprafeţei portante,
l — amvergura suprafeţei portante,
c — coarda suprafeţei portante,
e — distanţa între linia de presiune şi cea elastică,
ρ — masa specifică a aerului,
C_z — coeficientul unitar de portanţă,
i — incidenţa, aici egală cu cea produsă de deformaţia la răsucire.

Existenţa unor forţe axiale mari, produse de către forţele centrifuge, pot modifica în oarecare măsură valoarea vitezei critice de divergenţă şi stabilirea acestei viteze în prezenţa forţelor centrifuge formează obiectul prezentului studiu.

---

[1]) Augustin Petre, *Divergenţa aeroelastică la suprafeţe portante în rotaţie şi rototranslaţie.* St. cerc. mec. apl., **X**, *4* (1959).

Ecuația diferențială de răsucire, în prezența forțelor axiale are expresia

$$GI_d \frac{d^2\varphi}{dr^2} + \frac{d}{dr}\left(P\frac{I_p}{A}\cdot\frac{d\varphi}{dr}\right) = m_t, \tag{2}$$

în care r reprezintă coordonata curentă a suprafeței portante cu originea în centrul de rotație (figura),

P — reprezintă forța axială,
A — aria secțiunii transversale,
I_p — momentul de inerție polar al secțiunii transversale,
m_t — momentul de răsucire repartizat al sarcinilor exterioare.

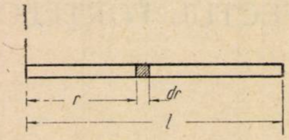


Fig. 1

Forța axială fiind produsă de către forțele de inerție va avea expresia

$$P = \int_r^l A\frac{\gamma}{g}r\omega^2\,dr = \frac{\gamma}{2g}Al^2\omega^2 - \frac{\gamma}{2g}A\omega^2r^2, \tag{3}$$

unde γ/g reprezintă masa unității de lungime a suprafeței portante, iar ω viteza de rotație a acesteia.

Notînd cu V_0 viteza față de aer a vîrfului suprafeței portante în rotație și ținînd seama că momentul de răsucire al forțelor exterioare este dat numai de sarcinile aerodinamice, ecuația (2) se poate scrie

$$GI_d\frac{d^2\varphi}{dr^2} + \frac{I_p}{A}\cdot\frac{d}{dr}\left[\left(\frac{\gamma A\omega^2}{2g}l^2 - \gamma\frac{A\omega^2}{2g}r^2\right)\frac{d\varphi}{dr}\right] + \frac{\rho}{2}V_0^2\frac{r^2}{l^2}ce\frac{dC_z}{di}\varphi = 0. \tag{4}$$

Efectuînd schimbarea de variabilă

$$\frac{r}{l} = x \tag{5}$$

ecuația (4), după calcule elementare, ia forma

$$\left[\frac{I_p}{AGI_d}\cdot\frac{\gamma Al^2\omega^2}{2g}(1 - x^2) + 1\right]\frac{d^2\varphi}{dx^2} - 2\frac{I_p}{AGI_d}\cdot\frac{\gamma Al^2\omega^2}{2g}x\frac{d\varphi}{dx} + \frac{\rho}{2}V_0^2\frac{ce}{GI_d}\cdot\frac{dC_z}{di}x^2\varphi = 0 \tag{6}$$

care, cu notațiile

$$\frac{I_p}{AGI_d}\cdot\frac{\gamma Al^2\omega^2}{2g} = a, \tag{7}$$

$$\frac{\rho}{2}V_0^2l^2\frac{ce}{GI_d}\cdot\frac{dC_z}{di} = b, \tag{8}$$

devine

$$(a+1-ax^2)\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}x^2}-2ax\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}+bx^2\varphi=0. \tag{9}$$

Condițiile la limită pe care trebuie să le satisfacă soluția acestei ecuații sînt :

$$x=0\rightarrow\varphi=0, \tag{10}$$

$$x=1\rightarrow\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}=0, \tag{11}$$

respectiv în origine rotirea suprafeței portante este împiedicată iar secțiunea extremă este liberă de sarcini, momentul de răsucire aici fiind nul.

Soluțiile ecuației (9) fac parte din clasa funcțiilor sferoidale axial simetrice și se poate demonstra că pentru o valoare a parametrului a dată, există o serie discretă de valori proprii pentru b.

Dezvoltarea în serie de puteri a soluției, ținînd seama de condiția (10), va fi

$$\begin{aligned}\varphi(x)=C_1\Bigg\{&x+\frac{a}{3(a+1)}x^3+\left[\frac{a^2}{5(a+1)^2}-\frac{b}{5.4.(a+1)}\right]x^5+\Bigg[\frac{a^3}{7(a+1)^3}-\\&-\left(\frac{1}{7.4.1}+\frac{1}{7.6.3}\right)\frac{ab}{(a+1)^2}\Bigg]x^7+\Bigg[\frac{a^4}{9(a+1)^4}-\left(\frac{1}{9.4.1}+\frac{1}{9.6.3}+\frac{1}{9.8.5}\right)\times\\&\times\frac{a^2b}{(a+1)^3}+\frac{1}{9.8.5.4}\frac{b^2}{(a+1)^2}\Bigg]x^9+\Bigg[\frac{a^5}{11(a+1)^5}-\frac{1}{11}\Bigg(\frac{1}{4.1}+\frac{1}{6.3}+\frac{1}{8.5}+\\&+\frac{1}{10.7}\Bigg)\frac{a^3b}{(a+1)^4}+\frac{1}{11}\left(\frac{1}{8.5.4}+\frac{1}{10.7.4}+\frac{1}{10.7.6.3}\right)\frac{ab^2}{(a+1)^3}\Bigg]x^{11}+\ldots\Bigg\}.\end{aligned} \tag{12}$$

Introducînd în această expresie condiția (11) rezultă

$$\begin{aligned}C_1\Bigg\{&1+\frac{a}{a+1}+\left(\frac{a}{a+1}\right)^2+\left(\frac{a}{a+1}\right)^3+\left(\frac{a}{a+1}\right)^4+\cdots-\frac{b}{4(a+1)}-\Bigg(\frac{1}{4.1}+\\&+\frac{1}{6.3}\Bigg)\frac{ab}{(a+1)^2}-\left(\frac{1}{4.1}+\frac{1}{6.3}+\frac{1}{8.5}\right)\frac{a^2b}{(a+1)^3}-\Bigg(\frac{1}{4.1}+\frac{1}{6.3}+\frac{1}{8.5}+\\&+\frac{1}{10.7}\Bigg)\frac{a^3b}{(a+1)^4}-\cdots+\frac{1}{8.5.4}\frac{b^2}{(a+1)^2}+\Bigg(\frac{1}{8.5.4}+\frac{1}{10.7.4}+\\&+\frac{1}{10.7.6.3}\Bigg)\frac{ab^2}{(a+1)^3}+\Bigg(\frac{1}{8.5.4}+\frac{1}{10.7.4}+\frac{1}{10.7.6.3}+\frac{1}{12.9.4.1}+\\&+\frac{1}{12.9.6.3}+\frac{1}{12.9.8.5}\Bigg)\frac{a^2b^2}{(a+1)^4}+\cdots-\frac{1}{12.9.8.5.4}\frac{b^3}{(a+1)^3}-\ldots\Bigg\}=0.\end{aligned} \tag{13}$$

Din această condiţie, pentru fiecare valoare discretă a coeficientului a rezultă o serie discretă de valori proprii pentru b.

Cu toate că valorile practice ale coeficientului a sînt mici faţă de 1, calculul pe această cale nu este comod şi în continuare se vor da expresii aproximative mai simple pentru valoarea vitezei critice cea mai mică.

Calculul se va face pe de o parte prin metoda semirigidă, care aproximează viteza de divergenţă în general în minus, şi pe de altă parte prin metoda energetică, care aproximează viteza de divergenţă în plus.

În ambele metode se presupune cunoscut modul de deformaţie, alegînd pentru funcţia φ o expresie compatibilă cu condiţiile la limită (10) şi (11).

Conform metodei semirigide se porneşte de la ecuaţia de răsucire scrisă sub formă de ecuaţie integrală. În cadrul acestei metode, deformaţia maximă la răsucire se va scrie pornind de la ecuaţia (9). Observînd că această ecuaţie se poate scrie

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(a+1-ax^2)\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}\right]+bx^2\varphi=0, \tag{14}$$

rezultă succesiv prin integrare

$$(a+1-a\,x^2)\,\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}=-\int bx^2\varphi\,\mathrm{d}x, \tag{15}$$

respectiv

$$\int(a+1-ax^2)\,\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x=-\int\mathrm{d}x\int bx^2\varphi\,\mathrm{d}x. \tag{16}$$

Integrînd pe întreaga anvergură, expresia valorii proprii pentru coeficientul b va fi

$$b_1=\frac{\int_0^1(a+1-ax^2)\,\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x}{\int_0^1\mathrm{d}x\int_{1-x}^1 x^2\varphi\,\mathrm{d}x}. \tag{17}$$

Pentru aplicarea metodei energetice, este necesar a se calcula lucrul mecanic produs de către forţele exterioare şi lucrul mecanic de deformaţie.

Expresiile acestor lucruri mecanice vor fi respectiv

$$\begin{aligned} L_e &= b\int_0^1 x^2\,\varphi^2\,\mathrm{d}x,\\ L_i &= \int_0^1(a+1-ax^2)\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}\right)^2\mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{18}$$

Din egalarea celor două lucruri mecanice rezultă următoarea expresie pentru valorile proprii

$$b_2 = \frac{\int_0^1 (a + 1 - ax^2)\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}\right)^2 \mathrm{d}x}{\int_0^1 x^2 \varphi^2 \, \mathrm{d}x}. \tag{19}$$

Valorile proprii exacte ale coeficientului b se vor găsi între cele determinate de relaţiile (17) şi (19)

$$b_1 < b < b_2. \tag{20}$$

În expresiile (17) şi (19) se vor alege pentru funcţia necunoscută φ funcţii compatibile cu condiţiile (10) şi (11).

Considerînd funcţia φ de forma

$$\varphi_1 = \sin \frac{\pi}{2} x, \tag{21}$$

expresia (17) devine succesiv

$$b_1 = \frac{\int_0^1 (a + 1 - ax^2)\, \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2} x \mathrm{d}x}{\int_0^1 \mathrm{d}x \int_{1-x}^1 x^2 \sin \frac{\pi}{2} x \, \mathrm{d}x},$$

$$b_1 = \frac{a + 1 - a\left(1 - \frac{8}{\pi^2}\right)}{\frac{8}{\pi^3}\int_0^1 \left\{\pi - 2\,\frac{\pi(1-x)}{2} \sin \frac{\pi(1-x)}{2} + \left[\frac{\pi^2(1-x)^2}{4} - 2\right] \cos \frac{\pi(1-x)}{2}\right\} \mathrm{d}x},$$

$$b_1 = \frac{\pi^3}{8}\,\frac{1 + \frac{8}{\pi^2}\,a}{\frac{3\pi}{2} - \frac{12}{\pi}} = \frac{\pi^2}{4}\left(1 + \frac{8}{\pi^2}\,a\right)\frac{\pi^2}{3\pi^2 - 24} = 1{,}7597\,\left(1 + 0{,}8106a\right)\frac{\pi^2}{4}. \tag{22}$$

Considerînd deformaţia la răsucire de aceeaşi formă (21), expresia (19) devine

$$b_2 = \frac{\int_0^1 (a + 1 - ax^2)\,\frac{\pi^2}{4} \cos^2 \frac{\pi}{2} \, \mathrm{d}x}{\int_0^1 x^2 \sin^2 \frac{\pi}{2} \, \mathrm{d}x},$$

$$b_2 = \frac{\frac{\pi^2}{8}\left[1+\left(\frac{2}{3}+\frac{2}{\pi^2}\right)a\right]}{\frac{1}{\pi^2}+\frac{1}{6}} = \frac{\pi^2}{4}\left[1+\left(\frac{2}{3}+\frac{2}{\pi^2}\right)a\right]\frac{1}{\frac{2}{\pi^2}+\frac{1}{3}} =$$

$$= 1{,}8657(1+0{,}8693a)\,\frac{\pi^2}{4}\cdot \qquad (23)$$

Alegînd în continuare pentru funcția φ o expresie de forma

$$\varphi = x - \frac{x^3}{3}, \qquad (24)$$

se obține

$$b_1 = \frac{\int_0^1 (a+1-ax^2)(1-x^2)\mathrm{d}x}{\int_0^1 \mathrm{d}x\int_{1-x}^1 x^2\left(x-\frac{x^3}{3}\right)\mathrm{d}x},$$

$$b_1 = 2\,\frac{1+\frac{4}{5}a}{\frac{7}{12}-\frac{3}{4.5}+\frac{1}{6.7}} = \frac{\pi^2}{4}\,(1+0{,}8a)\,\frac{8}{\pi^2\left(\frac{7}{12}-\frac{3}{20}+\frac{1}{42}\right)} =$$

$$= 1{,}7731\,(1+0{,}8\,a)\,\frac{\pi^2}{4}, \qquad (25)$$

respectiv

$$b_2 = \frac{\int_0^1 (a+1-ax^2)(1-x^2)^2\,\mathrm{d}x}{\int_0^1 x^2\left(x-\frac{x^3}{3}\right)^2\mathrm{d}x} = \frac{8}{15}\cdot\frac{1+\frac{6}{7}a}{\frac{1}{5}-\frac{2}{3.7}+\frac{1}{9.9}} =$$

$$= 1{,}8458\,(1+0{,}857\,a)\,\frac{\pi^2}{4}\cdot \qquad (26)$$

Pentru o expresie a funcției φ de forma

$$\varphi = x - \frac{x^5}{5}, \qquad (27)$$

prima valoare proprie, conform celor două metode de aproximație, va fi

$$b_1 = \frac{\int_0^1 (a+1-ax^2)(1-x^4)\,\mathrm{d}x}{\int_0^1 \mathrm{d}x\int_{1-x}^1 x^2\left(x-\frac{x^5}{5}\right)\mathrm{d}x} = \frac{32}{45}\cdot\frac{1+\left(\frac{17}{32}-\frac{45}{352}+\frac{90}{224}\right)a}{\frac{1}{5}-\frac{2}{5.9}+\frac{1}{13.25}} =$$

$$= 1{,}8168\,(1+0{,}8052\,a)\,\frac{\pi^2}{4}, \qquad (28)$$

respectiv

$$b_2 = \frac{\int_0^1 (a+1-ax^2)\,(1-x^4)^2\,\mathrm{d}x}{\int_0^1 x^2\left(x-\frac{x^5}{5}\right)^2 \mathrm{d}x} = \frac{4\left[1+\left(1-\frac{5}{3.4}+\frac{5}{4.7}\right)a\right]}{\frac{7}{8}+\frac{1}{9.8}} =$$

$$= 1{,}8238\,(1+0{,}7619\,a)\,\frac{\pi^2}{4}\cdot \tag{29}$$

Se observă că pe măsură ce expresia funcţiei se apropie ca formă de dezvoltarea (12), valorile între care se găseşte viteza critică sînt mai apropiate.

Pe baza celor trei funcţii (21), (24) şi (27) alese ca soluţie, viteza critică de divergenţă, ţinînd seama de (8), rezultă a fi cuprinsă între valorile

$$1{,}327\sqrt{1+0{,}8106a}\,\frac{\pi}{2l}\sqrt{\frac{GI_d}{\frac{\rho}{2}ce\frac{\mathrm{d}C_z}{\mathrm{d}i}}} < V_{\mathrm{cr}} < 1{,}365\sqrt{1+0{,}8693a}\,\frac{\pi}{2l}\sqrt{\frac{GI_d}{\frac{\rho}{2}ce\frac{\mathrm{d}C_z}{\mathrm{d}i}}}, \tag{30}$$

$$1{,}331\sqrt{1+0{,}8a}\,\frac{\pi}{2l}\sqrt{\frac{GI_d}{\frac{\rho}{2}ce\frac{\mathrm{d}C_z}{\mathrm{d}i}}} < V_{\mathrm{cr}} < 1{,}358\sqrt{1+0{,}857a}\,\frac{\pi}{2l}\sqrt{\frac{GI_d}{\frac{\rho}{2}ce\frac{\mathrm{d}C_z}{\mathrm{d}i}}}, \tag{31}$$

$$1{,}347\sqrt{1+0{,}805a}\,\frac{\pi}{2l}\sqrt{\frac{GI_d}{\frac{\rho}{2}ce\frac{\mathrm{d}C_z}{\mathrm{d}i}}} < V_{\mathrm{cr}} < 1{,}350\sqrt{1+0{,}762a}\,\frac{\pi}{2l}\sqrt{\frac{GI_d}{\frac{\rho}{2}ce\frac{\mathrm{d}C_z}{\mathrm{d}i}}}. \tag{32}$$

Se observă că la o precizie satisfăcătoare se poate lua pentru viteza critică de divergenţă expresia

$$V_{\mathrm{cr}} = 1{,}348\sqrt{1+0{,}8\,\frac{I_p}{GI_d}\cdot\frac{\gamma l^2\omega^2}{2g}}\cdot\frac{\pi}{2l}\sqrt{\frac{GI_d}{\frac{\rho}{2}ce\frac{\mathrm{d}C_z}{\mathrm{d}i}}}\cdot \tag{33}$$

În cazul particular în care nu se ţine seama de efectul forţelor centrifuge, rezultă

$$\frac{I_p}{GI_d}\cdot\frac{\gamma l^2\omega^2}{2g} = 0 \tag{34}$$

iar expresia (33) coincide cu cea obținută pentru acest caz în lucrarea citată.

Efectul forțelor centrifuge este introdus prin factorul

$$\sqrt{1 + 0,8 \frac{I_p}{GI_d} \cdot \frac{\gamma l^2 \omega^2}{2g}}$$

şi se observă că în prezența acestor forțe, viteza critică de divergențe creşte.

Deoarece valoarea practică a coeficientului a este mult mai mică decît 1, creşterea vitezei critice de divergență datorită forțelor centrifuge nu este prea mare.

Primită la redacție la 5 iunie 1963

AEROELASTIC DIVERGENCE OF ROTATING LIFTING SURFACES TAKING INTO CONSIDERATION THE EFFECT OF CENTRIFUGAL FORCES

ABSTRACT

The present paper presents the calculation of the critical divergence velocity for wings of constant cross-section, by taking into account the tensile forces.

The calculation is performed analytically, the expression which gives this velocity being obtained.

For practical purposes, the critical divergence velocity is calculated through the energy and semi-rigid methods, values close to the exact one being obtained by correspondingly choosing the function representing the twist.

The critical divergence velocity obtained in this way has a single expression easy to be used for practical purposes.

STUDII

EFECTUL COMENZII LA PALELE ELASTICE ALE ROTORULUI DE ELICOPTER

DE

AL. MARINESCU

534 : 629.135

NOTAȚII

$OXYZ$ — sistem fix de axe (planul XOY coincide cu planul de control),
$Oryz$ — sistem de axe rotitoare (axa Or coincide cu poziția palei rigide),
R — raza rotorului,
t_p — profunzimea palei,
r — distanța unei secțiuni de axa rotorului,
ζ_n — coordonată generalizată,
z — deflecțiunea palei măsurată de la poziția palei rigide,
ω — viteza unghiulară a rotorului,
ω_0 — viteza unghiulară înaintea comenzii,
$\Delta\omega$ — variația vitezei unghiulare,
ν_n — frecvența proprie a palei rotitoare,
w — viteza indusă,
w_0 — viteza indusă înaintea comenzii,
Δw — variația vitezei induse,
M_n — masa generalizată a palei,
θ — unghiul de calaj al palei,
θ_0 — unghiul de calaj înaintea comenzii,
$\Delta\theta$ — variația unghiului de calaj,
α_i — unghiul indus,
β — unghiul de bătaie al palei,

C_a' — panta curbei de portanță a profilului palei,
$\Phi_n(r)$ — funcția formei modale,
ρ — densitatea aerului,
p — mărime complexă,
$h(t)$ — funcția obiect,

$$g(p) = p \int_0^\infty e^{-pt} h(t)\, dt.$$

Studiile asupra vibrațiilor întreprinse pentru pale avînd unghiul colectiv de calaj, amplitudinea variației ciclice și viteza unghiulară constante, au arătat că forțele perturbatoare pot fi puse în cazul general sub forma unei serii Fourier.

În cazul cînd unghiul colectiv de calaj, amplitudinea variației ciclice și viteza unghiulară devin funcții de timp, lucru care se întîmplă în momentul cînd se dă comanda, apar alte genuri de forțe perturbatoare al căror efect asupra palei elastice fac obiectul studiului de față.

Pentru unghiul colectiv de calaj și amplitudinea variației ciclice vom considera două din tipurile de variație în timp ce apar în practică și anume variația în salt brusc (fig. 1) și variația în treaptă oblică (fig. 2).

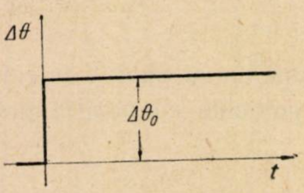


Fig. 1

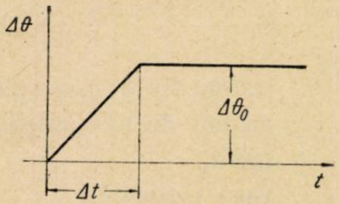


Fig. 2

Cum la elicopter comanda unghiului colectiv de așezare este cuplată cu cea a gazelor de la motor, vom admite că pentru cele două tipuri de variație în timp viteza unghiulară a rotorului variază aproximativ în salt brusc decalat (fig. 3), respectiv tot în treaptă oblică (fig. 4).

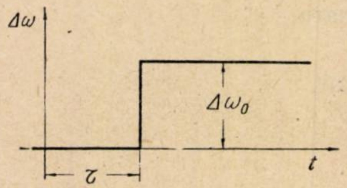


Fig. 3

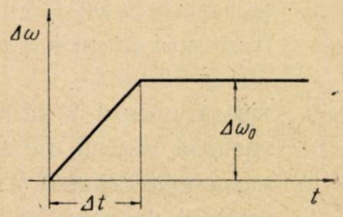


Fig. 4

În ceea ce privește evoluțiile de zbor, vom considera cazul zborului fără disimetrii ale vitezei pe pală (zbor vertical sau la punctul fix). Este vorba deci de comanda „pe loc”.

Este interesant de văzut în ce condiții deformația palei elastice cauzată de efectul comenzii, cu alte cuvinte răspunsul dinamic tranzitoriu al palei, se atenuează, ceea ce are o deosebită valoare practică pentru conducerea elicopterului.

I. EFECTUL COMENZII ÎN SALT BRUSC

a. Efectul comenzii unghiului colectiv de calaj

Adoptînd ipoteza uniformității vitezei induse în evoluțiile menționate și pentru care vom considera deocamdată în calcule valori medii constante, portanța elementară pe un element de pală la distanța r se scrie în general

$$\mathrm{d}P = \frac{\rho}{2} t_p (\omega r)^2 C_a' (\theta - \alpha_i)\, \mathrm{d}r = \frac{\rho}{2} t_p (\omega r)^2 C_a' \left(\theta - \frac{w}{\omega r}\right) \mathrm{d}r. \qquad (1)$$

Efectul comenzii se va traduce în relațiile de mai sus prin aceea că viteza unghiulară și unghiul de calaj devin funcții de timp.

Prin variația în timp a portanței pe pală datorită comenzii, va lua naștere o mișcare vibratorie astfel încît deflecțiunea

$$z = \sum_{n=1}^{\infty} \zeta_n \Phi_n \qquad (2)$$

o măsurăm de la poziția palei rigide, poziție pe care o putem determina din datele aerodinamicii rotorului (fig. 5).

După cum am arătat în [2], ecuația de mișcare a palei este de forma

$$\ddot{\zeta}_n + a\,\dot{\zeta}_n + b\,\zeta_n = A\,F_{GP}, \qquad (3)$$

în care

$$a = \frac{\pi \rho \omega \int_0^R t_p\, r\, \Phi_n(r)\, \mathrm{d}r}{M_n + \frac{\pi\rho}{4} \int_0^R t_p^2\, \Phi_n(r)\, \mathrm{d}r},$$

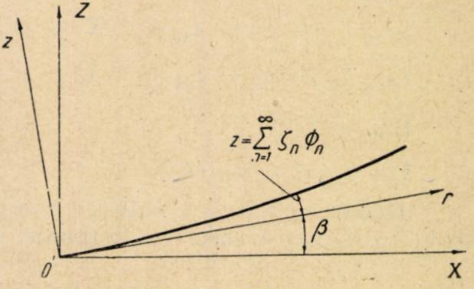


Fig. 5

$$b = \frac{M_n\, \nu_n^2}{M_n + \frac{\pi\rho}{4} \int_0^R t_p^2\, \Phi_n(r)\, \mathrm{d}r},$$

$$A = \frac{1}{M_n + \frac{\pi\rho}{4} \int_0^R t_p^2\, \Phi_n(r)\, \mathrm{d}r}.$$

Datorită efectului comenzii este clar că şi coeficienţii a şi b ai ecuaţiei (3) devin funcţii de timp şi în acest sens punînd

$$\omega = \omega_0 + \Delta\omega$$

iar frecvenţa naturală a palei rotitoare

$$\nu_n^2 = \nu_0^2 + k_1\,\omega^2 = \nu_0^2 + k_1(\omega_0 + \Delta\omega)^2 = (\nu_0^2 + k_1\,\omega_0^2) + 2\,k_1\,\nu_0\,\Delta\omega + k_1\,\Delta\omega^2,$$

cum $\theta = \theta_0 + \Delta\theta$ ecuaţia (3) devine

$$\ddot{\zeta}_n + [\alpha_0 + \alpha_1(t)]\,\dot{\zeta}_n + [\varepsilon_0 + \varepsilon_1(t) + \varepsilon_2(t)]\,\zeta_n = \beta_0 + \beta_1(t) \tag{4}$$

sau

$$\begin{aligned}\ddot{\zeta}_n + \alpha_0\,\dot{\zeta}_n + \alpha_{10}\,\dot{\zeta}_n(t-\tau) + \varepsilon_0\,\zeta_n + \varepsilon_{10}\,\zeta_n(t-\tau) + \\ + \varepsilon_{20}\,\zeta_n(t-\tau) = \beta_0 + \beta_1(t-\tau).\end{aligned} \tag{5}$$

Aplicînd ecuaţiei (5) transformata Laplace cu condiţiile la limită

$$\zeta_n(0) = 0,$$
$$\dot{\zeta}_n(0) = 0,$$

fără să micşorăm generalitatea, avem

$$\mathbf{L}\zeta_n = X,$$
$$\mathbf{L}\varepsilon_0\,\zeta_n = \varepsilon_0\,X,$$
$$\mathbf{L}\alpha_0\,\dot{\zeta}_n = \alpha_0\,pX,$$
$$\mathbf{L}\ddot{\zeta}_n = p^2\,X,$$
$$\mathbf{L}\alpha_{10}\,\dot{\zeta}_n(t-\tau) = \alpha_{10}\,e^{-p\tau}\,\mathbf{L}\,\dot{\zeta}_n = \alpha_{10}\,e^{-p\tau}\,pX,$$
$$\mathbf{L}\varepsilon_{10}\,\zeta_n(t-\tau) = \varepsilon_{10}\,e^{-p\tau}\,X,$$
$$\mathbf{L}\varepsilon_{20}\,\zeta_n(t-\tau) = \varepsilon_{20}\,e^{-p\tau}\,X,$$
$$\mathbf{L}\beta_0 = \beta_0,$$
$$\mathbf{L}\beta_1(t-\tau) = \beta_{10}\,e^{-p\tau}.$$

Deoarece p este o mărime complexă şi funcţia exponenţială poate fi dezvoltată într-o serie cu domeniu de convergenţă infinit, avem

$$e^{-p\tau} = 1 - p\tau + \frac{p^2\,\tau^2}{2} + \ldots \tag{6}$$

Rezumîndu-ne la primii doi termeni ai dezvoltării şi făcînd calculele necesare, ecuaţia (5) devine

$$\begin{aligned}X\left[p^2 + \frac{\alpha_0 + \alpha_{10} - \tau\varepsilon_{10} - \tau\,\varepsilon_{20}}{1 - \alpha_{10}\,\tau}\,p + \frac{\varepsilon_0 + \varepsilon_{10} + \varepsilon_{20}}{1 - \alpha_{10}\,\tau}\right] = \\ = \frac{\beta_0 + \beta_{10}}{1 - \alpha_{10}\,\tau} - \frac{\beta_0\,\tau}{1 - \alpha_{10}\,\tau}\,p,\end{aligned} \tag{7}$$

unde

$$\alpha_0 = \frac{\pi \rho \omega_0 \int_0^R t_p r \Phi_n(r) \, \mathrm{d}r}{M_n + \frac{\pi\rho}{4} \int_0^R t_p^2 \Phi_n(r) \, \mathrm{d}r},$$

$$\alpha_{10} = \frac{\pi \rho \Delta \omega_0 \int_0^R t_p r \Phi_n(r) \, \mathrm{d}r}{M_n + \frac{\pi\rho}{4} \int_0^R t_p^2 \Phi_n(r) \, \mathrm{d}r},$$

$$\varepsilon_0 = \frac{M_n (\nu_0^2 + k_1 \omega_0^2)}{M_n + \frac{\pi\rho}{4} \int_0^R t_p^2 \Phi_n(r) \, \mathrm{d}r},$$

$$\varepsilon_{10} = \frac{2 M_n k_1 \nu_0 \Delta \omega_0}{M_n + \frac{\pi\rho}{4} \int_0^R t_p^2 \Phi_n(r) \, \mathrm{d}r},$$

$$\varepsilon_{20} = \frac{M_n k_1 \Delta \omega_0^2}{M_n + \frac{\pi\rho}{4} \int_0^R t_p^2 \Phi_n(r) \, \mathrm{d}r},$$

$$\beta_0 = \frac{C'_a \frac{\rho}{2} \omega_0^2 \theta_0 \int_0^R \Phi_n(r) t_p r^2 \, \mathrm{d}r - C'_a \frac{\rho}{2} \omega_0 w \int_0^R \Phi_n(r) t_p r \, \mathrm{d}r}{M_n + \frac{\pi\rho}{4} \int_0^R t_p^2 \Phi_n(r) \, \mathrm{d}r},$$

$$\beta_{10} = \frac{H_0 \frac{\rho}{2} C'_a \int_0^R \Phi_n(r) t_p r^2 \, \mathrm{d}r - C'_a \frac{\rho}{2} \Delta \omega_0 w \int_0^R \Phi_n(r) t_p r \, \mathrm{d}r}{M_n + \frac{\pi\rho}{4} \int_0^R t_p^2 \Phi_n(r) \, \mathrm{d}r}$$

$$H_0 = 2 \omega_0 \theta_0 \Delta \omega_0 + \Delta \omega_0^2 \theta_0 + \omega_0^2 \Delta \theta_0 + 2 \omega_0 \Delta \omega_0 \Delta \theta_0 + \Delta \omega_0^2 \Delta \theta_0.$$

Notînd cu

$$2B = \frac{\alpha_0 + \alpha_{10} - \tau \varepsilon_{10} - \tau \varepsilon_{20}}{1 - \alpha_{10} \tau},$$

$$C^2 = \frac{\varepsilon_0 + \varepsilon_{10} + \varepsilon_{20}}{1 - \alpha_{10} \tau},$$

$$D = \frac{\beta_0 + \beta_{10}}{1 - \alpha_{10} \tau},$$

$$E = \frac{\beta_0 \tau}{1 - \alpha_{10} \tau},$$

din (7) obținem

$$X = \frac{D}{p^2 + 2\,Bp + C^2} - \frac{Ep}{p^2 + 2\,Bp + C^2}. \tag{8}$$

Făcînd transformarea inversă găsim soluția ecuației (5)

$$\begin{aligned}\zeta_n = \frac{D}{C^2}\left[1 - \frac{C}{\sqrt{C^2 - B^2}}\,\mathrm{e}^{-Bt}\sin\left(\sqrt{C^2 - B^2}\,t + \Phi\right)\right] - \\ - \frac{E}{\sqrt{C^2 - B^2}}\,\mathrm{e}^{-Bt}\sin\sqrt{C^2 - B^2}\,t\end{aligned} \tag{9}$$

pentru $C^2 > B^2$ și

$$\zeta_n = \frac{D}{C^2}\left[1 - \frac{C^2}{\Lambda_1 - \Lambda_2}\right]\left(\frac{\mathrm{e}^{-\Lambda_2 t}}{\Lambda_2} - \frac{\mathrm{e}^{-\Lambda_1 t}}{\Lambda_1}\right) - \frac{E}{\Lambda_1 - \Lambda_2}\left(\mathrm{e}^{-\Lambda_2 t} - \mathrm{e}^{-\Lambda_1 t}\right) \tag{10}$$

pentru $C^2 < B^2$.

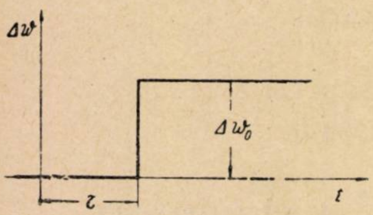


Fig. 6

În aceste expresii

$$\Phi = \mathrm{arc\ tg}\,\frac{\sqrt{C^2 - B^2}}{B}$$

iar Λ_1 și Λ_2 sînt rădăcini ale ecuației $p^2 + 2Bp + C^2 = 0$.

În cazul unor condiții la limită mai generale de forma

$$\zeta_n(0) = \zeta_0,$$
$$\dot{\zeta}_n(0) = 0$$

și a unei variații a vitezei induse ca în figura 6, vom avea

$$\mathbf{L}\ \zeta_n = X,$$
$$\mathbf{L}\ \varepsilon_0\,\zeta_n = \varepsilon_0\,X,$$
$$\mathbf{L}\ \alpha_0\,\zeta_n = \alpha_0\,p\,X - \alpha_0\,p\,\zeta_0,$$
$$\mathbf{L}\ \ddot{\zeta}_n = p^2\,X - p^2\,\zeta_0,$$
$$\mathbf{L}\ \alpha_{10}\,\dot{\zeta}_n(t - \tau) = \alpha_{10}\,\mathrm{e}^{-p\tau}\ \mathbf{L}\ \dot{\zeta}_n = \alpha_{10}\,\mathrm{e}^{-p\tau}\,pX - \alpha_{10}\,\mathrm{e}^{-p\tau}\,p\,\zeta_0,$$
$$\mathbf{L}\ \varepsilon_{10}\,\zeta_n\,(t - \tau) = \varepsilon_{10}\,\mathrm{e}^{-p\tau}\,X,$$
$$\mathbf{L}\ \varepsilon_{20}\,\zeta_n\,(t - \tau) = \varepsilon_{20}\,\mathrm{e}^{-p\tau}\,X,$$
$$\mathbf{L}\ \beta_0 = \beta_0,$$
$$\mathbf{L}\ \beta_1\,(t - \tau) = \beta_{10}\,\mathrm{e}^{-p\tau},$$

unde

$$\beta_0 = \frac{C_a'\,\dfrac{\rho}{2}\,\omega_0^2\,\theta_0\displaystyle\int_0^R \Phi_n(r)\,t_p\,r^2\,\mathrm{d}r - C_a'\,\dfrac{\rho}{2}\,\omega_0\,w_0\displaystyle\int_0^R \Phi_n(r)\,t_p\,r\,\mathrm{d}r}{M_n + \dfrac{\pi\rho}{4}\displaystyle\int_0^R t_p^2\,\Phi_n(r)\,\mathrm{d}r},$$

$$\beta_{10} = \frac{H_0 \frac{\rho}{2} C'_a \int_0^R \Phi_n(r)\, t_p\, r^2\, \mathrm{d}r - U_0 \frac{\rho}{2} C'_a \int_0^R \Phi_n(r)\, t_p\, r\, \mathrm{d}r}{M_n + \frac{\pi\rho}{4} \int_0^R t_p^2\, \Phi_n(r)\, \mathrm{d}r},$$

$$U_0 = \omega_0\, \Delta w_0 + w_0\, \Delta\omega_0 + \Delta\omega_0\, \Delta w_0.$$

Cu noile condiții ecuația (5) devine

$$X\left[p^2 + \frac{\alpha_0 + \alpha_{10} - \varepsilon_{10}\tau - \varepsilon_{20}\tau}{1 - \alpha_{10}\tau}\, p + \frac{\varepsilon_0 + \varepsilon_{10} + \varepsilon_{20}}{1 - \alpha_{10}\tau}\right] = \frac{\beta_0 + \beta_{10}}{1 - \alpha_{10}\tau} + \frac{\alpha_0 \zeta_0 - \beta_{10}\tau + \alpha_{10}\tau}{1 - \alpha_{10}\tau}\, p + \zeta_0 p^2, \tag{11}$$

de unde, ținînd seama de notațiile din cazul precedent, avem

$$X = \frac{D}{p^2 + 2Bp + C^2} + \frac{Fp}{p^2 + 2Bp + C^2} + \frac{\zeta_0 p^2}{p^2 + 2Bp + C^2}, \tag{12}$$

unde

$$F = \frac{\alpha_0 \zeta_0 - \beta_{10}\tau + \alpha_{10}\tau}{1 - \alpha_{10}\tau}.$$

Soluția (9) va fi completată deci cu transformata inversă a lui $\frac{p^2}{p^2 + 2Bp + C^2}$ care are expresia

$$-\frac{C}{\sqrt{C^2 - B^2}}\, \mathrm{e}^{-Bt} \sin\left(\sqrt{C^2 - B^2}\, t - \Phi\right) \tag{13}$$

cînd $C^2 > B^2$ și

$$\frac{1}{\Lambda_1 - \Lambda_2}\left(\Lambda_1 \mathrm{e}^{-\Lambda_1 t} - \Lambda_2 \mathrm{e}^{-\Lambda_2 t}\right) \tag{14}$$

cînd $C^2 < B^2$.

Din examinarea soluțiilor pentru ambele cazuri de condiții la limită se poate constata că mărimea ζ_n devine, independent de timp, foarte mică atunci cînd mărimile B și C devin foarte mari.

Aceasta revine la a spune că o condiție ca vibrațiile cauzate de efectul comenzii să fie foarte atenuate este ca mărimea α_{10} să fie de ordinul $\frac{1}{\tau}$.

În acest fel se poate vedea legătura între parametrii palei și timpul de răspuns al motorului, astfel încît comanda să nu suscite vibrații dăunătoare ale palei.

b. Efectul variației ciclice a unghiului de calaj

În acest caz, viteza unghiulară rămîne constantă ($\omega = \omega_0 = \text{ct.}$) și numai unghiul de calaj capătă o variație ciclică pe care, ținînd seama că este foarte uzuală, o vom considera de forma $\Delta\theta \sin \omega t$.

Vom neglija în faza tranzitorie pe care o urmărim, unghiul indus datorită mișcării de bătaie și atunci, ținînd seama că

$$\theta = \theta_0 + \Delta\theta \sin \omega t, \tag{15}$$

unde $\Delta\theta$ în urma deplasării bruște a manșei are alura din figura 1, ecuația diferențială a mișcării palei este

$$\ddot{\zeta}_n + a\,\dot{\zeta}_n + b\,\zeta_n = \bar{\beta}_0 + \bar{\beta}_1(t). \tag{16}$$

Coeficienții a și b în ecuația de față au aceleași expresii ca și cei ai ecuației (3), numai că aici $\omega = \omega_0 = \text{ct.}$

În ceea ce privește mărimile $\bar{\beta}_0$ și $\bar{\beta}_1(t)$ acestea au expresiile

$$\bar{\beta}_0 = \beta_0 = \frac{C'_a \dfrac{\rho}{2}\,\omega_0^2 \displaystyle\int_0^R \Phi_n(r)\, t_p\, r^2 \left(\theta_0 - \frac{w}{\omega_0 r}\right) \mathrm{d}r}{M_n + \dfrac{\pi\rho}{4} \displaystyle\int_0^R t_p^2\, \Phi_n(r)\, \mathrm{d}r},$$

$$\bar{\beta}_1(t) = \frac{C'_a \dfrac{\rho}{2}\,\omega_0^2\, \Delta\theta_0 \displaystyle\int_0^R \Phi_n(r)\, t_p\, r^2\, \mathrm{d}r}{M_n + \dfrac{\pi\rho}{4} \displaystyle\int_0^R t_p^2\, \Phi_n(r)\, \mathrm{d}r} \sin \omega t = K_0 \sin \omega t.$$

Aplicînd transformarea Laplace ecuației (16) cu condițiile la limită

$$\zeta_n(0) = \zeta_0,$$
$$\dot{\zeta}_n(0) = 0,$$

avem

$$\mathbf{L}\ \ddot{\zeta}_n = p^2 X - p^2 \zeta_0,$$
$$\mathbf{L}\ \dot{\zeta}_n = p X - p\, \zeta_0.$$

Pentru a păstra aceleași notații ca și în cazul precedent, vom pune $a = 2B$ și $b = C^2$.

Ecuația (16) devine

$$p^2 X - p^2 \zeta_0 + 2\,Bp\,X - 2\,Bp\,\zeta_0 + C^2 X = \beta_0 + K_0 \frac{p\,\omega}{p^2 + \omega^2},$$

de unde scoatem

$$\begin{aligned} X = \zeta_0 \frac{p^2}{p^2 + 2Bp + C^2} + 2B\zeta_0 \frac{p}{p^2 + 2Bp + C^2} + \\ + \frac{\beta_0}{p^2 + 2Bp + C^2} + K_0\,\omega \frac{p}{(p^2 + \omega^2)(p^2 + 2Bp + C^2)}. \end{aligned} \tag{17}$$

Pentru primii trei termeni transformata inversă poate fi uşor găsită făcînd uz de tabele. În ceea ce priveşte al patrulea termen, îl vom scrie astfel

$$K_0\,\omega \frac{p}{(p^2 + \omega^2)(p^2 + 2Bp + C^2)} = \frac{K_0\,\omega \dfrac{p^2}{p^2 + \omega^2} \cdot \dfrac{1}{p^2 + 2Bp + C^2}}{p}.$$

Aplicăm teorema lui Borel potrivit căreia dacă

$$g_1(p) = \mathbf{L}\, h_1(t),$$
$$g_2(p) = \mathbf{L}\, h_2(t),$$

atunci

$$\frac{g_1(p)\, g_2(p)}{p} = \mathbf{L} \int_0^t h_1(T)\, h_2(t - T)\, \mathrm{d}T = \mathbf{L} \int_0^t h_2(T)\, h_1(t - T)\, \mathrm{d}T.$$

Vom avea

$$\mathbf{L}^{-1} K_0\,\omega \frac{p^2}{p^2 + \omega^2} = K_0\,\omega \cos \omega t,$$

$$\mathbf{L}^{-1} \frac{1}{p^2 + 2Bp + C^2} = \begin{cases} \dfrac{1}{C^2}\left[1 - \dfrac{C}{\sqrt{C^2 - B^2}}\, \mathrm{e}^{-Bt} \sin\left(\sqrt{C^2 - B^2}\, t + \Phi\right)\right] \\ \qquad \text{dacă } C^2 > B^2, \\ \dfrac{1}{C^2}\left[1 - \dfrac{C^2}{\Lambda_1 - \Lambda_2}\left(\dfrac{\mathrm{e}^{-\Lambda_2 t}}{\Lambda_2} - \dfrac{\mathrm{e}^{-\Lambda_1 t}}{\Lambda_1}\right)\right] \\ \qquad \text{dacă } C^2 < B^2, \end{cases}$$

unde Λ_1, Λ_2 sînt rădăcinile ecuaţiei $p^2 + 2Bp + C^2 = 0$.

Considerăm primul caz $C^2 > B^2$ şi pentru uşurinţă introducem notaţiile

$$k = \sqrt{C^2 - B^2}, \quad u = \frac{K_0\,\omega}{C^2}, \quad v = \frac{K_0\,\omega}{Ck}.$$

Atunci

$$\int_0^t h_2(T)\, h_1(t - T)\, \mathrm{d}T =$$

$$= \int_0^t [u \cos \omega (t - T) - v\, \mathrm{e}^{-BT} \sin(kT + \Phi) \cos \omega (t - T)]\, \mathrm{d}T.$$

După efectuarea integralei de mai sus, putem scrie că

$$\mathbf{L}^{-1}\,\frac{K_0\,\omega\,\dfrac{p^2}{p^2+\omega^2}\cdot\dfrac{1}{p^2+2Bp+C^2}}{p}=$$

$$\begin{aligned}&=\frac{u}{\omega}\sin\,\omega t-\frac{v}{2}\,[\cos\Phi\cos\,\omega t\,(I_1+I_2)+\\&+\sin\Phi\cos\,\omega t\,(J_1+J_2)+\cos\Phi\sin\,\omega t\,(J_2-J_1)+\\&+\sin\Phi\sin\,\omega t\,(J_1-J_2)],\end{aligned}\qquad(18)$$

unde

$$I_1=-\frac{B}{B^2+\omega_1^2}\,\mathrm{e}^{-Bt}\sin\,\omega_1 t-\frac{\omega_1}{B^2+\omega_1^2}\,\mathrm{e}^{-Bt}\cos\,\omega_1 t+\frac{\omega_1}{B^2+\omega_1^2},$$

$$I_2=-\frac{B}{B^2+\omega_2^2}\,\mathrm{e}^{-Bt}\sin\,\omega_2 t-\frac{\omega_2}{B^2+\omega_2^2}\,\mathrm{e}^{-Bt}\cos\,\omega_2 t+\frac{\omega_2}{B^2+\omega_2^2},$$

$$J_1=-\frac{B}{B^2+\omega_1^2}\,\mathrm{e}^{-Bt}\cos\,\omega_1 t+\frac{\omega_1}{B^2+\omega_1^2}\,\mathrm{e}^{-Bt}\sin\,\omega_1 t+\frac{B}{B^2+\omega_1^2},$$

$$J_2=-\frac{B}{B^2+\omega_2^2}\,\mathrm{e}^{-Bt}\cos\,\omega_2 t+\frac{\omega_2}{B^2+\omega_2^2}\,\mathrm{e}^{-Bt}\sin\,\omega_2 t+\frac{B}{B^2+\omega_2^2},$$

$$\omega_1=k+\omega,$$

$$\omega_2=k-\omega.$$

În cel de-al doilea caz, în care $C^2<B^2$, notînd cu

$$\gamma_1=\frac{K_0\,\omega}{\Lambda_1\,(\Lambda_1-\Lambda_2)},\quad \gamma_2=\frac{K_0\,\omega}{\Lambda_2\,(\Lambda_1-\Lambda_2)}$$

vom avea

$$\int_0^t h_2\,(T)\,h_1\,(t-T)\,\mathrm{d}T=$$

$$=\int_0^t[u\cos\omega\,(t-T)+\gamma_1\,\mathrm{e}^{-\Lambda_1 T}\cos\omega\,(t-T)-\gamma_2\,\mathrm{e}^{-\Lambda_2 T}\cos\omega\,(t-T)]\,\mathrm{d}T.$$

După efectuarea integralei, avem

$$\mathbf{L}^{-1}\,\frac{K_0\,\omega\,\dfrac{p^2}{p^2+\omega^2}\cdot\dfrac{1}{p^2+2\,Bp+C^2}}{p}=$$

$$\begin{aligned}&=-\left(\frac{\Lambda_1\,\gamma_1}{\Lambda_1^2+\omega^2}\,\mathrm{e}^{-\Lambda_1 t}-\frac{\Lambda_2\,\gamma_2}{\Lambda_2^2+\omega^2}\,\mathrm{e}^{-\Lambda_2 t}\right)+\\&+\left(\frac{\gamma_1\,\Lambda_1}{\Lambda_1^2+\omega^2}-\frac{\gamma_2\,\Lambda_2}{\Lambda_2^2+\omega^2}\right)\cos\,\omega t+\left(\frac{\gamma_1\,\omega}{\Lambda_1^2+\omega^2}-\frac{\gamma_2\,\omega}{\Lambda_2^2+\omega^2}\right)\sin\,\omega t.\end{aligned}\qquad(19)$$

II. EFECTUL COMENZII ÎN TREAPTĂ OBLICĂ

a. Efectul comenzii unghiului colectiv de calaj

În acest caz ne vom mărgini la o analiză sumară a efectului comenzii, considerînd variațiile de turație $\Delta\omega$, de unghi $\Delta\theta$ și de viteză indusă Δw ca în figurile 4, 2 și 7.

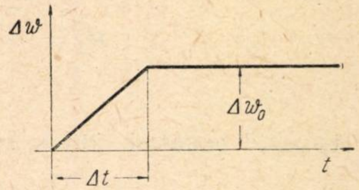


Fig. 7

Luînd pentru frecvența proprie o valoare aproximativă constantă de forma

$$\nu_{nm} = \nu_{n0} + k\,\Delta\,\omega_{0m}^2,$$

unde $\Delta\omega_{0m}$ este o valoare medie, atunci ecuația de mișcare a palei se scrie

$$\ddot{\zeta}_n + (a_0 + a_1 t)\,\dot{\zeta}_n + b\,\zeta_n = B_0 + B_1 t + B_2 t^2 + B_3 t^3, \tag{20}$$

unde

$$a_0 = \frac{\pi\,\rho\,\omega_0 \int_0^R t_p\, r\, \Phi_n(r)\,\mathrm{d}r}{M_n + \frac{\pi\rho}{4}\int_0^R t_p^2\,\Phi_n(r)\,\mathrm{d}r},$$

$$a_1 = \frac{\pi\rho\,\frac{\Delta\,\omega_0}{\Delta t}\int_0^R t_p\, r\,\Phi_n(r)\,\mathrm{d}r}{M_n + \frac{\pi\rho}{4}\int_0^R t_p^2\,\Phi_n(r)\,\mathrm{d}r},$$

$$b = \frac{M_n\,\nu_{nm}}{M_n + \frac{\pi\rho}{4}\int_0^R t_p^2\,\Phi_n(r)\,\mathrm{d}r},$$

$$B_0 = \frac{C_a'\,\frac{\rho}{2}\int_0^R \left(\omega_0^2\;\theta_0 - \frac{w_0}{r}\,\omega_0\right)\Phi_n(r)\,t_p\,r^2\,\mathrm{d}r}{M_n + \frac{\pi\rho}{4}\int_0^R t_p^2\,\Phi_n(r)\,\mathrm{d}r},$$

$$B_1 = \frac{C_a'\,\frac{\rho}{2}\int_0^R \left(2\,\omega_0\,\theta_0\,\frac{\Delta\,\omega_0}{\Delta t} + \omega_0^2\,\frac{\Delta\theta_0}{\Delta t} - \omega_0\,\frac{\Delta\,w_0}{r\,\Delta\,t} - w_0\,\frac{\Delta\,\omega_0}{r\,\Delta\,t)}\right)\Phi_n(r)\,t_p\,r^2\,\mathrm{d}r}{M_n + \frac{\pi\rho}{4}\int_0^R t_p^2\,\Phi_n(r)\,\mathrm{d}r};$$

$$B_2 = \frac{C_a' \frac{\rho}{2} \int_0^R \left(\theta_0 \frac{\Delta \omega_0^2}{\Delta t^2} + 2 \omega_0 \frac{\Delta \omega_0 \Delta \theta_0}{\Delta t^2} - \frac{\Delta \omega_0 \Delta w_0}{r \Delta t^2} \right) \Phi_n (r) t_p r^2 \mathrm{d} r}{M_n + \frac{\pi \rho}{4} \int_0^R t_p^2 \Phi_n (r) \mathrm{d} r},$$

$$B_3 = \frac{C_a' \frac{\rho}{2} \frac{\Delta \omega_0^2 \Delta \theta_0}{\Delta t^3} \int_0^R \Phi_n (r) t_p r^2 \mathrm{d} r}{M_n + \frac{\pi \rho}{4} \int_0^R t_p^2 \Phi_n (r) \mathrm{d} r}.$$

Aplicînd ecuației (20) transformata Laplace cu condițiile la limită

$$\zeta_n (0) = 0,$$
$$\dot{\zeta}_n (0) = 0,$$

avem

$$\mathbf{L}\ b \zeta_n = b X,$$
$$\mathbf{L}\ a_0 \dot{\zeta}_n = a_0 p X,$$
$$\mathbf{L}\ a_1 t \ddot{\zeta}_n = - a_1 p \frac{\mathrm{d} X}{\mathrm{d} p}.$$
$$\mathbf{L}\ \ddot{\zeta}_n = p^2 X,$$
$$\mathbf{L}\ B_n t^n = B \frac{n!}{p^n},$$

și după înlocuire obținem ecuația diferențială

$$\frac{\mathrm{d} X}{\mathrm{d} p} + P X = Q, \tag{21}$$

unde

$$P = - \left(\alpha_1 p + \alpha_2 + \alpha_3 \frac{1}{p} \right),$$

$$Q = - \frac{1}{a_1} \left(\frac{B_0}{p} + \frac{B_1}{p^2} + \frac{2 B_2}{p^3} + \frac{6 B_3}{p^4} \right),$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{a_1}, \quad \alpha_2 = \frac{a_0}{a_1}, \quad \alpha_3 = \frac{b}{a_1}.$$

Soluția ecuației (21) este

$$X = C p^{\alpha_3} \mathrm{e}^{\frac{\alpha_1}{2} p^2} \mathrm{e}^{\alpha_2 p} +$$
$$+ p^{\alpha_3} \mathrm{e}^{\frac{\alpha_1}{2} p^2} \mathrm{e}^{\alpha_2 p} \int \frac{1}{p^{\alpha_3} \mathrm{e}^{\frac{\alpha_1}{2} p^2} \mathrm{e}^{\alpha_2 p}} \left[- \alpha_1 \left(\frac{B_0}{p} + \frac{B_1}{p^2} + \frac{2 B_2}{p^3} + \frac{6 B_3}{p^4} \right) \right] \mathrm{d} p. \tag{22}$$

Dacă dezvoltăm în serie funcțiile exponențiale rezumîndu-ne la un anumit număr de termeni, deoarece α_3 nu este un număr întreg, primul termen al funcţiei X este o sumă de termeni de forma $k_j p^n$ (n diferit de 1, 2, 3) astfel încît transformata inversă este o sumă de termeni de forma $k_j \dfrac{t^{-n}}{\Gamma(1-n)}$. De aici rezultă o primă condiţie şi anume pentru ca amplitudinea vibraţiilor să tindă către zero, trebuie ca funcţia Γ să tindă la infinit, lucru care se întîmplă atunci cînd α_3 este un număr întreg.

În ceea ce priveşte al doilea termen, cu un număr foarte restrîns de termeni în dezvoltarea exponenţialei se poate calcula transformata inversă cu ajutorul teoremei lui Borel.

b. Efectul variaţiei ciclice a unghiului de calaj

Ca şi în cazul precedent, viteza unghiulară rămîne constantă ($\omega = \omega_0 = \text{ct.}$), însă amplitudinea variaţiei ciclice depinde liniar de timp. Unghiul de calaj va fi deci

$$\theta = \theta_0 + \Delta\theta \sin \omega t,$$

unde

$$\Delta\theta = \frac{\Delta\theta_0}{\Delta t}\, t.$$

Ecuaţia de mişcare a palei este

$$\ddot{\zeta}_n + a\,\dot{\zeta}_n + b\,\zeta_n = \bar{\beta}_0 + q_1(t), \tag{23}$$

unde mărimile a, b şi β_0 au aceleaşi expresii ca şi cele ale ecuaţiei (12) iar $q_1(t)$ are expresia

$$q_1(t) = \frac{C'_a \dfrac{\rho}{2}\,\omega^2 \dfrac{\Delta\theta_0}{\Delta t} \displaystyle\int_0^R \Phi_n(r)\, t_p\, r^2\, \mathrm{d}r}{M_n + \dfrac{\pi\rho}{4} \displaystyle\int_0^R \Phi_n(r)\, t_p^2\, \mathrm{d}r}\, t \sin \omega t =$$

$$= \frac{C'_a \rho\, \omega^3 \dfrac{\Delta\theta_0}{\Delta t} \displaystyle\int_0^R \Phi_n(r)\, t_p\, r^2\, \mathrm{d}r}{M_n + \dfrac{\pi\rho}{4} \displaystyle\int_0^R \Phi_n(r)\, t_p^2\, \mathrm{d}r} \cdot \frac{t}{2\omega} \sin \omega t = q_0 \frac{t}{2\omega} \sin \omega t.$$

Transformarea Laplace, cu condiţiile iniţiale

$$\zeta_n(0) = \zeta_0,$$
$$\dot{\zeta}_n(0) = 0,$$

aplicată ecuaţiei (23) ne conduce, urmînd absolut aceeaşi cale ca şi în cazul anterior, la funcţia imagine

$$\begin{aligned} X = {} & \zeta_0 \frac{p^2}{p^2 + 2Bp + C^2} + 2B\zeta_0 \frac{p}{p^2 + 2Bp + C^2} + \\ & + \frac{\beta_0}{p^2 + 2Bp + C^2} + q_0 \frac{p^2}{(p^2 + \omega^2)^2 (p^2 + 2Bp + C^2)}, \end{aligned} \tag{24}$$

unde $a = 2B$ şi $b = C^2$.

Problema găsirii transformatei inverse se pune doar pentru ultimul termen pe care îl scriem sub forma

$$q_0 \frac{p^2}{(p^2+\omega^2)^2\,(p^2+2Bp+C^2)} = \frac{q_0 \dfrac{p^3}{(p^2+\omega^2)^2} \cdot \dfrac{1}{p^2+2\,Bp+C^2}}{p}$$

şi pentru care vom aplica teorema lui Borel.

Deoarece

$$\mathbf{L}^{-1}\, q_0 \frac{p^3}{(p^2+\omega^2)^2} = \frac{q_0}{2\,\omega}\,(\sin \omega t + \omega t \cos \omega t)$$

luînd transformata inversă a mărimii

$$\frac{1}{p^2+2\,Bp+C^2}$$

din cazul tratat mai înainte, vom avea dacă $C^2 > B^2$

$$\mathbf{L}^{-1}\, \frac{q_0 \dfrac{p^3}{(p^2+\omega^2)^2} \cdot \dfrac{1}{p^2+2\,Bp+C^2}}{p} = \int_0^t \{\bar{u}\,[\sin\omega\,(t-T) + \tag{25}$$

$$+\ \omega\,(t-T)\cos\omega(t-T) - \bar{v}\,\mathrm{e}^{-Bt}\sin(kT+\Phi)\,[\sin\omega\,(t-T) +$$

$$+\ \omega\,(t-T)\cos\omega\,(t-T)]\}\,\mathrm{d}T,$$

unde

$$k = \sqrt{C^2-B^2},\quad \bar{u} = \frac{q_0}{2\omega C^2},\quad \bar{v} = \frac{q_0}{2\omega Ck}.$$

În cazul cînd $C^2 < B^2$ vom avea, notînd cu

$$\bar{\gamma}_1 = \frac{q_0}{2\omega\Lambda_1\,(\Lambda_1-\Lambda_2)},\quad \bar{\gamma}_2 = \frac{q_0}{2\,\omega\,\Lambda_2\,(\Lambda_1-\Lambda_2)},$$

$$\mathbf{L}^{-1}\, \frac{q_0 \dfrac{p^3}{(p^2+\omega^2)^2} \cdot \dfrac{1}{p^2+2\,Bp+C^2}}{p} =$$

$$= \int_0^t \{\bar{u}\,[\sin\omega\,(t-T) + \omega\,(t-T)\cos\omega\,(t-T)] +$$

$$+\ \bar{\gamma}_1\,\mathrm{e}^{-\Lambda_1 T}\,[\sin\omega\,(t-T) + \omega\,(t-T)\cos\omega\,(t-T)] -$$

$$-\ \bar{\gamma}_2\,\mathrm{e}^{-\Lambda_2 T}\,[\sin\omega\,(t-T) + \omega\,(t-T)\cos\omega\,(t-T)]\}\,\mathrm{d}T.$$

Ca o concluzie generală se poate remarca faptul că vibraţiile rezultate ca efect al comenzii se atenuează cu atît mai mult cu cît amortizarea şi frecvenţa proprie a palei sînt mai mari.

În cazul variației în salt brusc sau în treaptă oblică a unghiului colectiv de calaj, se constată că trebuie îndeplinite condiții speciale de către amortizarea palei.

Primită la redacție la 30 aprilie 1963

EFFET DE LA COMMANDE AUX PALES ÉLASTIQUES D'UN ROTOR D'HÉLICOPTÈRE

RÉSUMÉ

L'auteur procède à l'étude du problème des vibrations forcées de la pale d'un rotor d'hélicoptère, où les forces perturbatrices sont dues à l'effet de la commande (à la variation avec le temps de l'angle collectif de placement, respectivement à l'amplitude de la variation cyclique). Il prend en considération aussi bien l'effet de la commande par saut brusque, que l'effet de la commande graduelle oblique.

Dans tous les cas, il fait l'intégration des équations de mouvement de la pale, au moyen de la transformation de Laplace, et indique les conditions nécessaires pour que ces vibrations s'atténuent ou même qu'elles n'apparaissent pas.

BIBLIOGRAFIE

1. AL. MARINESCU, *Teoria elicopterului*. Edit. Acad. R.P.R., București, 1960.
2. — *Vibrațiile palelor rotoarelor reactive de elicopter*. St. cerc. mec. apl., *6* (1962).
3. M. DENIS PAPIN, A. KAUFMANN, *Cours de Calcul Opérationnel*. Editions Albin Michel, Paris, 1950.

STUDII

DETERMINAREA PROPRIETĂȚILOR ELASTICE ALE ROCILOR SEDIMENTARE PRIN METODE ULTRASONICE

DE

H. PASCAL

552 : 534

1. Importanța cunoașterii proprietăților elastice ale rocilor sedimentare a căpătat în prezent o unanimă recunoaștere, în ceea ce privește utilitatea practică. Astfel, în construcția barajelor, unde se pune problema asigurării stabilității acestora, apare necesar să diferențiem rocile după elasticitatea lor. De asemenea, în cazul determinării structurilor geologice, cu ajutorul metodei de prospectare seismică, cunoașterea vitezei de propagare a undelor elastice longitudinale în roci, precum și a impedanței geoacustice, permite estimarea adîncimilor limitelor geologice reflectatoare, asigurînd construirea corectă a secțiunii geologice.

În afară de cele arătate mai sus, interpretarea geologică a anomaliilor vitezei de propagare apărute în sondele investigate geofizic, prin metoda carotajului sonic, reclamă stabilirea influenței factorilor petrografici asupra proprietăților elastice. În acest mod, se pot obține informații foarte utile pentru interpretarea cantitativă a dependenței proprietăților elastice față de porozitate, densitate, litologie și textura rocii.

Utilizarea metodelor nedestructive, bazate pe măsurarea vitezei de propagare a ultrasunetului, s-a dovedit foarte utilă în scopul determinării modulelor de elasticitate, longitudinal și transversal, și a coeficientului lui Poisson.

Aplicarea rezultatelor obținute în laborator, în cazul determinării vitezelor de propagare, pentru condițiile existente in situ, este legată de dificultățile aferente efectului presiunii, temperaturii și al neomogenității rocilor sedimentare. Din acest motiv, rocile ale căror proprietăți elastice trebuie determinate implică măsurarea vitezei de propagare a ultrasunetului, supunînd eșantionul la presiunea și temperatura existentă in situ, a căror valori sînt în general greu de estimat. Dacă adîncimile sînt relativ mici, atunci efectul presiunii şi temperaturii devine neglijabil pentru rocile de o anumită litologie.

Pe de altă parte, măsurătorile efectuate pe eşantioane, colectate din sondele carotate mecanic, sau din aflorimente, au dimensiuni foarte mici, comparativ cu distanţele parcurse de undele elastice, întîlnite de obicei în prospecţiunea seismică, şi în acest caz se introduc de asemenea erori suplimentare, ţinînd seama de existenţa unei mari neomogenităţi. În afară de aceasta, vitezele măsurate pe eşantioane, în cazul utilizării metodei prin impuls, trebuie să fie comparate cu cele din situ şi în consecinţă dimensiunile geometrice ale acestora urmează să fie astfel alese încît efectul dispersiei ultrasunetului să fie neglijabil, respectiv să ne situăm în domeniul unde viteza de propagare este independentă de frecvenţă.

În lucrarea de faţă vom examina unele aspecte ale problemelor menţionate mai sus, mai ales în vederea elucidării posibilităţilor aplicării rezultatelor măsurătorilor efectuate în condiţii de laborator pentru cele existente in situ. În acest scop, s-au efectuat un număr de circa 1 000 determinări ale vitezei de propagare a undelor longitudinale şi ale proprietăţilor fizice, pe eşantioane de roci, colectate din formaţiunile geologice ale R.P.R., prezentînd o mare varietate litologică, ceea ce a permis să obţinem, într-o primă aproximaţie, cîteva concluzii asupra domeniului de aplicabilitate a măsurătorilor de elasticitate obţinute prin metoda ultrasunetului şi să studiem dependenţa vitezei faţă de factorii fizici.

2. Asupra alegerii dimensiunilor eşantioanelor. În cele ce urmează vom expune consideraţiile care au stat la baza alegerii dimensiunilor geometrice ale eşantioanelor.

În teoria propagării tridimensionale a undelor elastice într-un corp omogen şi izotrop, admiţînd validitatea legii lui Hooke şi absenţa disipării energiei, se arată că viteza de propagare a undelor longitudinale într-un mediu infinit are forma

$$v_M = \sqrt{\frac{E}{\rho} \cdot \frac{1-\sigma}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}} \qquad (1)$$

iar în cazul mediului finit, de exemplu, o placă cu limitele libere,

$$v_p = \sqrt{\frac{E}{\rho} \cdot \frac{1}{1-\sigma}} \quad . \qquad (2)$$

Cînd ne referim la situaţia unei bare subţiri, unde dimensiunile transversale se presupun neglijabile, comparativ cu cele longitudinale, expresia vitezei devine

$$v_b = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad . \qquad (3)$$

În ceea ce privește viteza undelor transversale, aceasta se obține din ecuația

$$v_t = \sqrt{\frac{G}{\rho}},$$

unde E reprezintă modulul de elasticitate longitudinal, ρ masa specifică, σ coeficientul lui Poisson și G modulul transversal.

Ecuațiile redate mai sus sînt obținute în ipoteza propagării undelor armonice și de aceea valorile obținute corespund vitezei de fază, adică viteza cu care se propagă faza undei monocromatice. Prin urmare, în cazul vibrațiilor armonice viteza de deplasare a undelor longitudinale are o valoare constantă, care depinde de coeficientul de elasticitate al rocii și de masa specifică.

Este ușor de observat că determinarea valorii vitezei ultrasunetului în corpul nelimitat și într-o bară cilindrică subțire permite să putem stabili, în conformitate cu ecuațiile (1) și (3), valorile coeficienților de elasticitate din următoarea ecuație

$$\left(\frac{v_M}{v_b}\right)^2 = \frac{1-\sigma}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}, \qquad (4)$$

sau dacă notăm cu a raportul dintre vitezele undei longitudinale și transversale, rezultă ecuațiile

$$\sigma = \frac{a^2-2}{2\,(a^2-1)}, \qquad (5)$$

$$E = 2\rho \left(\frac{v_l}{a}\right)^2 \frac{3a^2-4}{2(a^2-1)},$$

v_l fiind viteza undelor longitudinale.

Dacă viteza de propagare este determinată pe baza măsurării timpului necesar deplasării impulsului elastic în eșantion, atunci valoarea obținută reprezintă viteza de grup, care corespunde vitezei de propagare a amplitudinii impulsului, sau a energiei trasportată de acesta.

Deoarece impulsul ultrasonic prezintă un spectru continuu, acesta poate fi reprezentat printr-o integrală Fourier, pentru seria infinită de componente sinusoidale, de frecvențe diferite, și în consecință rezultă că fiecare dintre acestea se vor propaga cu o viteză de fază diferită. Din acest motiv, propagarea impulsului elastic printr-o rocă va fi însoțită de o dispersie geometrică care provoacă modificarea formei acesteia de-a lungul eșantionului, respectiv conduce la variația vitezei de fază sau de grup cu frecvența.

Soluționarea problemei alegerii dimensiunilor eșantioanelor cilindrice implică deci cunoașterea dependenței vitezei în funcție de frecvență. Această problemă a făcut obiectul unui mare număr de lucrări teoretice şi experimentale [1], [2], [3], [4] şi [5]. Pentru bara cilindrică de lungime infinită, în cazul mediului omogen şi perfect elastic, soluţia a fost obţinută de Pochhammer pentru undele armonice, considerînd ecuaţiile echilibrului elastic şi în ipoteza neglijării disipării energiei.

Pe de altă parte, rocile sedimentare prezintă o structură poroasă şi fisurală avînd coeficienţii de atenuare foarte mari, ceea ce arată că absorbţia este foarte puternică şi prin urmare în afară de dispersia geometrică mai apare şi cea datorită propagării impulsului printr-un mediu disipativ. Astfel, rocile sedimentare se comportă în general ca un filtru acustic trece jos unde absorbţia are un caracter selectiv. Este evident că componentele armonice de frecvenţă mare ale impulsului vor fi mai atenuate, comparativ cu cele de frecvenţă joasă, şi în consecinţă componenţa spectrală va varia de-a lungul eşantionului. Această modificare a impulsului joacă de asemenea un rol imporant pentru rocile sedimentare cu o structură poroasă, sau fisurală, manifestîndu-se printr-un efect suplimentar, în ceea ce priveşte variaţia vitezei cu frecvenţa.

Din cele de mai sus rezultă că teoria lui Pochhammer nu permite rezolvarea exactă a stabilirii influenţei dimensiunilor geometrice ale eşantioanelor, în cazul rocilor puternic absorbante, asupra variaţiei vitezei de propagare cu frecvenţa.

Dat fiind dificultăţile matematice mari întîlnite în soluţionarea ecuaţiilor, ţinînd seama de imperfecţiunea elastică şi de neomogenitate, rezultatele obţinute de Pochhammer reprezintă o primă aproximaţie pentru alegerea dimensiunilor eşantionului, în cazul rocilor sedimentare, astfel încît efectul dispersiei să devină neglijabil.

Formele simplificate ale ecuaţiilor de frecvenţă, care exprimă variaţia vitezei de fază, respectiv de grup, în funcţie de raportul dintre diametrul şi lungimea de undă, sînt

$$\frac{v_f}{v_b} = 1 - \sigma^2 \pi^2 \left(\frac{d}{\lambda}\right)^2, \tag{6}$$

$$\frac{v_g}{v_b} = 1 - 3\sigma^2 \pi^2 \left(\frac{d}{\lambda}\right)^2, \tag{7}$$

unde d este diametrul, λ lungimea de undă, v_f viteza de fază şi v_g viteza de grup.

Cu ajutorul ecuaţiilor de mai sus apare posibilitatea alegerii diametrului eşantionului, presupunînd pentru coeficientul lui Poisson o anumită valoare în funcţie de tipul litologic [1]), atunci cînd traductoarele piezoelectrice utilizate au o caracteristică de frecvenţă cunoscută, astfel încît termenul $\sigma^2 \pi^2 \left(\frac{d}{\lambda}\right)^2$ să devină neglijabil, comparativ cu unitatea. În afară de aceasta, utilizarea impulsului cu durată mare de timp reduce lărgimea spectrului şi permite recepţionarea, pentru anumite traductoare, a componentelor de frecvență joasă, respectiv de lungime de undă mare. În felul acesta viteza de grup, sau de fază, devine egală cu cea dată de ecuația (3), dedusă pe baza neglijării inerției datorită mișcării transversale și în ipoteza că fiecare secțiune a barei rămîne plană în timpul mișcării.

---

[1]) Coeficientul lui Poisson în cazul rocilor sedimentare variază : $0,1 < \sigma < 0,35$.

O altă problemă întîlnită de obicei în cazul măsurătorilor efectuate pe eșantioane, de dimensiuni relativ mici, implică condiția ca valorile determinate să fie comparabile cu cele existente in situ, unde viteza care ne interesează trebuie să corespundă propagării undei într-un mediu infinit, sau într-o placă.

Rezultatele obținute în lucrările [3], [4] și [5] arată că impulsul, ale cărui componente armonice au o lungime de undă mult mai mare față de diametrul eșantionului, se va propaga cu o viteză de grup, pentrul undele longitudinale, care tinde către valoarea corespunzătoare propagării într-un masiv, respectiv către valoarea obținută din ecuația (1). Prin urmare, undele longitudinale se pot propaga într-un eșantion, în funcție de raportul $\frac{d}{\lambda}$, cu două viteze și anume : viteza care corespunde mediului infinit, sau cea dintr-o bară subțire. Experimentele efectuate prin metoda impulsului au confirmat apariția celor două viteze pentru eșantioanele din alamă și aluminiu, respectiv pentru materialele omogene și puțin absorbante. Astfel, s-a obținut apariția undei longitudinale care se propagă cu viteza de bară cînd $\frac{d}{\lambda} < 0{,}17$ și unda care se propagă cu viteza de masiv, pentru $\frac{d}{\lambda} > 1$.

Apariția undei care se propagă cu viteza de masiv într-o bară subțire nu rezultă din teoria lui Pochhammer, întrucît în conformitate cu ecuația de frecvență, obținută pentru undele armonice, rezultă că energia într-o bară subțire nu se poate propaga cu o viteză mai mare decît cea dată de ecuația (3). Datorită acestui fapt, aplicarea teoriei lui Pochhammer în cazul propagării impulsului, pentru raportul $\frac{d}{\lambda} > 1$, devine prohibitivă.

Pentru rocile sedimentare, unde proprietățile reologice ale acestora variază într-o gamă largă, iar relația dintre efort și deformație nu este liniară, determinarea raportului $\frac{d}{\lambda}$ care asigură apariția undei cu viteză de masiv este legată de mari dificultăți. Pe de altă parte, chiar în cazul barelor de metale undele recepționate prezintă un tablou ondulatoriu destul de complex, din punct de vedere al interpretării, fiind greu de identificat unda cu viteza din masiv, comparativ cu cea de bară.

Față de cele arătate mai sus, rezultă că problema alegerii dimensiunilor eșantioanelor de roci trebuie să fie soluționată prin încercări, dispunînd de o gamă largă de traductoare cu frecvențe de rezonanță foarte variate și care să permită adaptarea acestora la toate tipurile litologice întîlnite in situ.

3. Aparatura și metodica utilizată. Pentru măsurarea timpului parcurs de unda elastică în eșantionul de rocă s-a utilizat seismoscopul I.P.A., redat în figura 1, special construit în acest scop. Aparatul se compune dintr-un generator de impulsuri electrice dreptunghiulare, traductori piezoelectrici de titanat de bariu și receptorul de semnale electrice.

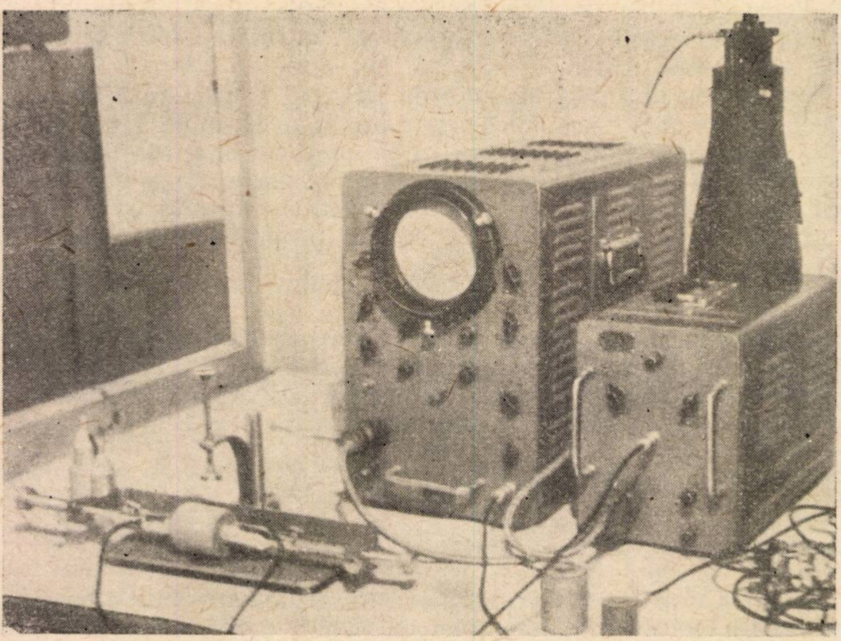


Fig. 1

Generatorul emite impulsuri cu o frecvență de repetiție de 50 Hz, avînd tensiuni de 250, 500 și 1 000 V și durate variind între 5, 10, 15, 20 și 25 μs. Impulsurile electrice sînt transmise traductorului piezoelectric, avînd o frecvență de rezonanță de 70 kHz care, excită partea frontală a eșantionului de formă cilindrică. Ultrasunetul generat de traductor se propagă în eșantion fiind recepționat de un traductor identic cu cel de excitație. Semnalul electric recepționat se aplică, după amplificare, plăcilor verticale ale oscilografului catodic, cu baza de timp declanșată de generator. Semnalul electric recepționat apare deci pe ecranul tubului catodic cu o întîrziere, corespunzătoare timpului necesar parcurgerii ultrasunetului prin eșantion. Deoarece oscilograful are desfășurări în timp de 50, 100, 200, 500 și 1 000 μs s-a putut acoperi o gamă largă de măsurători pe eșantioane de lungimi și viteze foarte variate.

Decalajul de timp dintre impulsul emis, marcat pe ecran prin kikul respectiv, și cel recepționat se citește cu ajutorul unui marcator de timp avînd intervale de 2 și 10 μs. Seismoscopul permite de asemenea depla-

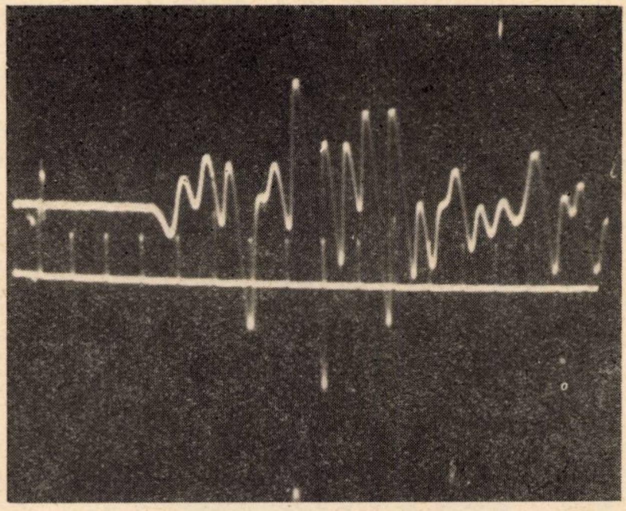


Fig. 2

sarea către originea axei timpului a impulsului recepţionat, astfel încît acesta să poată fi vizualizat în detaliu, pentru toate bazele de timp, reglînd printr-un circuit de întîrziere momentul declanşării baleiajului seismoscopului.

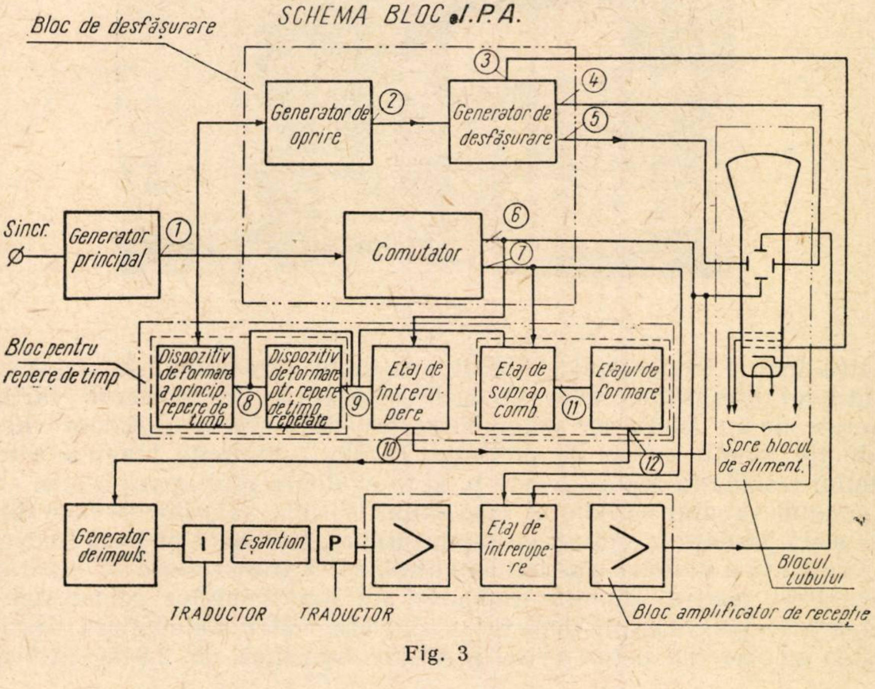

SCHEMA BLOC I.P.A.
Bloc de desfășurare
Generator de oprire
②
Generator de desfășurare
③
④
⑤
Sincr.
Generator principal
①
Comutator
⑥
⑦
Bloc pentru repere de timp
Dispozitiv de formare a princip. repere de timp
⑧
Dispozitiv de formare ptr. repere de timp repetate
⑨
Etaj de întrerupere
⑩
Etaj de suprap. comb.
⑪
Etajul de formare
⑫
Spre blocul de aliment.
Blocul tubului
Generator de impuls.
I
Eșantion
P
Etaj de întrerupere
TRADUCTOR
TRADUCTOR
Bloc amplificator de recepție

Fig. 3

În figura 2 este redată seismograma obținută pe o rocă calcaroasă, iar în figura 3 este arătată schema electrică bloc a aparatului.

Verificarea funcționării normale a seismoscopului s-a realizat cu ajutorul unui etalon de alamă de viteză cunoscută.

Un alt aparat utilizat pentru determinarea constantelor elastice este E. G. Metter, arătat în figura 4. Aparatul permite stabilirea modulului longitudinal şi transversal utilizînd principiul rezonanței. În acest scop, eşantionul este supus unor oscilații sinusoidale de frecvență variabilă generate de un traductor magnetostrictiv care sînt recepționate de un traductor identic cu cel de excitație. Pentru o anumită lungime a eşantionului rezonanța realizată este pusă în evidență prin apariția unei elipse pe ecranul tubului catodic al aparatului. Citirea valorilor se face direct, pe o scară gradată în unități corespunzătoare, etalonată pe baza frecvenței de rezonanță a undelor elastice longitudinale şi transversale în eşantioane prismatice, pentru anumite rapoarte ale dimensiunilor geometrice. În ceea ce priveşte caracteristicile fizice utilizate pentru etalonarea aparatului, acestea au fost din beton avînd greutatea specifică de 2,6 kg/dm^3 şi un

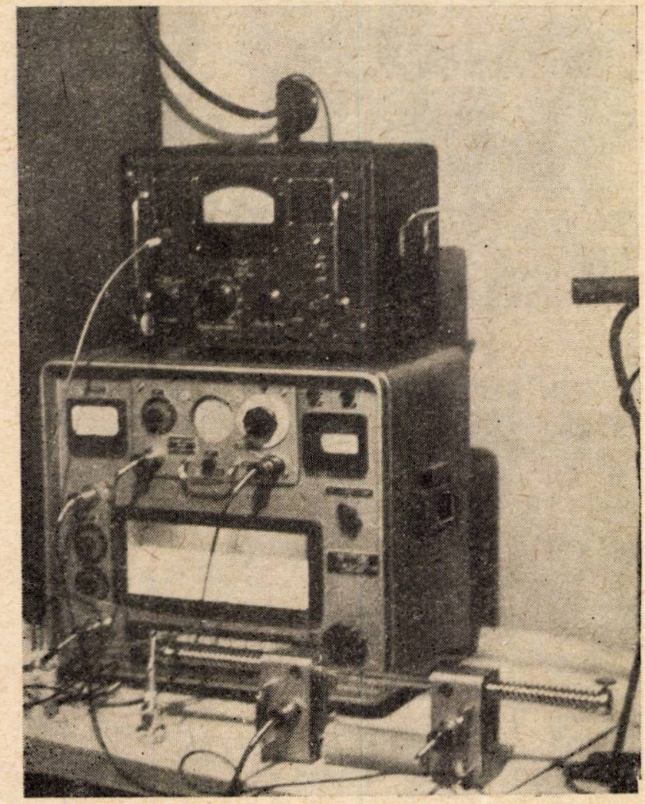


Fig. 4

Poisson de 0,167. Din acest motiv, utilizarea scării nu a fost posibilă, întrucît rocile sedimentare prezintă o mare varietate litologică și în consecință o variație mare a proprietăților lor fizice. Acest fapt a impus măsurarea directă a frecvenței de rezonanță care s-a efectuat cu un frecvențmetru special adaptat. În felul acesta a devenit posibilă extinderea domeniului de utilizare a aparatului și în cazul rocilor sedimentare. În acest scop, s-au aplicat, pentru determinarea modulelor de elasticitate, relațiile cunoscute din teoria elasticității, referitoare la oscilațiile armonice ale barelor cilindrice în cazul rezonanței, ținînd seama de valorile reale ale proprietăților fizice și de dimensiunile geometrice ale eșantioanelor utilizate.

Deoarece relațiile folosite sînt deduse admițînd mediul de propagare perfect elastic și presupunînd că acesta este omogen și izotrop, valorile obținute în cazul rocilor vor fi bineînțeles afectate de erorile aferente abaterii de la aceste ipoteze. Trebuie menționat că în general rocile sedimentare sînt foarte neomogene, după cum vom arăta mai departe.

Dificultatea principală întîmpinată la determinarea frecvenței de rezonanță a celor trei tipuri de unde, care pot fi generate așezînd traductorii pe eșantion într-o poziție corespunzătoare, constă în apariția unor rezonanțe parazite, introduse datorită deformării semnalului, stabilității contactului și a altor factori. Selectarea rezonanței reale, respectiv cea a frecvenței fundamentale, din fondul rezonanțelor observate pe tubul catodic, a fost realizată după ce în prealabil s-a determinat domeniul de apariție a acesteia. În acest sens, au fost măsurate valorile vitezelor de propagare prin metoda impulsului și prin aplicarea relațiilor cunoscute care exprimă relația dintre viteza și frecvența de rezonanță, pentru o lungime dată. Astfel, rezonanța undelor longitudinale apare la o frecvență rezultată din ecuația

$$v = 2lf \tag{8}$$

iar pentru undele de încovoiere

$$v = 0{,}25lf, \tag{9}$$

unde l reprezintă lugimea eșantionului și f frecvența de rezonanță a undei de întindere, sau de încovoiere.

Dacă condiția $d > \lambda$ este satisfăcută, atunci eliminînd din ecuația (3) valoarea vitezei, cu ajutorul ecuației (8), avem pentru modulul de elasticitate longitudinal următoarea ecuație

$$E = \frac{4\, l^2 f^2 \gamma}{g}, \tag{10}$$

γ fiind greutatea specifică a rocii și g accelerația gravitații.

Valoarea determinată din ecuația (10), respectiv prin metoda rezonanței ultrasunetului într-un eșantion cilindric, reprezintă modulul dinamic. După cum s-a observat, în general, pentru același eșantion de rocă valoarea modulului obținut prin metoda ultrasunetului diferă mult de cea determinată în mod static [6].

Deoarece noțiunea de modul are la bază validitatea legii lui Hooke, care exprimă variația liniară a efortului unitar în funcție de deformație, atunci în cazul rocilor sedimentare, care nu sînt perfect elastice, va exista o abatere importantă, comparativ cu situația ideală. Pentru majoritatea tipurilor litologice timpul de relaxare este relativ mare și aceasta confirmă comportarea reologică observată, a cărei formă este neliniară. Din acest motiv, în acest caz trebuie să introducem valoarea instantanee a modulului care să corespundă valorii efortului unitar utilizat în măsurători. Pe de altă parte, cînd determinarea se face static sarcina aplicată este foarte mare, față de cea rezultată din acțiunea ultrasunetului asupra eșantionului, care este armonică, efortul schimbîndu-și sensul. Astfel, trebuie menționat că curba caracteristică efort-deformare obținută prin metoda statică, pentru o gresie, reprezintă o formă neliniară, unde în porțiunea inițială se remarcă o curbură mai pronunțată decît în rest. Prin urmare, valoarea modulului va depinde bineînțeles de intensitatea sarcinii, precum și de faptul că aceasta se aplică dinamic și nu static.

Din cele de mai sus rezultă că diferențele apărute sînt explicabile, dacă ținem seama că în cazul ultrasunetului ne situăm pe porțiunea inițială a curbei caracteristice, efortul fiind foarte mic, pe cînd în metoda statică eforturile utilizate ne situează pe porțiunea de mijloc a curbei. O altă cauză, care poate de asemenea contribui la diferențele observate, poate fi atribuită faptului că procesul de deformare în cazul ultrasunetului este adiabatic, iar în cazul static izotermic.

În general, trebuie menționat că descrierea cantitativă a comportării reologice a rocilor sedimentare este foarte dificilă, mai ales datorită structurii poroase și fisurale.

4. **Rezultatele obținute.** În scopul obținerii, pe cît posibil, a unui material experimental cît mai complet s-a efectuat un volum mare de măsurători (circa 1 000) ale vitezei de propagare a undelor elastice longitudinale și paralel cu acestea au fost determinate și proprietățile fizice ale eșantioanelor utilizate, și anume porozitatea, densitatea și rezistivitatea electrică.

Eșantioanele de roci au avut diametrul mult mai mare decît lungimea de undă predominantă a semnalului acustic, generat de traductor, și de aceea valoarea măsurată reprezintă viteza de masiv. Pentru a asigura o cît mai bună interpretare a dependenței vitezei față de porozitate, densitate și alți factori, materialul a fost astfel ales încît să fie acoperită o mare varietate litologică. În acest sens, rocile au fost colectate atît din aflorimente cît și din sonde, provenite din diferite formațiuni geologice ale R.P.R., avînd vîrste și litologii foarte variate.

În cele ce urmează vor fi analizați factorii care au o influență importantă asupra proprietăților elastice ale rocilor, mai ales asupra vitezei de propagare.

Deoarece rocile sedimentare prezintă în general un plan de stratificație, s-a măsurat, în cazul cînd acesta era vizibil, vitezele după cele două direcții : paralelă și perpendiculară pe stratificație.

Valorile raportului dintre cele două viteze, cunoscut în literatură sub denumirea de coeficient de cvasianizotropie, sînt redate în tabela 1.

Tabela 1

Platforma Moezică şi Depresiunea Getică

Adîncimea	Litologia	Vîrsta	$v_{\parallel}$ m/s	$v_{\perp}$ m/s	Coeficientul de cvasianizotropie $v_{\parallel}/v_{\perp}$
1 125—1 126	marno-calcar	albian	3 525	2 625	1,34
1 135—1 137	marnă	ponţian	2 070	1,620	1,28
200— 202	marnă	meoţian	2 525	1 780	1,41
2 631—2 633	gresie	albian	3 810	2 465	1,55
1 590—1 592	gresie	albian	3 045	2 500	1,22
900— 902	marnă	sarmaţian	3 925	3 400	1,15
818— 821	marnă	meoţian	2 752	1 720	1,60
1 200—1 202	marnă	sarmaţian	2 962	2 165	1,37
1 040—1 042	calcar	senonian	3 622	3 275	1,11
1 127—1 128	calcar	sarmaţian	4 925	4 700	1,05
1 320—1 321	calcar	senonian	3 670	3 325	1 10
1 251—1 253	gresie	helveţian	2 320	1 695	1,37
3 091—3 092	marnă-calc.	albian	4 505	4 415	1,02
1 094—1 097	marnă	sarmaţian	2 312	1 255	1,84
1 130—1 131	marnă	sarmaţian	2 435	1 215	2,00
1 800—1 801	gresie	sarmaţian	2 595	1 765	1,47
1 926—1 927	gresie	dogger	1 685	1 550	1,09
1 101—1 104	argilă	sarmaţian	1 200	895	1,34
1 900—1 903	gresie	dogger	2 740	2 035	1,34
1 912—1 915	gresie	dogger	1 760	1 650	1,07
1 599—1 600	calcar	cretacic inf.	3 727	3 215	1,16
1 922—1 923	gresie marnoasă	dogger	3 107	2 110	1,47
1 500—1 501	clacar	albian	3 750	3 235	1,16
3 210—3 212	nisip	dogger	1 605	1 315	1,22
1 480—1 483	calcar	albian	3 380	3 055	1,10
1 175—1 176	calcar	senonian	3 745	2 230	1,68
2 299—2 302	gresie	triasic	2 355	2 005	1,18
835— 841	marnă	meoţian	3 207	2 865	1,12
2 847—2 849	gresie	dogger	2 498	1 795	1,39
3 142—3 143,5	argilă	triasic	3 895	2 435	1,60
1 223—1 224	gresie	helveţian	1 975	1 900	1,04
1 321—1 323	calcar	cretacic inf.	4 602	4 115	1,12
1 115—1 116	calcar	cretacic inf.	3 852	3 410	1,13
1 044—1 044,5	gresie	eocen	2 850	2 750	1,04
2 185—2 187	calcar	senonian	5 440	4 610	1,18
2 230—2 232	gresie	albian	3 160	2 350	1,34
1 668—1 669	calcar	senonian	4 145	3 010	1,38
1 202,4—1 203	gresie	oligocen	1 318	1 250	1,05
1 301—1 305	gresie	miocen	1 875	1 500	1,25
1 513—1 514	gresie	oligocen	1 875	1 666	1,12
1 521—1 528	argilă	senonian	2 142	1 875	1,14
217,3—218	gresie	helveţian	2 071	1 318	1,57
1 752—1 753	gresie	miocen	2 142	1 500	1,43
1 121—1 122	argilă	miocen inf.	2 500	2 225	1,12
1 092—1 092,6	conglomerat	oligocen	2 500	1 875	1,33

După cum rezultă din tabelă coeficientul de cvasianizotropie depinde de gradul de stratificaţie al rocii. Pe de altă parte, rocile aparţinînd aceleiaşi grupe litologice manifestă o variaţie sensibilă a cvasianizotropiei pentru vîrste diferite. Astfel, se observă o mărire a raportului dintre viteze, o dată cu creşterea adîncimii de unde au fost colectate eşantioanele, obţinîndu-se valori mult mai mari, comparativ cu adîncimile mici. De asemenea, se remarcă că rocile de aceeaşi vîrstă, dar aparţinînd unor grupe litologice diferite, se caracterizează printr-o variaţie sensibilă a cvasianizotropiei. Cum în general rocile vechi se găsesc la adîncimi mai mari, comparativ cu cele tinere, atunci aceste variaţii pot fi explicate în primul rînd datorită influenţei presiunii litostatice, mai ales pentru marne şi argile [8]. Dat fiind dependenţa vitezei de porozitate, litologie şi alţi factori, rezultă că elucidarea completă a problemei variaţiei cvasianizotropiei observate va necesita o analiză complexă a tuturor factorilor menţionaţi.

Un alt aspect urmărit în mod special a fost acela al neuniformităţii proprietăţilor elastice ale rocilor sedimentare. În acest scop, au fost efectuate determinări de viteză, densitate, impedanţă geoacustică, rezistivitate precum şi de porozitate, pe eşantioanele colectate din sonde, carotate relativ continuu pe anumite intervale, de la anumite adîncimi.

În figurile 5—12 sînt redate profilele acestor proprietăţi în funcţie de adîncimea sondei, determinate în condiţii de laborator, precum şi histogramele acestora pentru un calcar de vîrstă cretacită, carotat de la 1 400—1 800 m.

Din grafice putem remarca variaţia neuniformă a proprietăţilor elastice şi fizice datorită neomogenităţii şi anizotropiei. Dacă ţinem

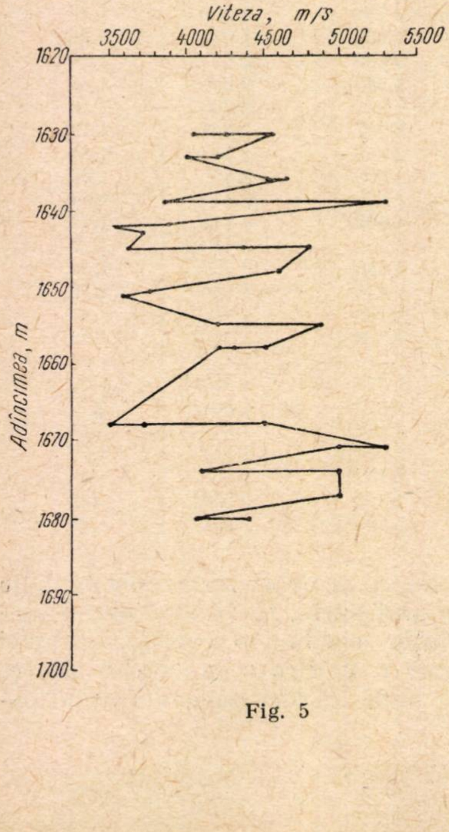


Fig. 5

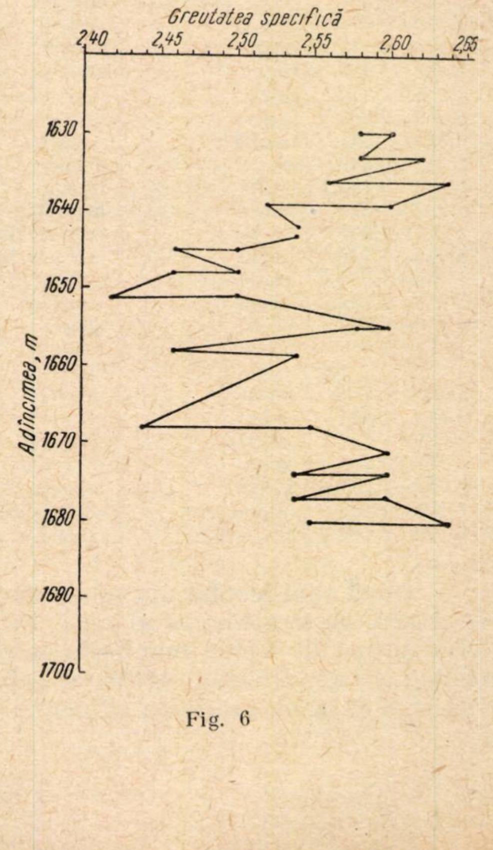


Fig. 6

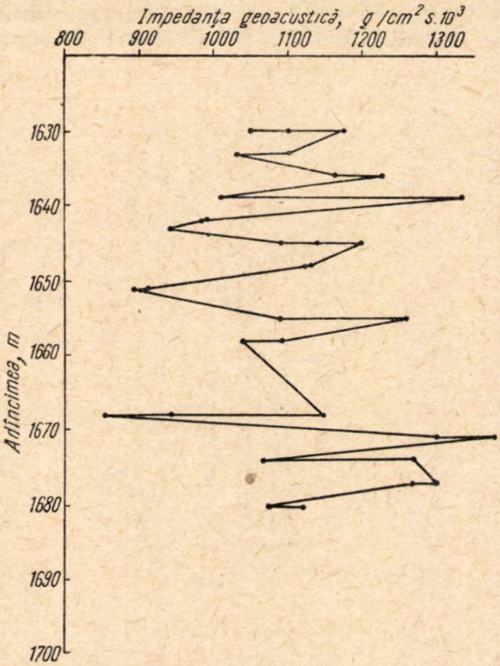


Fig. 7

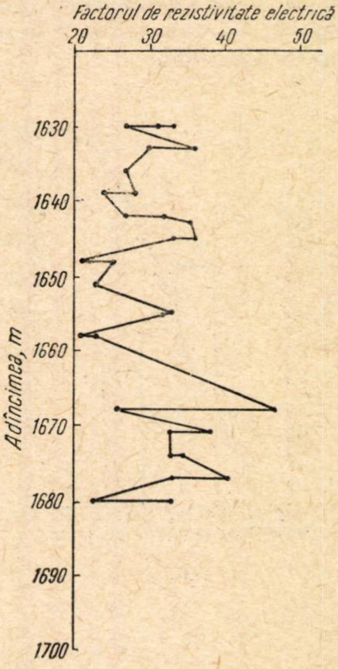


Fig. 8

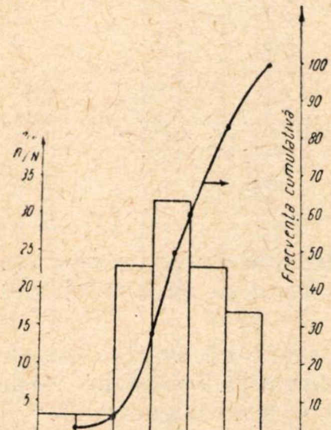


Fig. 9

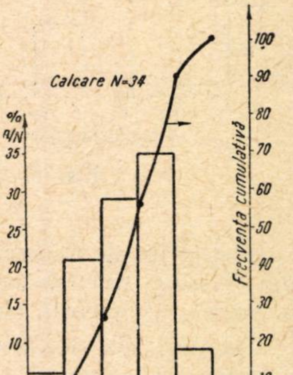


Fig. 10

seama că rocile sedimentare sînt medii eterogene alcătuite din minerale cu proprietăți elastice și fizice foarte diferite, atunci neuniformitatea acestora devine explicabilă.

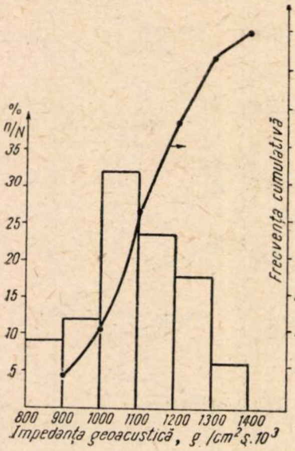


Fig. 11

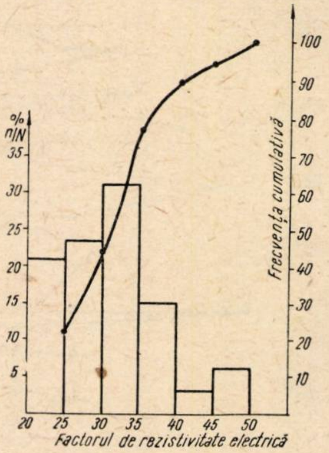


Fig. 12

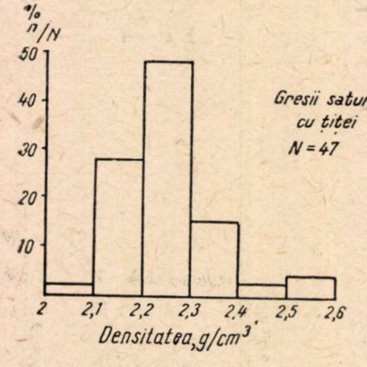


Fig. 13

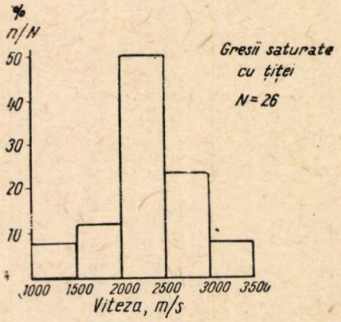


Fig. 14

Histogramele măsurătorilor de viteză și densitate efectuate pe eșantioane de nisip saturat total cu țiței, obținute dintr-un bloc colectat din mina Sărata Monteoru, sînt arătate în figurile 13—16.

Valorificarea statistică a măsurătorilor arată că acestea satisfac, cu o bună aproximație, legile de distribuție statistică cunoscute, atunci cînd sînt reprezentate într-o diagramă de probabilitate lognormală.

Histogramele vitezei de masiv și densității obținute pentru marne, argile, calcare și gresie sînt redate în diagramele de probabilitate lognormală din figurile 17—22.

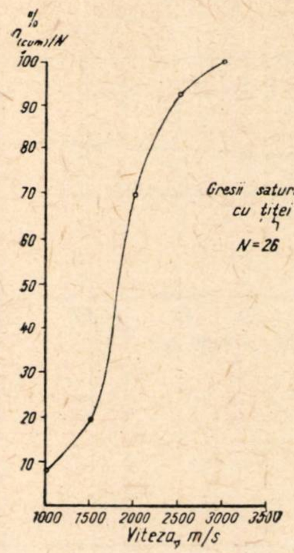


Fig. 15

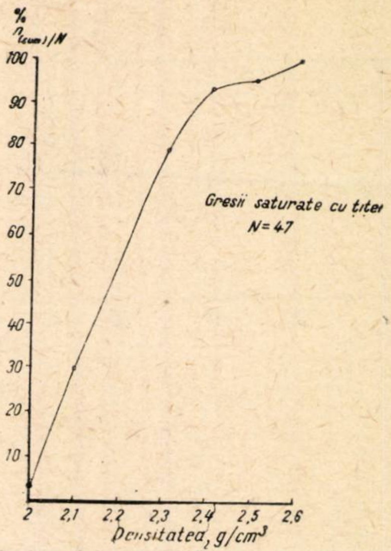


Fig. 16

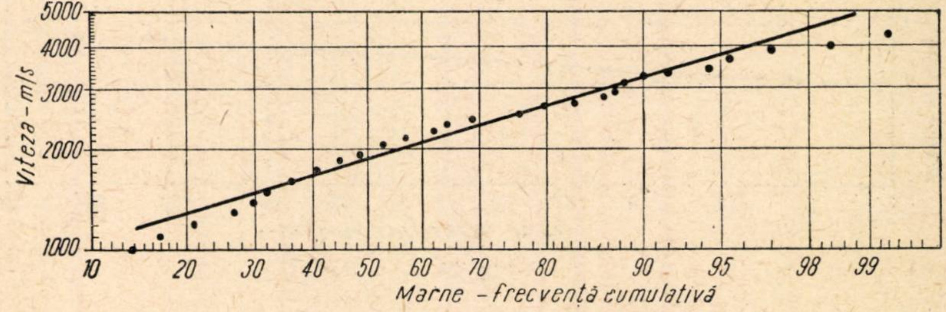


Fig. 17

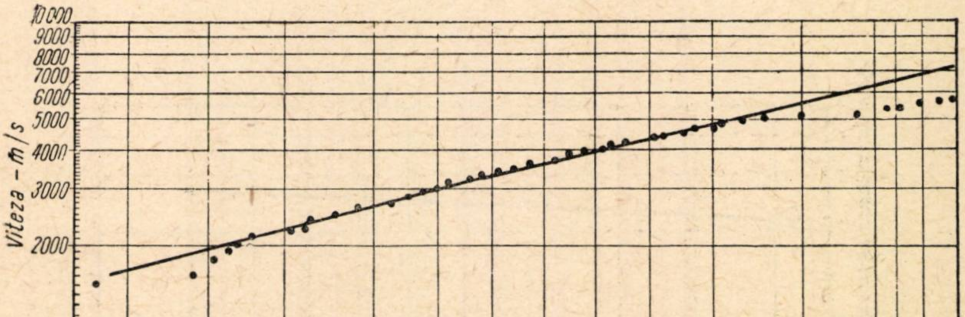


Fig. 18

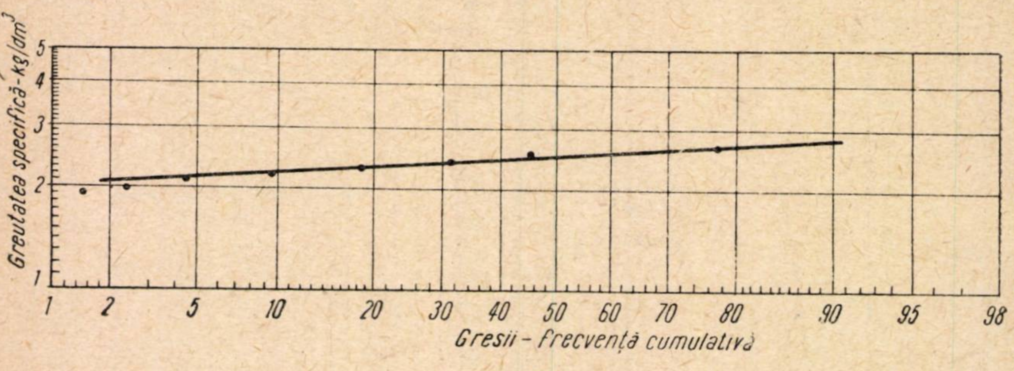


Fig. 19

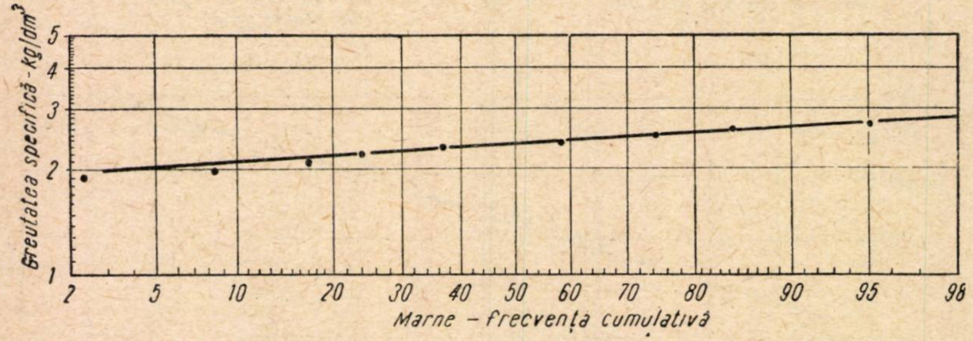


Fig. 20

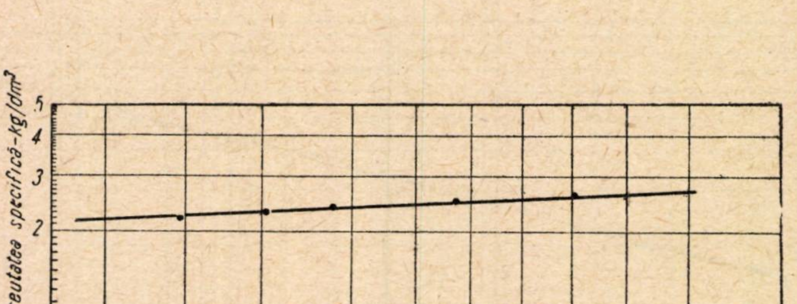


Fig. 21

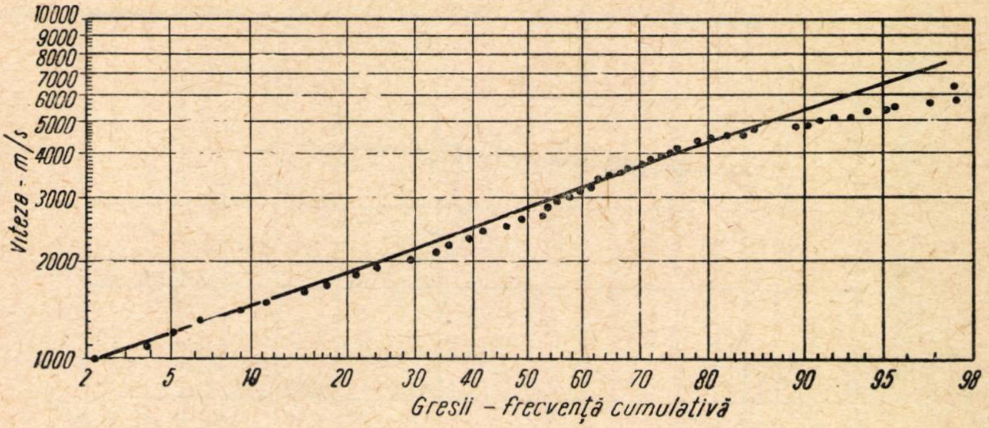


Fig. 22

Cu ajutorul acestora pot fi calculate valorile medii statistice care caracterizează proprietățile elastice și fizice, precum și dispersia față de valoarea medie, pentru fiecare grupă litologică.

Față de cele arătate mai sus rezultă că pentru o caracterizare mai fidelă, cu un anumit grad de exactitate, a unei formațiuni geologice, din acest punct de vedere, trebuie efectuate un număr foarte mare de determinări care să poată permite o prelucrare statistică cît mai corectă, în funcție de gradul de neomogenitate al rocii.

Analiza petrografică a arătat de asemenea că eșantioanele colectate în același strat, avînd vîrstă și litologie identice, au o compoziție mineralogică foarte variată și o distribuție statistică întîmplătoare a texturii.

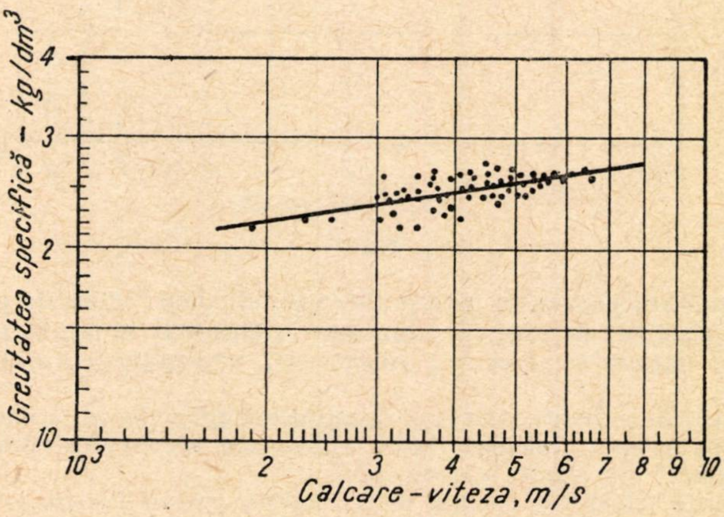


Fig. 23

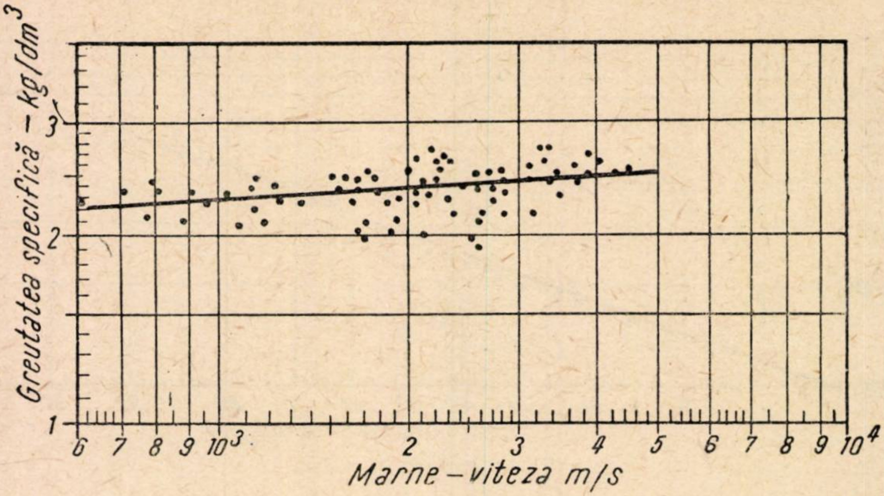


Fig. 24

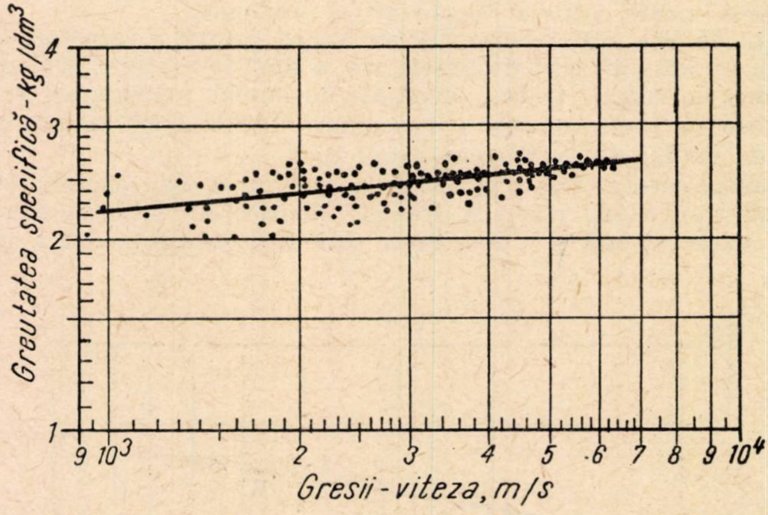


Fig. 25

Astfel, următorii parametri petrografici pot influența viteza de propagare a undelor elastice : densitatea, chimismul, conținutul în argilă, gradul de cimentare, natura și procentul cimentului, porozitatea precum și alți factori.

În ceea ce privește influența densității asupra vitezei, aceasta a fost studiată pe grupe litologice, unde chimismul rocilor aparținînd unei grupe poate fi considerat practic același.

Valorile vitezei în funcție de densitate, pentru fiecare grupă litologică, sînt redate în diagramele logaritmice din figurile 23, 24 și 25.

Se poate observa o grupare satisfăcătoare a punctelor, respectiv o dispersie relativ mică, ceea ce arată o strînsă legătură dintre aceste două mărimi.

Deoarece stabilirea pe cale teoretică a dependenţei dintre viteză şi densitate este practic imposibil de obţinut, în urma caracterului aleatoriu de variaţie a acestor mărimi, s-a încercat să se obţină, într-o primă aproximaţie, pe baza prelucrării matematice a măsurătorilor, unele relaţii empirice, foarte utile în interpretarea cantitativă [2]).

Relaţia obţinută are următoarea formă

$$\gamma = A\, v^{m}, \tag{11}$$

unde coeficientul A şi exponentul m depind de litologia rocii. În cazul calcarelor, $A = 0{,}71$ şi $m = 0{,}15$, pentru gresii $A = 1{,}11$ şi $m = 0{,}09$, unde viteza se exprimă în m/s iar greutatea specifică în kg/dm^3. Este interesant de remarcat că influenţa litologiei este relativ mică, dacă ţinem seama că coeficienţii diferă foarte puţin. De asemenea, se mai poate observa că greutatea specifică are în general o influenţă neglijabilă asupra vitezei, comparativ cu alţi factori, valorile acesteia variază între limite relativ mici la variaţii mari ale vitezei. Deoarece impedanţa geoacustică se exprimă prin relaţia $I = \rho\, v$, atunci din (11) rezultă

$$I = A\, v^{m+1}, \tag{12}$$

unde coeficienţii A şi m au valorile arătate mai sus.

Un alt factor care are o mare importanţă este porozitatea, atît cea granulară cît şi cea fisurală. În figurile 26, 27 şi 28 sînt arătate variaţiile vitezei în funcţie de porozitate, pentru fiecare grupă litologică.

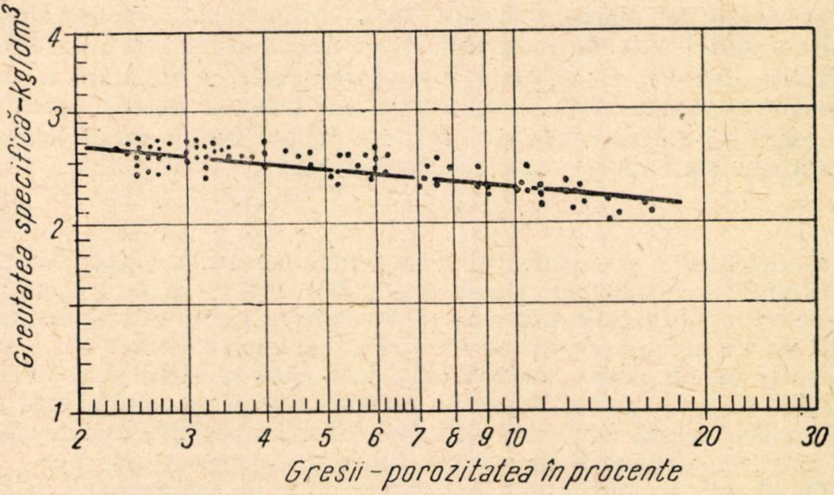


Fig. 26

---

[2] Dreptele au fost trasate utilizînd metoda celor mai mici pătrate.

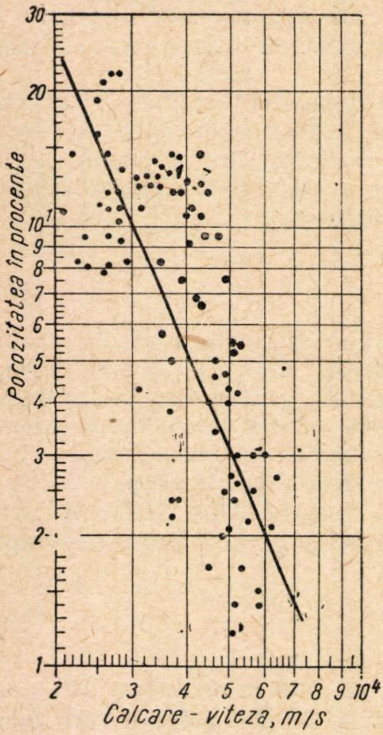


Fig. 27

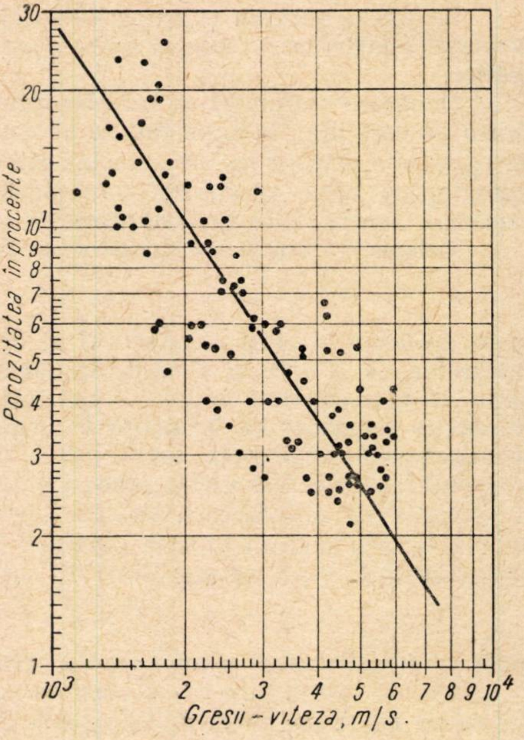


Fig. 28

Deoarece încercările teoretice de a obține relația dintre viteză și porozitate sînt legate de mari dificultăți matematice, mai ales datorită distribuției aleatorii a aranjamentului particulelor, a orientării acestora, a formelor și dimensiunilor geometrice, s-a încercat determinarea unor relații empirice dintre viteză și porozitate pentru fiecare grupă litologică. Astfel, a rezultat în acest caz o relație de forma

$$\varphi = A\, v^{-m}, \tag{13}$$

unde coeficientul A și exponentul m au pentru calcare următoarele valori : $A = 126.10^7$, $m = 2{,}34$ iar pentru gresii $A = 105.10^6$ și $m = 1{,}52$, porozitatea fiind exprimată în procente și viteza în m/s. Din relația de mai sus rezultă pentru aceeași porozitate o variație mai mare a vitezei într-o gresie, comparativ cu un calcar, datorită matricei, care în cazul gresiei este un cuarț. Pe de altă parte, aspectul relației viteză-porozitate este mult mai complex, acesta depinzînd atît de geometria porilor cît și de elasticitatea matricei, precum și de natura fluidului care saturează roca.

După cum s-a menționat mai sus, în afară de măsurătorile vitezelor de masiv au mai fost efectuate și determinări, prin metoda rezonanței, ale modulului de elasticitate longitudinal. Valorile obținute sînt redate în tabela 2.

Tabela 2

Proprietăți elastice ale rocilor sedimentare

Litologia	Greutatea specifică [kg/dm³]	Viteza de masiv [m/s]	Impedanța geoacustică [g/cm².s]	Modulul de elasticitate longitudinal [kg/cm²]
Calcar slab grezos	2,42	3 175	770.10^3	393.10^3
Gresie marnoasă	2,22	1 637	363.10^3	700.10^3
Gresie slab calcaroasă	2,44	2 654	649.10^3	371.10^3
Calcar slab grezos	2,40	1 921	461.10^3	720.10^3
Calcar slab grezos	2,40	2 290	550.10^3	331.10^3
Calcar	2,50	3 545	885.10^3	440.10^3
Calcar	2,40	2 555	614.10^3	620.10^3

ANEXĂ

5. **Valorificarea statistică.** După cum s-a arătat mai sus, variațiile proprietăților elastice au o distribuție aleatorie, datorită neomogenității și anizotropiei. Din acest motiv, caracterizarea proprietăților elastice ale unui strat, de o anumită litologie și grosime, implică cunoașterea distribuției frecvenței determinărilor efectuate pe eșantioane colectate de la diferite adîncimi, în mod cît mai uniform.

Deoarece la sondele carotate continuu, pe anumite intervale, putem dispune de măsurători suficient de mari, rezultă că este posibilă o prelucrare statistică satisfăcătoare.

Dacă ne referim la un mediu de propagare constituit din strate de aceeași grosime, însă de viteze diferite, dispuse perpendicular pe direcția propagării, atunci viteza echivalentă va fi

$$v_{\text{ech } 1} = \frac{1}{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} + \ldots + \frac{1}{v_n}\right)}. \tag{1}$$

Viteza echivalentă, obținută în acest mod, reprezintă bineînțeles viteza unui mediu omogen din punct de vedere statistic, dedusă din condiția ca timpul de propagare să fie același cu cel al mediului considerat. În mod absolut analog, putem considera și cazul aranjamentului paralel cu direcția propagării, care conduce pentru viteza echivalentă la următoarea relație

$$v_{\text{ech } 2} = \frac{1}{n}(v_1 + v_2 + \ldots + v_n). \tag{2}$$

Din ecuațiile (1) și (2) remarcăm că în primul caz avem o situație identică cu cea întîlnită la conectarea în paralel a conductorilor electrici stratificați, viteza echivalentă fiind egală cu media armonică, iar al doilea caz corespunde conectării în serie, viteza fiind egală cu media aritmetică. Aceste două situații reprezintă limita superioară și cea inferioară de variație a vitezei, care nu se întîlnește niciodată în natură. Prin urmare, viteza echivalentă reală va fi situată între media aritmetică și cea armonică.

Față de cele menționate, rezultă că determinarea vitezei, sau a altor proprietăți, necesită colectarea eșantioanelor de roci într-un mod cît mai uniform de pe toată grosimea stratului.

Pe de altă parte, aspectul distribuțiilor de frecvență pentru viteză, greutate specifică și porozitate, obținute pentru fiecare grupă litologică, prezintă în general o asimetrie și în consecință acestea nu pot fi asimilate cu curbele teoretice, cunoscute din statistica matematică. Reprezentarea cumulativului frecvenței într-o diagramă de probabilitate lognormală arată că acesta devine simetric și are tendința de a varia liniar, ceea ce corespunde ecuației lui Gauss.

În acest caz, după cum se știe, parametrii distribuției pot fi calculați utilizînd ecuația

$$f(\log v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\log \delta}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\log v - \log \bar{v}}{\log \delta}\right)^2} \tag{3}$$

iar pentru frecvența cumulativă rezultă

$$F(v) = \int_{-\infty}^{\log v} f(\log v)\, d(\log v). \tag{4}$$

Este ușor de observat că $\bar{v}$ reprezintă media geometrică iar δ abaterea standard, a cărei valoare se obține din ecuația

$$\log \delta = \log \bar{v} - \log v_1 = \log v_2 - \log \bar{v}$$

sau

$$\delta = \sqrt{\frac{v_2}{v_1}},$$

v_2 și v_1 fiind valorile vitezei care corespund punctelor de inflexiune ale curbei lui Gauss.

Acest lucru este evident, dacă ținem seama că în cadrul aceleiași grupe litologice viteza variază într-o gamă foarte largă și prin urmare reprezentarea logaritmică contribuie acum la apariția distribuției normale.

Cu ajutorul ecuațiilor (3) și (4) pot fi determinate valorile vitezelor echivalente pentru cele două aranjamente limită ale stratificației. Astfel, media aritmetică se obține din ecuația

$$v_{\mathrm{ech}\,2} = \int_{-\infty}^{+\infty} v\, f(\log v)\, d(\log v),$$

respectiv

$$v_{\text{ech}\,2} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{v}{\sqrt{2\pi}\,\log\delta}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\log v - \log \bar{v}}{\log\delta}\right)^2} \, d\,(\log v) \qquad (5)$$

iar pentru media armonică va fi

$$\frac{1}{v_{\text{ech}\,1}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{v} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\log\delta}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\log v - \log \bar{v}}{\log\delta}\right)^2} \, d\,(\log v). \qquad (6)$$

Ecuația (5) mai poate fi scrisă și sub forma

$$v_{\text{ech}\,2} = \bar{v}\, e^{\frac{1}{2}\log^2\delta} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\log\delta}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\log v - \log \bar{v} - \log^2\delta}{\log\delta}\right)^2} \, d\,(\log v) \qquad (7)$$

de unde este ușor să remarcăm că funcția de sub semnul integral reprezintă de asemenea o distribuție normală, a cărei integrală este egală cu unitatea.

În felul acesta, vitezele echivalente devin în cele din urmă

$$v_{\text{ech}\,2} = \bar{v} e^{\frac{1}{2}\log^2\delta} \quad (8) \quad \text{și} \quad v_{\text{ech}\,1} = \bar{v}\, e^{-\frac{1}{2}\log^2\delta} \qquad (9)$$

și acestea, după cum se observă, sînt direct influențate de valoarea dispersiei.

Cînd propagarea undei se efectuează după o direcție paralelă cu stratificația sistemului, apare normal să utilizăm ecuația (8), întrucît viteza echivalentă este mai apropiată de limita superioară. În cazul direcției perpendiculare viteza echivalentă va fi determinată din ecuația (9), care corespunde limitei inferioare de variație a vitezei.

Considerațiile statistice redate mai sus ne permit acum să apreciem aranjamentul stratelor de viteză diferită, utilizînd în acest scop criteriul vitezei echivalente [9], [10], [11].

În afară de cunoașterea vitezelor echivalente este interesant să obținem informații și asupra contribuției timpurilor individuale, care corespund fiecărei viteze, la timpul total necesar propagării undelor într-un mediu stratificat de grosime H, compus din n strate cu viteze diferite.

Dacă notăm cu Δh intervalul stratului care are viteza cuprinsă între v şi $v + \Delta v$, atunci avem

$$\Delta h = v \, \Delta t$$

sau

$$H = \Sigma \, \Delta h = v_{\text{ech}} \; T, \tag{10}$$

unde v_{ech} reprezintă viteza echivalentă şi T timpul total de parcurgere a undei, corespunzător grosimii H.

Prin urmare, valoarea relativă a timpului va fi

$$\frac{\Delta t}{T} = \frac{v_{\text{ech}}}{v} \cdot \frac{\Delta h}{H}, \tag{11}$$

sau dacă se ţine seama că $\Delta h / H$ reprezintă frecvenţa relativă a valorilor vitezei în intervalul măsurat, relaţia (11) devine

$$\frac{\Delta t}{T} = \frac{v_{\text{ech}}}{v} \; f(v) \; \Delta v, \tag{12}$$

respectiv

$$\frac{T_V}{T} = v_{\text{ech}} \sum_{v=0}^{v=V} \frac{1}{v} f(v) \; \Delta v. \tag{13}$$

Ecuaţia (13) nu este altceva decît timpul relativ corespunzător componenţilor stratului, de grosime H, a căror viteză nu depăşeşte valoarea V.

Deoarece distribuţia frecvenţei în cazul vitezei, după cum s-a arătat, este lognormală, rezultă pentru timpul relativ următoarea ecuaţie

$$\frac{T_V}{T} = v_{\text{ech}} \int_{-\infty}^{\log V} \frac{1}{v} f(\log v) \; \mathrm{d}\,(\log v) \tag{14}$$

care poate fi de asemenea scrisă, utilizînd acelaşi procedeu ca şi în cazul determinării vitezei echivalente, sub forma

$$\frac{T_V}{T} = \frac{v_{\text{ech}}}{v} \, \mathrm{e}^{\frac{1}{2} \log^2 \delta} \int_{-\infty}^{\log V} f(\log v) \; \mathrm{d}\,(\log v). \tag{15}$$

Pe de altă parte, după cum s-a arătat mai sus, pentru un mediu compus din n strate aranjate perpendicular pe direcţia propagării, viteza echivalentă este egală cu

$$v_{\text{ech}} = v \, \mathrm{e}^{-\frac{1}{2} \log^2 \delta} \tag{16}$$

și în consecință timpul relativ devine

$$\frac{T_V}{T} = \int_{-\infty}^{\log V} f_1 \, (\log v) \; \mathrm{d} \, (\log v). \tag{17}$$

Este ușor de observat că curba cumulativă a frecvenței timpului relativ satisface de asemenea o distribuție lognormală, avînd aceeași abatere standard, cu excepția mediei statistice, care în acest caz va fi

$$\bar{v}_T = \bar{v} \, \mathrm{e}^{\log^2 \delta}. \tag{18}$$

În acest mod, curba frecvenței cumulative a timpului relativ poate fi obținută din curba distribuției cumulative a vitezei utilizînd o relație de forma

$$f\,(V) = f_1\,(V\,\mathrm{e}^{\log^2 \delta}), \tag{19}$$

ambele curbe fiind în diagrama de probabilitate lognormală drepte paralele situate la distanța $\log \mathrm{e}^{\ln^2 \delta}$.

Primită la redacție la 25 mai 1963

ОПРЕДЕЛЕНИЕ УПРУГИХ СВОЙСТВ ОСАДОЧНЫХ ПОРОД УЛЬТРАЗВУКОВЫМИ МЕТОДАМИ

РЕЗЮМЕ

В работе даются результаты исследований возможности применения in situ определения упругих свойств ультразвуковым методом, проведенных в лабораторных условиях в случае осадочных пород.

С этой целью проводился большой объем замеров скорости продольных волн, модуля упругости, геоакустического сопротивления и пористости на пробах, собранных из скважин и выходов, из различных геологических формаций РНР, имеющих очень разные возрасты и литологии.

Полученные результаты показали, что упругие свойства осадочных пород изменяются в широком диапазоне неравномерно из-за неоднородности и анизотропии. Также изучено влияние физических и метрографических факторов на скорость, устанавливая эмпирические соотношения между скоростью, удельным весом и пористостью.

Из-за случайного распределения упругих свойств произведена для каждой литологической группы статистическая оценка замеров, показывающая, что кривые общих частот с хорошим приближением удовлетворяют нормальному распределению тогда, когда они представлены в диаграмме нормальной логарифмической вероятности. Таким образом, влияние неоднородности, что касается характеризации упругих свойств какого-либо слоя определенной литологии, можно исключить, принимая его однородным со статистической точки зрения.

BIBLIOGRAFIE

1. Р. М. Деивис, *Волна напряжений в твердых телах.* Москва, 1961.
2. H. Kolsky, *Stress Waves in solid.* Oxford, 1953.
3. О. И. Силаева, О. Г. Самина, *Распространение упругих импульсов в образцах цилиндрической формы.* Изв. АН СССР, серия геофизика, *1* (1958).
4. D. Bancraft, *The velocity of longitudinal Waves in Cylindrical bars.* Phys. Rev. (1941).
5. R. M. Davies, *Stress Waves in solids.* British Journal Physics, *6* (1956).
6. М. П. Воларович, А. С. Гуревич, *Исследование динамического модуля упругости горных пород в зависимости от температуры.* Изв. АН СССР, серия геофизика, *4* (*1957*)
7. D. S. Hughes, Ch. Maurette, *Détermination des vitesses d'onde élastique dans diverses rocks en fonction de la pression et de la température.* Rev. Institut de France de Pétrole, *6* (1957).
8. L. I. Faust, *A velocity function including lithologic variation.* Geophysics, *2* (1953).
9. G. Matheron, *Utilité des méthodes statistiques dans la recherche minière.* Revue de l'industrie minérale, *1* (1956).
10. — *Application des méthodes statistiques à l'évaluation des gisements.* Annales des mines, **XII**, *12* (1955).
11. W. T. Cardwell, R. L. Parsons, *Average permeabilities of heterogeneous oil sands.* Trans. Amer. Inst. Mining. Metallurg. Reprint (1956).

STUDII

TURTIREA SUPERELASTICĂ A BURLANELOR

DE

NICOLAE S. PÎRVULESCU [1])

539.3

1. DOMENIUL ELASTIC

Turtirea elastică a tuburilor sub acțiunea presiunii exterioare a fost studiată anterior [1].

S-a arătat că presiunea critică p_{cr0}, la care se turtește elastic tubul, este dată de relația

$$p_{cr\,0} = \frac{E^* S}{3\Lambda^3}, \qquad (1)$$

în care :

$$E^* = \frac{E}{1-\mu^2}, \qquad (2)$$

μ — coeficientul lui Poisson (pentru oțel $\mu = 0{,}3$),

Λ — subțirimea tubului, analog cu zveltețea λ a unei bare, dat de expresia

$$\Lambda = \frac{D}{2g}, \qquad (3)$$

D — diametrul exterior al tubului,

g — grosimea peretelui,

$$S = 12\,\Lambda^2\left[\left(\Lambda - \frac{1}{2}\right)\ln\frac{\Lambda}{\Lambda - 1} - 1\right], \qquad (4)$$

---

[1]) Întreprinderea de foraje pentru alimentări cu apă.

care se mai poate pune sub formele

$$S = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{6\,(j+1)}{(j+2)\,(j+3)\,\Lambda^j} \tag{5}$$

sau

$$S = 1 + \frac{1}{\Lambda} + \frac{0{,}9}{\Lambda^2} + \frac{0{,}8}{\Lambda^3} + \frac{0{,}714}{\Lambda^4} + \ldots$$

convergentă pentru $\Lambda < 1$.

Expresia (1) rezultă din relațiile (44), (49) ale lucrării citate.

2. DOMENIUL SUPERELASTIC

Burlanele folosite la tubarea sondelor adînci sînt relativ groase față de diametrul lor, pentru ca să reziste la presiunea exterioară respectivă, și prin urmare nu se turtesc elastic, ci în domeniul superelastic.

Studiul turtirii superelastice a burlanelor, prin pierderea stabilității, îl facem prin analogie cu flambajul superelastic al barelor de oțel [2], [3].

Am admis [3] ipoteza modulului redus de variație liniară în raport cu efortul unitar, unde modulul redus E_r este definit de expresia

$$E_r = \frac{4\,E\,E_\sigma}{(\sqrt{E} + \sqrt{E_\sigma})^2}, \tag{6}$$

în care :

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon}, \quad E_\sigma = \frac{d\sigma}{d\varepsilon}, \tag{7}$$

σ — efortul unitar,

ε — alungirea specifică.

Ne referim — ca și în [3] — la cele două puncte particulare, care reprezintă extremitățile segmentului de dreaptă (fig. 2 din [2]) și anume : limita de proporționalitate P, determinată prin coordonatele σ_p, E, și limita totală de curgere C, determinată prin coordonatele σ_t, $E_t = 0$.

A admite o variație liniară pentru E_r, determinînd dreapta PC prin punctele ei extreme — care aparțin și curbei E_σ — înseamnă a generaliza această ipoteză, în sensul de a menține liniaritatea pentru E_r oricum ar fi definit, adică indiferent de expresia (6).

În domeniul superelastic folosim această ipoteză astfel lărgită, înlocuind pe E din formula (1) cu E_r de variație liniară, dat de expresia (4) din [3],

$$E_r = b_2 - a_2\,\sigma, \tag{8}$$

în care coeficienții a_2, b_2 au expresiile (9) din [3] şi anume

$$a_2 = \frac{\dfrac{E}{\sigma_c}}{k_t - k_p}, \quad b_2 = \frac{k_t\, E}{k_t - k_p}. \tag{9}$$

Făcînd înlocuirile expresia (8) devine

$$\frac{E_r}{E} = \frac{k_t - \dfrac{\sigma}{\sigma_c}}{k_t - k_p}, \tag{10}$$

în care :

$$k_t = \frac{\sigma_t}{\sigma_c}, \quad k_p = \frac{\sigma_p}{\sigma_c}, \tag{11}$$

σ_c — limită convențională de curgere.

Prin urmare, se obține expresia presiunii critice superelastice p_{cr}

$$p_{cr} = \frac{E^{\star}\, S}{3\Lambda^3} \cdot \frac{k_t - \dfrac{\sigma_{cr}}{\sigma_c}}{k_t - k_p}, \tag{12}$$

unde σ a devenit σ_{cr}, întrucît corespunde la p_{cr}. Ținînd seama de (1), relația (12) devine

$$p_{cr} = p_{cr\,0}\, \frac{k_t - \dfrac{\sigma_{cr}}{\sigma_c}}{k_t - k_p}. \tag{13}$$

Conform ipotezei admise, E_r este o funcție de efortul unitar σ, a cărei valoare poate să fie determinată, în funcție de subțirimea burlanului Λ, unde σ a devenit σ_{cr} întrucît corespunde la p_{cr} deocamdată cu ajutorul relațiilor Lamé şi Clapeyron, care în acest caz devin [4]

$$\sigma_t = \frac{-p\, D^2}{D^2 - d^2}\left[1 + \left(\frac{d}{2r}\right)^2\right], \quad \sigma_r = \frac{-p\, D^2}{D^2 - d^2}\left[1 - \left(\frac{d}{2r}\right)^2\right], \tag{14}$$

în care : r — depărtarea punctului considerat de axa tubului,
σ_t — efortul normal unitar după direcția tangentei,
σ_r — efortul normal unitar după direcția razei,
d — diametrul interior al tubului.

Solicitarea maximă, în acest caz, este la marginea interioară a tubului, unde $\sigma_r = 0$ şi σ_t este maxim,

$$p = \frac{2g}{D}\left(1 - \frac{g}{D}\right)\sigma_{t\,\max}. \tag{15}$$

La limita critică, făcînd înlocuirea $\sigma_{cr} = \sigma_{t\max}$, ceea ce este acoperitor, ţinînd seama şi de (3), relaţia precedentă devine

$$p_{cr} = \sigma_{cr} \frac{\Lambda - \frac{1}{2}}{\Lambda^2}. \tag{16}$$

În domeniul elastic, această relaţie devine

$$p_{cr\,0} = \sigma_{cr\,0} \frac{\Lambda - \frac{1}{2}}{\Lambda^2} \tag{17}$$

şi ţinînd seama de (1)

$$\sigma_{cr\,0} = \frac{E^{*} S}{3\Lambda\left(\Lambda - \frac{1}{2}\right)}. \tag{18}$$

Din relaţiile (12) şi (16), ţinînd seama de (18), se obţine

$$\sigma_{cr} = \frac{k_t}{\frac{k_t - k_p}{\sigma_{cr\,0}} + \frac{1}{\sigma_c}} \tag{19}$$

care se mai poate pune sub forma

$$\sigma_{cr} = \frac{\sigma_{cr\,0}}{1 - \frac{k_p}{k_t} + \frac{\sigma_{cr\,0}}{\sigma_t}}. \tag{20}$$

La limita de proporţionalitate, unde

$$\Lambda = \Lambda_p = \frac{\left(\frac{D}{g}\right)_p}{2} \tag{21}$$

$\sigma_{cr\,0} = \sigma_p$ şi relaţia (18) devine

$$4\,\Lambda_p\left(\Lambda_p - \frac{1}{2}\right) = \frac{S}{\mathcal{S}_p} \tag{22}$$

iar

$$4\mathcal{S}_p = \frac{3\,k_p\,\sigma_p}{E^{*}}. \tag{23}$$

Folosind expresia

$$\mathcal{S} = \frac{S}{4\Lambda\left(\Lambda - \dfrac{1}{2}\right)} = S\frac{\left(\dfrac{g}{D}\right)^2}{1 - \dfrac{g}{D}} \tag{24}$$

relația (18) devine

$$\sigma_{cr\,0} = \frac{4}{3} E^* \mathcal{S}, \tag{25}$$

unde $\mathcal{S}$ depinde numai de subțirimea tubului.

La limita convențională de curgere, unde

$$2\Lambda = 2\Lambda_c = \left(\frac{D}{g}\right)_c \tag{26}$$

$\sigma_{cr} = \sigma_c$ și relația (19) devine

$$2\Lambda_c(2\,\Lambda_c - 1) = \frac{S}{\mathcal{S}_c}$$

iar

$$\mathcal{S}_c = \frac{3\,(k_t - k_p)}{3\,(k_t - 1)}\,\frac{\sigma_c}{E^*}. \tag{27}$$

Să revenim la presiunea critică. Din (16), (20), (18), (1), se obține

$$p_{cr} = \frac{p_{cr\,0}}{1 - \dfrac{k_p}{k_t} + \dfrac{\sigma_{cr\,0}}{\sigma_t}} \tag{28}$$

în care $p_{cr\,0}$, $\sigma_{cr\,0}$ sînt date de (1), (18).

Pentru comparație redăm [4] formula Mannesmann, pentru domeniul superelastic, sub forma

$$p_k = \frac{\sigma_c}{\Lambda} K, \quad K = \alpha - \beta\,\Lambda, \tag{29}$$

unde : p_k — presiunea critică în acest caz,

K — un coeficient de reducere pentru instabilitate,

$$\alpha = 1{,}315, \quad \beta = 0{,}043, \tag{30}$$

valabilă pentru $12{,}5 < \Lambda < 16{,}5$.

A.P.I. folosește aceeași formulă [4] cu coeficienții modificați la valorile

$$\alpha = 1{,}2515, \quad \beta = 0{,}0125 \tag{31}$$

pentru a mări astfel intervalul valabil pentru pereți mai groși la $\Lambda > 7$.

În domeniul elastic redăm formula cunoscută

$$p_{k01} = \frac{E^*}{4\,\Lambda\left(\Lambda - \frac{1}{2}\right)} \tag{32}$$

folosită de A.P.I. [4] şi care pentru Λ mare devine

$$p_{k02} \approx \frac{E^*}{4\Lambda^3}. \tag{33}$$

Ambele formule sînt comparabile cu (1).

3. SIGURANŢA LA TURTIREA SUPERELASTICĂ

Ca şi pentru flambaj, admitem un coeficient de siguranţă, încît rezistenţa admisibilă la turtire σ_{at} — similar cu (28) din [3] — capătă expresia

$$\sigma_{at} = c\,\sigma_{cr}. \tag{34}$$

Coeficientul de siguranţă înglobează — ca şi la flambajul barelor — efectele imperfecţiunilor tubului, iar în acest caz : ovalizarea iniţială, neomogenitatea materialului şi a grosimei peretelui.

Dacă dincolo de limita elastică păstrăm pentru coeficientul de siguranţă, în acest caz c_1, o variaţie liniară în raport cu Λ înseamnă că

$$c_1 = a_3 + b_3\,\Lambda, \tag{35}$$

coeficienţii a_3 şi b_3 se determină punînd condiţiile la limitele de proporţionalitate şi de curgere convenţională, unde coeficientul de siguranţă capătă valorile c_p şi c_c.

Se obţine astfel

$$\frac{c_1}{c_p} = \frac{\Lambda_p - \Lambda + (\Lambda - \Lambda_c)\frac{c_c}{c_p}}{\Lambda_p - \Lambda_c}. \tag{36}$$

Preferăm să dăm coeficientului de siguranţă, în acest caz c_3, o formă similară cu expresia (38) din [3], preferată pentru flambaj şi anume

$$c_3 = \frac{c_t}{a_5 - b_5\,\Lambda^2}. \tag{37}$$

Punînd condiţiile la limită, în mod analog, se obţine în acest caz

$$\frac{c_t}{c_3} = \frac{\Lambda_c^2 + \frac{c_t}{c_c} - \left(1 - \frac{c_t}{c_c}\right)\Lambda^2}{1 + \Lambda_c^2} \tag{38}$$

sau

$$\frac{c_t}{c_3} = \frac{\Lambda_c^2 + \frac{c_t}{c_p} - \left(1 - \frac{c_t}{c_p}\right)\Lambda^2}{1 + \Lambda_p^2}$$

deci

$$\frac{c_t}{c_c} = \frac{\frac{\Lambda_p^2 - \Lambda_c^2}{(1+\Lambda_p)^2}}{1 - \mathcal{R}}, \tag{39}$$

unde

$$\mathcal{R} = \frac{c_c\,(1 + \Lambda_c^2)}{c_p(1 + \Lambda_p^2)}, \tag{40}$$

şi în cele din urmă

$$\frac{c_c}{c_3} = \frac{A - B\,\Lambda^2}{C}, \tag{41}$$

în care : $A = (1 - \mathcal{R})\,\Lambda_c^2 + \mathcal{P}, \quad B = 1 - \mathcal{R} - \mathcal{P},$

$$\mathcal{P} = \frac{\Lambda_p^2 - \Lambda_c^2}{1 + \Lambda_p^2}, \quad C = \mathcal{P}\,(1 + \Lambda_c^2) = A - B\,\Lambda_c^2. \tag{42}$$

4. COEFICIENTUL DE TURTIRE Φ

Coeficientul Φ, care reduce problema de instabilitate a formei tubului sub acţiunea presiunii exterioare la o problemă de compresiune simplă, analog coeficientului φ de la flambaj, este definit de expresia :

$$\Phi = \frac{\sigma_{ct}}{\sigma_{ac}} \tag{43}$$

unde σ_{ac} este rezistenţa admisibilă la compresiune simplă, definită de expresia

$$\sigma_{ac} = \frac{\sigma_c}{c_c}. \tag{44}$$

Ţinînd seama de (34), (44) relaţia (43) devine

$$\Phi = \frac{c_c\,\sigma_{cr}}{c\,\sigma_c}. \tag{45}$$

Relaţia (19) se mai poate pune sub forma

$$\frac{\sigma_{cr}}{\sigma_c} = \frac{k_t}{1 + (k_t - k_p)\frac{\sigma_c}{\sigma_{cr0}}}. \tag{46}$$

Înlocuind (41), (42), (46) în (45) se obține

$$\Phi = \frac{A - B\,\Lambda^2}{A - B\,\Lambda_c^2} \cdot \frac{k_t}{1 + (k_t - k_p)\dfrac{\sigma_c}{\sigma_{cr\,0}}}. \tag{47}$$

Observăm din relațiile (36), (45), că în ambele concepte de variație a coeficientului de siguranță, ca și la flambaj, Φ nu depinde independent de c_p sau de c_c ci numai de raportul lor c_c/c_p.

5. APLICAȚII NUMERICE

Ca și pentru flambaj păstrăm valorile $E = 21\,000$ kg/mm² conform STAS 763–49 și $\mu = 0{,}3$.

În domeniul elastic s-au calculat valorile S, σ_{cr0}, p_{cr0} – trecute în tabela 1 – cu ajutorul formulelor (4), (18), (17).

Pentru comparație s-au calculat valorile p_{k01} cu formula (32) și p_{k02} cu formula (33), însă la aceasta din urmă, corespunzător A.P.I., s-a luat $E^* = 22\,019$ kg/mm² [4], ceea ce revine la $E = 20\,103$ kg/mm².

Diferențele în procente sînt date de expresiile

$$\Delta_{01} = 100\frac{p_{cr0} - p_{k01}}{p_{cr0}}, \quad \Delta_{02} = 100\frac{p_{cr0} - p_{k02}}{p_{cr0}}, \tag{48}$$

ale căror valori sînt trecute în tabela 1.

Păstrînd valoarea raportului $k_t/k_p = 1{,}36$ ca și în lucrarea anterioară [3] s-au calculat valorile rezistențelor critice superelastice – trecute în tabela 2 – cu ajutorul formulei (19), folosind pentru k_p valorile din lucrarea menționată.

Tabela 1

Valori * in domeniul elastic

$\frac{D}{g}$	S	σ_{cr0}	p_{cr0}	p_{k01}	Δ_{01}	p_{k02}	Δ_{02}
5	1,624	2 498	793,9	576,9	27,3	352,3	55,6
10	1,244	425,3	76,55	56,98	25,5	44,04	42,5
15	1,152	168,7	21,00	15,70	25,2	13,05	37,9
20	1,110	89,87	8,538	6,393	25,1	5,505	35,5
25	1,086	55,70	4,278	3,205	25,1	2,818	34,2
30	1,071	37,87	2,440	1,829	25,0	1,631	33,2
40	1,052	20,76	1,012	0,759	25,0	0,688	32,0
50	1,042	13,08	0,513	0,385	25,0	0,352	31,5
60	1,034	8,836	0,295	0,221	25,0	0,204	31,0
70	1,031	6,568	0,185	0,139	24,9	0,128	30,8

* S adimensional, iar celelalte valori în kg/mm².

Tabela 2

Rezistențele critice superelastice σ_{cr}

σ_c^* [kg/mm²] \ $\frac{D}{g}$	2	5	10	15	20	25	30	40
18	18,10	18,06	17,90	17,60	17,18	16,66	16,06	14,70
20	20,14	20,10	19,89	19,52	19,01	18,38	17,65	16,02
22	22,19	22,14	21,89	21,44	20,83	20,07	19,21	17,30
24	24,25	24,19	23,89	23,36	22,63	21,75	20,74	18,52
26	26,32	26,15	25,90	25,28	24,43	23,40	22,51	19,85
28	28,40	28,31	27,91	27,24	26,21	25,02	23,70	—
30	30,49	30,39	29,92	29,09	27,97	26,72	25,13	—
32	32,58	32,47	31,93	31,00	29,73	28,21	26,53	—
34	34,68	34,56	33,95	32,89	31,47	29,78	28,03	—
36	36,79	36,65	35,97	34,79	33,20	31,32	29,27	—
38	38,91	38,75	37,99	36,67	34,91	32,84	30,59	—
40	41,04	40,86	40,02	38,56	36,60	34,34	31,89	—
42	43,17	42,97	42,04	40,43	38,30	35,82	33,16	—
45	46,38	46,15	45,08	43,23	40,80	38,00	35,02	—
50	51,77	51,49	50,15	47,88	44,92	41,55	—	—
55	57,19	56,85	55,23	52,48	48,95	44,97	—	—
60	62,65	62,24	60,30	57,01	52,89	48,28	—	—
65	68,14	67,65	65,37	61,56	56,75	51,47	—	—
70	73,67	73,10	70,44	66,03	60,53	54,56	—	—

Tabela 3

Valori în domeniul superelastic

σ_c [kg/mm²]	$\mathcal{S}_p \cdot 10^6$	$\mathcal{S}_c \cdot 10^2$	$\left(\frac{D}{g}\right)_p$	$\left(\frac{D}{g}\right)_c$
18	432,4	2,916	49,59	—
20	481,0	2,495	47,09	7,8
30	728,5	1,620	38,55	9,35
38	929,9	1,395	34,29	9,95
40	980,7	1,361	33,43	10,07
50	1 237,1	1,260	29,93	10,40
60	1 497,2	1,220	27,35	10,55
70	1 760,4	1,210	25,33	10,58

Cu valorile rezistențelor critice din tabelele 1 și 2, s-a alcătuit diagrama din figura 1, analogă diagramei rezistențelor critice de la flambaj din lucrarea menționată [3].

Valorile subțirimilor, la limita de proporționalitate și la limita convențională de curgere, s-au calculat cu formulele (24), (25), și respectiv (26), (27), și sînt trecute în tabela 3.

Valorile rezistențelor critice, la limita totală de curgere, sînt cele din lucrarea [3].

Tabela 4

Tuburi din oțel σ_c = 38 kg/mm² *

$\frac{D}{g}$	2	5	10	15	20	25	30	40	50
c_3	1,101	1,107	1,125	1,158	1,208	1,278	1,376	1,500	1,500
σ_a	35,46	35,12	33,76	31,50	28,55	25,11	21,41	—	—
σ_{a0}	—	—	—	—	—	—	—	13,18	8,305
Φ	1,050	1,040	0,999	0,933	0,845	0,744	0,634	0,390	0,246
p_{cr}	—	12,40	6,839	4,564	3,317	2,522	1,971	—	—
p_{k1}	—	18,35	8,360	5,031	3,367	2,364	1,702	—	—
Δ_1	—	−47,2	−22,3	−10,2	− 1,5	+ 6,3	+13,7	—	—
p_{k2}	—	17,27	7,763	4,593	3,001	2,057	1,423	—	—
Δ_2	—	−39,2	−13,5	− 0,6	+ 9,8	+18,4	+27,8	—	—
p_a	—	11,21	6,076	3,940	2,746	1,973	1,433	—	—
p_{a0}	—	—	—	—	—	2,852	1,627	0,674	0,342
p_{a1}	—	16,32	7,431	4,472	2,993	2,101	1,513	—	—
p_{a01}	—	—	—	—	—	2,849	1,626	0,674	0,342
Δ_{a1}	—	−45,5	−22,3	−13,5	− 8,63	− 6,49	− 5,58	—	—
p_{a2}	—	15,36	6,901	4,082	2,674	1,828	1,265	—	—
p_{a02}	—	—	—	—	—	2,505	1,450	0,612	0,313
Δ_{a2}	—	−37,3	−13,6	− 3,6	+ 2,6	+ 7,4	+11,7	+9,2	+8,5

* Eforturile unitare și presiunile în kg/mm².

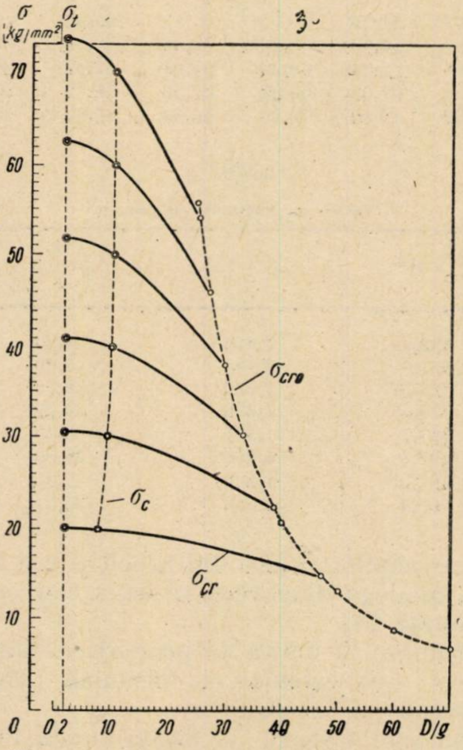


Fig. 1. — Diagrama rezistențelor critice.

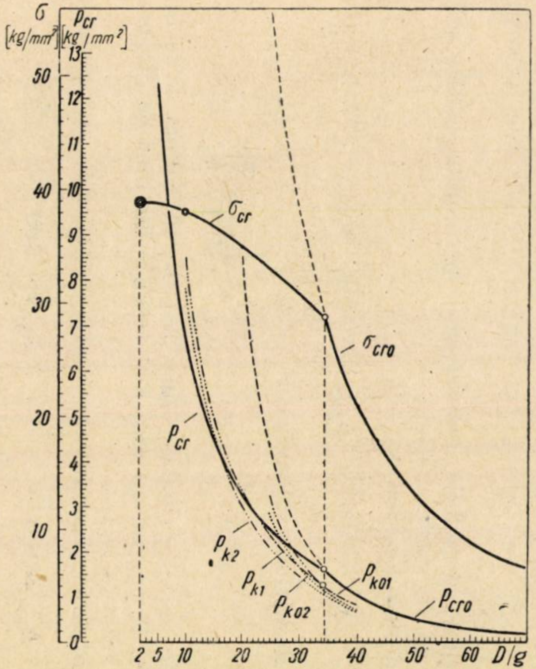


Fig. 2. — Diagrama presiunilor critice pentru oţel $\sigma_c = 38$ kg/mm².

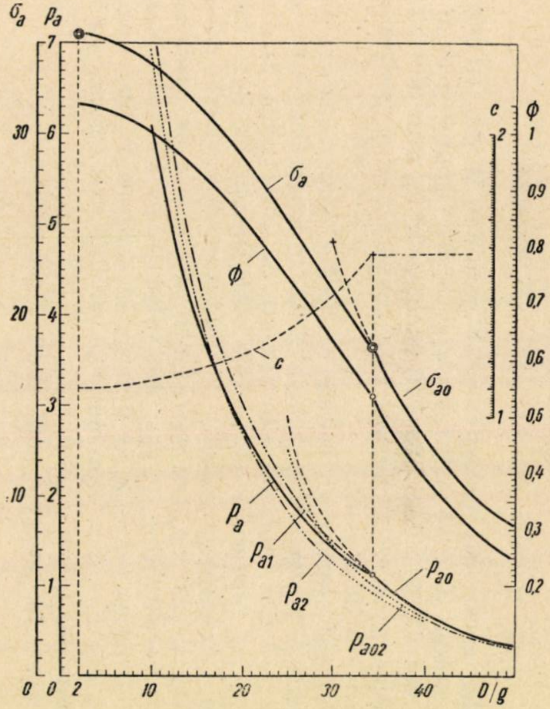


Fig. 3. — Diagrama valorilor admisibile.

6. EXEMPLU:

Tuburi din oțel $\sigma_c = 38\ kg/mm^2$

Am ales acest oțel corespunzător gradului D din GOST 632-50, apropiat de gradul J — 55 A.P.I. cu $\sigma_c = 38{,}67$ kg/mm² și chiar de calitatea 53/39 sau 67/39 STAS 823—49 cu $\sigma_c = 39$ kg/mm².Folosirea rezistențelor critice a acestor calități este acoperitoare și pentru calitățile de oțel apropiate menționate.

În acest caz, rezistența critică elastică și superelastică, precum și presiunea critică elastică din tabela 2 și superelastică — calculată cu (17) sau (28) — din tabela 4 sînt trasate cu linie plină în diagramele din figura 2, iar porțiunile nevalabile sînt trasate cu linie întreruptă.

Pentru comparație, valorile în domeniul superelastic calculate cu formula empirică (29) : p_{k1} cu coeficienții (30) și p_{k2} cu coeficienții (31) din tabela 4, precum și p_{k01}, p_{k02} din tabela 1, în domeniul elastic, sînt trasate, pe porțiunea valabilă, cu linie punct și respectiv linie două puncte pe diagrama din figura 2. Porțiunile nevalabile sînt trasate cu linie trei puncte și respectiv puncte puncte.

Diferențele în procente sînt date în expresiile

$$\Delta_1 = 100\,\frac{p_{cr} - p_{k1}}{p_{cr}}, \quad \Delta_2 = 100\,\frac{p_{cr} - p_{k2}}{p_{cr}} \tag{49}$$

ale căror valori sînt trecute în tabela 4.

Valorile coeficientului de siguranță, calculate cu formulele (41)—(42) pentru $c_c = 1{,}125$, sînt trecute în tabela 4 și cu linie întreruptă pe diagrama din figura 3.

Presiunile admisibile rezultă din presiunile critice împărțite cu coeficientul de siguranță astfel :

— în domeniul elastic

$$p_{a0} = \frac{p_{cr0}}{c_3}, \quad p_{a01} = \frac{p_{k01}}{c_3}, \quad p_{a02} = \frac{p_{k02}}{c_3}; \tag{50}$$

— în domeniul superelastic

$$p_a = \frac{p_{cr}}{c_3}, \quad p_{a1} = \frac{p_{k1}}{c_3}, \quad p_{a2} = \frac{p_{k2}}{c_3}. \tag{51}$$

Valorile astfel calculate sînt trecute în tabela 4 și pe diagramă (fig. 3). Valorile p_{a01} nu au mai fost trecute distinct pe diagramă întrucît coincid cu valorile p_{a0}.

Diferențele în procente ale valorilor admisibile sînt date de expresiile

$$\Delta_{a1} = 100\,\frac{p_a - p_{a1}}{p_a}, \quad \Delta_{a10} = 100\,\frac{p_a - p_{a01}}{p_a}, \tag{52}$$

$$\Delta_{a2} = 100\,\frac{p_a - p_{a2}}{p_a}, \quad \Delta_{a20} = 100\,\frac{p_a - p_{a02}}{p_a}, \tag{53}$$

ale căror valori sînt trecute în tabela 4. Valorile Δ_{a10} nu mai apar, deoarece sînt nule pentru $D/g \geqslant 40$. Valorile Δ_{a20} pentru $D/g \geqslant 40$ sînt trecute pe aceeași linie în continuare cu Δ_{a2}.

Cu ajutorul expresiei (45) sau (47) — pentru verificare — s-au calculat valorile Φ trecute în tabela 4 și trasate pe diagrama din figura 3.

7. OBSERVAȚII ȘI CONCLUZII

Diagrama rezistențelor critice (fig. 1) este asemănătoare renumitei diagrame M. L. Jasper [4] care deși stabilită pe baza unui vast material experimental — ceea ce constituie pentru noi o verificare — nu se folosește în practică, tocmai din lipsa unei formule matematice.

Observăm că pentru burlane groase avem interesul să ridicăm pe σ_c pentru a ușura greutatea coloanei de burlane și invers, pentru burlane subțiri este preferabil să folosim material ieftin cu σ_c coborît.

Urmărind diagrama din figura 2, observăm că în domeniul elastic $p_{k01} < p_{cr0}$ cu aproximativ 25% (tabela 1), ceea ce provine — după cum s-a arătat [1] — din faptul că în teoria cunoscută a turtirii elastice s-a considerat că fibra neutră trece prin centrul de greutate, ceea ce nu este exact ci aproximativ. În conceptul coeficientului de siguranță admis c_3, observăm că p_{a01} se confundă cu p_{a0} (fig. 3). Însă în concepția noastră p_{a01} prezintă un coeficient de siguranță (1,5) majorat față de coeficientul de siguranță la limita convențională de curgere (1,125), tot așa ($c_p/c_c = 1{,}4$) cum am procedat și la flambajul barelor [3] ceea ce denotă că s-a cuprins în coeficientul de siguranță și efectul imperfecțiunilor tubului. Iată de ce valorile presiunilor admisibile se confundă, în domeniul elastic, cu cele rezultate din experiențele Mannesmann ($p_{a01} \approx p_{a0}$).

În domeniul superelastic, observăm că $p_{k1} < p_{cr}$: de la 25% ($D/g = 34{,}29$) pînă ce cele două curbe se întîlnesc, pe la $D/g \approx 21$, cînd $p_{k1} > p_{cr}$, ajungînd la limita de curgere $\Delta_1 \approx 22$. Aceasta înseamnă că formula Mannesmann nu mai este valabilă pentru $D/g < 21$, ceea ce a fost precizat din capul locului.

Este mai interesant de a urmări presiunile admisibile, întrucît formula Mannesmann a fost stabilită pe baza încercărilor tuburilor reale și deci imperfecte, imperfecțiune cuprinsă în coeficientul de siguranță. Prin urmare, să urmărim diagramele din figura 3 : dacă pe intervalul elastic p_{a0} se confundă cu p_{a01}, pe intervalul superelastic $p_{a1} > p_a$ și Δ_{a1} se ridică într-una cu cît scade D/g (tabela 4) la 6,5% pentru $D/g = 25$, de unde formula Mannesmann nu mai rămîne valabilă și la 22% pentru limita convențională de curgere. Chiar în intervalul valabil, calculînd cu această formulă rămînem descoperiți.

Prin modificarea coeficienților α, β din (30), (31), A.P.I. coboară substanțial curba la p_{a2}, nu numai pentru acoperire în intervalul menționat, dar mai ales pentru a lărgi domeniul de valabilitate către burlanele mai groase. Într-adevăr, Δ_2 își schimbă semnul pentru $D/g = 16$, iar Δ_{a2} își schimbă semnul pentru $D/g = 17{,}5$, în apropiere de limita de valabilitate pretinsă de $D/g = 14$. Observăm că prin coborîrea impusă curbei p_{k2}, precum și p_{a2}, acestea nici nu se mai întîlnesc cu curbele respective ale domeniului elastic, chiar dacă se coboară de la p_{k01} la p_{k02} și respectiv p_{a02}.

Pentru a remedia acest inconvenient, A.P.I. prescrie o racordare impusă curbei p_{k2}, începînd din $D/g = 30$, ca să întîlnească curba p_{k02} pentru $D/g = 40$.

A folosi formula (16), în care se înlocuiește σ_{cr} cu σ_c și respectiv σ_{ac}, pentru burlane foarte groase ($D/g < 14$) așa cum recomandă A.P.I., înseamnă a nu ține seama de instabilitatea superelastică pe acest interval, rămînînd cu o descoperire de cel mult $(\sigma_c - \sigma_{cr})/\sigma_{cr} = 2{,}7\,\%$ la limita intervalului, adică pentru $D/g = 14$.

În schimb pentru $D/g > 17{,}5$ (fig. 3), avem $p_{a2} < p_a$ și crește cu subțirimea burlanului, după cum ne arată Δ_{a2} (tabela 4), ajungînd la valoarea maximă de 12 % pentru limita de proporționalitate. Prin urmare, folosirea curbei p_{k2}, respectiv p_{a2}, pentru burlane subțiri, reprezintă o risipă de material la coeficientul de siguranță admis.

Referindu-ne la diagrama presiunilor critice (fig. 2) p_{k1} rămîne valabil în vecinătatea $D/g = 21$, iar p_{k2} rămîne valabil în vecinătatea $D/g = 16$ cu alte cuvinte curba p_{cr}, stabilită în această lucrare, este verificată de experiențele Mannesmann și A.P.I. pentru subțirimile menționate. Se poate exprima printr-o dreaptă orice curbă pe un interval îngust, după cum se știe. Tot astfel și în acest caz p_{k1}, p_{k2} dați de formulele (30), (31), care în raport cu g/D exprimă drepte, aproximează fenomenul numai în vecinătatea punctelor menționate, puncte cuprinse de expresia p_{cr} (28).

În ceea ce privește presiunile admisibile (fig. 3), p_{a1} rămîne valabil în vecinătatea limitei elastice ($D/g = 34$), iar p_{a2} rămîne valabil în vecinătatea $D/g = 17{,}5$. Pe acest interval, curba p_a se depărtează de p_{a1} apropiindu-se de p_{a2} cu cît scade raportul D/g, pentru ca la $D/g < 17{,}5$ să avem $p_a < p_{a2} < p_{a1}$ și să se depărteze tot mai mult de p_{a2} și p_{a1}.

După cum la flambajul superelastic al barelor [3] s-a extins formula Euler și în domeniul superelastic pe baza premiselor din [2], tot astfel în această lucrare s-a extins teoria turtirii elasticie a burlanelor [1] și în intervalul superelastic. Formulele p_{cr} și p_a rămîn valabile pe întreg domeniul, spre deosebire de formulele menționate, cu care s-au făcut comparațiile și care rămîn valabile pe intervale înguste.

Aplicarea formulelor stabilite aici conduce la mărirea siguranței în exploatarea burlanelor supuse la presiune exterioară, ceea ce este esențial, și la reducere de material, lucru apreciabil avînd în vedere greutățile considerabile ale coloanelor de burlane de la sondele adînci.

Primită la redacție la 26 martie 1963

L'APLATISSEMENT HYPERÉLASTIQUE DES TUYAUX DE SONDAGE

RÉSUMÉ

En s'appuyant sur les travaux fondamentaux antérieurs [1] et [2], l'auteur établit une théorie de l'aplatissement hyperélastique des tuyaux de sondage sous l'action de la pression extérieure, analogue à la théorie du flambage hyperélastique [3].

En gardant — et même en élargissant — l'hypothèse du module réduit de variation linéaire, il établit l'expression de la pression critique à partir de laquelle on déduit l'expression de la résistance critique des tuyaux à l'instabilité hyperélastique, en fonction de la finesse des parois des tubes.

Pour le coefficient de sécurité à l'aplatissement, il adopte une expression analogue à celle utilisée dans le cas du flambage hyperélastique. Il déduit les résistances et les pressions admissibles et un coefficient d'aplatissement Φ analogue au coefficient de flambage φ des barres.

Il a fait les calculs numériques inscrits dans des tableaux, en prenant comme hypothèse que le rapport σ_t/σ_p est constant. Il a construit par le calcul le diagramme des résistances critiques, qui ressemble au fameux diagramme de Jasper, déduit par l'expérience.

Pour une certaine qualité d'acier, il a calculé les valeurs critiques et admissibles des pressions, inscrites dans les tableaux et représentées sur les diagrammes, en faisant la comparaison avec les formules bien connues.

Il arrive à la conclusion que les formules établies sont valables sur le domaine entier, à l'encontre des formules mentionnées, qui ne sont valables que dans des intervalles étroits.

Outre l'économie du matériel, l'application des formules établies conduit à l'augmentation de la sécurité en exploitation des tuyaux soumis à une pression extérieure.

BIBLIOGRAFIE

1. N. S. PÎRVULESCU, *Despre turtirea elastică a burlanelor de sondă sub acțiunea presiunii exterioare.* St. cerc. mec. apl., *2* (1960).
2. — *Despre modulul de superelasticitate.* St. cerc. mec. apl., *3* (1960).
3. — *Despre flambajul superelastic al barelor de oțel.* St. cerc. mec. apl., *3* (1963).
4. * * * *Manualul inginerului petrolist, 41,* Edit. tehnică, București, 356.

STUDII

METODE PRACTICE DE CALCUL LA STAREA LIMITĂ DE REZISTENȚĂ A ELEMENTELOR DE BETON PRECOMPRIMAT SOLICITATE LA COMPRESIUNE EXCENTRICĂ CU EXCENTRICITATE MICĂ

DE

MARCEL TANNENBAUM [1]

539.4 : 624.012.4

1. INTRODUCERE

1.1. Într-o lucrare precedentă [1] s-a demonstrat că pentru elementele de beton precomprimat solicitate la compresiune excentrică cu excentricitate mică, nu se pot aplica relațiile de calcul la starea limită de rezistență din cazul elementelor obișnuite de beton armat.

Se constată următoarele diferențe principiale :

1) Armătura pretensionată are caracterul unei încărcări exterioare, a cărei valoare depinde însă de starea de deformație a betonului secțiunii ; în consecință, excentricitatea forței totale care solicită secțiunea este diferită de excentricitatea încărcării aplicate.

2) Armătura pretensionată este situată în general la o distanță destul de mare de marginile secțiunii și ca urmare nu mai este admisibil, ca în cazul secțiunilor de beton armat, de a neglija diferența dintre înălțimea utilă a secțiunii h_0 și înălțimea totală a acesteia h ; secțiunea de calcul pentru compresiune centrică este deci diferită de secțiunea de calcul pentru compresiune excentrică cu excentricitate mare.

3) O dată cu trecerea în cazul compresiunii cu excentricitate mare o parte a armăturii pretensionate va fi situată în zona întinsă și nu va mai acționa ca o forță exterioară în starea limită de rezistență ; în consecință, se modifică și solicitarea din secțiune.

În lucrarea citată s-a propus o metodă de calcul, bazată pe introducerea unui coeficient variabil al condițiilor de lucru al elementului, a

---

[1] Institutul de cercetări în construcții și economia construcțiilor (INCERC), București.

cărui valoare s-a stabilit în funcție de excentricitatea încărcării aplicate și de armătura pretensionată din secțiune.

1.2. Modul în care s-a stabilit acest coeficient a reprezentat o primă aproximație bazată pe numeroase ipoteze simplificatoare.

Principala ipoteză constă în introducerea, pentru valoarea excentricității limită de trecere dintre cele două cazuri de compresiune excentrică, a condiției $|e_0| \leqslant 0{,}45\, x_0$ din cazul secțiunilor nearmate, unde $|e_0|$ reprezintă excentricitatea rezultantei tuturor forțelor din secțiune (exterioare și din armăturile pretensionate) față de centrul de greutate al secțiunii, iar x_0 distanța de la centrul de greutate al secțiunii pînă la marginea mai comprimată. Această condiție comodă și acoperitoare împiedică însă racordarea dintre cele două cazuri de compresiune excentrică deoarece ține seama numai de caracteristicile geometrice ale secțiunii totale. Ca urmare rezultă o modalitate complicată pentru calculul coeficientului condițiilor de lucru ale elementului, care pentru calcule practice trebuie extras din grafice, ceea ce este destul de incomod în proiectarea curentă.

1.3. În prezenta lucrare se indică o metodă practică de calcul la starea limită de rezistență a elementelor de beton precomprimat solicitate la compresiune excentrică cu excentricitate mică, pentru stabilirea căreia se renunță la ipoteza simplificatoare de mai sus, ținîndu-se seama de caracteristicile geometrice reale ale secțiunii pentru fiecare dintre cele două cazuri de compresiune excentrică în parte.

2. NOTAȚII

A_a — aria armăturii întinse sau mai puțin comprimate în cazul secțiunilor de beton armat,

A_a' — aria armăturii comprimate în cazul secțiunilor de beton armat,

A_p — aria armăturii pretensionate situată lîngă marginea întinsă sau mai puțin comprimată a secțiunii,

A_p' — aria armăturii pretensionate situată lîngă marginea comprimată a secțiunii,

A_b — aria secțiunii totale de beton,

A_c — aria zonei comprimate a secțiunii de beton pentru $x = 0{,}55\ h_0$,

a_p — distanța de la marginea întinsă sau mai puțin comprimată pînă la centrul de greutate al armăturii pretensionate de lîngă această margine,

a_p' — distanța de la marginea mai comprimată pînă la centrul de greutate al armăturii pretensionate de lîngă această margine,

b — lățimea secțiunii dreptunghiulare,

$|e_0|$ — excentricitatea rezultantei tuturor forțelor din secțiune (exterioare și din armăturile pretensionate) față de centrul de greutate al secțiunii,

e_0 — excentricitatea forței exterioare față de centrul de greutate al secțiunii.

$(e_0)_{\lim}$ — excentricitatea forței exterioare față de centrul de greutate al secțiunii pentru cazul limită,

e — excentricitatea forței exterioare față de centrul de greutate al armăturii întinse sau mai puțin comprimate,

e_1 — excentricitatea forței exterioare față de centrul de greutate al armăturii întinse sau mai puțin comprimate, pentru cazul solicitării centrice,

e_2 — excentricitatea forței exterioare față de centrul de greutate al armăturii întinse sau mai puțin comprimate, pentru cazul limită,

$\bar{e}$ — excentricitatea forței exterioare față de marginea întinsă sau mai puțin comprimată,

$\bar{e}_1$ — excentricitatea forței exterioare față de marginea întinsă sau mai puțin comprimată, pentru cazul solicitării centrice,

$\bar{e}_2$ — excentricitatea forței exterioare față de marginea întinsă sau mai puțin comprimată, pentru cazul limită,

h — înălțimea totală a secțiunii în planul de încovoiere,

h_0 — distanța de la marginea mai comprimată pînă la centrul de greutate al armăturii întinse sau mai puțin comprimate,

k_p — coeficientul de omogenitate al armăturii pretensionate,

m_0 — coeficientul de imprecizie al forței de precomprimare, egal cu 0,9 sau 1,1 după cum este mai defavorabil,

N — forța axială în starea limită de rezistență pentru compresiune excentrică cu excentricitate mică,

N_1 — forța axială în starea limită de rezistență pentru compresiune centrică,

N_2 — forța axială în starea limită de rezistență pentru cazul limită (forța axială aplicată cu excentricitate limită de trecere dintre cele două cazuri de compresiune excentrică),

R_a — rezistența de calcul a armăturii întinse în secțiuni de beton armat,

R'_a — rezistența de calcul a armăturii comprimate în secțiuni de beton armat,

R^n_p — rezistența normală a armăturii pretensionate,

R_p — rezistența de calcul a armăturii pretensionate,

R_{pr} — rezistența prismatică de calcul a betonului,

R_i — rezistența de calcul la compresiune din încovoiere a betonului,

S_c — momentul static al ariei zonei comprimate A_c față de centrul de greutate al armăturii A_p,

x_0 — distanța de la marginea mai comprimată a secțiunii pînă la centrul de greutate al acesteia,

x — distanța de la marginea mai comprimată a secțiunii pînă la axa neutră,

σ_a — efortul unitar din armătura mai puțin comprimată în starea limită de rezistență la secțiuni de beton armat,

σ_p — efortul unitar din armătura pretensionată situată lîngă marginea mai puțin comprimată în starea limită de rezistență,

σ_t — efortul unitar din armătura pretensionată situată în zona întinsă a secțiunii în starea limită de rezistență,

σ_c — efortul unitar din armătura pretensionată situată în zona comprimată a secțiunii în starea limită de rezistență,

σ_0 — efortul unitar de calcul din armătura pretensionată în faza inițială,

$\bar{\sigma}_0$ — efortul unitar de calcul din armătura pretensionată în faza finală.

Notațiile s-au stabilit în concordanță cu prevederile din [3].

3. PRINCIPII GENERALE

3.1. Fie o secțiune de beton armat oarecare, prevăzută cu armătură care prezintă un palier distinct de curgere, solicitată de o forță axială și se analizează comportarea ei în starea limită de rezistență pentru diferite valori ale excentricității forței (fig. 1). Se utilizează notația curentă e_0 pentru excentricitatea măsurată față de centrul de greutate al secțiunii și e pentru excentricitatea măsurată față de armătura situată la marginea mai puțin comprimată a secțiunii.

Se remarcă două situații bine precizate:

a) *Compresiune centrică*, $e_0 = 0$ (fig. 1, *a*). Eforturile unitare din beton sînt egale pe întreaga secțiune cu rezistența prismatică R_{pr}, iar în armături se atinge limita de curgere R_a'. Cedarea are loc prin strivirea betonului pe întreaga secțiune

b) *Cazul limită* $e_0 = (e_0)_{\lim}$ (fig. 1, *d*). Cedarea are loc prin strivirea betonului din zona comprimată, cu atingerea concomitentă a limitei de curgere, R_a, în armătura întinsă, A_a. Diagrama curbilinie a eforturilor unitare în betonul zonei comprimate poate fi înlocuită cu o diagramă dreptunghiulară de valoare egală cu rezistența la compresiune din încovoiere $R_i = 1{,}25\ R_{pr}$. Acest caz constituie criteriul de separație dintre cele două cazuri de compresiune excentrică.

Pentru toate excentricitățile mai mari decît $(e_0)_{\lim}$ sîntem în cazul compresiunii excentrice cu excentricitate mare. Cedarea secțiunii are loc prin strivirea betonului din zona comprimată după ce s-a atins limita de curgere în armătura întinsă (fig. 1, *e*). Acest caz se poate calcula utilizînd numai condițiile de echilibru în secțiune, deoarece sînt cunoscute eforturile în starea limită de rezistență.

Pentru toate excentricitățile mai mici decît $(e_0)_{\lim}$ sîntem în cazul compresiunii excentrice cu excentricitate mică (fig. 1, *b*, *c*). Cedarea secțiunii are loc prin strivirea betonului la marginea mai comprimată, fără ca în armătura situată lîngă marginea mai puțin comprimată să se fi atins limita de curgere. Calculul nu se poate efectua utilizînd numai condițiile de echilibru în secțiune, deoarece nu se cunoaște valoarea efortului unitar σ_a din armătura de la marginea mai puțin comprimată.

Problema poate fi rezolvată doar prin recurgere la o condiție de compatibilitate a deformațiilor specifice în secțiune. Această soluție complică foarte mult calculul fără a asigura însă o precizie satisfăcătoare, deoarece caracteristicile fundamentale mecanice ale betonului care trebuie să fie introduse în relații nu sînt stabilite în mod univoc. Într-adevăr, asupra deformației specifice limită la fibra extremă comprimată și asupra efortului unitar limită în această fibră se poate afirma numai că sînt cuprinse între valorile corespunzătoare cazului compresiunii centrice și cazului compresiunii cu excentricitate mare, fără a putea însă indica valori precise. De asemenea, forma diagramei de distribuție a eforturilor unitare în betonul secțiunii este practic nedeterminată, la nivelul actual al cunoștințelor noastre asupra betonului.

În consecință, diferiți autori au încercat să rezolve în mod operativ problema, prin simpla interpolare între cele două cazuri care limitează domeniul compresiunii excentrice cu excentricitate mică.

Pentru secțiunea de formă dreptunghiulară cazul $e_0 = (e_0)_{\lim}$ corespunde unei înălțimi a zonei comprimate $x = 0{,}55\ h_0$ și ca urmare momentul față de armătura întinsă se scrie

$$N_2\, e_2 = 0{,}4\, b\, h_0^2\, R_i + A_a'\, R_a'\, (h_0 - a_a'). \tag{1}$$

Pentru solicitarea centrică putem de asemenea scrie, aproximînd $h = h_0$ (ceea ce la secțiuni curente de beton armat introduce o eroare neînsemnată, armăturile fiind amplasate de regulă cu acoperirea minimă admisibilă de beton),

$$N_1\, e_1 = 0{,}5\, b\, h_0^2\, R_{pr} + A_a'\, R_a'\, (h_0 - a_a'). \tag{2}$$

Înlocuind $R_i = 1{,}25\ R_{pr}$ se obține

$$N_1\, e_1 = N_2\, e_2. \tag{3}$$

Rezultă ca urmare relația cea mai comodă de interpolare pentru orice excentricitate $e_1 < e < e_2$

$$Ne = \text{const.}, \tag{4}$$

respectiv

$$N = N_1 \frac{e_1}{e}. \tag{5}$$

Această relație a fost introdusă în prescripțiile sovietice [2] și romînești [3] pentru calculul elementelor de beton armat. O relație identică este propusă de Comitetul European pentru Beton [4], iar prescripțiile S.U.A. [5] prevăd o relație de interpolare puțin diferită ca formă, dar stabilită pe baza unor principii asemănătoare.

3.2. Fie o secțiune de beton precomprimat oarecare solicitată de o forță axială și se analizează comportarea ei în starea limită de rezistență pentru diferite valori ale excentricității forței (fig. 2). Excentricitățile $\bar{e}$ se măsoară în acest caz față de marginea mai puțin comprimată a secțiunii.

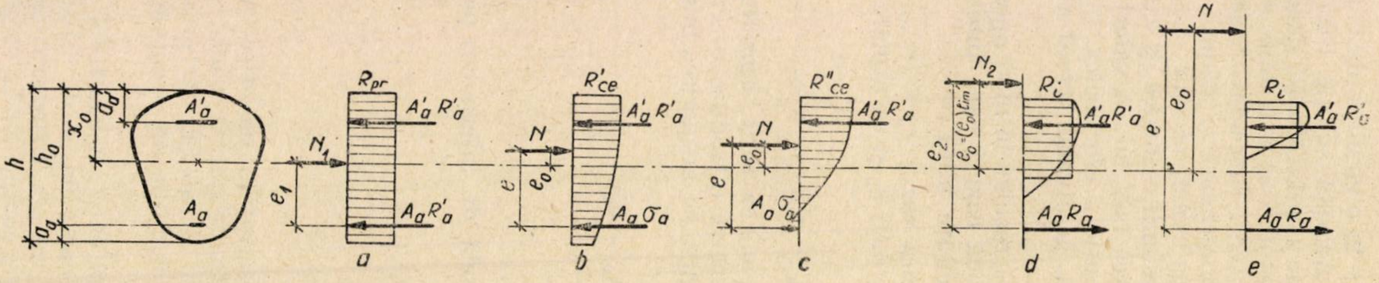

h
h_o
x_o
a_a'
A'_a
A_a
a_a
N_1
e_1
R_pr
A'_a R'_a
A_a R'_a
a
N
e
e_0
R'_ce
A'_a R'_a
A_a σ_a
b
N
e
e_0
R''_ce
A'_a R'_a
A_a σ_a
c
N_2
e_2
e_0=(e_0)_lim
R_i
A'_a R'_a
A_a R_a
d
N
e_0
e
R_i
A'_a R'_a
A_a R_a
e

Fig. 1. — Variația stării de eforturi în starea limită de rezistență în secțiuni de beton armat solicitate de o forță axială, pentru diferite valori ale excentricității forței.

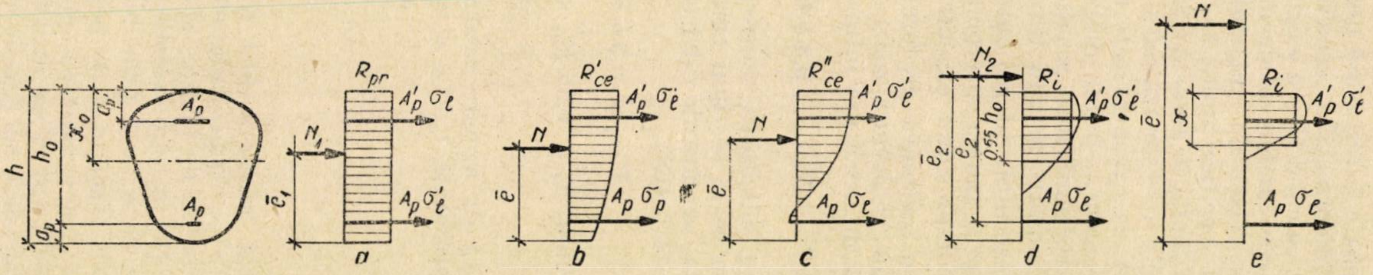

h
h_o
x_o
a_p'
A'_p
A_p
a_p
N_1
ē_1
R_pr
A'_p σ_l
A_p σ'_l
a
N
ē
R'_ce
A'_p σ'_l
A_p σ_p
b
N
ē
R''_ce
A'_p σ'_l
A_p σ_l
c
N_2
ē_2
e_2
0,55 h_o
R_i
A'_p σ'_l
A_p σ_l
d
N
ē
x
R_i
A'_p σ'_l
A_p σ_l
e

Fig. 2. — Variația stării de eforturi în starea limită de rezistență în secțiuni de beton precomprimat solicitate de o forță axială, pentru diferite valori ale excentricității forței.

Se remarcă aceleaşi situaţii bine precizate :

a) *Compresiune centrică*, $\bar{e} = \bar{e}_1$ (fig. 2, *a*). Spre deosebire de secţiunile de beton armat acest caz corespunde poziţiei centrice nu a forţei exterioare, ci a forţei totale care solicită secţiunea, respectiv a rezultantei forţei exterioare şi a forţei din armăturile pretensionate în starea limită de rezistenţă. Eforturile unitare din beton sînt egale pe întreaga secţiune cu rezistenţa prismatică R_{pr}, iar în armăturile pretensionate se atinge efortul unitar σ_l' care a fost definită în [1] prin relaţia

$$\sigma_l' = 3\,000 - m_0\,\bar{\sigma}_0 \qquad (6)$$

unde $m_0 = 1{,}1$.

Efortul unitar σ_l' poate fi astfel pozitiv (compresiune) sau negativ (întindere).

Pentru secţiunile considerate σ_l' are întotdeauna valori negative (întindere) şi deci armătura acţionează ca o forţă exterioară care comprimă secţiunea.

Şi în acest caz cedarea are loc prin strivirea betonului pe întreaga secţiune.

b) *Cazul limită*, $\bar{e} = \bar{e}_2$ (fig. 2, *d*). Deoarece sîrmele de oţel carbon trase la rece utilizate ca armături pretensionate nu prezintă palier de curgere, definiţia situaţiei limită în modul precizat la secţiunile de beton armat este lipsită de sens fizic. Secţiunea este caracterizată în acest caz prin faptul că prezintă valoarea minimă considerată satisfăcătoare pentru gradul de avertizare, dezvoltîndu-se fisuri şi săgeţi suficient de alarmante înaintea ruperii elementului. S-a arătat [6] că această situaţie se realizează atunci cînd alungirea suplimentară a armăturii pretensionate din zona întinsă în starea limită de rezistenţă este egală cu circa $2\,^0/_{00}$, ceea ce practic corespunde unei înălţimi a zonei comprimate $x = 0{,}55\,h_0$.

Diagrama de eforturi unitare din zona comprimată se poate considera dreptunghiulară cu valoarea R_i. În armătura pretensionată din zona comprimată, A_p', se atinge efortul unitar σ_l', definit prin relaţia (6), iar în armătura pretensionată din zona întinsă, A_p, efortul unitar σ_l, care poate fi determinat numai dintr-o condiţie de compatibilitate a deformaţiilor specifice în secţiune.

Acelaşi mod de calcul rămîne valabil pentru orice excentricitate $\bar{e} > \bar{e}_2$ (fig. 2 *e*).

Pentru toate excentricităţile mai mici decît $\bar{e}_2$ sîntem în cazul compresiunii excentrice cu excentricitate mică (fig. 2, *b*, *c*), cedarea secţiunii avînd loc prin strivirea betonului la marginea mai comprimată. În armătura pretensionată din zona comprimată se atinge efortul unitar σ_l', definit prin relaţia (6), iar efortul unitar σ_p din armătura pretensionată de la marginea mai puţin comprimată poate fi determinat de asemenea numai dintr-o condiţie de compatibilitate a deformaţiilor specifice în secţiune.

După cum s-a arătat însă mai sus, pentru această situaţie nu există date suficiente cu privire la valorile caracteristicilor mecanice ale materialelor care se introduc în relaţiile de calcul şi ca urmare efortul depus nu se justifică prin precizia rezultatelor obţinute.

Se propune în consecință ca, în mod analog cu betonul armat, să se rezolve operativ problema prin simpla interpolare între cele două cazuri care limitează domeniul compresiunii excentrice cu excentricitate mică.

Trebuie menționat faptul că o soluție analogă a fost propusă de S. A. Dimitriev [7] pentru cazul particular al secțiunilor tubulare solicitate la compresiune excentrică.

În cele ce urmează se stabilesc relațiile generale de calcul pe baza principiului enunțat.

4. STABILIREA RELAȚIILOR DE CALCUL

4.1. Se analizează în primul rînd cazul solicitării centrice. Putem scrie, în conformitate cu prevederile punctului 3.2, condiția de echilibru în starea limită de rezistență

$$N_1 = A_b\, R_{pr} + A_p\, \sigma_l' + A_p'\, \sigma_l', \tag{7}$$

unde A_b reprezintă aria secțiunii totale de beton, iar σ_l' este dat de relația (6).

Valoarea corespunzătoare a excentricității, $\bar{e}_1$, măsurată față de marginea mai puțin comprimată, se obține scriind momentul tuturor forțelor exterioare și interioare față de marginea mai puțin comprimată

$$N_1 \bar{e}_1 = A_b\, R_{pr}\, (h - x_0) + A_p\, \sigma_l'\, a_p + A_p'\, \sigma_l'\, (h - a_p'), \tag{8}$$

respectiv

$$\bar{e}_1 = \frac{N_1\, \bar{e}_1}{N_1} = \frac{A_b\, R_{pr}\, (h - x_0) + A_p\, \sigma_l'\, a_p + A_p'\, \sigma_l'\, (h - a_p')}{A_b\, R_{pr} + A_p\, \sigma_l' + A_p'\, \sigma_l'}. \tag{9}$$

4.2. Se analizează în al doilea rînd solicitarea aplicată cu excentricitatea limită de trecere dintre cele două cazuri de compresiune excentrică, $\bar{e}_2$, măsurată față de marginea mai puțin comprimată a secțiunii. În acest caz, înălțimea zonei comprimate în starea limită de rezistență are valoarea $x = 0{,}55\, h_0$.

Ecuația de echilibru de proiecție în starea limită de rezistență se scrie

$$N_2 = A_c\, R_i - A_p\, \sigma_l + A_p'\, \sigma_l', \tag{10}$$

unde

$$R_i = 1{,}25\, R_{pr}.$$

Pentru determinarea efortului unitar din armătura pretensionată situată în zona întinsă, σ_l, este necesară scrierea condiției de compatibilitate a deformațiilor specifice în secțiune.

Deoarece termenul $A_p\, \sigma_l$ nu are o influență hotărîtoare asupra valorii N_2, este admisibil a alege pentru σ_l o valoare medie. Pentru stabilirea acesteia se va utiliza diagrama caracteristică convențională de calcul a armăturii pretensionate [3] (fig. 3), unde coeficientul de omogeneitate al armăturii este $k_p = 0{,}8$.

Fiind vorba în general de armături postîntinse alcătuite din fascicule de sîrme SBP cu Ø = 5 mm la care se face de obicei resimțit efectul pierderilor de tensiune datorită frecărilor pe traseu, efortul unitar de calcul în faza inițială nu va depăși de regulă 0,65 R_p^n, respectiv ținînd seama de coeficientul de imprecizie $m_0 = 0{,}9$

$$0{,}9\,\sigma_0 = (0{,}9 \cdot 0{,}65)\,\frac{R_p}{0{,}8} \simeq 0{,}73\ R_p.$$

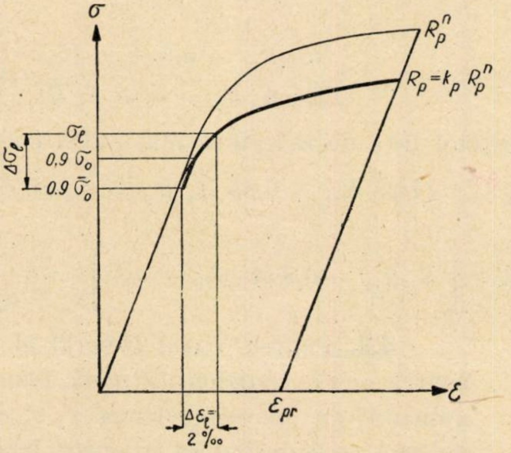


Fig. 3. — Diagrama caracteristică convențională de calcul a armăturii pretensionate din sîrme SBP.

Deoarece în elementele solicitate la compresiune excentrică nu se admit valori prea mari ale eforturilor unitare de compresiune în beton la precomprimare, pierderile de tensiune în timp sînt relativ reduse, putînd fi aproximate cu 1 500 kg/cm² $\simeq$ 0,09 R_p^n și ca urmare putem scrie pentru efortul unitar de calcul în faza finală

$$0{,}9\,\bar{\sigma}_0 = 0{,}9\,(0{,}65 - 0{,}09)\,\frac{R_p}{0{,}8} \simeq 0{,}63 R_p.$$

Pentru o creștere a alungirii specifice a armăturii pretensionate cu $\Delta\varepsilon_l \simeq 2\,^0/_{00}$ corespunde un spor al efortului unitar de circa $\Delta\sigma_l \simeq 3\ 000$ kg/cm² $\simeq 0{,}23\ R_p$, deci

$$\sigma_l = 0{,}9\ \bar{\sigma}_0 + \Delta\sigma_l = (0{,}63 + 0{,}23)\ R_p \simeq 0{,}85\ R_p.$$

În consecință se poate scrie ecuația (10) sub forma

$$N_2 = 1{,}25\,A_c\,R_{pr} - 0{,}85\,A_p\,R_p + A_p'\,\sigma_l'. \tag{11}$$

Momentul forțelor față de armătura întinsă se scrie

$$N_2\,e_2 = 0{,}8\,[S_c\,R_i + A_p'\,\sigma_l'\,(h_0 - a_p')], \tag{12}$$

unde 0,8 este coeficientul condițiilor de lucru ale elementului pentru cazul secțiunilor de beton precomprimat solicitate la compresiune excentrică cu excentricitate mare.

Deci

$$e_2 = \frac{N_2\, e_2}{N_2} = \frac{S_c\, R_{pr} + 0{,}8\, A'_p\, \sigma'_l\, (h_0 - a'_p)}{1{,}25\, A_c\, R_{pr} - 0{,}85\, A_p\, R_p + A'_p\, \sigma'_l}, \tag{13}$$

respectiv

$$\bar{e}_2 = a_p + e_2 = a_p + \frac{S_c\, R_{pr} + 0{,}8\, A'_p\, \sigma'_l\, (h_0 - a'_p)}{1{,}25\, A_c\, R_{pr} - 0{,}85\, A_p\, R_p + A'_p\, \sigma'_l}. \tag{14}$$

Momentul forțelor față de marginea mai puțin comprimată se scrie

$$N_2\, \bar{e}_2 = (1{,}25\, R_{pr} - 0{,}85\, A_p\, R_p + A'_p\, \sigma'_l)\, \bar{e}_2, \tag{15}$$

respectiv

$$N_2\, \bar{e}_2 = \left[S_c\, R_{pr} + 0{,}8\, A'_p\, (h_0 - a'_p) \right] \frac{\bar{e}_2}{\bar{e}_2 - a_p}. \tag{16}$$

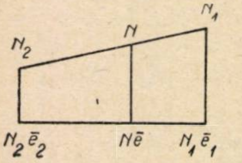


Fig. 4. — Modul de interpolare pentru determinarea încărcării exterioare N în starea limită de rezistență în cazul compresiunii excentrice cu excentricitate mică ($\bar{e}_1 < e < \bar{e}_2$)

4.3. Pentru cazul general al compresiunii excentrice cu excentricitate mică, respectiv o încărcare aplicată cu excentricitatea $\bar{e}_1 < \bar{e} < \bar{e}_2$, se interpolează considerînd că valoarea încărcării exterioare N în starea limită de rezistență descrește liniar de la N_1 la N_2 cînd momentul față de marginea mai puțin comprimată variază de la $N_1\, \bar{e}_1$ la $N_2\, \bar{e}_2$ (fig. 4).

Se poate deci scrie:

$$N = N_1 - (N_1 - N_2)\, \frac{N_1\, \bar{e}_1 - N\bar{e}}{N_1\, \bar{e}_1 - N_2\, \bar{e}_2}, \tag{17}$$

respectiv, explicitînd pe N,

$$N = N_1\, \frac{\bar{e}_1 - \dfrac{N_1\, \bar{e}_1 - N_2\, \bar{e}_2}{N_1 - N_2}}{\bar{e} - \dfrac{N_1\, \bar{e}_1 - N_2\, \bar{e}_2}{N_1 - N_2}}.$$

Notînd

$$\bar{e}_m = \frac{N_1\, \bar{e}_1 - N_2\, \bar{e}_2}{N_1 - N_2} \tag{18}$$

rezultă relația finală de calcul

$$N = N_1\, \frac{\bar{e}_1 - \bar{e}_m}{\bar{e} - \bar{e}_m}. \tag{19}$$

Valoarea $\bar{e}_m$ introduce influența caracteristicilor geometrice diferite ale secțiunii pentru fiecare din cele două cazuri de compresiune excentrică în parte. Pentru secțiuni de beton armat avem $e_m \simeq 0$ și relația (19) trece în relația cunoscută (5).

5. EXEMPLU DE CALCUL

5.1. Fie secțiunea din figura 5, avînd caracteristicile de mai jos :

$b = 20$ cm,
$h = 60$ cm,
$h_0 = 50$ cm,
$a_p = 10$ cm,
$a'_p = 10$ cm,
$A_p = 4{,}70$ cm², excentricitatea forței axiale $\bar{e} = 50$ cm,
$A'_p = 2{,}35$ cm²,

oțel SBP I ... $\begin{cases} R_p^n = 16\,500 \text{ kg/cm}^2, \\ R_p = 13\,200 \text{ ,, ,} \end{cases}$

B 400 .... $\begin{cases} R_{pr} = 170 \text{ ,, ,} \\ R_i = 210 \text{ ,, ,} \end{cases}$

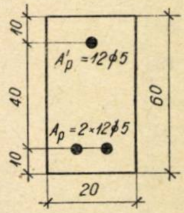


Fig. 5. — Secțiunea unui element de beton precomprimat solicitat la compresiune excentrică

$\sigma'_0 = 10\,000$ kg/cm²,
$\sigma'_l = 3\,000 - 1{,}1 \times 10\,000 = -8\,000$ kg/cm²,

$$N_1 = A_b R_{pr} + A_p \sigma'_l + A'_p \sigma'_l = 20 \times 60 \times 170 - (4{,}70 + 2{,}35)\, 8\,000 = 147\,600 \text{ kg},$$

$$N_1 \bar{e}_1 = A_b R_{pr}(h - x_0) + A_p \sigma'_l a_p + A'_p \sigma'_l (h - a'_p) = 20 \times 60 \times 170 \times 30 - 4{,}70 \times 8\,000 \times 10 - 2{,}35 \times 8\,000 \times 50 = 4\,800\,000 \text{ kg cm},$$

$$\bar{e}_1 = \frac{4\,800\,000}{147\,600} = 32{,}5 \text{ cm};$$

$$N_2 = 1{,}25\, A_c R_{pr} - 0{,}85\, A_p R_p + A'_p \sigma'_l = 1{,}25 \times 20 \times (0{,}55 \times 50) \times 170 - 0{,}85 \times 4{,}70 \times 13\,200 - 2{,}35 \times 8\,000 = 45\,500 \text{ kg},$$

$$\bar{e}_2 = a_p + \frac{S_c R_{pr} + 0{,}8\, A'_p \sigma'_l (h_0 - a'_p)}{N_2} = 10 + \frac{0{,}4 \times 20 \times 50^2 \times 170 - 0{,}8 \times 2{,}35 \times 8\,000 \times 40}{45\,500} = 10 + 61{,}5 = 71{,}5 \text{ cm},$$

$$N_2 \bar{e}_2 = 45\,500 \times 71{,}5 = 3\,250\,000 \text{ kg cm}.$$

Avem $\bar{e}_1 < \bar{e} < \bar{e}_2$, deci sîntem în cazul compresiunii excentrice cu excentricitate mică și trebuie aplicată relația (19)

$$\bar{e}_m = \frac{N_1 \bar{e}_1 - N_2 \bar{e}_2}{N_1 - N_2} = \frac{4\,800\,000 - 3\,250\,000}{147\,600 - 45\,500} = 15{,}2 \text{ cm},$$

$$N = N_1 \frac{\bar{e}_1 - \bar{e}_m}{\bar{e} - \bar{e}_m} = 147\,600 \frac{32{,}5 - 15{,}2}{50 - 15{,}2} = 73\,400 \text{ kg}.$$

5.2. În figura 6 s-a reprezentat variația valorii încărcării exterioare N în starea limită de rezistență pentru diferite valori ale excentricității $\bar{e}$ în cazul secțiunii considerate.

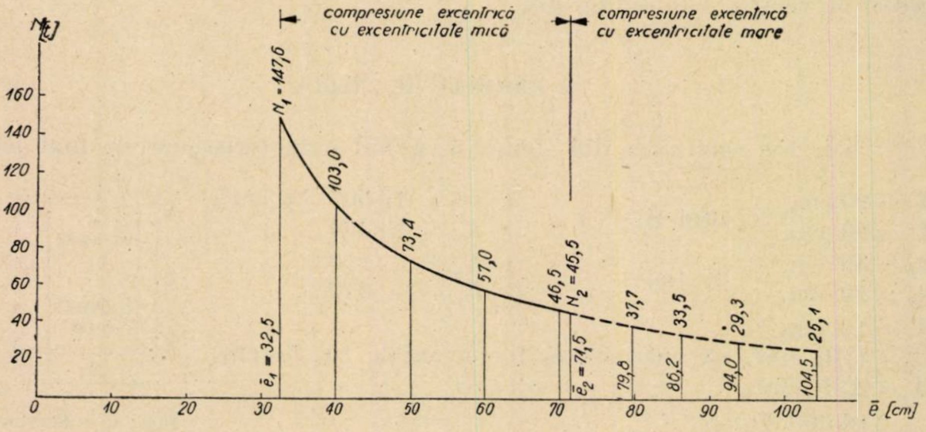


Fig. 6. — Variația valorii încărcării exterioare N în starea limită de rezistență pentru diferite valori ale excentricității $\bar{e}$ în cazul secțiunii din figura 5.

Valoarea N s-a calculat atît pentru domeniul compresiunii excentrice cu excentricitate mică ($\bar{e}_1 < \bar{e} < \bar{e}_2$), cît și pentru cel al compresiunii excentrice cu excentricitate mare ($\bar{e} > \bar{e}_2$).

Se remarcă racordarea perfectă între cele două domenii, ceea ce justifică utilizarea relației de calcul propuse.

Primită la redacție la 28 ianuarie 1963

DESIGN OF ECCENTRICALLY LOADED PRESTRESSED CONCRETE SECTIONS WITH THE ULTIMATE CAPACITY CONTROLLED BY COMPRESSION

ABSTRACT

The ultimate load N of an eccentrically loaded prestressed concrete section with the ultimate capacity controlled by compression, is assumed to decrease linearly from N_1 to N_2 as the moment of the axial load toward the less compressed fibre of the section varies from $N_1\,\bar{e}_1$ to $N_2\bar{e}_2$, where

N_1 — axial load capacity for concentrical loading;

$\bar{e}_1$ — eccentricity of N_1 measured from the less compressed fibre of the section;

N_2 — axial load capacity for balanced conditions ($x = 0.55\ h_0$);
$\overline{e}_2$ — eccentricity of N_2 measured from the less compressed fibre of the section.

For this assumption the ultimate load is given by the equation

$$N = N_1 \frac{\overline{e}_1 - \overline{e}_m}{\overline{e} - \overline{e}_m}$$

where

$\overline{e}$ — eccentricity of N measured from the less compressed fibre of the section

$$\overline{e}_m = \frac{N_1 \overline{e}_1 - N_2 \overline{e}_2}{N_1 - N_2}.$$

The numerical computations presented in the paper indicate a good correlation at the boundary between ultimate load conditions controlled by compression and tension.

BIBLIOGRAFIE

1. M. Tannenbaum, *Calculul la starea limită de rezistență a elementelor de beton precomprimat solicitate la compresiune excentrică cu excentricitate mică.* St. cerc. mec. apl., XIII, *5* (1962).
2. C. V. Sahnovşki, *Construcții de beton armat.* București, 1953.
3. * * * *Normativ condiționat pentru calculul și alcătuirea constructivă a elementelor de construcții din beton, beton armat și beton precomprimat* (P. 8—62), București, 1963.
4. Franco Levi, *Work of the European Concrete Committee.* J. Amer. Concrete Inst., **58**, *3* (1961).
5. * * * *Proposed revision of Building Code Requirements for Reinforced Concrete* (ACI 318—56). J. Amer. Concrete Inst. **59**, *2* (1962).
6. M. Tannenbaum, *Calculul la starea limită de rezistență a elementelor de beton precomprimat solicitate la încovoiere.* St. cerc. mec. apl., XIV, *3* (1963).
7. С. А. Дмитриев, *Уточнение расчета прочности обычных и предварительно напряженных элементов кольцевого сечения.* Исследование Прочности, жесткости и трещиностойкости железобетонных конструкций, Труды НИИЖБ, *26* (1962).

CONSTRUIREA SOLUȚIEI ECUAȚIILOR PLĂCILOR PLANE ELASTICE SUBȚIRI, DIN TEORIA FĂRĂ IPOTEZA LOVE-KIRCHHOFF, PRIN METODA FUNCȚIILOR ANALITICE

DE

V. MANEA

539.3

1. INTRODUCERE

Într-o lucrare anterioară [1] am arătat cum se pot obține ecuațiile plăcilor plane elastice subțiri fără a apela la ipoteza Love-Kirchhoff. Am ajuns la un sistem de cinci ecuații cu derivate parțiale : primele două ecuații corespund stării plane de tensiune și se pot rezolva independent de următoarele trei ce corespund stării de încovoiere. Pentru determinarea stării plane de tensiune ne stau la dispoziție metodele teoriei elasticității plane, îndeosebi metoda funcțiilor analitice [2], [3], [4]. Pentru determinarea solicitării de încovoiere în teoria bazată pe ipoteza Love-Kirchhoff există numeroase studii, dintre care multe bazate pe metoda funcțiilor analitice, ce sînt consacrate, în fond, soluționării ecuației biarmonice cu condițiile la limită ce decurg din modul de rezemare a plăcii.

În cele ce urmează vom arăta că și în cazul formulării teoriei plăcilor plane subțiri fără ipoteza Love-Kirchhoff putem utiliza metoda funcțiilor analitice pentru construirea soluției. Este evident că vom beneficia de o serie de rezultate existente atît în teoria elasticității plane cît și în teoria clasică a încovoierii plăcilor, astfel încît unele rezultate sau relații cunoscute le vom utiliza direct.

2. PUNEREA PROBLEMEI SOLICITĂRII DE ÎNCOVOIERE A PLĂCILOR PLANE ELASTICE SUBȚIRI

Pentru aceasta vom scrie direct cîteva rezultate din [1] ce vor servi ca punct de plecare în dezvoltările următoare.

Ecuațiile de echilibru ce descriu starea de încovoiere sînt

$$\mu \frac{h^3}{12} \Delta w_1 + (\lambda^\star + \mu) \frac{h^3}{12} \frac{\partial \theta_1}{\partial x_1} - \mu h \left(\frac{\partial w}{\partial x_1} + w_1 \right) - \rho \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} + X_1 = 0,$$

$$\mu \frac{h^3}{12} \Delta w_2 + (\lambda^\star + \mu) \frac{h^3}{12} \frac{\partial \theta_1}{\partial x_2} - \mu h \left(\frac{\partial w}{\partial x_2} + w_2 \right) - \rho \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2} + X_2 = 0, \tag{2.1}$$

$$\mu h (\Delta w_1 + \theta_1) - \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + X_3 = 0,$$

în care :

h — grosimea plăcii,

$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1} + \frac{\partial^2}{\partial x_2},$

μ, λ — constantele lui Lamé, iar $\lambda^\star = \frac{\lambda\mu}{\lambda + 2\mu}$,

w_1, w_2 — rotații care dau deplasări pozitive pe direcția Ox_1, respectiv Ox_2, punctelor plăcii cu $x_3 > 0$, planul $x_3 = 0$ fiind chiar planul ei median,

w — deplasarea medie pe grosimea plăcii după direcția normală la planul ei median (în scopul evitării posibilității de confuzie am renunțat la notația $\overline{w}$ adoptată în [1]),

$\theta_1 = \frac{\partial w_1}{\partial x_1} + \frac{\partial w_2}{\partial x_2},$

ρ — masa unității de volum,

$X_j = \rho \frac{h^3}{12} \mathcal{F}_j + \frac{h}{2} (\sigma_{3j}^s + \sigma_{3j}^i) + \frac{\lambda^\star}{2\mu} \frac{h^3}{12} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_j} \qquad (j = 1, 2),$

$X_3 = \rho h F_3 + \sigma_{33}^s - \sigma_{33}^i,$

$\mathcal{F}_j = \frac{12}{h^3} \int_{-h/2}^{h/2} f_j x_3 \mathrm{d} x_3,$

$F_3 = \int_{-h/2}^{h/2} f_3 \mathrm{d} x_3,$

σ_{3j}^s, σ_{3j}^i — tensiunile exterioare aplicate pe suprafața superioară, respectiv inferioară, a plăcii $(j = 1, 2, 3)$,

f_j — proiecțiile vectorului forțelor masice $(j = 1, 2, 3)$,

$\varphi_2 = \frac{12}{h^3} \int_{-h/2}^{h/2} \left[\sigma_{33}^i + \frac{\sigma_{33}^s - \sigma_{33}^i}{2} \left(1 + \frac{2x_3}{h} \right) \right] \mathrm{d} x_3.$

Expresiile momentelor de încovoiere şi răsucire şi forţelor tăietoare conform legii lui Hooke sînt

$$M_{11} = \lambda^* \frac{h^3}{12}\theta_1 + 2\mu\frac{h^3}{12}\cdot\frac{\partial w_1}{\partial x_1} + \frac{\lambda^*}{2\mu}\cdot\frac{h^3}{12}\varphi_2,$$

$$M_{22} = \lambda^* \frac{h^3}{12}\theta_1 + 2\mu\frac{h^3}{12}\frac{\partial w_2}{\partial x_2} + \frac{\lambda^*}{2\mu}\frac{h^3}{12}\varphi_2, \tag{2.2}$$

$$M_{12} = \mu\frac{h^3}{12}\left(\frac{\partial w_1}{\partial x_2} + \frac{\partial w_2}{\partial x_1}\right),$$

respectiv

$$N_{13} = \mu h\left(\frac{\partial w}{\partial x_1} + w_1\right),$$

$$N_{23} = \mu h\left(\frac{\partial w}{\partial x_2} + w_2\right). \tag{2.3}$$

Condiţiile la limită sînt în număr de trei şi pot fi formulate dîndu-se fie momentele de încovoiere şi răsucire şi forţa tăietoare aplicate pe suprafaţa laterală a plăcii, fie rotaţiile şi deplasarea pe verticală a punctelor acestei suprafeţe Adesea se dă o combinaţie compatibilă între aceste două tipuri de condiţii. Pentru simplificare, în cele ce urmează, vom spune conturul plăcii în loc de suprafaţa laterală.

3. CONSTRUIREA SOLUŢIEI SISTEMULUI (2.1)

Vom considera cazul static presupunînd totodată $X_1 = X_2 = 0$. Neglijăm de asemenea efectele evaluate prin intermediul funcţiei φ_2 în scopul simplificării calculelor.

Dacă luăm pentru rotaţii expresii de forma

$$w_1 = \frac{\partial U_1}{\partial x_1} - \frac{\partial V_1}{\partial x_2},$$

$$w_2 = \frac{\partial U_1}{\partial x_2} + \frac{\partial V_1}{\partial x_1}, \tag{3.1}$$

avem evident

$$\theta_1 = \Delta U_1, \tag{3.2}$$

$$\omega_1 = \frac{\partial w_2}{\partial x_1} - \frac{\partial w_1}{\partial x_2} = \Delta V_1. \tag{3.3}$$

Înlocuind în primele două ecuații de echilibru (2.1) conform cu (3.1) și (3.2) obținem

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x_1}[D\Delta U_1 - B(w + U_1)] = \frac{\partial}{\partial x_2}[D'\Delta V_1 - BV_1], \\ &\frac{\partial}{\partial x_2}[D\Delta U_1 - B(w + U_1)] = -\frac{\partial}{\partial x_2}[D'\Delta V_1 - BV_1], \end{aligned} \tag{3.4}$$

unde am notat

$$D = (\lambda^* + 2\mu)\frac{h^3}{3} \tag{3.4'}$$

rigiditatea la încovoiere,

$$D' = \mu\frac{h^3}{12} \tag{3.4''}$$

rigiditatea la răsucire iar

$$B = \mu h \tag{3.4'''}$$

rigiditatea la alunecare transversală.

Se observă că (3.4) reprezintă condițiile Cauchy-Riemann, de unde rezultă că

$$D\Delta U_1 - B\ (w + U_1) = -Bp_0, \tag{3.5}$$

$$D'\Delta V_1 - BV_1 = -Bq_0, \tag{3.6}$$

p_0 și q_0 fiind funcții armonice conjugate arbitrare. La aceste ecuații adăugăm cea de-a treia ecuație de echilibru care, ținînd seama de (3.2), devine

$$B\Delta(w + U_1) + X_3 = 0. \tag{3.7}$$

Introducînd notațiile

$$\begin{aligned} U_1 &= U + p_0, \\ V_1 &= V + q_0, \\ W &= w + U, \end{aligned} \tag{3.8}$$

în (3.5), (3.6) și (3.7) obținem

$$D\Delta U - BW = 0, \tag{3.9}$$

$$D'\Delta V - BV = 0, \tag{3.10}$$

respectiv

$$B\Delta W + X_3 = 0. \tag{3.11}$$

În urma înlocuirii în (3.1) rezultă

$$\begin{aligned} w_1 &= \frac{\partial U}{\partial x_1} - \frac{\partial V}{\partial x_2}, \\ w_2 &= \frac{\partial U}{\partial x_2} + \frac{\partial V}{\partial x_1}, \end{aligned} \tag{3.12}$$

şi prin urmare (3.2) şi (3.3) devin

$$\theta_1 = \Delta U, \tag{3.13}$$

$$\omega = \Delta V. \tag{3.14}$$

Înlocuind acum în expresiile momentelor (2.2) şi forțelor tăietoare (2.3), conform cu (3.12) şi (3.13) şi ținînd seama de ultima relație (3.8), obținem

$$\begin{aligned} M_{11} &= \lambda^* \frac{h^3}{12} \Delta U + 2\mu \frac{h^3}{12}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial x_2}\right), \\ M_{22} &= \lambda^* \frac{h^3}{12} \Delta U + 2\mu \frac{h^3}{12}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial x_2}\right), \\ M_{12} &= \mu \frac{h^3}{12}\left(2\frac{\partial^2 U}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial x_2^2}\right), \end{aligned} \tag{3.15}$$

respectiv

$$\begin{aligned} N_{13} &= B\left(\frac{\partial W}{\partial x_1} - \frac{\partial V}{\partial x_2}\right), \\ N_{23} &= B\left(\frac{\partial W}{\partial x_2} + \frac{\partial V}{\partial x_1}\right). \end{aligned} \tag{3.16}$$

4. SOLUȚIILE ECUAȚIILOR (3.9), (3.10) ŞI (3.11) ŞI REPREZENTAREA COMPLEXĂ A ROTAȚIILOR, DEPLASĂRII PE VERTICALĂ, MOMENTELOR DE ÎNCOVOIERE ŞI RĂSUCIRE ŞI FORȚELOR TĂIETOARE

Considerînd ecuația (3.11) putem scrie soluția ei generală sub forma

$$W = 4\frac{D}{B}\frac{\partial p}{\partial x_1} + W^*, \tag{4.1}$$

unde p este partea reală a funcției analitice de variabila complexă $z = x_1 + ix_2$

$$\varphi(z) = p + iq \tag{4.2}$$

iar W^* o soluție particulară a ecuației

$$BW^* + X_3 = 0. \tag{4.3}$$

Soluția ecuației (3.9) se poate scrie direct [2] sub forma

$$U = x_1 p + x_2 q + p_1 + U^*, \tag{4.4}$$

unde p_1 este partea reală a funcției analitice

$$\chi(z) = p_1 + iq_2 \tag{4.5}$$

iar U^* o soluție particulară a ecuației

$$D\Delta U^* + BW^* = 0. \tag{4.6}$$

În ceea ce privește soluția ecuației lui Helmholtz (3.10), o presupunem construită într-un mod oarecare, de exemplu prin metoda separării variabilelor.

Soluțiile (4.1) și (4.4) pot fi scrise cu ajutorul variabilei complexe sub forma

$$w = 4\,\frac{D}{B}\,\mathcal{R}e\,\varphi'(z) + W^{\star}, \tag{4.7}$$

respectiv

$$U = \mathcal{R}e[\bar{z}\,\varphi(z) + \chi(z)] + U^{\star}. \tag{4.8}$$

Rotația scrisă sub formă complexă are expresia

$$w_1 + \mathrm{i}w_2 = \varphi(z) + z\overline{\varphi'(z)} + \overline{\chi'(z)} + w_1^{+} + \mathrm{i}w_2^{+} + w_1^{\star} + \mathrm{i}w_2^{\star}, \tag{4.9}$$

unde am notat

$$w_1^{+} + \mathrm{i}w_2^{+} = -\frac{\partial V}{\partial x_2} + \mathrm{i}\,\frac{\partial V}{\partial x_1}, \tag{4.10}$$

$$w_1^{\star} + \mathrm{i}w_2^{\star} = \frac{\partial U^{\star}}{\partial x_1} + \mathrm{i}\,\frac{\partial U^{\star}}{\partial x_2}\cdot \tag{4.11}$$

Pentru deplasarea pe verticală, înlocuind în ultima relație (3.8) conform cu (4.7) și (4.8), rezultă expresia

$$w = \mathcal{R}e\left[-\bar{z}\varphi(z) - \chi(z) + 4\,\frac{D}{B}\,\varphi'(z)\right] + w^{\star}, \tag{4.12}$$

unde

$$w^{\star} = W^{\star} - U^{\star}. \tag{4.13}$$

Pentru momente obținem următoarele expresii :

$$\begin{aligned} M_{11} + \mathrm{i}M_{12} = \frac{h^3}{12}\{2(\lambda^{\star} + \mu)[\varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)}] + 2\mu[z\,\overline{\varphi''(z)} + \overline{\chi''(z)}]\} + \\ + M_{11}^{+} + \mathrm{i}M_{12}^{+} + M_{11}^{\star} + \mathrm{i}M_{12}^{\star}, \end{aligned} \tag{4.14}$$

$$\begin{aligned} M_{22} - \mathrm{i}M_{12} = \frac{h^3}{12}\{2(\lambda^{\star} + \mu)[\varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)}] + 2\mu[\overline{z\varphi''(z)} + \overline{\chi''(z)}]\} + \\ + M_{22}^{+} - \mathrm{i}M_{12}^{+} + M_{22}^{\star} - \mathrm{i}M_{12}^{\star}, \end{aligned}$$

unde

$$\begin{aligned} M_{11}^{+} &= -\mu\,\frac{h^3}{6}\,\frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial x_2}, \\ M_{22}^{+} &= \mu\,\frac{h^3}{6}\,\frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial x_2}, \\ M_{12}^{+} &= \mu\,\frac{h^3}{12}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial x_2^2}\right), \end{aligned} \tag{4.15}$$

respectiv

$$M^*_{11} = \frac{h^3}{12}\left(\lambda^* \Delta U^* + 2\mu \frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2}\right),$$

$$M^*_{22} = \frac{h^3}{12}\left(\lambda^* \Delta U^* + 2\mu \frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2}\right), \tag{4.16}$$

$$M^*_{12} = \mu \frac{h^3}{6} \frac{\partial^2 U^*}{\partial x_1 \partial x_2}.$$

Forţa tăietoare complexă este dată de expresia

$$N_{13} - \mathrm{i}N_{23} = 4\,D\,\varphi''(z) + N^+_{13} - \mathrm{i}N^+_{23} + N^*_{13} - \mathrm{i}N^*_{23}, \tag{4.17}$$

unde

$$N^+_{13} - \mathrm{i}N^+_{23} = -\,B\left(\frac{\partial V}{\partial x_2} + \mathrm{i}\frac{\partial V}{\partial x_1}\right), \tag{4.18}$$

respectiv

$$N^*_{13} - \mathrm{i}N^*_{23} = B\left(\frac{\partial W^*}{\partial x_1} - \mathrm{i}\frac{\partial W^*}{\partial x_2}\right). \tag{4.19}$$

Din (4.14) se pot obţine două formule analoge formulelor lui Kolosov din teoria elasticităţii plane

$$M_{11} + M_{22} = (\lambda^* + \mu)\frac{h^3}{3}\left[\varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)}\right] + M^*_{11} + M^*_{22}, \tag{4.20}$$

$$M_{22} - M_{11} + 2\mathrm{i}M_{12} = -\,\mu\frac{h^3}{3}\left[\bar{z}\varphi''(z) + \chi''(z)\right] + M^+_{22} - M^+_{11} +$$

$$+\,2\mathrm{i}M^+_{12} + M^*_{22} - M^*_{11} + 2\mathrm{i}M^*_{12}. \tag{4.21}$$

În vederea scrierii condiţiilor la limită deducem în continuare expresiile proiecţiilor pe axele Ox_1 şi Ox_2 ale momentelor ce acţionează asupra unui element de arc ds aparţinînd unei curbe oarecare L. Notînd cu α unghiul dintre normala $\bar{n}$ la L şi axa Ox_1, putem exprima cosinuşii directori ai acesteia sub forma

$$\cos\alpha = \frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}s}, \quad \sin\alpha = -\,\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}s}, \tag{4.22}$$

sau

$$\cos\alpha = \frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}n}, \quad \sin\alpha = \frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}n}. \tag{4.23}$$

Ținînd seama că proiecțiile momentelor ce acționează asupra unității de lungime a arcului s aparținînd curbei L sînt date de relațiile

$$\begin{aligned} M_{n1} &= M_{11}\cos\alpha + M_{12}\sin\alpha, \\ M_{n2} &= M_{12}\cos\alpha + M_{22}\sin\alpha, \end{aligned} \tag{4.24}$$

după înlocuirile corespunzătoare și cîteva operații algebrice obținem

$$\begin{aligned} (M_{n1} + \mathrm{i}M_{n2})\,\mathrm{d}s = -\mathrm{i}\frac{h^3}{6}\{(\lambda^* + 2\mu)[\varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)}] - \mu\mathrm{d}[\varphi(z) + z\overline{\varphi'(z)} + \\ + \overline{\chi'(z)}]\} + (M^+_{n1} + \mathrm{i}M^+_{n2})\,\mathrm{d}s + (M^*_{n1} + \mathrm{i}M^*_{n2})\,\mathrm{d}s, \end{aligned} \tag{4.25}$$

unde

$$(M^+_{n1} + \mathrm{i}M^+_{n2})\,\mathrm{d}s = BV\mathrm{d}z - \mathrm{i}\mu\frac{h^3}{6}\mathrm{d}\left(\frac{\partial V}{\partial x_2} - \mathrm{i}\frac{\partial V}{\partial x_1}\right), \tag{4.26}$$

respectiv

$$(M^*_{n1} + \mathrm{i}M^*_{n2})\mathrm{d}s = -\mathrm{i}\frac{h^3}{12}\left[(\lambda^* + 2\mu)\,\Delta U^*\mathrm{d}z - 2\mu\mathrm{d}\left(\frac{\partial U^*}{\partial x_1} + \mathrm{i}\frac{\partial U^*}{\partial x_2}\right)\right]\cdot \tag{4.27}$$

Forța tăietoare ce acționează asupra unității de lungime a aceluiași arc este

$$N_{n3} = N_{13}\cos\alpha + N_{23}\sin\alpha \tag{4.28}$$

de unde, după înlocuirile corespunzătoare, rezultă

$$N_{n3}\mathrm{d}s = 2\mathrm{i}D\mathrm{d}\,[\overline{\varphi'(z)} - \varphi'(z)] + N^+_{n3}\mathrm{d}s + N^*_{n3}\mathrm{d}s, \tag{4.29}$$

unde

$$N^+_{n3} = -B\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}s}, \tag{4.30}$$

respectiv

$$N^*_{n3} = B\frac{\mathrm{d}W^*}{\mathrm{d}n}\cdot \tag{4.31}$$

Momentul forței N_{n3} ds față de axele sistemului de referință are expresia

$$\begin{aligned} -zN_{n3}\mathrm{d}s = -2\mathrm{i}D\,\{\mathrm{d}[z\overline{\varphi'(z)} - z\varphi'(z)] - [\overline{\varphi'(z)} - \varphi'(z)]\,\mathrm{d}z\,\} - \\ - z\,(N^+_{n3} + N^*_{n3})\,\mathrm{d}s. \end{aligned} \tag{4.32}$$

Adunînd (4.25) cu (4.32) obținem expresia momentului față de axele sistemului de referință datorit tuturor forțelor ce acționează asupra elementului de arc ds

$$\begin{aligned} (M_{n1} + \mathrm{i}M_{n2} - zN_{n3})\,\mathrm{d}s = -2\mathrm{i}D\mathrm{d}\left\{2\varphi(z) + z\overline{\varphi'(z)} - z\varphi'(z) - \right. \\ \left. - \frac{\mu}{\lambda^* + 2\mu}\,[\varphi(z) + z\overline{\varphi'(z)} + \overline{\chi'(z)}]\right\} + (M^+_{n1} + \mathrm{i}M^+_{n2} - zN^+_{n3})\,\mathrm{d}s + \\ + (M^*_{n1} + \mathrm{i}M^*_{n2} - zN^*_{n3})\,\mathrm{d}s. \end{aligned} \tag{4.33}$$

Integrînd (4.29) și (4.33) de-a lungul lui L, între două puncte arbitrare A și B, obținem

$$\int_A^B N_{n3}\mathrm{d}s = 2\mathrm{i}D[\overline{\varphi'(z)} - \varphi'(z)]_A^B + \int_A^B (\overset{+}{N}_{n3} + \overset{*}{N}_{n3})\,\mathrm{d}s, \tag{4.34}$$

respectiv

$$\int_A^B (M_{n1} + \mathrm{i}M_{n2} - zN_{n3})\,\mathrm{d}s = -2\mathrm{i}D\Big\{2\varphi(z) + z\overline{\varphi'(z)} - z\varphi'(z) - \frac{\mu}{\lambda^* + 2\mu}[\varphi(z) + z\overline{\varphi'(z)} + \overline{\chi'(z)}]\Big\}_A^B + \int_A^B (\overset{+}{M}_{n1} + \mathrm{i}\overset{+}{M}_{n2} - z\overset{+}{N}_{n3})\,\mathrm{d}s + \int_A^B (\overset{*}{M}_{n1} + \mathrm{i}\overset{*}{M}_{n2} - z\overset{*}{N}_{n3})\mathrm{d}s. \tag{4.35}$$

Vom stabili în continuare condițiile pe care trebuie să le îndeplinească forța tăietoare și momentele ce acționează pe conturul plăcii. Utilizînd formula lui Green

$$\iint_S \Delta W \mathrm{d}S = \oint_L \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}n}\mathrm{d}s \tag{4.36}$$

și avînd în vedere (3.11) precum și (4.29) scrisă sub forma

$$N_{n3} = B\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}n} + \overset{+}{N}_{n3} \tag{4.37}$$

rezultă

$$\oint_L (N_{n3} - \overset{+}{N}_{n3})\,\mathrm{d}s + \iint X_3\mathrm{d}S = 0, \tag{4.38}$$

unde L și S reprezintă conturul, respectiv suprafața, unei porțiuni arbitrare a plăcii. Dacă considerăm întreaga placă, în virtutea condiției de echilibru al forțelor exterioare aplicate pe conturul și suprafața ei

$$\oint_L N_{n3}\mathrm{d}s + \iint_S X_3\,\mathrm{d}S = 0 \tag{4.39}$$

deducem din (4.38) că

$$\oint_L \overset{+}{N}_{n3}\,\mathrm{d}s = 0. \tag{4.40}$$

Avînd în vedere (4.30), această condiție este echivalentă cu condiția de uniformitate a funcției $V(x_1, x_2)$. Înlocuind în (4.36) W cu W^* și ținînd seama de (4.3) și (4.31), obținem de asemenea

$$\oint_L \overset{*}{N}_{n3}\mathrm{d}s + \iint_S X_3\mathrm{d}S. \tag{4.41}$$

Dacă în (4.34) A coincide cu B, rezultă ţinînd seama de (4.39), (4.40) şi (4.41) că partea imaginară a funcţiei $\varphi'(z)$ trebuie să fie uniformă.

Folosindu-ne de identitatea

$$\nabla\,[x_j \nabla(\Delta U)] = \bar{i}_j \nabla(\Delta U) + x_j \Delta\Delta U, \quad (j = 1,2) \tag{4.42}$$

în care am notat $\nabla = \bar{i}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \bar{i}_2 \frac{\partial}{\partial x_2}$, $\bar{i}_1$, $\bar{i}_2$ fiind versorii axelor Ox_1 şi Ox_2 şi aplicîndu-i formula lui Green avem

$$\oint_L x_j \frac{\mathrm{d}(\Delta U)}{\mathrm{d}n}\,\mathrm{d}s = \oint_L \bar{i}_j\, \Delta U \bar{n}\,\mathrm{d}s + \iint_S x_j \Delta\Delta U\,\mathrm{d}S. \tag{4.43}$$

Pe de altă parte, scriind (4.25) şi (4.29) sub forma

$$M_{nj} = D\Delta U \bar{i}_j \bar{n} - \mu \frac{h^3}{6}\,\mathrm{d}\left(\frac{\partial U}{\partial x_k}\right) + \overset{+}{M}_{nj}, \quad (j \neq k\,;\, j, k = 1, 2,) \tag{4.44}$$

respectiv

$$N_{n3} = D\,\frac{\mathrm{d}(\Delta U)}{\mathrm{d}n} + \overset{+}{N}_{n3} \tag{4.45}$$

şi înlocuind în (4.23) rezultă

$$\oint_L (M_{n1} + \mathrm{i}M_{n2} - zN_{n3})\,\mathrm{d}s - \oint_L (\overset{*}{M}_{n1} + \mathrm{i}\overset{+}{M}_{n2} - z\overset{+}{N}_{n3})\,\mathrm{d}s - \\ - \iint_S zX_3\,\mathrm{d}S = 0, \tag{4.46}$$

L şi S fiind conturul, respectiv suprafaţa, unei porţiuni arbitrare a plăcii. Considerînd întreaga placă, în virtutea condiţiei de echilibru al momentelor

$$\oint_L (M_{n1} + \mathrm{i}M_{n2} - zN_{n3})\,\mathrm{d}s - \iint_S zX_3\,\mathrm{d}S = 0 \tag{4.47}$$

deducem din (4.46) că

$$\oint_L (\overset{+}{M}_{n1} + \mathrm{i}\overset{+}{M}_{n2} - z\overset{+}{N}_{n3})\,\mathrm{d}s = 0 \tag{4.48}$$

care, avînd în vedere (4.26) şi (4.30), este echivalentă cu condiţia de uniformitate a funcţiei $V(x_1, x_2)$ şi derivatelor sale parţiale de ordinul întîi. Înlocuind în (4.43) pe U cu U^* şi ţinînd seama de (4.3), (4.6), (4.27) şi (4.31) obţinem

$$\oint_L (\overset{*}{M}_{n1} + \mathrm{i}\overset{*}{M}_{n2} - z\overset{*}{N}_{n3})\,\mathrm{d}s - \iint zX_3\,\mathrm{d}S = 0. \tag{4.49}$$

Dacă în (4.33) A coincide cu B rezultă ţinînd seama de (4.47) şi (4.49) că $\varphi(z)$ şi $\overline{\chi'(z)}$ trebuie să fie uniforme. Invers, condiţiile de uniformitate amintite pot fi asigurate numai dacă forțele tăietoare și momentele aplicate pe contur sînt în echilibru.

Revenind la expresia rotațiilor (4.9) se observă că acestea sînt uniforme dacă pe lîngă condițiile precedente și derivatele de ordinul întîi ale funcției U^* sînt uniforme. Din condiția de uniformitate a deplasării pe verticală (4.12) rezultă condiția ca $\mathcal{R}e\chi(z)$ precum și W^* și U^* să fie uniforme. Ca urmare a acestor condiții din (4.7) și (4.8) rezultă uniformitatea funcțiilor W și U.

5. CONDIȚIILE LA LIMITĂ ÎN PROBLEMA ÎNCOVOIERII ÎN REPREZENTARE COMPLEXĂ

Folosind rezultatele de la punctul precedent, condițiile la limită în reprezentare complexă se pot scrie direct. Considerăm două probleme distincte : I) să se determine starea de solicitare de încovoiere a plăcii dîndu-se forța tăietoare și momentele aplicate pe contur ;II) să se determine starea de solicitare de încovoiere a plăcii dîndu-se deplasarea pe verticală și rotațiile pe contur. Ne referim la plăci ce reprezintă un domeniu cu conexiune simplă.

Pentru prima problemă pusă putem scrie direct condițiile la limită corespunzătoare integrînd (4.29) și (4.33) între 0 și s

$$2\mathrm{i}D\,[\varphi'(\overline{z}) - \varphi'(z)] - BV + C_0 = \int_0^s N_{n3}^{**}\,\mathrm{d}s \quad \text{pe} \quad L, \tag{5.1}$$

respectiv

$$\begin{gathered}-2\mathrm{i}D\left\{2\varphi(z) + z\overline{\varphi'(z)} - z\varphi'(z) - \frac{\mu}{\lambda^* + 2\mu}\left[\varphi(z) + z\overline{\varphi'(z)} + \overline{\chi'(z)}\right]\right\} + \\ + BzV - 2D'\left(\frac{\partial V}{\partial x_1} + \mathrm{i}\frac{\partial V}{\partial x_2}\right) + C_1 = \int_0^s (M_{n1}^{**} + \mathrm{i}M_{n2}^{**} - zN_{n3}^{**})\,\mathrm{d}s \ \text{pe} \ L,\end{gathered} \tag{5.2}$$

unde am notat

$$N_{n3}^{**} = N_{n3} - N_{n3}^{*}, \tag{5.3}$$

$$M_{n1}^{**} + \mathrm{i}M_{n2}^{**} = M_{n1} - M_{n1}^{*} + \mathrm{i}\,(M_{n2} - M_{n2}^{*}), \tag{5.4}$$

care sînt funcții cunoscute de argumentul s deoarece N_{n3} și $M_{n1} + \mathrm{i}M_{n2}$ sînt date pe frontieră iar restul termenilor sînt dați de (4.31) și (4.27).

Pentru cea de-a doua problemă condițiile la limită corespunzătoare se deduc direct din (4.9) și (4.12)

$$\varphi(z) + z\varphi'(z) + \overline{\chi'(z)} - \frac{\partial V}{\partial x_2} + \mathrm{i}\frac{\partial V}{\partial x_1} = w_1^{**} + \mathrm{i}w_2^{**} \quad \text{pe} \quad L, \tag{5.5}$$

respectiv

$$\mathcal{R}e\left[-\bar{z}\varphi(z) - \chi(z) + 4\,\frac{D}{B}\,\varphi'(z)\right] = w^{**} \quad \text{pe} \quad L, \tag{5.6}$$

unde am notat

$$w_1^{**} + \mathrm{i}w_2^{**} = w_1 - w_1^{*} + \mathrm{i}\,(w_2 - w_2^{*}), \tag{5.7}$$

$$w^{**} = w - w^{*}. \tag{5.8}$$

care sînt funcții cunoscute de argumentul s deoarece $w_1 + \mathrm{i}w_2$ și w sînt date pe frontieră iar $w_1^* + \mathrm{i}w_2^*$ și w^* sînt date de (4.11) și (4.13).

Dacă pe frontieră se dau momentele M_{nn} și M_{ns} sau rotațiile $w_n + \mathrm{i}w_s$, a căror semnificație este sugerată de indicii n și s afectați direcției normalei, respectiv tangentei, la contur, vom face uz de relațiile

$$\begin{aligned} M_{n_1} + \mathrm{i}M_{n2} &= (M_{nn} + \mathrm{i}M_{ns})\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}, \\ w_1 + \mathrm{i}w_2 &= (w_n + \mathrm{i}w_s)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}. \end{aligned} \tag{5.9}$$

6. GRADUL DE DETERMINARE AL FUNCȚIILOR $\varphi(z)$ ȘI $\chi(z)$

Revenind la relațiile (4.17), (4.20) și (4.21), raționînd analog ca în [2], se observă că starea de solicitare rămîne neschimbată dacă înlocuim astfel

$$\begin{aligned} \varphi(z) &\to \varphi(z) + \mathrm{i}\,Cz + \gamma, \\ \chi(z) &\to \chi(z) + \gamma' z + \gamma'', \end{aligned} \tag{6.1}$$

unde C este o constantă reala iar γ, γ' și γ'' constante complexe. Înlocuind în (4.9) și (4.12) rezultă că pentru o aceeași stare de solicitare rotația $w_1 + \mathrm{i}w_2$ și deplasarea pe verticală w pot diferi cu cantitățile

$$\begin{aligned} w_{10} + \mathrm{i}w_{20} &= \gamma + \overline{\gamma}', \\ 2w_0 &= -(\gamma + \overline{\gamma}')\overline{z} - (\overline{\gamma} + \gamma')z - \gamma'' - \overline{\gamma}''. \end{aligned} \tag{6.2}$$

Înlocuind în relația a doua conform cu prima rezultă

$$w_0 = -w_{10}\,x_1 - w_{20}x_2 + \delta, \tag{6.3}$$

unde

$$\delta = -\frac{\gamma'' + \overline{\gamma}''}{2} \tag{6.4}$$

adică deplasarea pe verticală w_0 se datorește unor rotații de rigid w_{10} și w_{20} și unei translații δ. Dacă cerem ca rotațiile și deplasarea pe verticală să rămînă invariante la o transformare de forma (6.1) trebuie să luăm

$$\begin{aligned} \gamma + \overline{\gamma}' &= 0, \\ \mathcal{Re}\,\gamma'' &= 0. \end{aligned} \tag{6.5}$$

Constanta C rămîne complet arbitrară neinfluențînd nici starea de solicitare la încovoiere și nici rotațiile și deplasarea pe verticală.

7. OBSERVAȚII ÎN LEGĂTURĂ CU DOMENIUL FINIT CU CONEXIUNE MULTIPLĂ

Dacă placa considerată reprezintă un domeniu S, multiplu conex, mărginit de mai multe contururi L_m, toate cuprinse de conturul exterior L_{m+1}, se impun considerații suplimentare.

Pe fiecare din contururile ce mărginesc placa avem de satisfăcut condiţii de tipul (5.1), (5.2), cu constantele de integrare C_0 şi C_1 diferite de la un contur la altul, sau de tipul (5.5) şi (5.6). Funcţia $V(x_1, x_2)$, soluţie a ecuaţiei lui Helmholtz, fiind uniformă, putem arăta, urmînd acelaşi raţionament ca în [2], că forţa tăietoare (4.17) şi momentele (4.20) şi (4.21) sînt funcţii uniforme în S dacă luăm

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= z\sum_{k=1}^{m} A_k \ln(z - z_k) + \sum_{k=1}^{m} \gamma_k \ln(z - z_k) + \varphi^0(z), \\ \chi(z) &= z\sum_{k=1}^{m} \gamma_k' \ln(z - z_k) + \sum_{k=1}^{m} \gamma_k'' \ln(z - z_k) + \chi^0(z), \end{aligned} \tag{7.1}$$

unde A_k sînt constante reale, γ_k, γ_k' şi γ_k'' constante complexe iar $\varphi^0(z)$ şi $\chi^0(z)$ olomorfe în S. Punctul de afixă z_k aparţine domeniului interior conturului L_k.

Pentru ca rotaţiile şi deplasarea pe verticală să rămînă funcţii uniforme la o alegere de forma (7.1), din (4.9) şi (4.12) rezultă că este necesar să avem

$$\begin{aligned} \gamma_k - \bar{\gamma}_k' &= 0, \\ \mathcal{I}m\,\gamma_k'' &= 0. \end{aligned} \tag{7.2}$$

Dacă în (4.34) şi (4.35) drumul de integrare este unul din contururile L_k, deci A coincide cu B, şi înlocuim conform cu (7.1) rezultă [1]

$$8\pi D A_k = -\oint_{L_k} \overset{**}{N}_{n3}\,\mathrm{d}s = \overset{**}{\mathcal{N}}_{3k}, \tag{7.3}$$

respectiv

$$8\pi D \gamma_k = -\oint_{L_k} (\overset{**}{M}_{n1} + \mathrm{i}\overset{**}{M}_{n2} - z\overset{**}{N}_{n3})\,\mathrm{d}s = \overset{**}{\mathcal{M}}_{1k} + \mathrm{i}\overset{**}{\mathcal{M}}_{2k}, \tag{7.4}$$

$\overset{**}{\mathcal{N}}_{3k}$ şi $\overset{**}{\mathcal{M}}_{1k} + \mathrm{i}\,\overset{**}{\mathcal{M}}_{2k}$ avînd semnificaţia de rezultantă a forţei tăietoare şi a momentelor aplicate pe conturul L_k. Rezolvînd sistemul format de (7.2), (7.3) şi (7.4) rezultă

$$\begin{aligned} A_k &= \frac{\overset{**}{\mathcal{N}}_{3k}}{8\pi D}, \\ \gamma_k &= \frac{\overset{**}{\mathcal{M}}_{1k} + \mathrm{i}\overset{**}{\mathcal{M}}_{2k}}{8\pi D}, \\ \gamma_k' &= \frac{\overset{**}{\mathcal{M}}_{1k} - \mathrm{i}\overset{**}{\mathcal{M}}_{2k}}{8\pi D}, \\ \gamma_k'' &= \text{const. reală arbitrară}. \end{aligned} \tag{7.5}$$

---

[1] Sensul de integrare pe L_k este cel care lasă la stînga domeniul considerat.

Înlocuind în (7.1) vom avea

$$\varphi(z) = z \sum_{k=1}^{m} \frac{\mathcal{N}_{3k}^{**}}{8\pi D} \ln(z - z_k) + \sum_{k=1}^{m} \frac{\mathcal{M}_{1k}^{**} + \mathrm{i}\mathcal{M}_{2k}^{**}}{8\pi D} \ln(z - z_k) + \varphi^{0}(z), \tag{7.6}$$

$$\chi(z) = z \sum_{k=1}^{m} \frac{\mathcal{M}_{1k}^{**} - \mathrm{i}\mathcal{M}_{2k}^{**}}{8\pi D} \ln(z - z_k) + \sum_{k=1}^{m} \Upsilon_k'' \ln(z - z_k) + \chi^{0}(z), \tag{7.7}$$

funcțiile $\varphi^0(z)$ și $\chi^0(z)$ urmînd a fi determinate cu ajutorul condițiilor date pe fiecare din contururile L_k împreună cu funcția $V(x_1, x_2)$.

Dacă domeniul considerat este infinit, deci L_{m+1} se lărgește la infinit, în afara unui cerc L_R care cuprinde toate contururile L_k funcțiile (7.6) și (7.7) pot fi scrise sub forma

$$\varphi(z) = \frac{\mathcal{N}_3^{**}}{8\pi D} z \ln z + \frac{\mathcal{M}_1^{**} + \mathrm{i}\mathcal{M}_2^{**}}{8\pi D} \ln z + \varphi^{00}(z), \tag{7.8}$$

$$\chi(z) = \frac{\mathcal{M}_1^{**} - \mathrm{i}\mathcal{M}_2^{**}}{8\pi D} z \ln z + \sum_{k=1}^{m} \Upsilon_k'' \ln z + \chi^{00}(z), \tag{7.9}$$

unde

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_3^{**} &= \sum_{k=1}^{m} \mathcal{N}_{3k}^{**}, \\ \mathcal{M}_1^{**} + \mathrm{i}\,\mathcal{M}_2^{**} &= \sum_{k=1}^{m} \mathcal{M}_{1k}^{**} + \mathrm{i}M_{2k}^{**}, \end{aligned} \tag{7.10}$$

$\varphi^{00}(z)$ și $\chi^{00}(z)$ fiind funcții olomorfe în exteriorul lui L_R, putînd face excepție punctul de la infinit [2]. Aceste funcții pot fi deci reprezentate cu ajutorul unor serii Laurent

$$\varphi^{00}(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n z^n, \tag{7.11}$$

$$\chi^{00}(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n' z^n. \tag{7.12}$$

Funcția $V(x_1, x_2)$ poate fi reprezentată sub forma unei serii Fourier folosind coordonatele polare

$$V(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} [b_n I_n(\nu r) + c_n K_n(\nu r)](d_n \cos n\theta + e_n \sin n\theta), \tag{7.13}$$

unde I_n și K_n sînt funcții Bessel de speța întîi și a doua de argument imaginar [5], [6]. Am notat

$$\nu r = \sqrt{\frac{B}{D'}(x_1^2 + x_2^2)}. \tag{7.14}$$

Condiția ca momentele și forța tăietoare să rămînă mărginite în tot domeniul S o obținem revenind la expresiile (4.17), (4.20) și (4.21). Este evidentă condiția ca mărimile $M_{11}^{*}, M_{22}^{*}, \ldots, N_{23}^{*}$ să rămînă mărginite în S. Analog se observă că $M_{11}^{+}, M_{22}^{+}, \ldots, N_{23}^{+}$ rămîn mărginite pentru $|z| \to \infty$ dacă

$$b_n = 0 \qquad (n \geqslant 0). \tag{7.15}$$

Ținînd seama de proprietățile funcțiilor K_n, rezultă că aceste mărimi tind spre zero cînd $|z| \to \infty$. Înlocuind acum în (4.17), (4.20) și (4.21) obținem

$$\begin{aligned} M_{11}^{**} + M_{22}^{**} = (\lambda^{*} + \mu)\frac{h^3}{3}\Big[& \frac{\mathcal{N}_3^{**}}{4\pi D}(\ln R + 1) + \frac{\mathcal{M}_1^{**} + \mathrm{i}\mathcal{M}_2^{**}}{8\pi D}\,\frac{1}{z} + \\ & + \frac{\mathcal{M}_1^{**} - \mathrm{i}\mathcal{M}_2^{**}}{8\pi D}\,\frac{1}{\bar{z}} + \sum_{-\infty}^{\infty} n\,(a_n z^{n-1} + \bar{a}_n z^{n-1})\Big], \end{aligned} \tag{7.16}$$

$$\begin{aligned} M_{22}^{**} - M_{11}^{**} + 2\mathrm{i}M_{12}^{**} = -\mu\,\frac{h^3}{3}\Big[& \frac{\mathcal{N}_3^{**}}{8\pi D}\,\frac{\bar{z}}{z} - \frac{\mathcal{M}_1^{**} + \mathrm{i}\mathcal{M}_2^{**}}{8\pi D}\cdot\frac{\bar{z}}{z^2} + \\ & + \frac{\mathcal{M}_1^{**} - \mathrm{i}\mathcal{M}_2^{**}}{8\pi D}\cdot\frac{1}{z} - \sum_{k=1}^{m}\gamma_k''\cdot\frac{1}{z^2} + \sum_{-\infty}^{\infty} n(n-1)\,(a_n\bar{z} + a_n')z^{n-2}\Big] + \\ & + M_{22}^{+} - M_{11}^{+} + 2\mathrm{i}M_{12}^{+}, \end{aligned} \tag{7.17}$$

$$\begin{aligned} N_{13}^{**} - \mathrm{i}N_{23}^{**} = & \frac{\mathcal{N}_3^{**}}{2\pi}\,\frac{1}{z} + \frac{\mathcal{M}_1^{**} + \mathrm{i}\mathcal{M}_2^{**}}{2\pi}\cdot\frac{1}{z^2} + 4\,D\sum_{-\infty}^{\infty} n\,(n-1)\,a_n z^{n-2} + \\ & + N_{13}^{+} - \mathrm{i}N_{23}^{+}, \end{aligned} \tag{7.18}$$

de unde rezultă că momentele și forța tăietoare rămîn mărginite pentru $|z| \to \infty$ dacă

$$\begin{aligned} & \mathcal{N}_3^{**} = 0, \\ & a_n = 0 \qquad (n \geqslant 2), \\ & a_n' = 0 \qquad (n \geqslant 3). \end{aligned} \tag{7.19}$$

În acest caz, expresiile (7.8) și (7.9) devin

$$\varphi(z) = \frac{\mathcal{M}_1^{**} + \mathrm{i}\mathcal{M}_2^{**}}{8\pi D}\ln z + \Gamma z + \gamma + \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} z^{-n}, \tag{7.20}$$

$$\begin{aligned} \chi(z) = & \frac{\mathcal{M}_1^{**} - \mathrm{i}\mathcal{M}_2^{**}}{8\pi D}\,z\ln z + \sum_{k=1}^{m}\gamma_k''\ln z + \Gamma' z^2 + \gamma' z + \gamma'' + \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} z^{-n}. \end{aligned} \tag{7.21}$$

Trecînd la limită în (7.16), (7.17) şi (7.18) rezultă

$$\begin{aligned}
&\lim_{|z|\to\infty} (M_{11}^{**} + M_{22}^{**}) = (\lambda^{+} + \mu)\frac{h^3}{3}(\Gamma + \overline{\Gamma}),\\
&\lim_{|z|\to\infty} (M_{22}^{**} - M_{11}^{**} + 2\mathrm{i}M_{12}^{**}) = -\mu\frac{h^3}{3}2\Gamma',\\
&\lim_{|z|\to\infty} (N_{13}^{**} - \mathrm{i}N_{23}^{**}) = 0,
\end{aligned} \tag{7.22}$$

de unde putem determina $\mathcal{R}e\Gamma$ şi Γ' în funcţie de valoarea momentelor la infinit. În ceea ce priveşte rotaţiile şi deplasarea pe verticală, în urma înlocuirii în (4.9) şi (4.12), conform cu (7.20) şi (7.21), obţinem expresiile

$$\begin{aligned}
w_1^{**} + \mathrm{i}w_2^{*} = {} & \frac{\mathcal{M}_1^{**} + \mathrm{i}\mathcal{M}_2^{**}}{8\pi D}(\ln z\bar{z} + 1) + \frac{\mathcal{M}_1^{**} + \mathrm{i}\mathcal{M}_2^{**}}{8\pi D}\frac{z}{\bar{z}} + z(\Gamma + \overline{\Gamma}) +\\
& + 2\overline{\Gamma}'\bar{z} + \sum_{k=1}^{m}\gamma_k''\cdot\frac{1}{z} + \gamma + \bar{\gamma}' + \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}z^{-n} - \sum_{n=1}^{\infty} n\bar{a}_{-n}\bar{z}^{-n-1} -\\
& - \sum_{n=1}^{\infty} na'_{-n}\bar{z}^{-n},
\end{aligned} \tag{7.23}$$

respectiv

$$\begin{aligned}
w^{**} = \mathcal{R}e\Bigg\{ & -\frac{\mathcal{M}_1^{**} + \mathrm{i}\mathcal{M}_2^{**}}{8\pi D}\bar{z}\ln z - \frac{\mathcal{M}_1^{**} - \mathrm{i}\mathcal{M}_2^{**}}{8\pi D}z\ln z -\\
& - \sum_{k=1}^{m}\gamma_k''\ln z - \Gamma z\bar{z} - \Gamma' z^2 - \gamma\bar{z} - \bar{\gamma}'z - \gamma'' - \bar{z}\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}z^{-n} -\\
& - \sum_{n=1}^{\infty} a'_{-n}z^{-n} + 4\frac{D}{B}\left[\frac{\mathcal{M}_1^{**} + \mathrm{i}\mathcal{M}_2^{**}}{8\pi D}\frac{1}{z} + \Gamma - \sum_{n=1}^{\infty} na_{-n}z^{-n-1}\right]\Bigg\}.
\end{aligned} \tag{7.24}$$

Pentru ca rotaţiile să rămînă mărginite pentru $|z| \to \infty$ este necesar să avem

$$\mathcal{M}_1^{**} = \mathcal{M}_2^{**} = \mathcal{R}e\Gamma = \Gamma' = 0. \tag{7.25}$$

Observînd că

$$\mathcal{R}e(\gamma\bar{z} + \gamma'z) = \mathcal{R}e\,[(\gamma + \bar{\gamma}')\bar{z}]$$

deducem că deplasarea w^{**} rămîne mărginită pentru $|z| \to \infty$ dacă pe lîngă (7.25) avem şi

$$\gamma + \bar{\gamma}' = \sum_{k=1}^{m}\gamma_k'' = 0. \tag{7.26}$$

Primită la redacţie la 8 mai 1963 şi o nouă versiune la 10 iunie 1963

ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ПЛОСКИХ ТОНКИХ УПРУГИХ ПЛАСТИНОК ИЗ ТЕОРИИ БЕЗ ГИПОТЕЗЫ ЛОВЕ-КИРХГОФФА МЕТОДОМ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

РЕЗЮМЕ

В этой статье строится решение уравнений плоских тонких упругих пластинок, полученное в предыдущей работе, без использования метода Лове-Кирхгоффа, используя метод аналитических функций и прием работы, использованный Н. П. Мусхелишвили в теории плоской упругости. Рассматривалась задача изгиба пластинки, нагруженной силой, нормальной к средней плоскости, когда на контуре имеются изгибающие и крутящие моменты и перерезывающая сила или повороты и смещение точек контура пластинки по вертикали. Полученные результаты позволяют критически оценивать классическую формулировку и могут одновременно использоваться в практических целях.

BIBLIOGRAFIE

1. V. Manea, *Consideraţii asupra teoriei plăcilor plane elastice subţiri.* St. cerc. mec. apl., *4* (1963).
2. Н. И. Мусхелишвили, *Некоторые вопросы математической теории упругости.* Изд. АН СССР, Москва — Ленинград, 1949.
3. И. Снеддон, Д. Берри, *Классическая теория упругости.* Госизд. физ.-мат. лит., Москва, 1961.
4. С. М. Белоносов, *Основные плоские статические задачи теории упругости для односвязных и двухсвязных областей.* Издат. Сиб. Отд. АН СССР, Новосибирск, 1962.
5. N. N. Lebedev, *Funcţii speciale şi aplicaţiile lor.* Edit. tehnică, Bucureşti, 1957.
6. V. I. Smirnov, *Curs de matematici superioare.* Edit. tehnică, Bucureşti, 1955, **III**, partea II.

AUTOMATIZAREA CONTROLULUI DE ASPECT AL BILELOR DE RULMENȚI

DE

I. JAKAB, I. RUGINĂ și A. ZAHARESCU

621.82 : 621.52

Cerințele deosebit de ridicate de precizie și calitate în industria de rulmenți impun un mare număr de operații de control în tot cursul procesului tehnologic.

La fabricarea bilelor de rulmenți, operația finală de control este controlul de aspect care constă în examinarea vizuală de către controlori specializați a tuturor bilelor care parcurg fluxul tehnologic. Controlul urmărește eliminarea tuturor bilelor care prezintă defecte de suprafață de orice natură, vizibile cu ochiul liber. Aceste defecte provin fie din neomogenitatea materialului, fie din prelucrarea mecanică sau tratamentul termic incorect executate, și se prezintă sub forma unor pete, zgîrieturi etc. Rebutarea bilelor avînd defecte de suprafață este impusă de norme, întrucît montarea lor în rulmenți ar putea influența negativ calitatea și durabilitatea acestora.

În majoritatea cazurilor, defectele care trebuie observate sînt la limita de percepere a ochiului omenesc și operația cere o atenție încordată.

Fabricarea rulmenților posedă un înalt grad de automatizare, atît la operațiile de prelucrare cît și la cele de control și sortare a pieselor. Controlul vizual reprezintă nu numai o piedică în calea automatizării complete a procesului tehnologic, ci și o operație cu o cotă importantă în cheltuielile de fabricație. La întreprinderile mari producătoare de rulmenți numărul muncitorilor ocupați la controlul de aspect al bilelor reprezintă un procent important din numărul total al muncitorilor secțiilor de bile.

Problema automatizării acestei operații de control s-a pus încă cu două decenii în urmă, acest lucru fiind impus nu numai de considerentele tehnico-economice amintite, cît mai ales de cele de calitate, deoarece în controlul vizual, afectat de factori subiectivi, nu se poate asigura constanţa necesară a criteriilor de control.

Cu toate acestea, din cauza dificultăţilor pe care le implică, primele încercări concrete de rezolvare a problemei automatizării controlului de aspect au apărut abia în ultimii ani, aproximativ în acelaşi timp în cîteva ţări.

Dificultăţile constau înainte de toate în varietatea defectelor de suprafaţă care trebuie luate în consideraţie. Defectele sînt, după cum am amintit, de diferite provenienţe şi pot fi clasificate în modul următor [2] :

— porozităţi, care există iniţial în material,

— deteriorări mari din şlefuire,

— rizuri din şlefuire,

— lipsuri de material provenite dintr-un por mare, sau dintr-un defect de matriţare,

— aplatisări, provenite din prelucrarea ulterioară,

— pete moi, care apar în urma tratamentului termic şi reprezintă decarburări locale ale materialului,

— bile moi, care prezintă pe întreaga suprafaţă defectul amintit anterior,

— coroziuni,

— fisuri, provenite din laminare sau din forjare,

— pete albe, provocate de lustruirea insuficientă a bilelor.

Problema se complică prin aceea că o parte din defectele amintite pot fi de dimensiuni foarte mici, în care caz ele nu se mai consideră defecte. Nu există criterii clare în privinţa mărimii defectului la care bila trebuie rebutată. O indicaţie indirectă se obţine din faptul că se practică controlul de aspect cu ochiul liber ; de aici rezultă că dimensiunea minimă de defect este determinată de pragul de sensibilitate al ochiului. Acest prag depinde de o mulţime de factori obiectivi şi subiectivi şi poate fi apreciat ca fiind în jur de 0,1 mm diametru pentru pete de formă aproximativ rotundă. Acest criteriu nu are însă, evident, nici o bază tehnologică sau funcţională.

Să vedem acum, care ar fi calea de abordare a problemei automatizării controlului de aspect al bilelor?

Analizînd modul în care operează controlorul-om, ne dăm seama că nu avem de-a face cu o operaţie pur vizuală. Detectarea defectelor comportă nu numai un proces optic, ci şi unul de natură logică. Într-adevăr, defectele fiind destul de variate, atît ca dimensiuni cît şi ca aspect, controlorul, observînd suprafaţa lor, recunoaşte anumite tipuri de defecte pe care le-a mai întîlnit, le separă de alte efecte optice care apar din diferite cauze şi decide dacă dimensiunea şi caracterul defectului observat justifică rebutarea piesei. Din aceste motive controlul de aspect al suprafeţelor nu este o problemă de măsurare ci o problemă *de tip cibernetic*, desigur dintre cele mai simple, deoarece şi operaţiile logice de executat sînt relativ simple.

O analiză mai amănunţită arată că încercarea de a imita operaţiile pe care le face controlorul-om nu pot duce la o soluţie tehnic acceptabilă. În primul rînd este nevoie să se găsească o caracteristică fizică, pe cît posibil comună tuturor tipurilor de defecte. O asemenea caracteristică este capacitatea de reflectare a luminii, care nu este aceeași în locurile cu și fără defecte de suprafață. Capacitatea de reflectare a luminii poate fi măsurată cu ajutorul unei fotocelule care dă un semnal electric proporțional cu intensitatea luminoasă pe care o primește. Este de asemenea ușor de înțeles că observarea și analizarea simultană a întregii suprafețe a bilei sau măcar a unor porțiuni mari din ea nu este practic realizabilă și nici justificată. Dimpotrivă, imaginea suprafeței trebuie descompusă în elemente care se analizează succesiv. Această explorare a suprafeței transpune informația bidimensională într-un semnal unidimensional, oferind totodată și criteriul de discriminare a defectelor : capacitatea de reflectare a luminii în fiecare punct se compară cu aceea din punctele vecine, operație care se realizează electric cu mijloace simple.

Un automat pentru controlul de aspect al suprafeței ar cuprinde deci următoarele părți componente :

— un bloc fotoelectric, pentru obținerea unui semnal electric care să conțină informația privind proprietățile optice ale unui element de suprafață.

— un mecanism, care să dea bilelor de controlat o asemenea mișcare relativă în raport cu spotul, încît întreaga lor suprafață să poată fi explorată,

— un bloc electronic, avînd funcțiunea de discriminator de defecte,

— mecanismul de execuție pentru aducerea bilelor la locul controlului, evacuarea și sortarea lor, după comenzile primite de la blocul precedent.

Toate încercările cunoscute pînă acum de a construi automate fotoelectrice pentru controlul de aspect al bilelor de rulmenți au folosit principiile expuse mai sus și o schemă structurală de tipul celei descrise.

În 1958 Schier publică un studiu asupra problemelor de principiu ale automatizării controlului de aspect [1] și descrierea unei instalații de laborator și a rezultatelor obținute [2].

În U.R.S.S. au fost realizate două prototipuri de asemenea automate, unul de către uzina LIZ din Leningrad, iar celălalt la Institutul de cercetări pentru tractoare și mașini agricole. Cele două tipuri se deosebesc în privința unor soluții tehnice, principiile de bază fiind comune. Productivitatea ambelor tipuri este de 3 300 bile/oră. Se menționează că funcționarea ambelor automate nu este încă perfectă, ele lăsînd să treacă anumite bile defecte și rebutează un număr destul de important de bile bune, motiv pentru care bilele respinse se introduc pentru a doua oară la control [3].

În R. S. Cehoslovacă au fost construite automatele de control de aspect VKK-2 și VKK-3 [4]. Aceste mașini folosesc de asemenea acelaşi principiu al controlului fotoelectric ; soluția adoptată pentru mecanismul de învîrtire a bilelor diferă de cele utilizate în U.R.S.S. Cele două tipuri se deosebesc numai în ce privește gama de diametre de bile pe care le controlează, și anume 3—6 mm la tipul VKK-2 și 6—10 mm la tipul VKK-3. Productivitatea maximă a automatelor este de 9 400 bile/oră.

La Institutul de mecanică aplicată al Academiei R.P.R. problema automatizării controlului de aspect al bilelor de rulmenţi se află în studiu din anul 1961. Au fost studiate problemele legate de detectarea pe cale fotoelectrică a defectelor de suprafaţă şi de realizarea blocurilor electronice de discriminare şi comandă. De asemenea, s-a studiat mecanismul de rotire a bilelor, necesar explorării, precum şi mecanismul de aducere, evacuare şi sortare a bilelor [5], [6].

Aceste studii au dus la realizarea unei instalaţii de laborator pe baza căreia este în curs de construcţie un prototip care urmează să fie dat în exploatare experimentală.

În lucrarea de faţă se analizează unele aspecte legate de realizarea acestui automat.

CERINŢELE CARE SE IMPUN AUTOMATULUI PENTRU [CONTROLUL DE ASPECT

Utilizarea dispozitivelor pentru controlul automat al bilelor impune îndeplinirea unor cerinţe de ordin general, din care mai însemnate sînt următoarele :

— Funcţionarea lanţului de transformare, amplificare şi prelucrare a semnalului să asigure obţinerea unui semnal de ieşire corespunzător capacităţii de reflexie în punctele succesiv explorate ale suprafeţei bilelor.

— Stabilitatea în funcţionare, care să asigure menţinerea constantă în timp a parametrilor funcţionali ai sistemului.

Din acest punct de vedere mai însemnată este sensibilitatea întregului sistem de control.

— Productivitatea, care să asigure rentabilitatea utilizării dispozitivelor automate de acest fel.

Îndeplinirea acestor cerinţe impune realizarea unor condiţii tehnice, dintre care cele mai importante sînt analizate în cele ce urmează.

Cerinţele de productivitate impun ca explorarea completă a suprafeţei bilei să fie făcută într-un timp cît mai scurt, deci cu o viteză cît mai mare, ceea ce implică condiţii dificile de lucru pentru mecanismul de explorare, iar pe de altă parte condiţionează şi funcţionarea sistemului fotoelectric şi electronic. Viteza de explorare, adică viteza relativă de deplasare a spotului în raport cu suprafaţa bilei, constituie unul din parametrii care determină caracteristica de frecvenţă pe care trebuie să o aibă sistemul pentru a nu distorsiona semnalele din care vor fi selectate impulsurile de comandă. Neasigurarea caracteristicii de frecvenţă corespunzătoare spectrului semnalelor fotoelectrice obţinute la explorarea suprafeţei bilei are ca efect modificarea acestora şi duce la imposibilitatea selecţiei corecte a semnalelor corespunzătoare defectelor de aspect. Banda de frecvenţe a căror transmitere trebuie asigurată de către sistem este determinată de frontul impulsurilor date de defecte în semnalul fotoelectric care este, evident, stabilit de timpul de intrare al defectului pe spot (în cazul în care defectul este mai mic decît spotul). Acest timp este dat de raportul dintre dimensiunea defectului şi viteza de explorare pe defect.

Considerînd defectul de dimensiuni minime d_m (cm), care este traversat în timpul explorării bilei de un spot d_s (cm) unde $d_s > d_m$, se obţine un semnal fotoelectric de formă aproximativ trapezoidală, în care fronturile au durata

$$t_1 = \frac{d_m}{v} \text{ (s)}$$

iar palierul are durata

$$t_2 = \frac{d_s - d_m}{v} \text{ (s)},$$

v (cm/s) fiind viteza de explorare.

În cazul în care viteza de explorare variază în limite foarte largi, se poate utiliza un raţionament simplificator pentru calculul frecvenţelor limită. Condiţia pentru frecvenţe înalte trebuie pusă în cazul vitezelor mari, la care impulsurile fotoelectrice rezultate au durata scurtă, iar condiţia pentru frecvenţe joase trebuie pusă în cazul vitezelor mici, la care impulsurile au fronturi cu pantă mică. Astfel, frecvenţa maximă care trebuie transmisă rezultă din condiţia ca din amplitudinea semnalului să nu se piardă mai mult de un anumit procent, de exemplu 5 %, pe timpul impulsului de durată minimă care este dat de defectul de dimensiuni minime explorat cu viteză maximă. Pentru a fi satisfăcută această condiţie, sistemul trebuie să aibă o constantă de timp cel mult egală cu valoarea $\tau_{\min}$ rezultată din relaţia

$$3\,\tau_{\min} = t_1 + t_2 \quad \text{deci} \quad \tau_{\min} = \frac{t_1 + t_2}{3} = \frac{d_s}{3 \cdot v_{\max}} \text{ (s)},$$

deci

$$f_{\max}(\text{Hz}) = \frac{1}{2\,\pi\,\tau_{\min}} = \frac{3\,v_{\max}}{2\,\pi\,d_s}.$$

Frecvenţa minimă rezultă impunîndu-se sistemului tot condiţia ca din amplitudinea semnalului să se piardă cel mult procentul stabilit, însă aceasta pe timpul frontului de pantă minimă. Acesta este dat de defectul de dimensiuni minime explorat cu viteză minimă.

Considerînd frontul impulsului liniar crescător, avem $e(t) = c_1 \cdot t$ (pentru $0 < t < t_1$) a cărei transformată Laplace este $E(p) = \frac{c_1}{p^2}$.

Funcţia de transfer a sistemului cu constanta de timp τ se exprimă prin

$$K(p) = \frac{p\,\tau}{1 + p\tau} = \frac{p}{p + \beta}, \text{ unde } \beta = \frac{1}{\tau}.$$

Transformata Laplace a funcţiei care exprimă variaţia tensiunii semnalului la ieşire va fi deci

$$U(p) = E(p) \cdot K(p) = \frac{c_1}{p(p+\beta)}.$$

Rezultă transformata Laplace inversă

$$u(t) = \frac{c_1}{\beta}(1 - e^{-\beta \cdot t}).$$

Cum valoarea lui c_1 este

$$c_1 = \frac{E}{t_1} = \frac{v_{\min.} E}{d_m}$$

introducînd condiţia de amplitudine, care se exprimă prin aceea că la $t = t_1$ trebuie ca $u(t_1) = 0{,}95\ E$, obţinem

$$\frac{v_{\min.}}{\beta \cdot d_m}\left(1 - e^{-\frac{\beta \cdot d_m}{v_{\min}}}\right) = 0{,}95,$$

de unde rezultă
$$\beta \simeq \frac{v_{\min}}{10\, d_m}$$

şi deci
$$f_{\min}\ (\mathrm{Hz}) = \frac{\beta}{2\pi} \simeq \frac{v}{20\, \pi d_m}.$$

Deci, în cazul în care viteza de deplasare a spotului pe suprafaţa bilei variază apreciabil în timpul explorării, trebuie asigurată banda de frecvenţă care rezultă din formulele stabilite. Cum caracteristica de frecvenţă realizată nu va putea fi ideală, rezultă o dependenţă a amplitudinii semnalului de viteza instantanee de explorare.

În cazul în care viteza de explorare este constantă, spectrul semnalului se îngustează faţă de cazul precedent. Cum, în mod practic, în cazul vitezei constante de explorare aceasta este tocmai $v_{\max}$, banda va fi îngustată mult în domeniul frecvenţelor joase, putîndu-se folosi cu succes filtre pentru eliminarea semnalelor perturbatoare provocate în special de vibraţii mecanice sau eventual de reţeaua de alimentare.

În privinţa sistemului optic pentru producerea spotului trebuie menţionat că este necesară obţinerea unui fascicul luminos cu un flux constant. Aceasta impune alimentarea sursei de lumină în curent continuu de la un redresor cu un filtraj suficient de bun.

Asigurarea funcţionării corecte a automatului impune menţinerea riguros constantă a sensibilităţii întregului sistem de control format din sursa luminoasă, sistemul optic, fotocelula şi aparatura electronică de amplificare şi prelucrare a semnalului fotoelectric, deoarece discriminarea semnalelor provenite de la defecte de cele provenite de la restul suprafeţei se face după criteriul amplitudinii acestora. S-a constatat că una din sursele serioase de instabilitate a sensibilităţii o constituie fotocelula, al cărei curent electric nu depinde numai de fluxul luminos recepţionat şi de tensiunea de alimentare, ci şi de unii factori exteriori. De asemenea, fotocelula prezintă efecte de îmbătrînire ca fenomen ireversibil pe intervale de timp mai mari şi efecte de obosire, ca fenomen reversibil, cînd lucrează fără întrerupere un anumit interval de timp. Şi elementele de circuit, în special tuburile electronice, din aparatura electronică de amplificare şi prelucrare a semnalului sînt afectate de îmbătrînire, însă efectul produs prin aceasta asupra sensibilităţii sistemului este mult mai redus. Nu trebuie neglijate nici efectele variaţiei tensiunilor de alimentare din circuitul fotocelulei şi montajul electronic.

Cauzele de instabilitate arătate mai sus cer utilizarea unui sistem pentru controlul şi reglarea automată a sensibilităţii. Se pot adopta diferite soluţii pentru controlul automat al sensibilităţii pe întreg lanţul sau pe porţiuni ale sale. Astfel, un sistem diferenţial care să utilizeze în afară de fotocelula care primeşte fasciculul reflectat de pe bile, încă o fotocelulă iluminată direct, de aceeaşi sursă luminoasă, ar stabiliza sensibilitatea la variaţia intensităţii fasciculului luminos al sursei şi la efectele de îmbătrînire şi obosire ale celulei, însă aceasta numai în măsura în care aceste efecte au aceeaşi evoluţie la ambele celule.

Un sistem mai complet de control automat al sensibilităţii se poate realiza, provocînd la intervale de timp regulate, eventual după fiecare bilă controlată, un semnal optic standard, impulsurile electrice astfel obţinute constituind semnalul de comandă pentru schema de control automat al amplificării. O soluţie mai simplă constă însă în utilizarea semnalelor standard obţinute, pentru comanda stabilirii nivelului pragului de selecţie al semnalelor, în care caz variaţia sensibilităţii nu mai deranjează funcţionarea corectă a sistemului.

SOLUŢIA ADOPTATĂ LA INSTITUTUL DE MECANICĂ APLICATĂ „TRAIAN VUIA" AL ACADEMIEI R.P.R.

Schema-bloc adoptată la I.M.A. pentru dispozitivul destinat să realizeze controlul automat de aspect al bilelor de rulmenţi este prezentată în figura 1. O particularitate a funcţionării dispozitivului este aceea că semnalarea unui defect pe suprafaţă nu duce la întreruperea explorării bilei, ci se memorează pînă la terminarea acesteia. Acest mod de lucru duce la o oarecare micşorare a productivităţii faţă de cazul cînd explorarea ar înceta imediat după constatarea defectului (dacă 20% din bile sînt defecte, timpul mediu de explorare se măreşte cu 10%), dar este mult mai simplu de realizat. În plus, acest mod de lucru permite obţinerea comenzilor pentru aducerea bilei la locul de explorare şi pentru evacuarea ei, de la un bloc de comandă şi sincronizare acţionat de către mecanismul de antrenare.

După cum se poate vedea în schema-bloc menţionată, semnalul electric al fotocelulei care recepţionează spotul luminos reflectat de suprafaţa bilei este aplicat unui circuit de intrare de impedanţă mare (*C.I.*) şi apoi unui amplificator şi limitator de minim (*A.L.*). Nivelul limitării stabileşte graniţa dintre bilele bune şi cele defecte. La apariţia unui defect, semnalul electric depăşeşte acest nivel şi acţionează releul electronic (*R.E.*) şi prin aceasta releul electric (*R.A.*) care se autoblochează pe noua poziţie, memorînd apariţia defectului. Releul (*R.A.*) acţionează la rîndul său organul de execuţie (*O.E.*) care sortează bilele în bune şi rele.

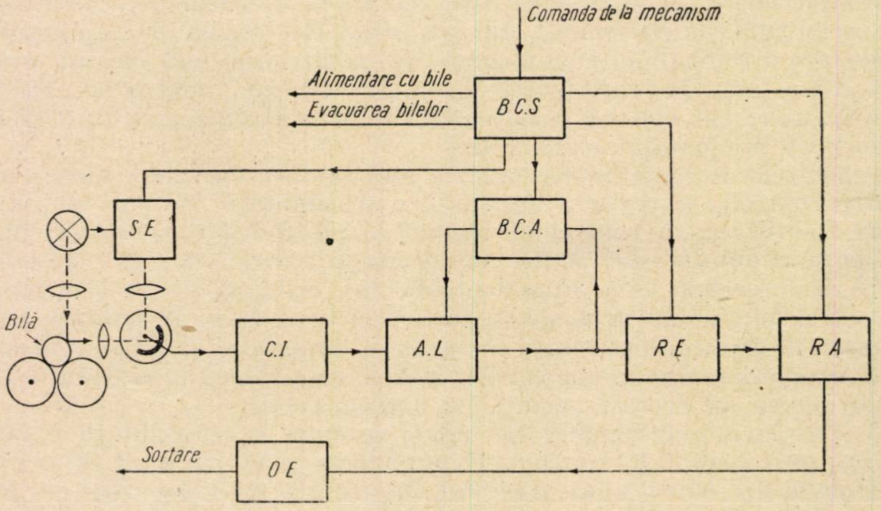


Fig. 1. — Schema bloc a automatului pentru controlul de aspect.

Oscilograma din figura 2 ilustrează modul în care lucrează sistemul electronic la descoperirea unui defect. În partea de sus a figurii apare semnalul electric al fotocelulei înainte de limitare, la mijloc semnalul după limitare, iar jos semnalul de comandă al releului electronic.

Blocul de comandă şi sincronizare (*B.C.S.*) acţionat de mecanism are următoarele funcţiuni :

— comandă alimentarea cu bile şi evacuarea bilelor de la locul de explorare ;

— comandă revenirea releului (*R.A.*) în poziţia iniţială, după ce organul de execuţie (*O.E.*) a lucrat ;

— comandă blocarea lanţului electronic (mai precis a releului electronic *R.E.*) pe timpul alimentării cu bile şi evacuării bilelor de la locul de explorare ;

— comandă furnizarea periodică a unui semnal optic etalon cu ajutorul unui dispozitiv special (*S.E.*) şi totodată intrarea în funcţiune pe acest interval de timp a blocului (*B.C.A.*) de control automat al sensibilităţii întregului lanţ de transformare, amplificare şi limitare a semnalului.

Sistemul optic şi lanţul electronic au fost realizate la I.M.A. în Sectorul de tehnica măsurătorilor, în fază experimentală. Iniţial s-a folosit un mecanism de antrenare simplificat, explorarea făcîndu-se pe un cerc mare. Atît declanșarea bazei de timp a oscilografului catodic folosit pentru vizualizarea semnalului electric, cît și stabilirea corespondenței dintre semnalul electric și punctele suprafeței bilei s-au făcut cu ajutorul unor impulsuri obținute dintr-un dispozitiv special fotoelectric, sincronizat cu rotația bilei.

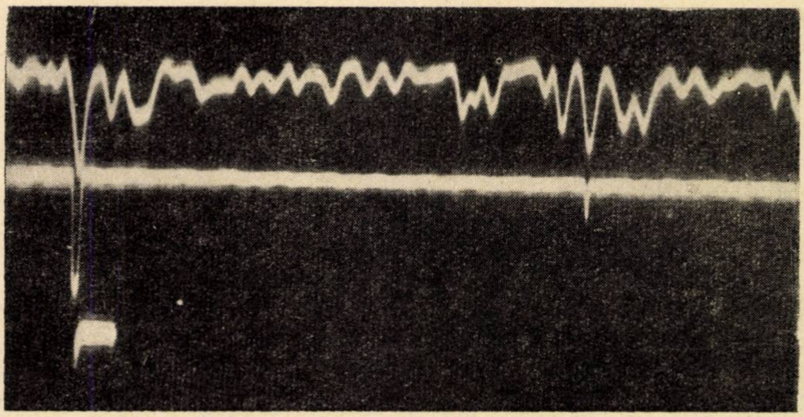


Fig. 2. — Funcționarea sistemului de detectare a defectelor.

Experiențe mai complete au fost efectuate ulterior în colaborare cu colectivul de teoria mecanismelor din I.M.A., folosindu-se mecanismul pentru explorarea completă a suprafeței bilelor, conceput și realizat de acest colectiv.

SEMNALUL FOTOELECTRIC ȘI DETECTAREA DEFECTELOR DE DIFERITE TIPURI

Pentru a se selecta semnalele produse de defecte este necesară analizarea semnalului obținut prin explorarea fotoelectrică a suprafeței bilei. Este evident că acest semnal fotoelectric conține în afara semnalelor utile, date de neregularități ale suprafeței care trebuie considerate defecte și semnale perturbatoare care, fiind suprapuse peste semnalele utile, pot implica mari dificultăți în selecția corectă a acestora. Există multe cauze care provoacă apariția semnalelor perturbatoare. În funcție de proveniența lor ele ar putea fi clasificate astfel :

— Semnale perturbatoare date de neregularități ale suprafeței care nu trebuie considerate defecte, adică de acele neregularități de suprafață care nu se observă cu ochiul liber, sau nu constituie defecte.

— Semnale perturbatoare provocate de vibrații mecanice care determină deplasarea razei reflectate ce cade pe suprafața fotosensibilă a celulei.

— Semnale perturbatoare produse în aparatura fotoelectrică și electronică de amplificare și prelucrare a semnalelor ca : zgomotul elementelor de circuit, tensiuni de perturbații introduse prin alimentări, efectul de microfonie etc.

Dacă reducerea semnalelor perturbatoare din ultimele categorii poate fi făcută prin eliminarea sau reducerea efectelor care le-au dat naștere, ca de exemplu înlăturarea pe cît posibil a vibrațiilor, eliminarea tensiunilor perturbatoare prin filtraje corespunzătoare etc., metodele care trebuie utilizate pentru reducerea semnalelor din prima categorie diferă întrucîtva. Evident că în primul rînd se impune o curățire prealabilă cît mai bună a suprafeței bilelor, operație care se execută de altfel și în prezent la controlul vizual prin ștergerea bilelor ce se controlează. Semnalul fotoelectric este sensibil afectat de orice fel de amprente sau depuneri de praf sau scame pe suprafața bilei.

S-a constatat că în afara curățirii prin ștergere a suprafeței bilei o reducere importantă a semnalului obținut de pe suprafața unei bile fără defecte se realizează prin udarea acesteia cu diverse lichide, ca de exemplu petrolul lampant. S-ar părea că această operație are ca efect nu numai o curățire a suprafeței spălate, ci prezența unei pelicule de lichid la suprafața bilei face ca o serie de microneregularități să fie acoperite.

O influență hotărîtoare asupra raportului dintre amplitudinea semnalelor utile U_s și amplitudinea semnalelor perturbatoare provocate de neregularități ale suprafeței care nu trebuie considerate defecte U_p o exercită dimensiunile spotului luminos cu care se explorează suprafața bilei și deci stabilirea acestor dimensiuni va fi condiționată esențial de raportul U_s/U_p.

În alegerea dimensiunilor spotului de explorare mai intervin însă și alți factori. Astfel, satisfacerea condiției de explorare completă a suprafeței bilei într-un timp cît mai scurt și cu o viteză cît mai mică va fi ușurată pe măsura măririi dimensiunilor spotului, în timp ce asigurarea reproducerii exacte a capacității de reflexie a suprafeței în punctele succesiv explorate impune un spot de dimensiuni cît mai reduse, pentru că în fond semnalul obținut corespunde integralei pe suprafața ocupată de spot a funcției care exprimă capacitatea de reflexie în punctele respective ale suprafeței. Pe de altă parte însă, este necesară separarea numai a defectelor de la o anumită dimensiune în sus. Cum suprapunerea completă a spotului pe defect dă aceeași amplitudine de semnal, indiferent de dimensiunile totale ale defectului, rezultă că nu este bine ca dimensiunile spotului să scadă sub dimensiunea minimă a defectului care mai trebuie luat în considerare. Pentru a fi distins un defect de asemenea mărime nu este însă necesar să se lucreze cu un spot care să aibă dimensiuni egale cu acelea ale defectului minim, ci ele pot fi mai mari.

Experiențele efectuate au confirmat faptul că aspectul semnalului fotoelectric obținut de pe suprafața aceleiași porțiuni dintr-o bilă se modifică sensibil cînd se modifică dimensiunile spotului. Mărirea dimensiunilor spotului determină o filtrare a componentelor de frecvență mai înaltă a semnalelor, fapt explicabil de altfel datorită fenomenului de integrare pe o suprafață mai mare a fluxului luminos reflectat de pe suprafața bilei.

S-a constatat de asemenea că amplitudinea semnalelor atît a celor utile cît și a celor perturbatoare crește o dată cu mărirea spotului, are un maxim pentru un spot de aproximativ 1 mm, după care scade la mărirea în continuare a spotului.

În figura 3 sînt date curbele de variație ale amplitudinii semnalului util, semnalului perturbator și raportului U_s/U_p obținute la variația dimensiunilor spotului luminos. Se constată că U_s/U_p scade o dată cu creșterea dimensiunilor spotului.

Din cele arătate rezultă că dimensiunile spotului trebuie să fie cuprinse între 0,1 mm și 1 mm și pentru stabilirea lor trebuie făcut un compromis între sensibilitatea și productivitatea sistemului. Se poate aprecia că din gama de valori admise, dimensiunile de 0,3 — 0,5 mm se găsesc destul de aproape de dimensiunile optime pe care ar trebui să le aibă spotul luminos.

În privința formei spotului, trebuie menționat că cea mai adecvată este forma rotundă sau pătrată. Spotul în formă de fantă dreptunghiulară, deși prezintă unele avantaje, în special privind productivitatea în cazul plasării lui potrivite față de direcția de deplasare pe suprafața bilei în timpul explorării, provoacă însă apariția unei dependențe a amplitudinii semnalului de orientarea defectului față de spot.

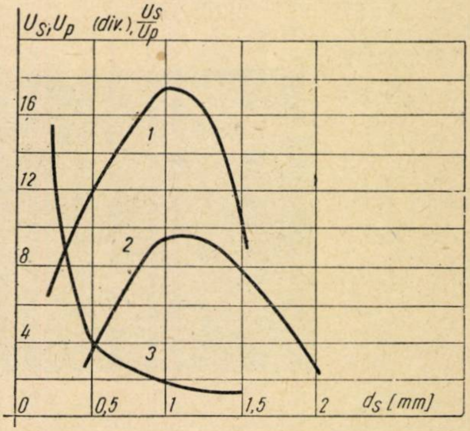


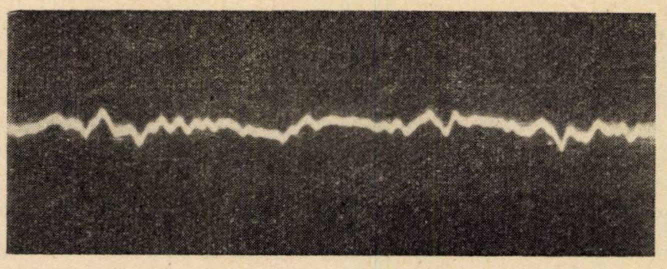
Fig. 3. — Efectul dimensiunii spotului luminos d_s asupra semnalelor fotoelectrice.

1 — semnalul util; *2* — semnalul perturbator; *3* — raportul semnal util/semnal perturbator.

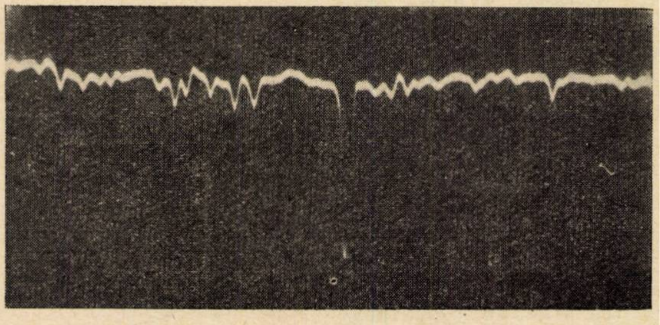
Unghiul de incidență al spotului pe suprafața bilei are un rol însemnat în formarea semnalului fotoelectric. Mărirea semnalelor fotoelectrice reclamă reducerea, pe cît posibil, a acestui unghi.

În afara determinărilor efectuate în scopul stabilirii unor condiții necesare controlului automat de aspect și alegerii unor parametri optimi de lucru ai sistemului, au fost făcute o serie de experimentări pe un mare număr de bile pentru a se analiza modul în care se pun în evidență în semnalul fotoelectric diferitele tipuri de defecte ce pot fi întîlnite la controlul de aspect.

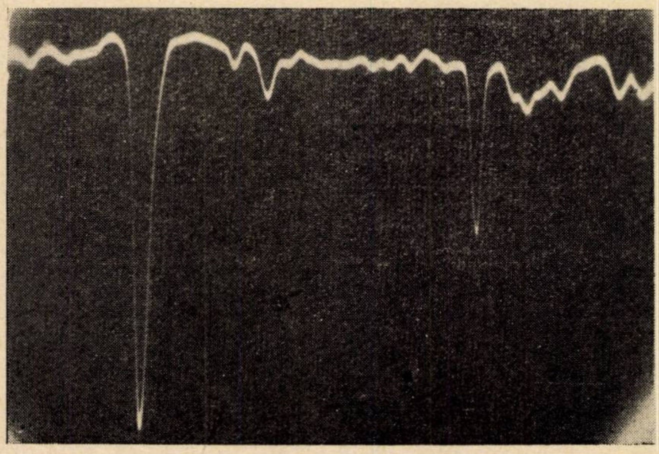
În oscilogramele din figura 4 este arătat aspectul semnalului obținut pentru bile bune și pentru bile avînd principalele tipuri de defecte. Ele au fost realizate menținînd sensibilitatea sistemului aproximativ constantă. S-a lucrat cu un spot luminos în formă pătrată cu latura de aproximativ 0,5 mm rezultată din considerațiile făcute mai sus.



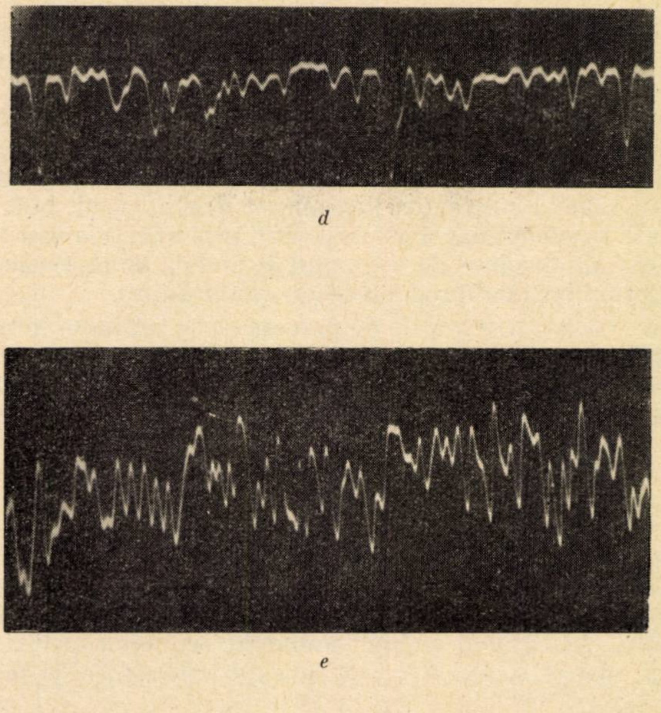
a



b



c



d

e

f

Fig. 4. — Oscilogramele semnalului fotoelectric.

a — bilă bună ; *b* — bilă cu por ; *c* — bilă cu coroziuni ; *d* — bilă cu pete albe şi negre ; *e* — bilă cu defecte de tratament ; *f* — bilă cu lipsă de material.

Se constată că nivelul semnalului perturbator dat de bila bună (oscilograma 4 *a*) este mic în comparaţie cu semnalele produse de defecte, ceea ce confirmă posibilitatea detectării acestora.

Se constată de asemenea că semnale puternice se obţin în cazul bilelor cu coroziuni (oscilograma 4 *c*), cu lipsă de material (oscilograma 4 *f*) şi cu porozităţi (oscilograma 4 *b*). Semnalele obţinute în cazul bilei cu pete albe şi negre (oscilograma 4 *d*) şi în cazul bilei cu defecte de tratament (oscilograma 4 *e*) deşi sînt mai mici, ele sînt totuşi sensibil diferite ca amplitudine de semnalul de pe bila bună, ceeace arată posibilitatea discriminării lor după criteriul amplitudinii.

Se mai observă că tipurile de defecte ce se întîlnesc în mod obişnuit în controlul de aspect conduc la obţinerea unui semnal fotoelectric de polaritate negativă, lucru de altfel explicabil, întrucît toate aceste defecte se caracterizează prin reducerea capacităţii de reflexie a suprafeţei.

CONCLUZII

Cercetările efectuate la I.M.A. în legătură cu automatizarea controlului de aspect al bilelor de rulmenţi au demonstrat posibilitatea punerii în evidenţă a defectelor de suprafaţă prin măsurarea luminii reflectate de suprafaţa bilei. În ce mod trebuie prelucrat semnalul electric obţinut de la fotocelulă, pentru a identifica părţile sale provenite de la defecte, s-a arătat mai sus.

În calea aplicării metodei expusă mai sus apar însă dificultăţi care pot fi înlăturate numai dacă parametrii dispozitivului de control automat sînt aleşi judicios şi dacă în procesul sortării bilelor se iau precauţiile cuvenite.

Printre condiţiile unei corecte sortări a bilelor enumerăm : alegerea corectă a dimensiunilor spotului luminos, o bună stabilitate a sensibilităţii lanţului electronic şi reproducerea corectă de către acesta a unei anumite benzi de frecvenţă, o variaţie cît mai mică a vitezei de explorare a bilei şi eliminarea pe cît posibil a vibraţiilor bilelor la antrenarea acestora. O condiţie de prim ordin este curăţirea foarte bună a suprafeţei bilelor înainte de explorare.

Din experienţele efectuate de noi rezultă de asemenea că sensibilitatea controlului fotoelectric nu poate fi împinsă prea departe, din cauza existenţei pe suprafaţa bilelor în afara defectelor şi a altor neomogenităţi optice. Este de bănuit că cel puţin o parte din defecte, şi anume cele care constau în abateri locale mai importante ale geometriei sau în neomogenitatea materialului, pot fi detectate şi prin metode magnetice. Este posibil ca o combinaţie a explorării fotoelectrice cu cea magnetică să asigure o detectare şi mai bună a defectelor.

Primită la redacţie la 17 mai 1963

АВТОМАТИЗАЦИЯ КОНТРОЛЯ ПОВЕРХНОСТИ ПОДШИПНИКОВЫХ ШАРИКОВ

РЕЗЮМЕ

Контроль поверхности является конечной операцией качественного контроля в производстве подшипниковых шариков.

Эта операция в настоящее время выполняется вообще визуально, что отрицательно влияет как на производственные издержки, так и на качество шариков.

В работе рассматривается возможность автоматизации этой операции, особенности этой задачи и различные факторы, влияющие на качество автоматического контроля.

Описываются принципы, лежащие в основу автомата такого рода и некоторые полученные экспериментальные результаты.

BIBLIOGRAFIE

1. H. Schier, *Die Sichtprüfung. Gegenwärtiger Stand und Grundlagen für ihre Automatisierung.* Werkstattstechnik und Maschinenbau, **48**, *5*, *6*, 270–276 (1958).
2. — *Entwicklung eines optischen Prüfautomaten für Kugeln.* Werkstattstechnik und Maschinenbau, **48**, *7*, 356–360 (1958).
3. Н. А. Спицын, А. И. Спришевский (под ред.), ***Подшипники качения.*** Машгиз, Москва, 1961.
4. I. Stoukal, *Machines automatiques pour le contrôle visuel des billes pour roulements.* L'industrie lourde tchécoslovaque, *11* (1962).
5. R. C. Bogdan, Chr. Pelecudi, L. Calmaciuc, *Asupra unor curbe sferice şi a mecanismelor necesare producerii lor.* St. cerc. mec. apl., **XIII**, *1*, 63–77 (1962).
6. Chr. Pelecudi, R. C. Bogdan, L. Calmaciuc., *Consideraţii asupra mişcării sferei cu centru fix pentru controlul automat al suprafeţei.* St. cerc. mec. apl., **XIII**, *3*, 749–760 (1962).

STUDII

ASUPRA NOMOGRAFIERII UNOR FUNCȚII CU PATRU VARIABILE DIN DOMENIUL HIDRAULICII CANALELOR

(CU REFERIRE SPECIALĂ LA CANALELE DE AMENAJARE A TORENȚILOR)

DE

STELIAN A. MUNTEANU[1] și MARIA VIDRAȘCU[1]

518.3 : 626.01

Datorită rolului deosebit de eficace pe care îl îndeplinesc în evacuarea dirijată a apelor de viitură, canalele ocupă un loc important în ansamblul construcțiilor hidrotehnice folosite în amenajarea torenților. Urgența cu care trebuie apărate diferite obiective interceptate de viiturile torenților (poduri și terasamente de căi ferate și șosele, așezări omenești, instalații industriale, terenuri de cultură agricolă sau forestieră ș.a.), urgență reclamată de ritmul viu al dezvoltării economiei noastre socialiste, a impus folosirea pe scară largă a canalelor; astăzi, aproape nu există proiect de amenajare de torenți, în care soluția tehnică să nu facă apel la asemenea construcții.

În mod curent, canalele folosite în amenajarea torenților din țara noastră se execută din zidărie, din beton simplu (rar din beton armat) sau din pămînt, avînd secțiuni trapezoidale sau dreptunghiulare. În proiectarea acestor lucrări, calculul parametrilor hidraulici ai secțiunilor transversale se face pe cale analitică, pornind de la formulele uzuale cunoscute din hidraulică. Deși în unele situații, determinarea anumitor parametri nu ridică dificultăți speciale de calcul totuși, este cu totul evident că folosirea graficelor — mai ales a nomogramelor — conduce la rezolvări incomparabil mai rapide ale problemelor de dimensionare, decît calculul numeric, oferind în același timp posibilitatea obținerii unei precizii pe deplin satisfăcătoare. Practic, aceasta nu înseamnă numai economie de timp, ci și facilitarea examinării a cît mai multe variante posibile din punct de vedere tehnic pentru alegerea soluției optime din punct de vedere economic, prin degajarea proiectantului de calcule plictisitoare. În plus, procesul de verificare a proiectelor elaborate este mult simplificat prin folosirea graficelor.

---

[1] **Institutul politehnic, Brașov.**

În cadrul preocupărilor de a contribui cît mai mult la crearea avantajelor amintite mai sus, în lucrarea de față sînt prezentate o serie de nomograme pentru calculul suprafeței udate, perimetrului udat și razei hidraulice. Pe lîngă importanța acestora din punct de vedere practic, considerăm că nomogramele întocmite prezintă și un interes teoretic legat de modul în care a fost rezolvată nomografierea unor ecuații cu patru variabile.

1. NOMOGRAMELE PENTRU SUPRAFAȚA UDATĂ

Pentru calculul suprafeței udate (ω) se pleacă de la formula cunoscută din hidraulică:

$$\omega = b.h + m.h^2, \tag{1}$$

unde $m = \mathrm{ctg}\,\theta$, iar b și h au semnificațiile din figura 1. Pusă sub forma

$$\omega - b.h - m.h^2 = 0 \tag{2}$$

expresia reprezintă ecuația cu patru variabile a cărei rezolvare prin nomografiere trebuie găsită.

O soluție foarte comodă pentru nomografiere, dar puțin satisfăcătoare din punct de vedere practic, constă în construirea a două nomograme separate cu puncte aliniate, avînd suporți paraleli și scări logaritmice, care ar permite calculul variabilelor auxiliare:

$$\omega_1 = b.h, \tag{3}$$

$$\omega_2 = m.h^2, \tag{4}$$

iar rezultatul, $\omega = \omega_1 + \omega_2$, să se afle mintal, printr-o adunare de două numere zecimale. O astfel de rezolvare ar putea fi justificată numai în cazul în care structura formulelor variabilelor auxiliare ar fi foarte complicată, ceea ce nu este cazul aici.

O altă soluție, mult mai dificilă din punct de vedere al nomografierii, dar care înlătură calculul mintal, constă în construirea unei singure nomograme.

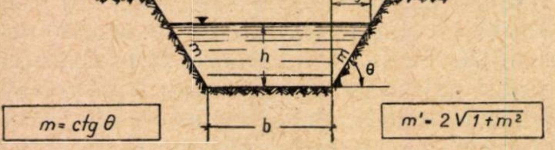


Fig. 1

De la început trebuie precizat faptul că deoarece ecuația (1), respectiv (2), conține o sumă de două produse de cîte doi factori, dintre care unul — h — se repetă și intervine la puterea a doua, nu este posibilă construirea unei singure nomograme compuse cu suporți paraleli.

Urmează, de aici, că soluția trebuie căutată în construirea unei nomograme cu un cîmp binar. Dar, *neexistînd o metodă generală pentru construirea unor astfel de nomograme*, *preocuparea va consta în a găsi pentru* *ecuația* (2) *forma canonică și ecuația Soreau corespunzătoare.* Pentru aceasta, se va aduce ecuația (2) la una din formele canonice ale ecuațiilor cu trei variabile, astfel ca una din funcțiile care intră în formele canonice să depindă de două variabile care apoi vor participa la construcția cîmpului binar.

În cazul de față, se consideră mai întîi $m = 0$, ceea ce conduce la :

$$\omega = b \cdot h \qquad (5)$$

sau — ținînd seama de (3) — la :

$$\omega_1 = b \cdot h.$$

Se consideră un sistem de axe rectangulare xOy și o paralelă (Δ_1) la axa Oy, situată la distanța D de axa Oy (fig. 2).

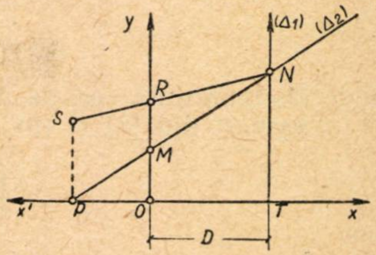


Fig. 2

Se ia pe axa Oy un punct $M(O, \omega_1)$, iar pe dreapta (Δ_1) un punct $N(D, b)$ și se scrie ecuația dreptei (MN) :

$$(\omega_1 - b) \cdot x + D \cdot y - \omega_1 \cdot D = 0. \qquad (6)$$

Intersectînd dreapta (Δ_2) cu axa Ox, se obțin coordonatele punctului P :

$$P\left(\frac{h \cdot D}{h - 1}, 0\right), \text{ sau } P\left(\frac{D}{1 - \frac{1}{h}}, 0\right),$$

ceea ce arată că abscisa punctului P depinde de h și de distanța D dintre dreptele paralele.

Concluzia acestor considerații geometrice conduce la găsirea posibilității de întocmire a unei nomograme cu puncte aliniate pentru ecuația

$$\omega_1 = b \cdot h,$$

construind pe axa $x'O$ scara variabilei h, pe dreapta (Δ_1) scara variabilei b, iar pe axa Oy scara variabilei ω_1 (fig. 3).

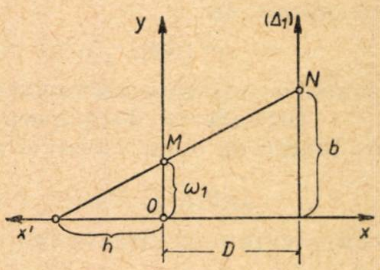


Fig. 3

Mai departe, în cazul $m \neq 0$ se observă că pentru valori ale lui b și h date, se obține aria ω corespunzătoare

$$\omega = \omega_1 + \omega_2 = b \cdot h + m \cdot h^2 \qquad (7)$$

dacă se ia pe Oy punctul R în așa fel încît

$$\overline{MR} = m \cdot h^2.$$

În acest scop, pe figura 2 se duce dreapta (NR) care va intersecta paralela la Oy, dusă prin punctul P dat, într-un punct S ale cărui coordonate se obţin rezolvînd sistemul de ecuaţii

$$(\omega - b) \cdot x + D \cdot y - \omega \cdot D = 0, \tag{8}$$

$$x = \frac{h \,.\, D}{h - 1}, \tag{9}$$

unde (8) reprezintă ecuaţia dreptei (NR), iar (9) ecuaţia paralelei (PS).

Aşadar, din (8) şi (9) se obţine

$$S\left(\frac{h \,.\, D}{h - 1}, \; - \frac{m \,.\, h^2}{h - 1}\right)$$

sau

$$S\left(\frac{D}{1 - \dfrac{1}{h}}, \; - \frac{m \cdot h}{1 - \dfrac{1}{h}}\right).$$

Evident, $\overline{PS}$ se putea calcula şi din rapoartele

$$\frac{\overline{PS}}{\overline{MR}} = \frac{\overline{PT}}{\overline{PO}}.$$

Consideraţiile făcute mai sus conduc la următoarele concluzii:

a. Punctul S va fi punctul răspuns pentru nomogramă.

b. Coordonatele punctului S, depinzînd de h şi m, înseamnă că variabilele h şi m vor reprezenta elementele constituente ale cîmpului binar.

c. Cîmpul binar va fi situat în afara suporţilor paraleli (se va reveni asupra acestui aspect mai tîrziu, după stabilirea formei canonice).

d. Pentru găsirea formei canonice a ecuaţiei (2), se va putea face referire la nomogramele de genul I cu două scări paralele şi o scară curbă şi anume la

$$f_1(u_1) \cdot f_3(u_3) + f_2(u_2) \cdot \varphi_3(u_3) + \psi_3(u_3) = 0 \tag{10}$$

pentru ecuaţiile cu trei variabile de ordinul patru de nomografiere (Cauchy).

Într-adevăr, dacă în ecuaţia (10) funcţiile f_3, φ_3 şi ψ_3 vor fi considerate ca funcţii de două variabile u_3 şi u_4, se poate scrie

$$f_1(u_1) \cdot f_{3.4}(u_3,u_4) + f_2(u_2) \cdot \varphi_{3.4}(u_3,u_4) + \psi_{3.4}(u_3, u_4) = 0 \tag{11}$$

care conduce la următoarea ecuaţie Soreau [2] (p. 85):

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & f_1 \\ 1 & 1 & f_2 \\ 1 & \dfrac{\varphi_{3.4}}{\varphi_{3.4} + f_{3.4}} & -\dfrac{\psi_{3.4}}{\varphi_{3.4} + f_{3.4}} \end{vmatrix} = 0 \tag{12}$$

sau

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & f_1 \\ 1 & 1 & f_2 \\ 1 & \dfrac{1}{1+\dfrac{f_{3.4}}{\varphi_{3.4}}} & -\dfrac{\dfrac{\psi_{3.4}}{\varphi_{3.4}}}{1+\dfrac{f_{3.4}}{\varphi_{3.4}}} \end{vmatrix} = 0. \tag{13}$$

Ca verificare, dezvoltînd determinantul (12) sau (13) se obține ecuația (11).

Ecuația (2) este un caz particular al formei canonice găsită (11), dacă se ia

$$f_1 = \omega,\ f_2 = b,\ f_{3.4} = 1,\ \varphi_{3.4} = -h,\ \psi_{3.4} = -m \cdot h^2.$$

Cu aceste transpuneri, ecuația (13) devine

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \omega \\ 1 & 1 & b \\ 1 & \dfrac{1}{1-\dfrac{1}{h}} & -\dfrac{m \cdot h}{1-\dfrac{1}{h}} \end{vmatrix} = 0 \tag{14}$$

care reprezintă ecuația Soreau pentru ecuația particulară (2) a cărei soluție de nomografiere ne-am propus s-o găsim.

Dacă în determinantul (14) se înmulțesc elementele coloanei a doua cu D, se obține

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \omega \\ 1 & D & b \\ 1 & \dfrac{D}{1-\dfrac{1}{h}} & -\dfrac{m \cdot h}{1-\dfrac{1}{h}} \end{vmatrix} = 0 \tag{15}$$

care reprezintă tocmai condiția de coliniaritate a punctelor R, N și S ceea ce confirmă că ecuația (14) găsită pentru ecuația (2) este bună.

Așadar, pentru ecuația (2) dată, se poate construi o nomogramă cu doi suporți paraleli și un cîmp binar. Cîmpul va fi situat în afara suporților paraleli ceea ce a rezultat din considerațiile geometrice făcute mai înainte. Cercetînd raportul dintre $f_{3.4}$ și $\varphi_{3.4}$, din forma canonică (11), rezultă că

$$\frac{f_{3.4}}{\varphi_{3.4}} = -\frac{1}{h} < 0.$$

În concluzie, trebuie reținut faptul că în cazul cînd cîmpul binar este în afara suporților paraleli, la forma canonică la care ne-am referit, raportul $\frac{f_{3,4}}{\varphi_{3,4}}$ va fi totdeauna negativ.

Forma cîmpului binar este destul de simplă, ceea ce reprezintă un mare avantaj al nomogramei, fiind constituită dintr-o familie de drepte paralele cu suporții scărilor variabilelor ω și b și o familie de curbe (h, m).

Pentru construcția scărilor, se observă că ecuația (15) se poate scrie și sub forma

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \mu_1 \cdot \omega \\ 1 & D & \mu_2 \cdot b \\ 1 & \dfrac{D}{1-\dfrac{\mu_2}{\mu_1 \cdot h}} & -\dfrac{\mu_2 \cdot h \cdot m}{1-\dfrac{\mu_2}{\mu_1 \cdot h}} \end{vmatrix} = 0, \tag{16}$$

unde μ_1 este modulul scării variabilei ω, iar μ_2 modulul scării variabilei b. Dezvoltînd determinantul (16) se obține ecuația (2).

Ținînd seama de (16), ecuațiile scărilor variabilelor ω și b și ale cîmpului binar (h, m) vor fi:

— pentru ω: $x_1 = 0,$

$y_1 = \mu_1 . \omega;$

— pentru b: $x_2 = D,$

$y_2 = \mu_2 . b;$

— pentru cîmpul binar: $x_3 = \dfrac{D}{1-\dfrac{\mu_2}{\mu_1 \cdot h}},$

$$y_3 = -\frac{\mu_2 \cdot h \cdot m}{1-\dfrac{\mu_2}{\mu_1 \cdot h}}.$$

Întrucît distanța D intră în expresia absciselor x_2 și x_3 (punctul N, respectiv punctul S din figura 2), mărimea ei se va determina din condiția ca suma distanței dintre suporții paraleli și distanța de la punctul de abscisă zero (punctul O) pînă la paralela dată de h_{max} adoptat să fie egală cu lățimea M a nomogramei, adică (fig. 4)

$$M = D - \frac{D}{1-\dfrac{\mu_2}{\mu_1 \cdot h}}. \tag{17}$$

Pentru scările variabilelor h şi b, s-a considerat că limitele $0{,}50\,\mathrm{m} \leqslant h \leqslant 3{,}00\,\mathrm{m}$ şi $0{,}00\,\mathrm{m} < b \leqslant 4{,}00\,\mathrm{m}$ acoperă rezolvarea tuturor cazurilor întîlnite în practica amenajării torenţilor.

Pentru construirea cîmpului binar (m, h) s-au adoptat următoarele valori ale lui $m = \mathrm{ctg}\,\theta$:

0,00 ; 0,10 ; 0,20 ; 0,25 ; 0,30 ; 0,40 ; 0,50 ; 0,58 ; 0,75 ; 1,00 ; 1,25 ; 1,50 ; 1,75 ; 2,00 ; 2,50 ; 2,75 ; 3,00.

Din examinarea limitelor variabilelor m, h şi b se observă că de fapt nomograma permite calculul suprafeţei udate şi pentru tipuri de canale proiectate în alte scopuri decît cele de amenajarea torenţilor (irigaţii, desecări, canale de fugă ş.a.)

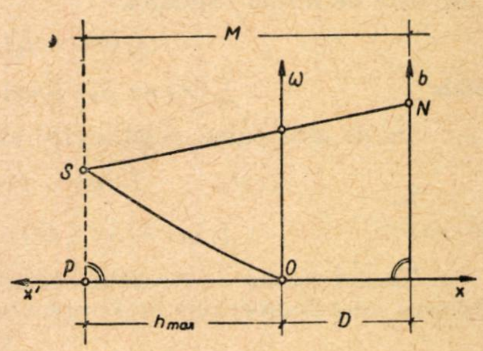


Fig. 4

Întrucît introducerea într-o singură nomogramă a tuturor valorilor m indicate mai sus ar duce la un cîmp binar prea dens, ceea ce ar fi incomod la citit, s-au construit mai multe nomograme separate pentru $h = 0{,}50 - 1{,}50$ m şi $h = 1{,}50 - 3{,}00$ m şi pentru diverse grupe de valori m (nomogramele din figurile 8—14).

Nomograma din figura 13 cuprinde rezolvarea şi a cazului particular al secţiunilor dreptunghiulare ($m = 0$).

1. NOMOGRAMA PENTRU PERIMETRUL UDAT

Aici se pune problema nomografierii expresiei

$$P = b + 2h\sqrt{1 + m^2}\ , \tag{18}$$

unde P este perimetrul udat, iar b, h şi m au semnificaţiile din problema precedentă.

După cum se observă, ecuaţia are tot patru variabile, dar datorită structurii ei particulare, determinată pe de o parte de faptul că numai unul din termeni conţine două variabile, iar pe de altă parte de forma funcţiei $2\sqrt{1 + m^2}$, este posibilă construirea unei nomograme compuse, cu puncte aliniate, foarte comodă pentru citiri.

În acest scop, s-a notat

$$X = 2h\sqrt{1 + m^2}\ , \tag{19}$$

unde X este variabila auxiliară care reprezintă perimetrul udat al unei secţiuni transversale triunghiulare cu coeficientul taluzelor m şi avînd adîncimea apei h.

Cu această transformare, expresia (18) devine

$$P = b + X \tag{20}$$

care este de forma canonică

$$f_3(w) = f_1(u) + f_2(v), \tag{21}$$

unde $f_3(w) = P,\ f_1(u) = b$ și $f_2(v) = X$.

Pe de altă parte, relația (19) este de forma canonică

$$f_3(w) = f_1(u) \cdot f_2(v), \tag{22}$$

în care : $f_1(u) = h\,;\, f_2(v) = 2\sqrt{1+m^2}$ și $f_3(w) = X$.

Ținînd seama de structura ecuației (19), foarte comodă pentru construirea unei nomograme în N, precum și de faptul că expresia (21) permite construirea unei nomograme aditive cu suporți paraleli echidistanți și scări izograde, urmează că nomograma compusă pentru formula (18) poate fi realizată sub forma arătată schematic în figura 5.

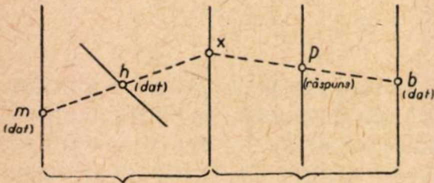


Fig. 5

Pentru a reduce numărul suporților, s-a suprapus suportul mărimii b peste suportul mărimii $m = \operatorname{ctg}\theta$. S-a ajuns astfel la forma finală dată în figura 15. Suportul mărimii auxiliare X nu s-a mai gradat, deoarece nu prezintă importanță practică pentru problemele de torenți.

Limitele mărimilor m, h și b rezultă ușor din scările nomogramei.

3. NOMOGRAMELE PENTRU RAZA HIDRAULICĂ

În acest caz, formula uzuală de calcul este

$$R = \frac{b \cdot h + h^2 \cdot m}{b + 2h\sqrt{1+m^2}}, \tag{23}$$

unde R este raza hidraulică.

Ecuația conține tot patru variabile, dar are o structură mult mai complicată decît a ecuațiilor precedente. Se observă însă că dacă se pune sub forma, de asemenea uzuală,

$$R = h\frac{\beta + m}{\beta + 2\sqrt{1+m^2}} = h\frac{\beta + m}{\beta + m'}, \tag{24}$$

unde $\beta = \dfrac{b}{h}$, iar $m' = 2\sqrt{1+m^2}$, atunci se poate scrie

$$R = h \cdot X, \tag{25}$$

unde X reprezintă variabila auxiliară avînd expresia

$$X = \frac{\beta + m}{\beta + m'} = f\,(\beta, m). \tag{26}$$

Pentru m = constant,

$$X = f(\beta) = f(b,h). \tag{27}$$

Ultima expresie poate fi rezolvată printr-o nomogramă cu puncte aliniate cu trei suporți paraleli echidistanți, avînd scări logaritmice.

De exemplu, pentru $m = 1{,}00$ rezultă

$$X = \frac{\beta + 1}{\beta + 2\sqrt{2}} \tag{28}$$

cu

$$\beta = \frac{b}{h} \tag{29}$$

și cu schema de nomogramă din figura 6, *a*, unde pe suportul din dreapta

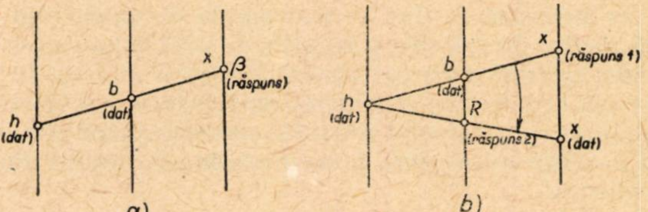


Fig. 6

se obține atît β cît și variabila auxiliară

$$X = f(\beta).$$

Apoi, pe același schelet al nomogramei de mai sus, scara β se elimină după ce a fost transformată în scara X, iar cu relația (25) se obține nomograma din figura 6, *b*, avînd suporți paraleli și scări logaritmice. Trecerea de la nomograma finală din figura 6, *b*, se face prin repetarea, pe suportul din dreapta, a variabilei auxiliare X.

Pentru diferite valori ale lui m (aceleași ca la suprafața udată) se obțin tot atîtea nomograme care, suprapuse, au condus la formele din figurile 17 și 18.

Pentru canale cu secțiune dreptunghiulară (cazul particular $m = 0$), formula (23) devine

$$R = \frac{b \cdot h}{b + 2h} \tag{30}$$

care, pusă sub forma

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{h} + \frac{2}{b},$$

este de forma canonică

$$f_3(w) = f_1(u) + f_2(v), \qquad (31)$$

unde

$$f_3(w) = \frac{1}{R},\ f_1(u) = \frac{1}{h} \text{ și } f_2(v) = \frac{2}{b}.$$

Nomograma va avea trei suporți paraleli echidistanți (fig. 7 și fig. 16).

Pentru a acoperi un domeniu cît mai mare de variație a mărimilor b și h, suporții au fost dublați (scările cu b, h și R dați în paranteză, fig. 16).

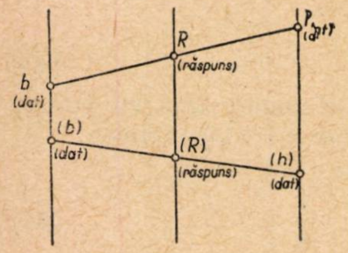


Fig. 7

4. EXEMPLE DE CALCUL

În cele ce urmează se dau zece exemple de calcul din parcurgerea cărora rezultă modul de folosire și tipurile de probleme ce pot fi rezolvate cu ajutorul nomogramelor ce fac obiectul lucrării de față. În plus, pentru a se putea aprecia rapiditatea și precizia rezolvărilor, s-a efectuat — ca termen de comparație — și calculul numeric corespunzător metodei pur analitice. Pentru a ușura înțelegerea nomogramelor, la fiecare din ele s-a dat schema de folosire.

Exemplul 1. Să se determine suprafața udată a unei secțiuni trapezoidale avînd :

$$m = \operatorname{ctg}\theta = 1{,}5\,;\ h = 0{,}8 \text{ m}\,;\ b = 1{,}6 \text{ m}.$$

Prin calcul numeric se obține

$\omega = b.h + m.h^2 = 1{,}6.0{,}8 + 1{,}5.0{,}8^2 = 2{,}24 \text{ m}^2$ iar cu nomograma din figura 10 se află direct

$$\omega = 2{,}24 \text{ m}^2.$$

Exemplul 2. Să se determine lățimea la fund a unui canal cu secțiune trapezoidală avînd :

$$\omega = 4{,}30 \text{ m}^2\,;\ m = 0{,}75\,;\ h = 1{,}30 \text{ m}.$$

Prin calcul numeric se obține

$$b = \frac{\omega - m.h^2}{h} = \frac{4{,}30 - 0{,}75.1{,}30^2}{1{,}30} = 2{,}33 \text{ m}$$

iar cu nomograma din figura 9

$$b = 2{,}33 \text{ m}.$$

Exemplul 3. Să se determine adîncimea curentului în secțiunea unui canal trapezoidal avînd

$$\omega = 3{,}80\ m^2\ ;\ m = 1{,}25\ ;\ b = 2{,}20\ \text{m}.$$

Prin calcul numeric trebuie rezolvată ecuația

$$m . h^2 + b . h - \omega = 0$$

a cărei soluție reală este

$$h = -\frac{b}{2\,m} + \sqrt{\left(\frac{b}{2\,m}\right)^2 + \frac{\omega}{m}}$$

sau

$$h = -\frac{2{,}20}{2 . 1{,}25} + \sqrt{\left(\frac{2{,}20}{2 . 1{,}25}\right)^2 + \frac{3{,}80}{1{,}25}} = 1{,}08\ \text{m}.$$

Cu nomograma din figura 10 se obține imediat

$$h = 1{,}08\ \text{m}.$$

Exemplul 4. Să se determine perimetrul udat al unei secțiuni trapezoidale cu datele din exemplul 1.

Prin calcul numeric

$$P = b + 2h\sqrt{1 + m^2} = 1{,}6 + 2 . 0{,}8\sqrt{1 + 1{,}5^2} = 4{,}49\ \text{m}.$$

Din nomograma dată în figura 15 rezultă

$$P = 4{,}50\ \text{m}.$$

Exemplul 5. Să se determine adîncimea curentului într-un canal cu secțiune trapezoidală avînd

$$P = 3{,}80\ \text{m}\ ;\ b = 1{,}60\ \text{m}\ ;\ m = 1{,}0.$$

Prin calcul numeric rezultă

$$h = \frac{P - b}{2\sqrt{1 + m^2}} = \frac{3{,}80 - 1{,}60}{2 \cdot \sqrt{2}} = 0{,}78\ \text{m} \approx 0{,}80\ \text{m}.$$

Cu nomograma din figura 15 se obține

$$h = 0{,}78\ \text{m} \approx 0{,}80\ \text{m}.$$

Exemplul 6. Să se determine raza hidraulică a unei secțiuni dreptunghiulare avînd :

$$b = 2{,}10\ m\ ;\ h = 1{,}35\ \text{m}.$$

Prin calcul numeric se află

$$R = \frac{b.h}{b + 2h} = \frac{2{,}10 . 1{,}35}{2{,}10 + 2 . 1{,}35} = 0{,}59 \text{ m}$$

iar din nomograma din figura 16 rezultă

$$R = 0{,}59 \text{ m}.$$

Exemplul 7. Să se determine adîncimea curentului într-un canal cu secțiune dreptunghiulară avînd

$$R = 0{,}32 \text{ m}\,;\; b = 1{,}40 \text{ m}.$$

Prin calcul numeric se obține

$$h = \frac{R.b}{b - 2R} = \frac{0{,}32 . 1{,}40}{1{,}40 - 2 . 0{,}32} = 0{,}59 \text{ m},$$

iar cu nomograma din figura 16

$$h \approx 0{,}59 \text{ m}.$$

Exemplul 8. Să se determine lățimea la fund a unui canal cu secțiune dreptunghiulară cînd se cunosc

$$R = 0{,}16 \text{ m}\,;\; h = 0{,}54 \text{ m}.$$

Prin calcul numeric se află

$$b = \frac{2\,R.h}{h - R} = \frac{2 . 0{,}16 . 0{,}54}{0{,}54 - 0{,}16} = 0{,}46 \text{ m}$$

iar prin nomogramă (fig. 16)

$$b \approx 0{,}46 \text{ m}.$$

Exemplul 9. Să se determine raza hidraulică a unei secțiuni trapezoidale avînd parametrii

$$h = 0{,}80 \text{ m}\,;\; b = 1{,}20 \text{ m}\,;\; m = 0{,}40.$$

Prin calcul numeric rezultă

$$R = \frac{h \cdot b + h^2 m}{b + 2\,h\sqrt{1 + m^2}} = \frac{0{,}8 . 1{,}2 + 0{,}8^2 . 0{,}40}{1{,}2 + 2 . 0{,}8\sqrt{1 + 0{,}4^2}} = 0{,}42 \text{ m}.$$

Cu nomograma din figura 17 se calculează mai întîi X, cu ajutorul parametrilor b și m dați

$$X = 0{,}517$$

și apoi cu h și X cunoscuți

$$R = 0{,}42 \text{ m}.$$

Exemplul 10. Să se determine lățimea la fund a unui canal cu secțiune trapezoidală avînd

$$R = 0{,}44 \text{ m}\,;\; h = 0{,}90 \text{ m}\,;\; m = \operatorname{ctg}\theta = 2{,}50.$$

Pentru efectuarea calculelor numerice trebuie folosită relația dedusă din (23)

$$b = \frac{h[2R\sqrt{1+m^2} - m.h]}{h-R},$$

deci

$$b = \frac{0{,}90[2.0{,}44\sqrt{1+2{,}50^2} - 2{,}50.0{,}90]}{0{,}90-0{,}44} = 0{,}23 \text{ m}.$$

Cu ajutorul nomogramei din figura 18 se calculează astfel :

— cu R și h dați se determină X care se găsește pe ultimul suport din dreapta nomogramei

$$X = 0{,}49\,;$$

— apoi pentru h și m dați se găsește

$$b \approx 0{,}23 \text{ m}.$$

5. CONCLUZII

Din cele prezentate rezultă următoarele :

a. În afară de determinarea directă a parametrilor hidraulici ω, P și R pe baza formulelor uzuale (1), (18), (23) și (30), nomogramele permit calcularea diverselor mărimi variabile (b, h, m) ce intră în formulele amintite atunci cînd se cere rezolvarea unor probleme inverse. Astfel, nomogramele rezolvă și expresiile :

$$b = \frac{\omega - m\cdot h^2}{h},$$

$$h = -\frac{b}{2\,m} + \sqrt{\left(\frac{b}{2\,m}\right)^2 + \frac{\omega}{m}},$$

$$h = \frac{P-b}{2\sqrt{1+m^2}},$$

$$h = \frac{R\cdot b}{b-2R},$$

$$b = \frac{2R.h}{h-R},$$

$$b = \frac{h\cdot[2R\cdot\sqrt{1+m^2} - m.h]}{h-R}.$$

b. Precizia rezultatelor obţinute în calcule cu ajutorul nomogramelor este mult mai mare decît aceea cerută obişnuit în rezolvarea problemelor practice. Din exemplele date s-a putut observa că faţă de calculul numeric sau nu există diferenţe, sau, dacă există, acestea sînt cu totul neglijabile. De altfel, în practică, chiar rezultatele obţinute pe cale pur analitică se rotunjesc la valori în limitele cărora nomogramele dau deplină satisfacţie.

c. Rapiditatea cu care se poate face determinarea diverşilor parametri hidraulici amintiţi, precum şi diversitatea problemelor pe care le rezolvă nomogramele, conduc la avantaje incontenstabile faţă de calculul numeric, atît din punct de vedere al reducerii timpului de lucru cît şi al facilitării examinării directe a diverselor variante posibile, ceea ce contribuie la mărirea productivităţii muncii în proiectare.

Primită la redacţie la 17 mai 1963

SUR LA CONSTRUCTION DES NOMOGRAMMES DE CERTAINES FONCTIONS À QUATRE VARIABLES, DANS LE DOMAINE DE L'HYDRAULIQUE DES CANAUX (SURTOUT DES CANAUX D'AMÉNAGEMENT DES TORRENTS)

RÉSUMÉ

Les auteurs apportent plusieurs contributions concernant la construc, tion des nomogrammes représentant les fonctions de la surface mouillée- du périmètre mouillé et du rayon hydraulique, que l'on utilise dans les calculs des canaux, à section trapézoïdale ou rectangulaire, dans le domaine de l'aménagement des torrents. Ils offrent beaucoup d'intérêt, aussi bien au point de vue pratique, lors de l'élaboration des projets de canaux, qu'au point de vue théorique, en ce qui concerne le mode de résoudre, par nomogrammes, certaines équations à quatre variables.

Les nomogrammes peuvent être utilisés également dans d'autres domaines de l'hydrotechnique, dans les limites admises pour les diverses variables, qui interviennent dans la structure des formules dont on a fait les nomogrammes.

BIBLIOGRAFIE

1. L. Bal, F. Radó, *Lecţii de nomografie*. Edit. tehnică, Bucureşti, 1956.
2. M. V. Pentcovschi, *Nomografia*. Edit. tehnică, Bucureşti, 1952.

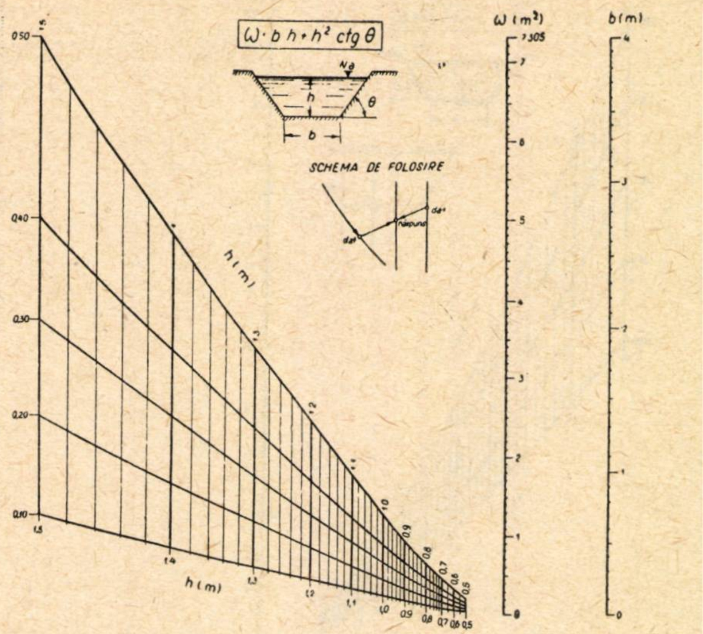


Fig. 8. — Nomograma pentru calculul suprafeţei udate (canale trapezoidale).

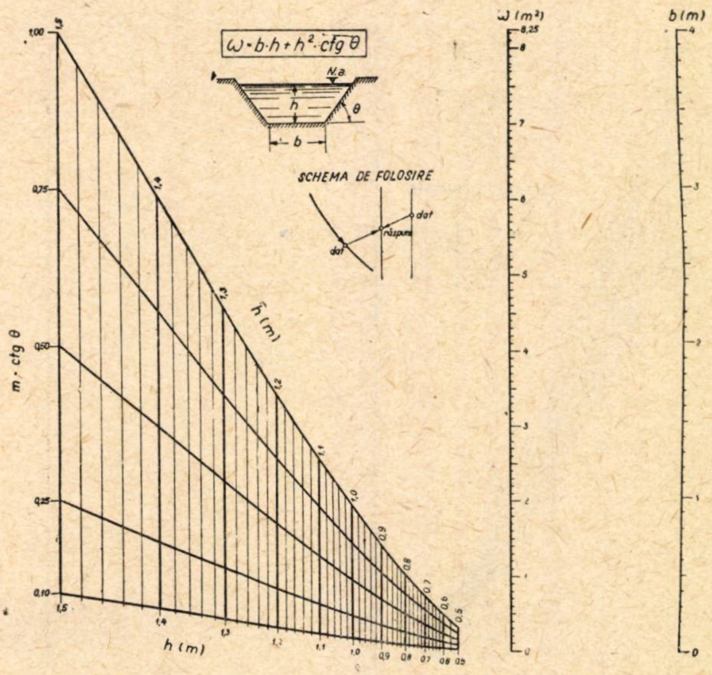


Fig. 9. — Nomograma pentru calculul suprafeţei udate (canale trapezoidale).

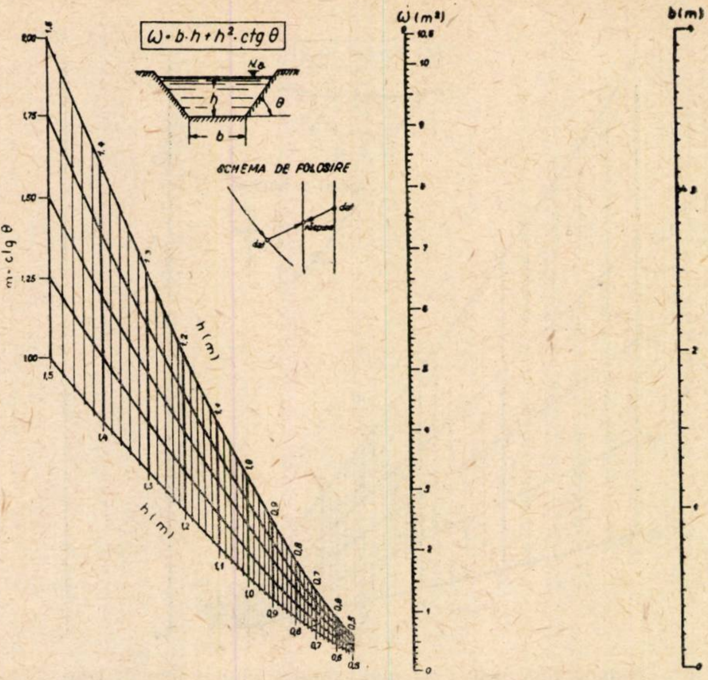


Fig. 10. — Nomograma pentru calculul suprafeţei udate (canale trapezoidale).

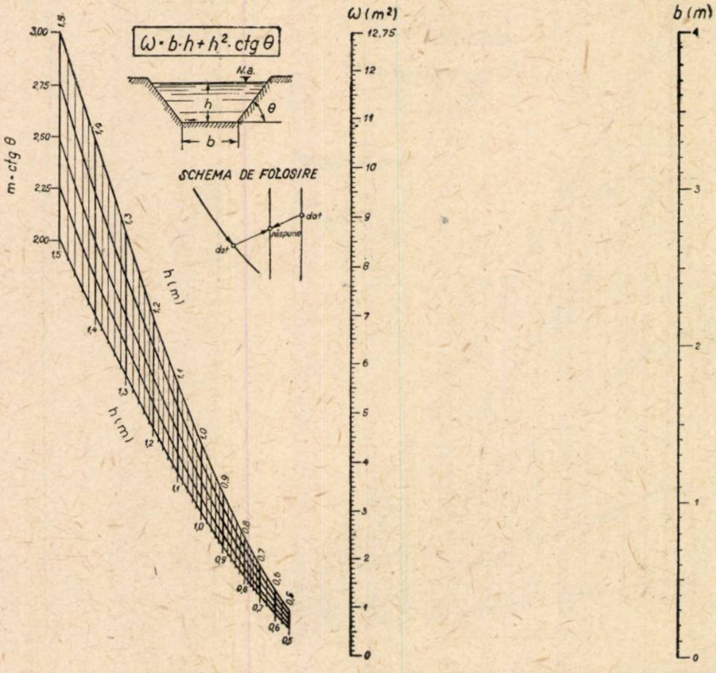


Fig. 11. — Nomograma pentru calculul suprafeţei udate (canale trapezoidale).

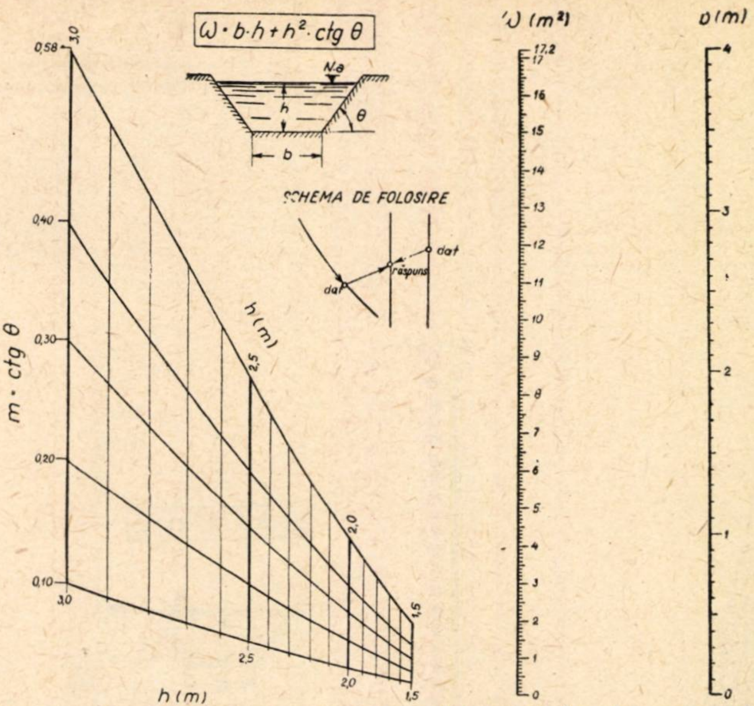


Fig. 12. — Nomograma pentru calculul suprafeţei udate (canale trapezoidale).

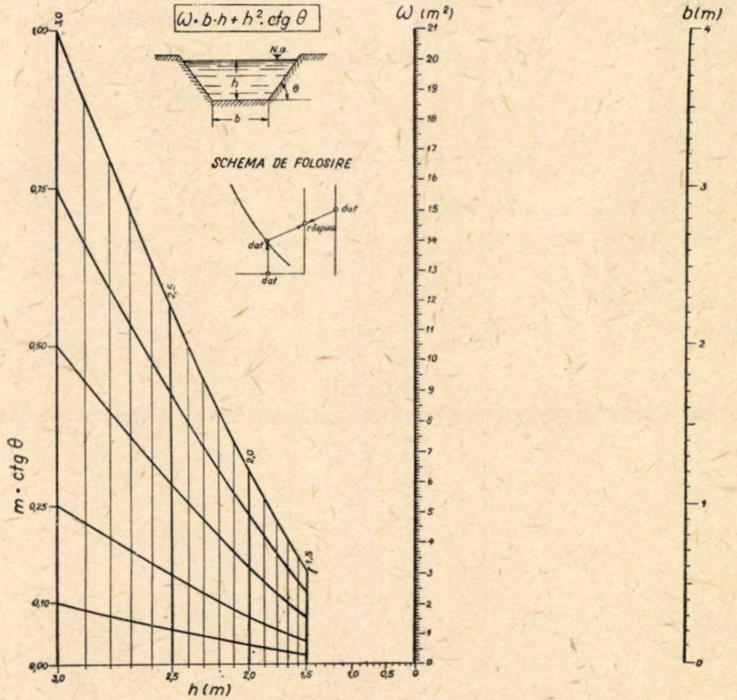


Fig. 13. — Nomogramă pentru calculul suprafeţei udate (canale trapezoidale şi dreptunghiulare).

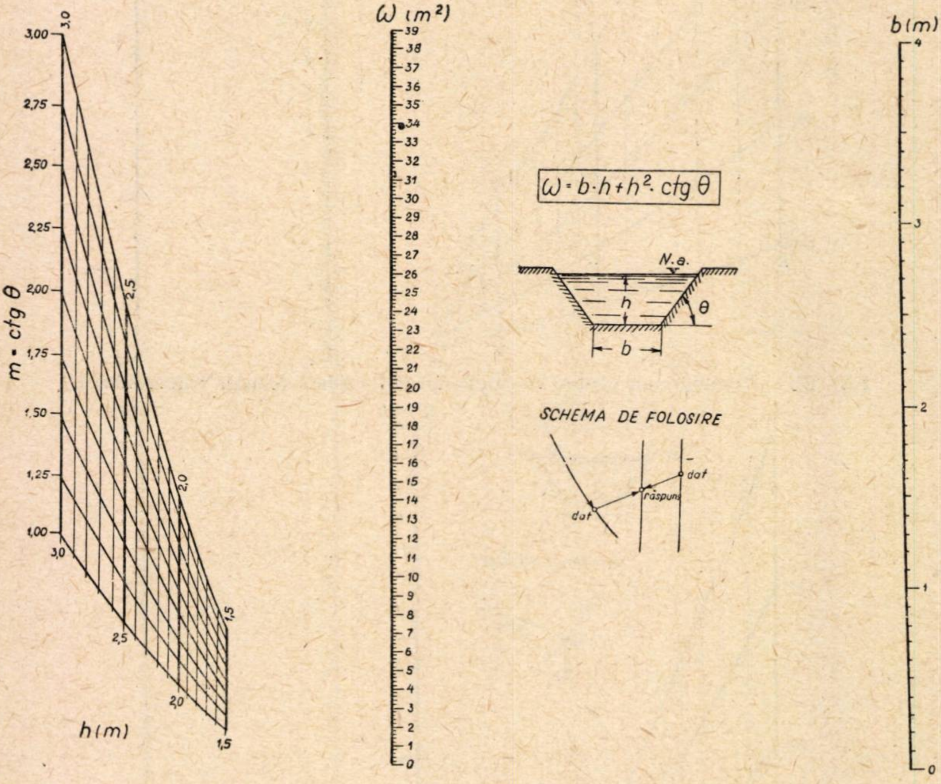


Fig. 14. — Nomogramă pentru calculul suprafeței udate (canale trapezoidale).

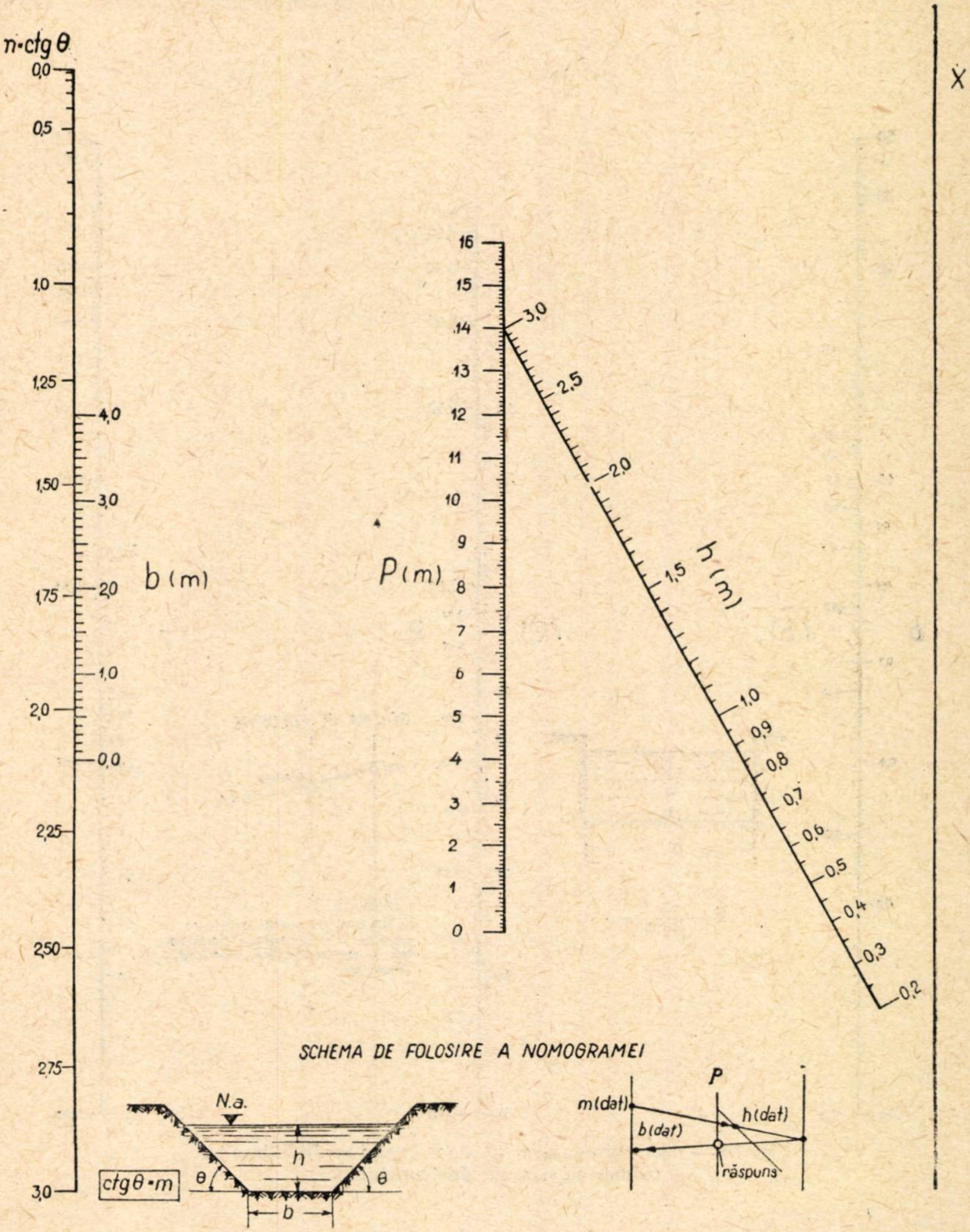
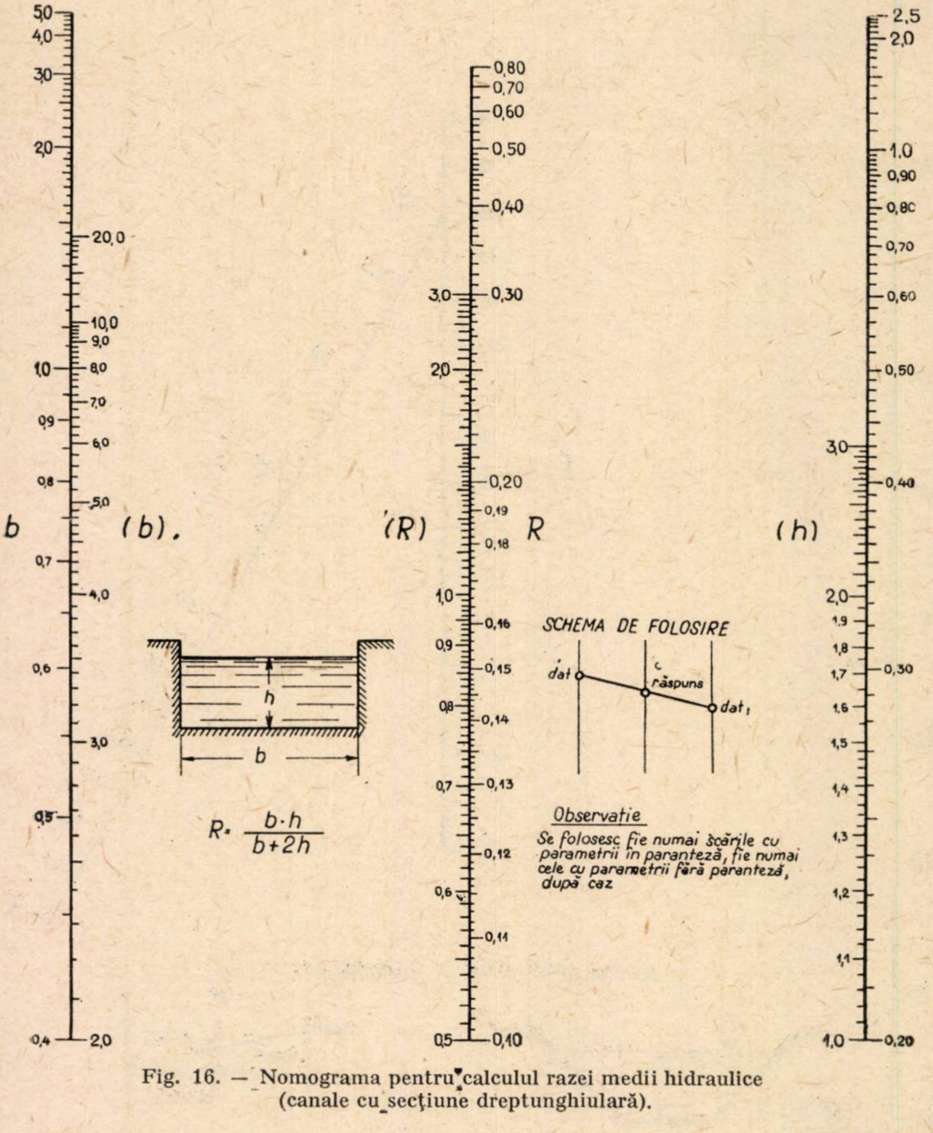

n·ctg θ
0,0
0,5
1,0
1,25
1,50
1,75
2,0
2,25
2,50
2,75
3,0
4,0
3,0
2,0
1,0
0,0
b (m)
P (m)
16
15
14
13
12
11
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
h (m)
3,0
2,5
2,0
1,5
1,0
0,9
0,8
0,7
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
X
SCHEMA DE FOLOSIRE A NOMOGRAMEI
N.a.
h
b
θ
θ
ctgθ = m
P
m(dat)
h(dat)
b(dat)
răspuns

Fig. 15. — Nomogramă pentru calculul perimetrului udat ($P = b + 2h\sqrt{1 + m^2}$).



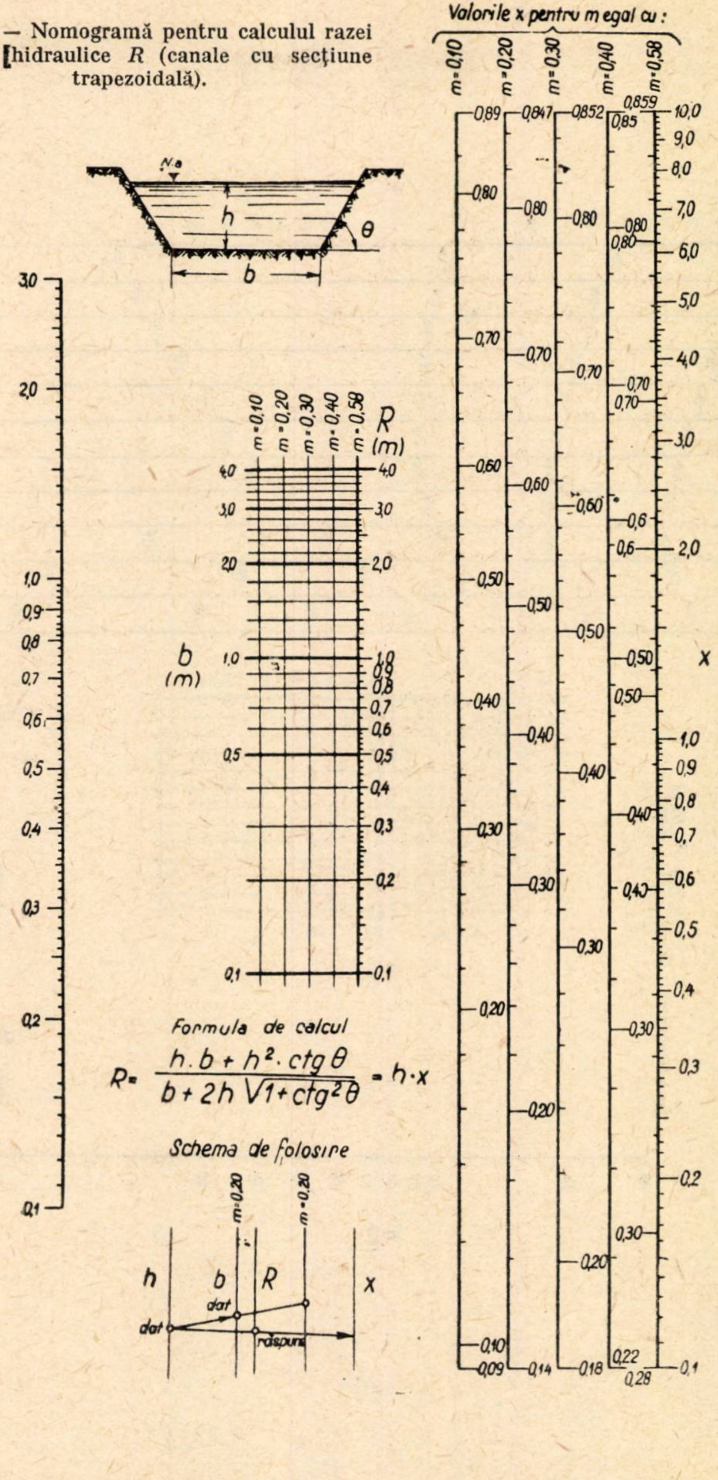
$$R = \frac{b \cdot h}{b + 2h}$$

Observatie

Se folosesc fie numai scările cu parametrii în paranteză, fie numai cele cu parametrii fără paranteză, după caz

Fig. 16. — Nomograma pentru calculul razei medii hidraulice (canale cu secțiune dreptunghiulară).

Fig. 17. — Nomogramă pentru calculul razei medii hidraulice R (canale cu secţiune trapezoidală).



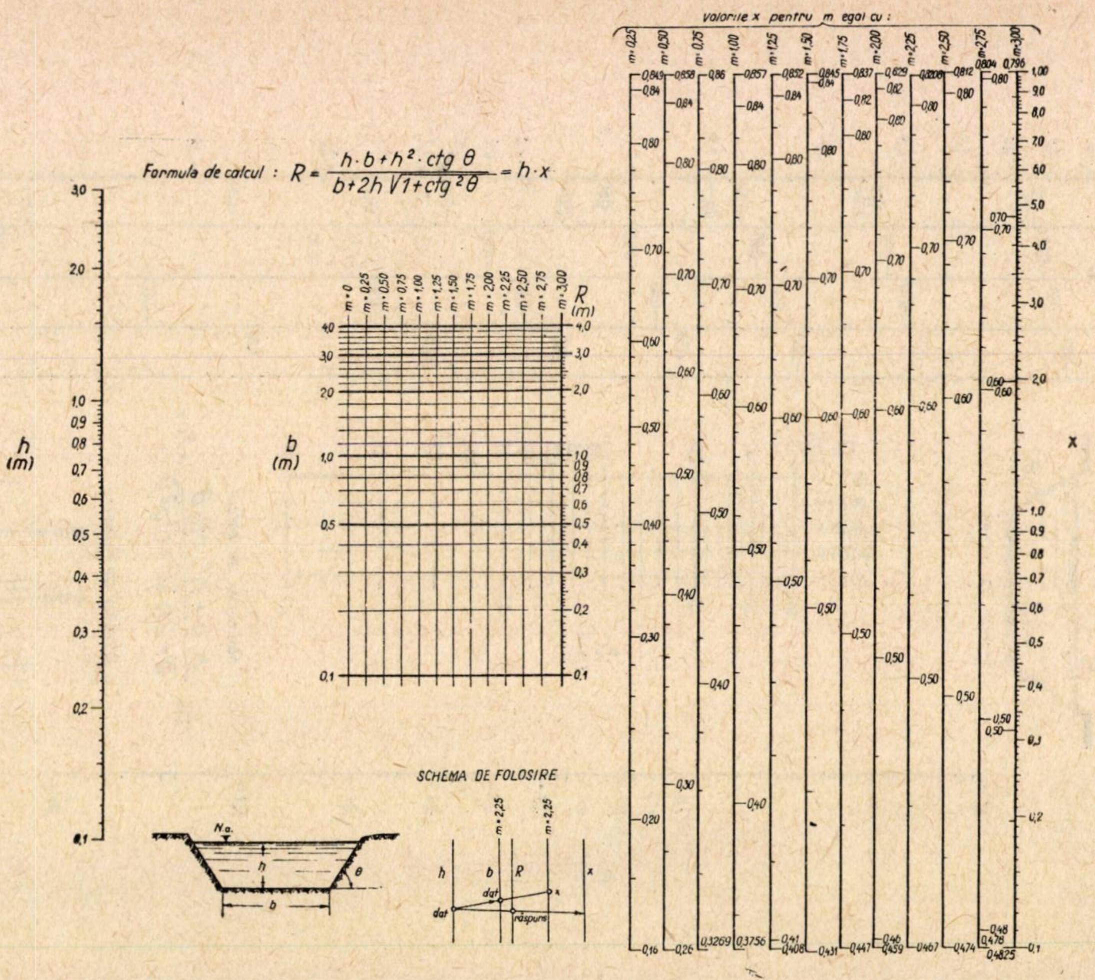


Fig. 18. — Nomograma pentru calculul razei medii hidraulice R (canale cu secțiune trapezoidală).

—— REFERATE ŞTIINŢIFICE ŞI TEHNICE ——

CERCETĂRI EXPERIMENTALE ASUPRA LAGĂRELOR CU CUZINEŢI DIN METALE PULVERIZATE

DE

V. MARCU

621.793.71 : 621.82

1. LUBRIFICAŢIA SUPRAFEŢELOR POROASE

În elaborarea şi prelucrarea metalelor pot să apară porozităţi sub două aspecte şi anume :

— Ca defecte ale omogenităţii metalului sau aliajului, cum sînt de exemplu suflurile sau incluziunile de gaze la turnare.

— Ca structură normală, rezultată prin procesul tehnologic de elaborare, cum este cazul la metalurgia pulberilor şi la metalizarea prin pulverizare.

Sub această ultimă formă suprafeţele poroase au permis realizarea unor aplicaţii pe o vastă scară industrială, în domeniul lagărelor cu alunecare, cu însemnate avantaje sub toate aspectele, enumerate după cum urmează într-o lucrare a lui Zoltan Scherr [1] :

A. AVANTAJE TEHNOLOGICE

a. *Condiţii de lubrificaţie mai bune*

— Materialele antifricţiune poroase au componente moi şi tari independente unele de altele. Solicitarea particulelor superficiale în direcţia de rotaţie este alta decît la materialele compacte şi omogene.

— Compoziţia stratului permite o deformare şi oxidare superficială, cu consecinţe favorabile asupra particulelor metalice care s-a constatat că se rodează mai bine.

b. Uzură mai redusă

— Componentele dure sînt așezate la suprafețele poroase în masa componentelor moi, fapt care permite o deplasare parțială a particulelor dure.

— La aliajele antifricțiune omogene se ajunge la uzură prin oxidarea și fărîmițarea particulelor dure, care au un efect abraziv pînă ce circulația de ulei antrenează aceste produse ale uzurii.

— La viteze periferice reduse, deci la demaraj, momentul de frecare are o valoarea redusă.

c. Posibilitatea reducerii jocurilor

Lagărele poroase permit funcționarea cu jocuri mai mici, fapt care reduce vibrațiile și efectul lor, constituind un avantaj mai ales la motoarele electrice.

B. AVANTAJE ECONOMICE

a) Costul lagărelor poroase este mai redus, mai ales prin utilizarea de metale și aliaje de înlocuire care permit realizarea de importante economii.

b) Consumul de ulei este mai redus ca în cazul lagărelor din metale turnate. Zoltan Scherr, în articolul citat, menționează că unele lagăre poroase consumă numai 2 pînă la 10% din cantitatea de ulei necesară unui lagăr compact.

c) Au o durabilitate de 2 pînă la 4 ori mai mare decît a lagărelor compacte.

C. AVANTAJE ÎN EXPLOATARE

a. *Siguranță contra riscurilor de gripare*

— Uleiul înmagazinat în porii și canalele de intercomunicație îndepărtează riscul de gripare, asigurînd cîtva timp ungerea în cazul unei întreruperi a circulației de ulei.

— Aderența uleiului este mai bună pe suprafețele poroase.

— În canalele capilare iau naștere presiuni asemănătoare fenomenului de urcare a apei din sol.

b. Lagărele poroase nu reclamă o supraveghere prea riguroasă în timpul funcționării.

c. În cursul exploatării nu se constată, ca la lagărele compacte, apariția uleiului liber în exces, avantaj apreciat mai ales în industria textilă, deoarece nu se murdăresc produsele fabricate de mașina respectivă.

d. Pot funcționa la temperaturi mai ridicate și fac mai puțin zgomot.

1.1. LAGĂRE DIN PRODUSE SINTERIZATE

Studiile teoretice referitoare la lubrificația și uzura suprafețelor metalice poroase sînt puține la număr, astfel încît vom cita numai concluziile a două din ele :

a. N. S. Tipei, într-o lucrare a sa [2], studiază ansamblul fus-cuzinet pentru cazul cînd ambele au suprafețe poroase, determinînd caracteristicile globale ca : rezultanta presiunilor, forța și momentul de frecare, debitul de ulei, coeficientul de portanță al stratului de lubrifiant etc.

În prealabil, autorul face unele ipoteze care se dovedesc confirmate de realitate, cum este de exemplu faptul că circulația de ulei prin pori uniformizează temperatura lagărului, astfel încît viscozitatea uleiului se poate considera constantă [2].

b. V. T. Morgan și A. Cameron fac în [3] o expunere analitică și tehnologică cu privire la mecanismul lubrificației în cuzineții metalici poroși. Pornind de la relația stabilită în 1949 pentru valoarea coeficientului de frecare, în cazul lagărelor compacte, autorii lucrării stabilesc o relație pentru coeficientul de frecare al lagărelor poroase. În continuare, cei doi autori studiază permeabilitatea straturilor metalice poroase, pentru cazul unui cuzinet din bronz poros, în funcție de porozitate.

Referatul lui Morgan și Cameron pune în evidență dezvoltarea excepțională a construcției de lagăre din produse sinterizate, arătînd că în 1937 se produceau zilnic în industria mondială circa un milion de cuzineți poroși, pe cînd în 1957 producția zilnică ajunsese la 10 milioane [3].

1.2. LUBRIFICAȚIA STRATURILOR METALICE OBȚINUTE PRIN PULVERIZARE

Printre numeroasele aplicații ale metalizării prin pulverizare relevăm că în străinătate se utilizează lagăre din metale sau pseudoaliaje obținute prin pulverizare, în urma constatărilor făcute că acestea au bune caracteristici funcționale ca materiale antifricțiune.

În R.P.R. metalizarea se află într-un stadiu foarte modest față de alte țări socialiste cu un potențial industrial aproape echivalent. Majoritatea tehnicienilor nu sînt încă convinși de avantajele metalizării prin pulverizare, chiar în domenii care nu mai pot admite controverse, cum sînt recondiționarea pieselor uzate și protecția contra coroziunii prin straturi de metale pulverizate.

De aceea, se impune o prealabilă introducere documentară asupra rezultatelor favorabile obținute în alte țări cu lagărele din metale și pseudoaliaje obținute prin pulverizare, înainte de a expune cercetările efectuate la Institutul de mecanică aplicată al Academiei R.P.R. în acest domeniu.

1.2.1. Cercetări de laborator

Dintre numeroasele lucrări experimentale tehnico-științifice trebuie să citām pe cele efectuate în U.R.S.S. de V. I. Kazarțev care a studiat comportarea la frecare și uzură a unor epruvete din oțel-carbon acoperite cu diverse straturi protectoare sau supuse în prealabil la tratamente termice sau termochimice. Rezultatele încercărilor acestor epruvete, sub formă de role, încercate la o mașină de tip „Amsler" pentru studiul frecării, sînt date în tabela 1 [4].

Tabela 1

Nr. crt.	Natura stratului de acoperire sau a tratamentului diverselor epruvete	Intensitatea uzurii față de epruvetele neacoperite [%]
1	Epruvete fără nici un strat de acoperire sau tratament (luate ca referință)	100
2	Epruvete *metalizate* cu oțel pulverizat după pregătirea suprafeței prin sablare	0
3	Epruvete călite prin curenți de înaltă frecvență	4
4	Strat depus prin cromare poroasă	10,5
5	Epruvete *metalizate* cu oțel pulverizat pe suprafața pregătită prin electroerodare, apoi tratate la 400°C timp de 20 minute	15
6	Strat depus prin cromare netedă	15,5
7	Epruvete *metalizate* cu oțel pulverizat depus pe suprafața pregătită prin electroerodare	19
8	Epruvete călite cu curenți de înaltă frecvență, apoi încărcate cu sudură	43,5
9	Strat depus prin încărcare cu sudură	47,5
10	Strat de fier electrolitic	170

Din această tabelă se vede că cea mai redusă uzură, practic nulă, a fost aceea constatată la epruvetele metalizate prin pulverizare după sablarea suprafeței.

1.2.2. Cercetări în exploatare [5]

Vom cita rezultatele unor experiențe de mare anvergură întreprinse în Anglia asupra lagărelor de la motoarele unui grup de 22 autovehicule de diferite tipuri și anume : turisme, autocamioane și autobuze, unele echipate cu motoare cu benzină, iar altele cu motoare Diesel.

La arborele fiecărui motor s-a redus, la jumătate din numărul fusurilor, diametrul cu 3 mm, înlocuind apoi materialul scos cu un strat de oțel depus prin pulverizare apoi strunjit și rectificat la diametrul nominal. Autovehiculele au fost apoi utilizate în condițiile lor normale de exploatare, fiind examinate după 1 500, 8 000, 15 000 şi 24 000 km. După aceasta motoarele au fost demontate, făcîndu-se următoarele constatări :

— La fusurile metalizate, uzurile au fost mai mici cu 15 % la motoarele cu benzină şi cu 50 % la motoarele Diesel față de fusurile nemetalizate.

— La cuzineți uzurile au fost mai reduse cu 40—50 % la arborii cu fusuri metalizate.

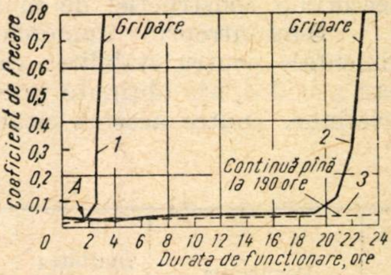


Fig. 1. — Diagrama comportării la frecare uscată a trei fusuri din care unul nemetalizat şi două metalizate cu oțel pulverizat.

S-a executat apoi o experiență comparativă de comportare la frecare uscată cu trei arbori, întrerupîndu-se la un moment dat circulația de ulei. Variația coeficientului de frecare şi durata după care s-a gripat fiecare din cele trei fusuri sînt indicate în diagrama din figura 1, prin trei curbe şi anume :

În punctul *A* de pe diagramă s-a întrerupt alimentarea cu lubrifiant.

— Curba *1* arată variația coeficientului de frecare pentru un fus nemetalizat care a gripat după circa 3 ore de funcționare.

— Curba *2* se referă la fusul metalizat alimentat cu ulei, fără nici un aditiv, griparea producîndu-se după 23 de ore.

— Curba *3* reprezintă variația coeficientului de frecare a fusului metalizat, alimentat cu ulei conținînd grafit, a cărui gripare s-a produs după o îndelungată funcționare de 190 ore fără ungere.

Experiențele mai sus indicate au demonstrat, în mod concludent, că fusurile metalizate se comportă mult mai bine la frecare uscată decît cele din metal compact.

Rezultatele obținute au permis să se realizeze următoarele noi categorii de lagăre poroase :

— Cupluri formate din fusuri de oțel călit, cementat şi rectificat şi cuzineți din metale sau pseudoaliaje depuse prin pulverizare.

— Cupluri realizate în U.R.S.S. din cuzineți de oțel cu suprafața interioară durificată prin călire şi fusuri cu suprafețe metalizate prin pulverizare, denumite şi cupluri inversate.

2. APLICAȚII ALE METALIZĂRII PRIN PULVERIZARE LA LAGĂRE, ÎN ALTE ȚĂRI

Unele țări socialiste, au acordat o deosebită atenție metalizării prin pulverizare şi în domeniul lagărelor, obținînd rezultate foarte avantajoase, atît din punct de vedere tehnic cît şi economic, după cum se arată mai jos.

2.1. ÎN U.R.S.S.

Realizarea și folosirea de lagăre cu fusuri sau cuzineți ale căror suprafețe sînt constituite din metale sau pseudoaliaje depuse prin pulverizare sînt considerate ca probleme deosebit de importante în U.R.S.S. Pentru soluționarea lor colaborează numeroase institute de cercetări, institute unionale de proiectare tehnologice și colective din unele unități aparținînd sectorului construcției de mașini.

S-au întreprins numeroase și minuțioase lucrări teoretice și experimentale pentru stabilirea caracteristicilor funcționale ale unor metale sau pseudoaliaje obținute prin pulverizare și utilizate ca materiale antifricțiune. Dintre acestea citäm cîteva în tabela 2 [6].

Tabela 2

Nr. crt.	Denumirea pseudoaliajelor	Duritatea Brinell HB [kgf/mm^2]	Ungerea fluidă			Ungerea la limită	
			Coeficientul de frecare la vitezele de alunecare $v = 1-4$ m/s	Sarcina max. admisibilă p [kgf/cm^2]		Coef. de frecare la $v=0{,}4$m/s, $p=50$ kgf/cm^2	Uzura la $p=50$kgf/cm^2 față de primul pseudoaliaj luat ca unitate
				la $v=$ 1 m/s	la $v=$ 4 m/s		
1	Aluminiu cu oțel AJ–50	37– 44	0,0061–0,0045	105	110	0,087	1
2	Cupru cu oțel MJ–75	95–107	0,0061–0,0055	70	80	0,10	1,77
3	Alamă cu oțel LJ–75	95–107	0,0072–0,0065	50	85	0,10	2,55
4	Oțel J–100	107	0,0133–0,0070	45	75	0,10	1,7
5	Cupru cu oțel MJ–50	—	0,0063–0,0033	90	115	—	—
6	Cupru cu plumb MS–25	35–37	0,0037–0,0045	105	140	—	—
7	Cupru cu staniu și plumb M 75 POS 30	25–28	0,0047–0,0023	160	165	—	—

Ca urmare a încercărilor indicate mai sus, s-au făcut următoarele constatări în comparație cu aliajele antifricțiune obținute prin turnare :

— Rezistența la uzură a pseudoaliajelor AJ-50 și M 75 POS 30 este aproximativ egală cu aceea a bronzului OTS 6-6-3.

— Dintre pseudoaliajele conținînd oțel cel mai rezistent la gripare este tipul AJ-50

— Coeficientul de frecare al pseudoaliajelor este aproape similar cu acela al bronzurilor.

Încercările de durată în exploatare cu lagăre avînd ca material antifricţiune pseudoaliajele mai sus indicate au dat deplină satisfacţie, atît din punct de vedere tehnologic cît şi economic, pseudoaliajele fiind mult mai ieftine decît materialele antifricţiune de tipul clasic.

Rezultatele obţinute în U.R.S.S. în urma utilizării de materiale antifricţiune elaborate prin pulverizare au fost atît de remarcabile încît au fost menţionate în comunicarea ing. E. V. Antoşin de unde cităm următorul pasaj care interesează tema colectivului I.M.A. şi anume studiul oţelului pulverizat ca material antifricţiune [7].

„Problemele relative la rezistenţa la uzură a straturilor de oţel au fost studiate de inginerii A. L. Dovghiş (Kiev), L. A. Iaroşevski (Rostov pe Don) şi alţii. În special, ing. L. A. Iaroşevski a stabilit experimental posibilitatea de a realiza o funcţionare eficace a cuplurilor de materiale de lagăr, antifricţiune, compuse din oţel obişnuit, asociat cu oţel depus prin metalizare, fără a se folosi materiale neferoase".

2.2. ÎN R.D. GERMANĂ

S-au făcut cercetări experimentale asupra unor metale şi pseudoaliaje obţinute prin pulverizare simplă sau cu adaos de grafit, ajungîndu-se la următoarele concluzii :

a. Cuzineţii metalizaţi, formaţi din corpuri de oţel sau fontă, cu straturi interioare din bronzuri pulverizate, aliaje de Al-Si şi bronzuri cu adaosuri de 8—10% grafit, pot fi utilizaţi, în bune condiţii, pentru capacităţi portante pînă la maximum 250 kgf/cm^2 şi viteze periferice pînă la 5 m/s.

b. Bucşele pulverizate în interior cu alamă 58 şi cu pseudoaliaje de Zn-Al-Fe au capacitate portantă redusă şi nu sînt indicate pentru lagăre.

c. La cuzineţii cu adaos de grafit se obţine o transmitere mai bună a eforturilor, chiar în cazul unei ungeri insuficiente [8].

2.3. În R.S. CEHOSLOVACĂ

Dezvoltarea amplă a metalizării prin pulverizare în R. S. Cehoslovacă a permis organizarea unor cercetări comparative sistematice între următoarele categorii de materiale antifricţiune :

— Aliaje turnate : bronz de plumb obţinut prin turnare centrifugală şi compoziţie cu plumb.

— Pseudoaliajele obţinute prin pulverizare : Cu-Pb şi Al-Pb, ambele avînd constituenţi în raportul 1 : 1.

S-au întreprins următoarele experienţe :

— Încercări sub sarcini progresive cu ungere la viteza periferică de 8 m/s şi sarcini progresive crescînd cu 10 kgf/cm^2 la fiecare 5 minute.

— Încercări de funcționare la frecare semifluidă și uscată, la viteza periferică de 8 m/s și sarcina constantă de 20 kgf/cm², pînă la gripare. Rezultatele obținute sînt cele din tabela 3.

Tabela 3

Aliaje turnate și pseudoaliaje obținute prin pulverizare	Încercări sub sarcină progresivă		Încercări la gripare	
	Sarcina max. suportată [kgf/cm²]	Temperatura finală la sarcina maximă °C	Durata funcționării pînă la gripare	Temperatura în momentul gripării °C
Bronz de plumb turnat	110	140	3 min 45 s	170
Pseudoaliaj Cu-Pb	130	180	9 min 37 s	210
Compoziție de plumb	70	200	10 min	220
Pseudoaliaj Al-Pb	210	100	9 min 20 s	215

Din această tabelă se constată superioritatea aproape completă a pseudoaliajelor obținute prin pulverizare [9].

2.4. ÎN R. P. POLONĂ

Ca materiale antifricțiune elaborate prin pulverizare, cităm pseudoaliajul Cu-Pb în proporție de 1 : 1 și alama Ms 60, cu care s-au metalizat cuzineți și fusuri în special la mașini-unelte.

După cum reiese din lucrările publicate de cercetătorii din R. P. Polonă, rezultatele obținute au fost excepțional de bune. Iată ce afirmă de exemplu S. Gebalski și L. Szulc în concluzia unei lucrări [10] :

„Făcîndu-se comparație între cantitățile de staniu și cupru folosite anterior și cantitatea de cupru consumată la metalizarea prin pulverizare cu alamă Ms 60 se constată economii de peste 90% (neglijîndu-se zincul nedeficitar)”.

Rezultă din expunerea de mai sus, că lagărele din metale și pseudoaliaje obținute prin pulverizare, au dat rezultate deosebit de favorabile în țările socialiste mai sus enumerate.

3. CERCETĂRI EXPERIMENTALE EFECTUATE ÎN R.P.R.

Colectivul de metalizare prin pulverizare de la I.M.A. a avut în tematica sa cercetări asupra comportării ca materiale antifricțiune a metalelor și pseudoaliajelor obținute prin pulverizare. Cercetările s-au axat pe determinarea caracteristicilor funcționale, în condițiile lubrificației hidrodinamice și la limită, a cuzineților din oțel pulverizat cu procent redus de carbon, pentru următoarele considerente :

— Lipsa utilajului pentru pulverizarea simultană de mai multe metale spre a se obține pseudoaliaje.

— Preocuparea de a face investigații pentru găsirea de materiale antifricțiune de înlocuire a celor elaborate din metale neferoase, care sînt scumpe și deficitare, pe cînd oțelul este evident cel mai ieftin material de înlocuire.

— Oțelul cu procent redus de carbon permite a se obține prin pulverizare straturi cu o duritate redusă care este convenabilă pentru a se evita uzura excesivă a fusului cuplat cu un cuzinet metalizat.

— Cercetările s-au efectuat în laboratorul de lubrificație al secției Teoria mașinilor, după cum urmează :

— La mașina de studiat lagăre pentru determinarea caracteristicilor funcționale.

— La bancul cu funcționare în regim intermitent, pentru constatarea uzurii și comportării în cazul lubrificației la limită și la frecare uscată pînă la gripare.

S-a urmat, pentru a avea posibilitatea unei comparații, metodologia stabilită de colectivul de lubrificație al secției, măsurîndu-se temperaturile cuzinetului și băii de ulei, vitezele periferice, sarcinile aplicate și debitele de ulei care traversau lagărul.

3.1. DETERMINAREA CARACTERISTICILOR FUNCȚIONALE

Cuzineții destinați cercetărilor experimentale au fost elaborați sub formă de bucșe prin metalizare pe un dorn, călit și rectificat, utilizînd sîrmă de oțel cu procent scăzut de carbon, de circa 0,1 %. Depunerea stratului s-a făcut cu electrometalizatorul I.M.A. — I.O.R. adoptînd următorii parametri :

distanța de pulverizare	80—100 mm,
presiunea aerului comprimat	5,5—6 at,
diametrul duzei de aer	6 mm,
viteza de avans a sîrmelor	3 m/min,
tensiunea de regim	45 V,
intensitatea de regim	90 V.

S-a depus un strat de oțel pulverizat cu o grosime de 8 mm obținîndu-se o bucșă brută care a fost scoasă de pe dorn și prelucrată prin strunjire la următoarele date :

diametrul exterior	48 mm,
diametrul interior	$d = 36{,}06$ mm,
lățimea bucșei	$b = 25{,}2$ mm,
alungirea bucșei	$\lambda = 0{,}7$.

Această bucșă a fost introdusă pe un fus din oțel OLC 16, cementat, călit și rectificat avînd diametrul $d = 35{,}99$ mm. Jocul relativ a fost

$$\psi = \frac{36{,}06 - 35{,}99}{35{,}99} = 1{,}9^0/_{00}.$$

Lagărul format din acest ansamblu a fost instalat la maşina de studiat lagăre, deja descrisă anterior [11], care permite a se obţine turaţii pînă la 3 000 rot/min şi sarcini pînă la 3 000 kg.

Ca lubrifiant s-a utilizat ulei tip STAS 305, cu o presiune de 2 at. S-au efectuat două serii de încercări, la regimul termic de 45°C şi 60°C, variind turaţia şi sarcina aplicată asupra lagărului. La fiecare punct s-au măsurat temperatura cuzinetului t_c, presiunea medie p_m calculată pe suprafaţa proiectată a cuzinetului şi debitul de ulei Q_S care scăpa pe la capetele lagărelor. Cifrele obţinute au fost trecute pe diagramele date în figura 2 şi figura 3 împreună cu valorile constatate pentru cîteva aliaje antifricţiune

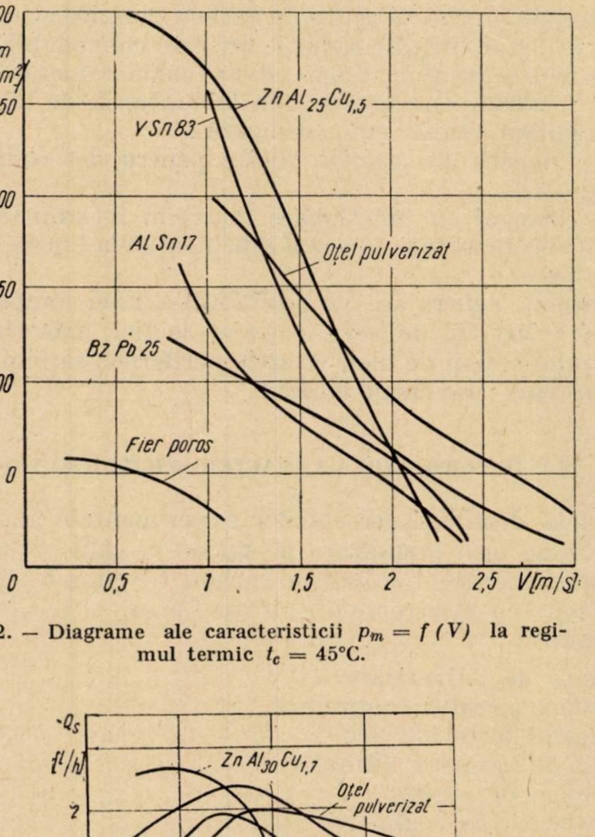


Fig. 2. — Diagrame ale caracteristicii $p_m = f(V)$ la regimul termic $t_c = 45°C$.

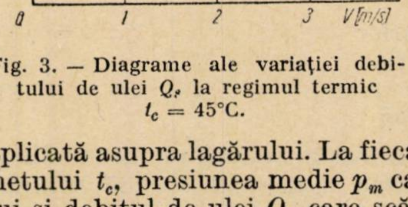
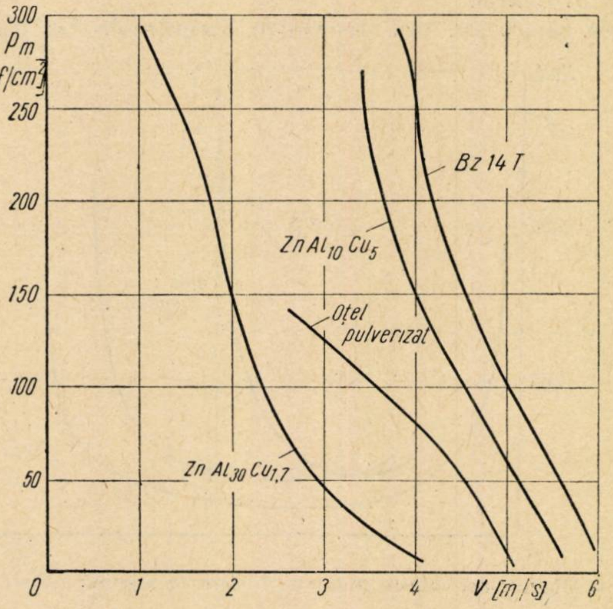


Fig. 3. — Diagrame ale variaţiei debitului de ulei Q_s la regimul termic $t_c = 45°C$.

compacte încercate anterior de colectivul de lubrificaţie, aceasta pentru a se face comparaţie.



Fit. 4. — Diagrame ale caracteristicii $p_m = f(V)$ la regimul termic $t_c = 60°C$.

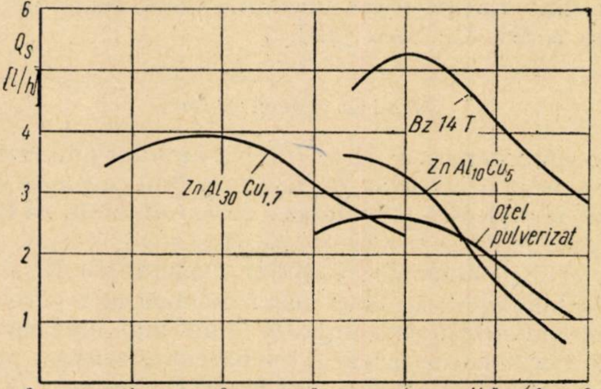


Fig. 5. — Diagrame ale variaţiei debitului de ulei Q_s la regimul termic $t_c = 60°C$.

În figurile 4 şi 5 sînt trasate diagrame pentru aceleaşi categorii de caracteristici funcţionale însă corespunzătoare regimului termic de funcţionare al lagărului la $t_c = 60°C$.

În continuare s-au determinat coeficienții de frecare la regimul termic de 45°C, măsurîndu-se momentul de frecare cu ajutorul dispozitivului mecanic tip paralelogram descris într-o lucrare anterioară a colectivului de lubrificație.

Valorile găsite au fost trecute în diagramele din figura 6.

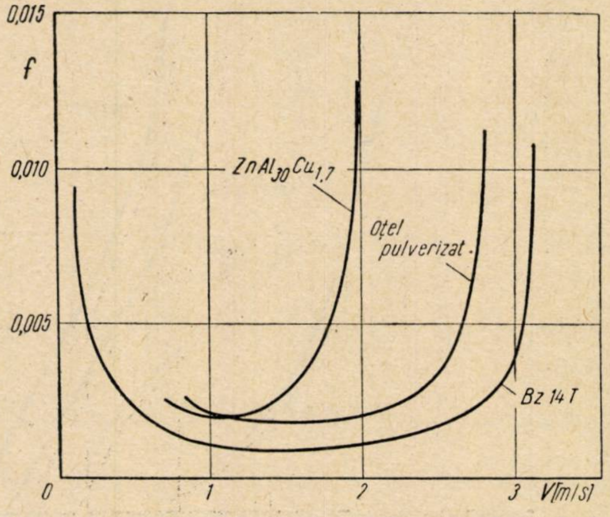


Fig. 6. — Diagramele coeficientului de frecare la regimul termic t_e = 45°C.

Din examinarea curbelor caracteristice ca material antifricțiune a oțelului pulverizat, se pot face următoarele constatări și comparații față de cîteva aliaje antifricțiune turnate a căror diagrame au fost extrase dintr-o lucrare a lui Al. Nica [12].

3.1.1. La regimul de 45 °C

a. Curba caracteristică $p_m = f(V)$ a oțelului pulverizat are o înclinare mai mare decît a aliajelor $ZnAl_{23}Cu_{1.5}$, fapt care este în concordanță cu constatarea făcută de V. T. Morgan și A. Cameron, că lagărele poroase se comportă mai bine la turații înalte și sarcini reduse. Acest fenomen se încadrează și în concluziile studiului redactat de N. S. Tipei și deja citat, care a stabilit alura scăderii portanței lagărelor poroase.

b. Oțelul pulverizat se comportă mult mai bine ca material antifricțiune decît fierul poros, a cărui curbă caracteristică $p_m = f(V)$ a fost extrasă dintr-o lucrare a lui Gh. Vasilca și P. Freund [11].

3.1.2. La regimul de 60°C

Examinînd diagramele din figura 4 se constată că oțelul pulverizat are o curbă caracteristică $p_m = f(V)$ intermediară între aliajele $ZnAl_{30}CU_{1.7}$ și $ZnAl_{10}Cu_5$. Aceste aliaje, precum și celălat aliaj Bz 14 T din figura 4 permit însă încărcări mai mari decît oţelul pulverizat. Această constatare concordă cu datele din tabela 2 care arată că pseudoaliajele obţinute prin pulverizare au un plafon redus al sarcinii maxime admisibile. În cazul nostru, sarcina maximă a oţelului pulverizat încercat la I.M.A. este aproape de două ori mai mare decît aceea a oţelului J—100, din tabela 2, la aceeaşi viteză periferică.

3.2. COMPORTAREA LA FRECARE ŞI UZURĂ

3.2.1. Determinarea uzurii

Încercările pentru a se constata comportarea la frecare şi uzură a cuplurilor formate din cuzinet metalizat şi fus din oţel călit, cementat şi rectificat s-au efectuat la bancul experimental cu regim de funcţionare intermitentă, realizat la I.M.A. [13].

Înainte de efectuarea încercărilor bucşa-cuzinet a fost cîntărită la balanţa analitică, găsindu-se o greutate de 137,368 g şi s-a măsurat diametrul interior al bucşei pe 4 direcţii. S-a montat ansamblul şi s-au efectuat 80 de ore la turaţia de 1 400 rot/min şi presiunea medie de 22 kgf/cm^2.

După o perioadă de rodaj de 12 ore temperatura bucşei s-a stabilizat la 53°C. S-a demontat lagărul de pe banc şi s-a cîntărit din nou bucşa, găsindu-se o greutate de 139,878 g care comparată cu prima greutate arată un spor de 0,51 g datorit uleiului care pătrunsese în porii şi canalele de intercomunicaţie ale suprafeţei interioare a bucşei metalizate.

Neputîndu-se determina uzura pe cale gravimetrică, s-a măsurat diametrul interior al bucşei şi diametrul fusului, găsindu-se uzuri neglijabile care nu depăşesc 0,002 mm.

3.2.2. Încercarea la frecare uscată

După determinarea uzurii, lagărul a fost montat din nou pe bancul experimental, efectuîndu-se o încercare la frecarea uscată. După o funcţionare de o oră s-a mărit presiunea uleiului la 3,8 at timp de 15 minute pentru a se umple bine porii suprafeţei interioare a bucşei cu ulei.

S-a redus apoi presiunea le 1,5 at pe o durată de 15 minute şi după aceasta s-a întrerupt complet circulaţia de ulei, lagărul fiind încărcat cu 10 kgf/cm^2. Temperatura bucşei începînd să urce s-au notat la intervale de 5 minute temperaturile citite la termometru. Cînd s-a ajuns după 42 minute la temperatura de 100°C experienţa a fost întreruptă pentru a nu deteriora lagărul prin gripare.

S-a trasat apoi, cu valorile constatate, curba variaţiei temperaturii lagărului în funcţie de timp (fig. 7).

Examinînd alura acestei curbe se constată că spre sfîrşitul încercării temperatura bucşei se urca din ce în ce mai mult pentru intervale de timp egale, astfel încît în cîteva minute s-ar fi ajuns la griparea lagărului.

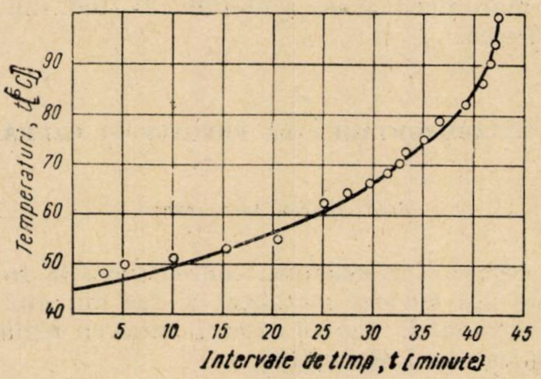


Fig. 7. — Curba de variaţie a temperaturii în cursul încercării la frecare uscată.

CONCLUZII

Din cele expuse în referatul de faţă se constată că rezultatele cercetărilor de laborator arată că oţelul pulverizat, cu procent redus de carbon, ar putea constitui un bun material antifricţiune de înlocuire.

În consecinţă, ar fi cazul să se treacă la experienţe în exploatare, realizîndu-se, pentru început cîţiva cuzineţi de acest tip pentru un motor stabil, la care să nu avem variaţii de regim de sarcină.

Primită la redacţie la 25 iunie 1963

RECHERCHES EXPÉRIMENTALES SUR LES PALIERS À COUSSINETS EN MÉTAL PROJETÉ

RÉSUMÉ

L'auteur estime nécessaire d'exposer, dans l'introduction du travail, les avantages techniques et économiques des coussinets poreux, domaine dans lequel s'inscrit le thème de l'article.

On expose ensuite les résultats particulièrement favorables, obtenus à l'étranger, avec les coussinets poreux, aussi bien par des recherches en laboratoire que par le comportement de ces coussinets pendant leur emploi en exploitation.

En passant ensuite au chapitre des coussinets en métal projeté, l'auteur indique les résultats satisfaisants obtenus par leur emploi dans l'Union Soviétique et dans les autres pays socialistes, surtout au point de vue économique.

En poursuivant son exposé, l'auteur indique les résultats constatés à la suite des recherches en laboratoire faites à l'Institut de Mécanique Appliquée de Bucarest, en utilisant des coussinets en acier projeté à l'aide d'un appareil électrique. On a constaté des usures négligeables et des caractéristiques fonctionnelles de cet acier projeté, comparables à celles de certains alliages antifriction, obtenus par les procédés classiques.

On peut donc affirmer que cet acier pourrait constituer un matériau de remplacement assez intéressant qui mériterait d'être essayé en exploitation.

BIBLIOGRAFIE

1. Zoltan Scherr, *Lagăre poroase din bronz.* GEP, *4* (1957).
2. S. N. Tipei, *La lubrification des corps perméables.* Lucrare prezentată la Congresul Unional de uzură şi frecare, Moscova, aprilie 1958.
3. V. T. Morgan, A. Cameron, *Mechanism of Lubrification in Porous Metal Bearings.* Referat prezentat la Conferinţa de lubrificaţie şi uzură, Londra, octombrie 1957.
4. V. I. Kazarţev, *Rezistenţa la uzură a straturilor de acoperire folosite la recondiţionarea organelor de maşini.* Buletinul construcţiilor de maşini, *1* (1956).
5. W. E. Ballard, *Metal Spraying and Sprayed Metal*, Griffin, London, 1948.
6. J. Ia. Alşit, E. V. Antoşin, L. N. Suşkina, A. M. Edelson, *Tehnica pseudoaliajelor drept înlocuitoare ale bronzului şi metalelor antifricţiune pe bază de staniu.* Buletinul oconstrucţiilor de maşini, *3* (1960).
7. E. V. Antoşin, *Utilaje şi cercetări de metalizare prin pulverizare efectuate în U.R.S.S.* Comunicare prezentată la cel de-al II-lea Congres Internaţional de metalizare prin pulverizare, Birmingham, 1958.
8. E. Kretzschmar, *Cercetarea lagărelor cu alunecare obţinute prin pulverizare mecanică.* Die Technik, *6* (1956), (dosar, I.D.T. 47464).
9. K. Kolar, *Straturi de alunecare aplicate prin metalizare şi caracteristicile lor.* Strojirestvi, *7*(1958), (în „Metalizarea prin pulverizare. Culegere de material documentar" I.D.T., 1959).
10. S. Gebalski, L. Szulc, *Lagăre cu suprafeţele de alunecare metalizate prin pulverizare pentru axele principale ale maşinilor-unelte.* Przeglad Spawalnictwa, *5*(1955) (dosar I.D.T. 47200).
11. Gh. Vasilca, P. Freund, *Studii experimentale asupra unor materiale antifricţiune de înlocuire pentru lagărele de alunecare.* St. cerc. mec. apl., **VII**, *3* (1956).
12. Al. nica, *Studiul comparativ al materialelor antifricţiune.* St. cerc. mec. apl., **XIII**, *2*(1963).
13. P. Freund şi colab., *Banc experimental pentru studiul rezistenţei fusurilor la uzură în regim nepermanent.* St. cerc. mec. apl., **VIII**, *4*(1957).

MANIFESTĂRI ŞTIINŢIFICE PESTE HOTARE

AL XIII-LEA CONGRES INTERNAŢIONAL DE ASTRONAUTICĂ VARNA, R.P.BULGARIA, 23—29 SEPTEMBRIE 1962

DE

D. MANGERON [1]

Din totalitatea congreselor actuale de specialitate, congresele de astronautică scot în evidenţă în mod deosebit uriaşele progrese realizate de ştiinţă şi tehnică, constituind totodată şi ocazii pentru jalonarea cuceririlor omenirii în domeniul activităţii de cercetare ştiinţifică.

Nenumărate generaţii de oameni au căutat să ajungă de-a lungul mileniilor să stăpînească forţele naturii, făurind unelte şi mijloace de producţie, trecînd peste mări şi ţări, ajungînd în ţinuturi foarte greu accesibile.

Toate popoarele lumii şi-au adus prinosul lor de muncă la realizarea marilor descoperiri şi cuceriri ale ştiinţei şi tehnicii contemporane. Datorăm înaltă preţuire muncii mecanicului rus I. Kulibin, inventatorului ceh J. Božek, termotehnicianului rus I. Polzunov, creatorului maşinii cu aburi J. Watt, meşterului chinez Bi Şen, savantului Ibn-Sena, mecanicienilor şi matematicienilor J. Newton şi G. Galilei, astronomului polonez N. Copernic, gînditorului francez R. Descartes, academicianului rus M. V. Lomonosov, fizicienilor americani B. Franklin şi T. Edison, lui R. Mayer, M. Faraday, P. L. Cebîşev, J. Berzelius etc. care au adus contribuţii de neevaluat la tezaurul mondial al ştiinţei, tehnicii şi culturii.

Sîntem mîndri că, în pofida condiţiilor foarte puţin propice pentru dezvoltarea ştiinţei şi tehnicii din ţara noastră în perioada premergătoare instaurării regimului nostru democrat-popular, am putut da prinosul nostru de contribuţie printr-un Traian Vuia, Aurel Vlaicu, Constantinescu etc. [1] la făurirea premiselor zborului omului în cosmos, jalonat de savanţii ruşi N. Kibalcici, A. Mojaiski, K. Ţiolkovski, D. Mendeleev, N. Jukovski etc.

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM • KÖZPONTI KÖNYVTÁRA 1848

---

[1] Institutul politehnic, Iaşi.

Acumularea cantitativă a cunoștințelor în domeniul astronauticii, cristalizată în expunerile făcute la cel dintîi congres al Federației Internaționale de Astronautică (IAF), desfășurat în 1951 la Londra, a mers într-un ritm ascendent, caracteristic astăzi tuturor domeniilor științei și tehnicii, care își dublează în medie cuantumul materialului faptic la fiece zece ani [2], jalonîndu-se de atunci sub formă de congrese internaționale de astronautică, concretizate, începînd cu 4 octombrie 1957, de lansarea primului satelit artificial al Pămîntului, istorica realizare a științei și tehnicii sovietice.

Al XIII-lea Congres internațional de astronautică, desfășurîndu-și lucrările la Varna, R.P. Bulgaria, în zilele de 23–29 septembrie 1962, a avut participanți activi din 13 țări, Africa de Sud, Anglia, Belgia, R. P. Bulgaria, Irlanda, Israel, Italia, Japonia, R. P. Polonă, R. P. Romînă, S.U.A., Suedia și U.R.S.S., care au prezentat circa 60 de lucrări. El s-a desfășurat în lumina noilor strălucite succese ale științei și tehnicii sovietice în domeniul cuceririi spațiului cosmic, cristalizat în primul zbor cosmic în grup al piloților cosmonauți Andrian Nikolaev și Pavel Popovici (11–15 august 1962).

Tematica dezbătută în cadrul celui de-al XIII-lea Congres internațional de astronautică a fost centrată în jurul următoarelor probleme : Dinamica rachetelor relativiste ; Probleme de lansare și recuperare a marilor rachete și vehicule planetare, cu privire specială asupra reîntoarcerii unor astfel de vehicule din zboruri lunare ; Proiectări de vehicule spațiale cu dublă capacitate de aselenizare-aterizare ; Analiza matematică a traiectoriilor vehiculelor spațiale cu privire specială asupra studiului traiectoriilor de reîntoarcere pe Pămînt, după aselenizare prealabilă pe Lună ; Realizări de vehicule orbitale staționare deasupra unui punct nesituat pe ecuatorul terestru ; Probleme de studiu petrografic în explorări realizate extraterestru cu vehicule fără om, cu privire specială asupra aparaturii pentru studiul petrografic al Lunii și al planetelor Venus și Marte ; Adîncirea studiilor de folosire pentru telecomunicații a sateliților artificiali ai Pămîntului cu durata de zbor de 4,20 și mai multe sute de ani, cu privire specială asupra mai multor sateliți de telecomunicații (televiziune transatlantică, telefonie pe mai multe canale etc.) în zboruri sincrone pe aceeași orbită circulară cu raza de circa 13 000 km, cu durata de revoluție de 24 de ore ; Proiectarea sistemelor pasive și cvasipasive sau active de sateliți-relee de telecomunicație cu privire specială asupra avantajelor pe care le prezintă fiecare sistem în parte ; Proiecte de rachete electrotermale, cu privire specială asupra posibilităților de folosire multilaterală a jeturilor de plasmă (aliaje, sudură, rafinare, purificare etc.) ; Proiectarea sateliților de mare putere cu ajutorul reactorilor nucleari ; Analiza aero-termochimică a instabilității combustibililor lichizi în motoare de rachetă, făcută cu ajutorul mașinilor electronice (matematice) rapide de calcul, programate pentru rezolvarea ecuațiilor fundamentale ale aero-termochimiei ; Folosirea sateliților artificiali ai unor corpuri cerești, evoluînd pe orbite bine determinate și emițînd radiații electromagnetice în vederea măsurării deviației razelor luminoase în cîmpuri gravitaționale și prin aceasta a efectuării șirurilor de probe relative la teoria generală a relativităţii; Proiectarea şi încercarea dinamică a unor stabilizatoare de ultraprecizie şi de control a sateliţilor artificiali etc.

O vastă serie de probleme a fost consacrată adîncirii studiilor condiţiilor propice de zbor cosmic al omului. Aici se situează studiul sistemelor de protecţie în zboruri cosmice îndelungate ale omului cu misiuni complexe, cu privire specială asupra problemelor de medicină umană cosmică, a aselenizărilor de durată şi a stărilor de imponderabilitate prelungită; Sterilizarea vehiculelor lunare şi planetare; Studiul fiziologic (metabolismul de thiamină) al comportării organismelor umane la temperaturi înalte (problemă medicală ridicată cu ocazia zborului de reîntoarcere a astronautului american Glenn); Cercetarea perturbărilor vizuale şi a consecinţelor lor asupra organismului uman, ca urmare a citirilor datelor furnizate de dispozitive radar; Studii relative la adaptarea aparatului cardiovascular la condiţii de sol şi de hipobarism cu şi fără costum de compensaţie; Probleme de sinteză chimică la temperaturi înalte şi de creştere a cristalelor etc.

În cadrul lucrărilor Congresului au fost puse în evidenţă şi unele şiruri de rezultate ştiinţifice noi obţinute ca urmare a zborurilor cosmice cu totul recente. Astfel, de exemplu, prin comparaţia rezultatelor relative la orbitele teoretice şi cele determinate pe cale experimentală ale unor sateliţi artificiali ai Pămîntului s-a reuşit să se determine densitatea atmosferică ca funcţie de activitatea solară şi de altitudine (950—1 500 km); prin folosirea acţiunii simultane a forţelor datorite presiunii de radiaţie şi rezistenţei aerului s-a găsit posibilitatea de a se modifica pe viitor altitudinile orbitale şi, ca o consecinţă a acestui fapt, de a se prelungi durata vieţii sateliţilor artificiali ai Pămîntului; s-a determinat ionizarea păturilor inferioare ale atmosferei produsă de radiaţii solare cu unde scurte şi s-a studiat radiaţia solară corpusculară în aceste pături; s-a detectat cîmpul magnetic interplanetar la distanţa între 16 000 km şi 190 000 km de suprafaţa Pămîntului; s-au stabilit o serie de parametri optimali relativi la sateliţii lansaţi în scopuri meteorologice (pentru aceştia din urmă, de exemplu, nu se recomandă altitudini mai mari decît o rază pămîntească) etc.

Delegaţia sovietică, care s-a bucurat pe bună dreptate de atenţia tuturor delegaţiilor prezente, a fost condusă — ca şi la seria de congrese internaţionale de astronautică anterioare — de către fostul preşedinte al Federaţiei Internaţionale de Astronautică, acad. L. I. Sedov, bine cunoscut în ţara noastră.

Ne este deosebit de plăcut de subliniat aici aportul delegaţiei romîne, condusă de acad. Elie Carafoli. Astfel, de exemplu tov. M. Niţă a expus problema deja menţionată relativă la posibilitatea de realizare a unui vehicul orbital staţionar deasupra unui punct nesituat pe ecuatorul pămîntesc; tov. I. Pascaru a prezentat problema stabilităţii în orbită în păturile superioare ale atmosferei a unui satelit artificial al Pămîntului cu reglare automată; tov. C. Popovici a arătat posibilitatea determinării coordonatelor geocentrice ale sateliţilor precum şi ale staţiunilor de observaţie folosind sateliţii înşişi, iar tov. M. Carapancea, N. Popescu,

M. Ştefan şi G. Arsenescu, S. Schiau şi A. Ionaşcu au prezentat respectiv rezultatele studiilor lor deja citate din domeniul medicinii cosmice.

Al XIV-lea Congres Internaţional de Astronautică, programat să se ţină la Paris în toamna anului 1963, va avea de înregistrat noi şi strălucite succese datorite muncii neobosite a cercetătorilor în domeniul spaţiului cosmic.

THE XIIIth INTERNATIONAL CONGRESS OF ASTRONAUTICS,

VARNA, THE PEOPLE'S REPUBLIC OF BULGARIA, SEPTEMBER 23–29, 1962

ABSTRACT

This is a brief presentation of the fields covered by the XIIIth International Congress of Astronautics held at Varna in September 23–29, 1962.

The problems treated by various authors are shown and the contribution of the Rumanian delegation is mentioned.

BIBLIOGRAFIE

1. D. Mangeron, R. Bogdan, *Studii, cercetări şi perspective în domeniul teoriei maşinilor şi mecanismelor în R.P.R.*, St. cerc. mec. apl., **IX**, *4*, 1093–1098 (1958).
2. Н. Н. Семенов, Ж. Бернал, *Наука и техника в мире будущего.* Вестник Высшей школы, **10**, 7 (1962).

RECENZII

D. TUTUNARU, GH. LAZARIDE, TR. DEMIAN, *Teoria mecanismelor şi organe de maşini*. I. Editura de Stat didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1962, 368 p.

Primul volum al lucrării, care reuneşte problemele a două discipline separate, se ocupă de teoria mecanismelor şi maşinilor, cuprinzînd capitolele de structură, cinematică, cinetostatică şi sinteza mecanismelor şi elemente de dinamica mecanismelor şi a maşinilor. Volumul conţine tratarea în mod succint a tuturor problemelor care corespund astăzi programei analitice a cursului de teoria mecanismelor şi maşinilor al facultăţilor de electrotehnică, chimie industrială, metalurgie etc. Se atacă în prima parte problemele mecanismelor plane cu cuple inferioare, mergînd de la structură şi cinematică la cinetostatică şi dinamică, după care se introduc mecanismele cu came — ca mecanisme cu cuple superioare — mecanismele cu roţi dinţate fiind lăsate în volumul următor al organelor de maşini. Avantajele acestei sistematizări se remarcă avînd în vedere atît scopul didactic al volumului, cît şi faptul de a urmări îndeaproape problemele şi metodele de rezolvare adecvate diferite ale celor două mari grupe de mecanisme plane : mecanisme cu cuple inferioare şi mecanisme cu cuple superioare — came şi roţi dinţate.

După capitolul I, care prezintă o scurtă introducere şi istoricul dezvoltării acestei discipline, capitolul II cuprinde elementele şi cuplele cinematice, clasificarea cuplelor în raport cu diferite criterii şi în special după numărul legăturilor impuse în mişcarea relativă a două elemente rigide. Se continuă cu lanţurile cinematice şi mecanismele, deosebindu-se gradele de libertate şi de mobilitate indicate prin formulele Samov-Malîşev, Dobrovolski, Cebîşev. Pentru mecanismele plane se urmăreşte înlocuirea cuplei superioare cu un lanţ cinematic cu cuple inferioare şi se expun grupele cinematice assurice.

În capitolul III se începe cu construcţia poziţiilor mecanismelor şi a traiectoriilor diferitelor puncte, continuîndu-se cu metodele de determinare a distribuţiei de viteze şi a acceleraţiilor la elementele rigide ale unui mecanism plan. Sînt adoptate în general construcţiile grafice ale metodelor clasice larg utilizate : ecuaţiile vectoriale, rabatarea, proiecţia, centru instantaneu de rotaţie, planurile de viteze şi acceleraţii, diagrame.

Pentru uşurarea înţelegerii celor cărora le este în primul rînd adresat volumul, remarcăm considerarea distribuţiei de viteze şi acceleraţii la un element rigid ca şi cînd acesta ar fi antrenat într-o mişcare de translaţie urmată de o rotaţie faţă de punctul luat pentru mişcarea de translaţie şi considerat ca fix :

$$\bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{v}_{BA} \quad \text{şi asemănător} \quad \bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}.$$

Această prezentare separă de la început și fără posibilitate de greșeală, pentru studenți, compunerea vitezelor și accelerațiilor în mișcarea relativă a unui punct de pe un element față de un alt element, de asemenea în mișcare, și unde relațiile sînt întrucîtva diferite :

$$\bar{v}_{A_2} = \bar{v}_{A_1} + \bar{v}_{A_{21}} \quad \text{respectiv} \quad \bar{a}_{A_2} = \bar{a}_{A_1} + \bar{a}_{A_{21}} + \bar{a}^{Cr}_{A_{21}},$$

în care A_1 și A^2 sînt punctele confundate la momentul considerat legate de cele două elemente în mișcare. Desigur ambele sisteme de formule provin din compunerea în mișcarea relativă, dar pe lîngă avantajul simplității adecvate a celor două cazuri, transcrierea formulelor în notația utilizată în teoria mecanismelor indică această separare.

În legătură cu construcțiile grafice sînt specificate scările respective. Studiul cinematic al cîtorva grupe assurice și mecanisme ilustrează metodele expuse. Sînt date într-o formă mai redusă metodele analitice de calcul al vitezelor și accelerațiilor.

În capitolul IV — cinetostatică — se determină torsorul forțelor de inerție însoțit de metoda concentrării maselor, după care se studiază direct calculul reacțiunilor în cuplele cinematice pe baza principiului d'Alembert. O scurtă cercetare a lanțurilor cinematice determinate static este continuată cu metodele generale grafice și analitice ale studiului echilibrului sistemelor de forțe și care sînt aplicate apoi la manivela de rotație, diada de aspect I și III etc.

Introducerea frecării de alunecare conduce apoi la reluarea determinării reacțiunilor în cuplele de rotație și de translație.

Capitolul V — dinamica mecanismelor și mașinilor — este organizat pe direcțiile :

— studiul bilanțului energetic împreună cu al randamentului în mecanisme și mașini,

— determinarea mișcării mașinii sau mecanismului sub acțiunea forțelor date, introducîndu-se noțiunile de momente, forțe, mase și momente de inerție reduse. Este expusă importanța diagramei $Ec = f(I_{\text{red}})$,

— determinarea forțelor pentru realizarea unei mișcări date.

Capitolul se încheie cu noțiuni de reglare periodică și neperiodică și de echilibrarea maselor în rotație și a mecanismelor.

În capitolul VI sînt prezentate aspectele particulare de calcul analitic al cîtorva mecanisme plane cu cuple inferioare : patrulaterul articulat cu teoremele Grashof și Roberts-Cebîșev, mecanismul bielă-manivelă, mecanismul cu manivelă și culisă oscilantă.

Este important de semnalat introducerea subcapitolelor de sinteză a mecanismelor cu cuple inferioare și de precizia mecanismelor. Întrucît aceste mecanisme nu pot reproduce exact orice lege de mișcare dată, sînt expuse metodele aproximative : a aproximării optime a funcțiilor Cebîșev, a abaterii medii pătratice minime, metode grafice, metode analitice bazate pe utilizarea numerelor complexe.

Capitolul VII cuprinde problemele mecanismelor cu came pornind de la structură la analiza cinematică, pe baza ecuațiilor vectoriale aplicate direct sau pe mecanismele înlocuitoare cu cuple inferioare și pe baza diagramelor, utilizînd deplasările, vitezele și accelerațiile tachetului redate prin construcții grafice.

Sinteza mecanismelor cu came este făcută atît față de unghiul de presiune critic, cît și față de legile de mișcare ale tachetului : liniară, parabolică, cosinusoidală și sinusoidală. Metodele utilizate sînt grafice și analitice. În ultimul capitol, VIII, sînt expuse mecanismele cu mișcare intermitentă.

Față de lucrarea anterioară de teoria mecanismelor și mașinilor apărută în Editura tehnică, în patru volume, de D. Tutunaru, N. Manolescu și D. Maroș, și care expune deosebit de bogat rezolvările diverselor probleme ale acestei discipline, lucrarea prezentă reducînd unele probleme secundare are avantajul unei prezentări concise foarte utilă studenților. Exemplificarea rezolvărilor se face sub aspect general pe cîteva grupe cinematice, dar se insistă apoi pe mecanismele cu largă răspîndire în construcția de mașini și aparate. Ea este utilă de asemenea tehnicienilor și inginerilor din producție și proiectare.

Chr. Pelecudi

Е. С. БЕЗВЕСЕЛНЫЙ, *Курсовое проектирование по теории механизмов и машин в примерах* (Realizarea proiectelor la teoria mecanismelor și a mașinilor prin exemple). Изд. Харьковского госуд. унив., Харьков, 1960, 524 p.

Lucrarea de față este un îndreptar metodic și practic pentru executarea proiectelor la teoria mecanismelor și a mașinilor. Necesitatea unui astfel de îndreptar este evidentă, dat fiind că proiectul constituie cea mai complexă aplicație a cunoștințelor teoretice. Acest lucru este cu atît mai adevărat în domeniul mecanismelor, cu cît, prin specificul disciplinei, metodica de întocmire a proiectelor joacă un rol deosebit de important.

Autorul acestei cărți este preocupat de mult timp de aceste probleme de orientare în aplicațiile la disciplina mecanismelor, fiindu-ne cunoscut și prin alte două lucrări ale sale, în acest domeniu, un atlas de planșe și o culegere de probleme.

Îndreptarul de față începe cu un capitol consacrat revederii rezumative a cunoștințelor teoretice ale disciplinei. Capitolul, împărțit în două paragrafe (cinematica și dinamica), cuprinde problemele cele mai des întîlnite în proiectare și este bazat pe un bogat material grafic; în cazuri speciale se fac trimiteri la literatura de specialitate.

Al doilea capitol, împărțit de asemenea în două paragrafe, dă exemple de calcul și reproduce parțial sau integral planșe de proiect. În primul paragraf sînt redate planșe de proiect pe anumite probleme, iar în cel de-al doilea sînt cuprinse probleme complexe, proiecte, extinse pe mai multe planșe. Se tratează aici aplicații privind mecanismele cu bare articulate, cu roți dințate, cu came și complexe, probleme de cinematică și dinamică, cu rezolvări numerice concrete.

Al treilea capitol este o culegere de teme împărțită pe două paragrafe :

— construcții de mașini în general, cuprinzînd 55 de exemple întocmite pe baza mecanismelor folosite curent, și

— construcția de mașini speciale, unde sînt date 38 de exemple întocmite pe baza unor mașini existente, prezentînd interes, mai cu seamă, pentru aceia care se ocupă de anumite domenii speciale.

Exemplele, culese din diferite ramuri de construcții de mașini, conțin mai multe variante numerice și constituie astfel o mare diversitate de teme care se pot trata. Diferitele aplicații conțin de asemenea planul metodic de tratare și extinderea problemei, ceea ce este de o deosebită importanță didactică. În unele cazuri, această extindere este lăsată la alegerea cititorului, după necesitate.

De asemenea, se dau indicații asupra felului în care trebuie abordate temele, pentru o cît mai mare eficiență didactică.

Exemplele din acest capitol nu sînt însoțite de rezolvări, întrucît aceasta ar extinde în mod neavantajos volumul lucrării, limitînd posibilitățile de rezolvare și alegere a datelor suplimentare, în schimbul unui rezultat pentru autocontrol. De altfel, cazurile tratate în capitolul anterior asigură verificarea urmăririi juste a fiecărei probleme.

În sfîrşit, al patrulea capitol este o anexă, cuprinzînd un bogat material auxiliar şi metodic pentru realizarea proiectelor (formule, date numerice, grafice, scheme tipice, construcţii geometrice, tabele de calcul, extrase din standarde, indicaţii metodice etc.). Atragem atenţia, în special, asupra datelor şi schemelor tip expuse aici, ceea ce permite întocmirea de noi teme şi extinde astfel indirect volumul lucrării, în mod apreciabil.

În ansamblu este de remarcat caracterul modern al acestei culegeri-îndreptar, bazată pe cele mai actuale şi uzuale construcţii şi pe elementele teoretice cele mai recente. În acest sens, remarcăm indicaţiile de calcul privind angrenajele sistem Novikov.

De asemenea, o altă latură caracteristică a acestei lucrări este accentul care se pune pe metodica de lucru, ceea ce face ca scopul de formare a inginerului să fie extins şi la perfecţionarea sa în specialitate.

Lucrarea se adresează îndeosebi învăţămîntului superior: studenţilor pentru perfecţionarea în munca de proiectare şi cadrelor didactice ca ghid pentru orientarea studentului, printr-o metodică unitară şi teme potrivit alese şi calibrate după specialitate.

Dată fiind organizarea materialului, baza sa modernă teoretică şi de construcţii existente, elementele ajutătoare pe care le pune la dispoziţie precum şi numărul mare de cazuri concrete tratate şi posibilitatea amplă de extindere a lor, considerăm că nu numai scopul didactic a fost cu prisosinţă atins, dar lucrarea constituie şi un preţios ghid în perfecţionarea tehnică a inginerilor, în munca de proiectare curentă precum şi în munca de concepere a mecanismelor şi maşinilor.

Eug. Bugaiewski

* * * *Гидротурбостроение* (Construcţia de maşini hidraulice). Машгиз, Москва, 1960.

Apărută sub redacţia cand. în ştiinţe L.K. Liahovski şi K.N. Popov, culegerea conţine opt articole referitoare la diferite probleme din domeniul maşinilor hidraulice.

Conţinutul interesant şi variat al acestor lucrări ne determină să facem o scurtă caracterizare a fiecăreia.

I. V. Prokofiev, *Determinarea dimensiunilor principale ale turbotransformatoarelor hidrodinamice de cuplu cu caracteristici prescrise de transformare.* Analizînd critic actualele ipoteze prea simplificatoare şi metodele de calcul ale turbotransformatoarelor hidraulice, autorul stabileşte noi relaţii pentru calculul cu mai mare precizie a dimensiunilor principale ale acestor maşini hidraulice, fără a fi nevoie de confruntarea experimentală pe un model la scară redusă.

O. V. Iaremenko, *Reglarea cuplajelor hidraulice.* Cuplajele hidraulice, cu toate că au unele avantaje, ca de exemplu simplitatea construcţiei, dimensiuni mici, cost redus etc., totuşi nu au o răspîndire şi o utilizare suficient de largă în tehnică, din cauza unor inconveniente pe care le mai au şi anume: scăderea randamentului la regimuri variate de lucru, caracteristica neliniară de reglaj etc.

Studiul întreprins de ing. Iaremenko a dus la o mai bună cunoaştere a caracteristicii de reglaj, punînd în evidenţă că, spre deosebire de cuplajul cu grad de umplere variabil, care în special sub cuplu constant are un regim de funcţionare nestabil, cuplajele cu geometrie variabilă sînt foarte stabile şi posedă o sensibilitate şi uniformitate sporită de reglaj.

O. V. Baibakov, *Cavitaţia în carcasa pompelor centrifuge.* Autorul propune o metodă grafică pentru calculul debitului critic la care apare cavitaţia în carcasa unei pompe centrifuge cu aparat director, în cazul variaţiei turaţiei, ţinînd seamă de factorii importanţi care influenţează asupra acestui fenomen. Cu cît unghiul de atac al paletelor aparatului director şi valoarea depresiunii din conducta de aspirație sînt mai mari, cu atît cavitația în carcasă apare la un debit mai mic.

O. V. Baibakov, *Pompe cu canale laterale.* Autorul efectuează o clasificare a pompelor cu canale laterale, delimitează domeniul lor de aplicație, bilanțul energetic, stabilește expresia randamentului, prezintă o schemă de calcul a acestei clase de pompe, analizînd influența elementelor constructive asupra caracteristicilor de exploatare și determină valorile optime ale dimensiunilor principale. Ultima problemă tratată se referă la legile de similitudine ale acestor pompe.

K. N. Popov, L. K. Liahovski, *Încercarea pompelor cu piston cu simplu efect antrenate de o mașină cu abur.* Pe baza unor cercetări sistematice în laborator a două tipuri de pompe cu piston, autorii au ridicat curbele de variație a debitului și randamentului în funcție de turație, curbele de cavitație și trag concluzii asupra caracteristicilor de funcționare ale pompelor studiate, făcînd interesante propuneri de modificări constructive ale acestora, în vederea măririi randamentului, care s-a constatat că este prea mic.

L. K. Liahovski, *Analiza pierderilor de căldură în cilindrul cu abur al unei pompe cu piston cu simplă acțiune.* Studiind mașina cu abur utilizată pentru antrenarea pompelor la care se referă și lucrarea precedentă și aplicînd metoda lui A. V. Golînski pentru calculul bilanțului energiei termice, L. K. Liahovski a constatat că pierderile principale în cilindrii cu abur ai pompelor cu piston cu simplă acțiune studiate se datoresc schimbului intens de căldură al acestora cu mediul înconjurător, pierderilor prin scăpări între piston și cilindru și expansiunii incomplete a aburului. Mărirea randamentului termic al acestor mașini implică modificări constructive, ca de exemplu micșorarea diametrului sertărașului, mărirea turației etc. Temperatura optimă a aburului ce trebuie utilizat este de 100—120°C.

D. A. Butaev, I. P. Obolențev, *Un nou stand pentru determinarea caracteristicilor energetice ale turbinelor hidraulice, în laboratorul MVTU.* Se descrie instalația pentru încercarea modelelor de turbine hidraulice din laboratorul Institutului tehnic „N. E. Bauman" din Moscova, care prezintă particularitatea că este alcătuit din trei standuri amenajate pentru determinarea caracteristicilor energetice, pentru studiul cavitației și respectiv pentru încercările cu aer. Pe toate trei standurile sînt montate trei modele identice ale aceleiași turbine.

Autorii arată, foarte pe scurt, care sînt metodele de măsurare a căderii, a debitului, a pierderilor mecanice, a turației și puterii.

O. V. Baibakov : *Interpretarea energetică a termenului p/γ din ecuația lui Bernoulli.* Autorul propune un procedeu simplu de interpretare energetică a termenului p/γ utilizînd noțiunea de cîmp de forțe potențial. Se demonstrează astfel că termenul p/γ reprezintă energia specifică potențială, atît în cazul mișcării fluidelor perfecte cît și pentru fluidele reale.

Culegerea de lucrări conține interesante contribuții originale la rezolvarea unor probleme variate privind mașinile hidraulice și este utilă atît cercetătorilor din domeniul mașinilor hidraulice și proiectanților, cît și inginerilor care lucrează în exploatarea mașinilor hidraulice.

Șt. Zarea

Б. А. РАБОТНОВ, *Вопросы кавитационной стойкости поворотнопастных гидротурбин* (Problemele rezistenței la cavitație ale turbinelor Kaplan). Госэнергоиздат, Москва-Ленинград, 1961.

Îmbunătățirea comportării turbinelor Kaplan și în special sporirea rezistenței lor la cavitație constituie o preocupare deosebită a cercetătorilor și proiectanților de turbine hidraulice din U.R.S.S., deoarece majoritatea marilor uzine hidroelectrice din această țară sînt echpate cu turbine axiale.

Lucrarea pe care o prezentăm are ca obiect analiza cauzelor care duc la degradarea organelor turbinei ce funcționează în regim de cavitație și a măsurilor ce trebuie luate la proiectare și fabricație pentru a spori rezistența turbinelor hidraulice față de eroziunea provocată de cavitație.

Cartea este împărțită în șapte capitole care conțin atît expunerea aspectelor teoretice ale fenomenului de cavitație cît și metodele de combatere în practică a efectelor dăunătoare ale acestuia. Considerăm că o succintă caracterizare a fiecărui capitol va fi utilă pentru viitorii cititori ai acestei lucrări.

Capitolul I — Degradarea metalelor prin cavitație — cuprinde prezentarea și analiza teoriilor care explică eroziunea metalelor datorită cavitației, date constructive asupra rotorului și carcasei turbinei, forma optimă a acestora, corelația între regimul de funcționare a turbinei și degradarea metalului prin cavitație. Acest capitol este ilustrat cu numeroase fotografii care arată evoluția în timp a degradării prin cavitație a organelor principale ale turbinelor hidraulice pentru turbinele unor uzine hidroelectrice din U.R.S.S.

Capitolul al II-lea — Asupra problemei construcției și reparației organelor din zona de curgere a apei în turbinele Kaplan — relevă necesitatea cunoașterii de către proiectant a condițiilor de exploatare din uzina hidroelectrică în care va fi montată turbina proiectată. Autorul prezintă exemple concrete și indicații prețioase asupra rezistenței comparative la cavitație a diferitelor metale de construcție a turbinelor hidraulice. Se expun, de asemenea, soluțiile constructive ale rotorului și camerei acestuia, astfel ca demontarea și repararea lor să poată fi efectuate cît mai ușor. Pentru că în majoritatea cazurilor turbinele Kaplan funcționează și în regim de cavitație, metodele raționale și rapide de reparație a acestora prezintă mare interes, motiv pentru care în lucrare sînt prezentate în detaliu.

Capitolul al III-lea — Elaborarea noilor procese tehnologice de executare a paletelor și carcasei rotorului — este o continuare naturală a celui precedent și conține descrierea procedeului de placare a rotorului și carcasei acestuia cu plăci de metal rezistent la cavitație. Totodată este prezentat un procedeu nou de execuție prin sudură a paletelor turbinelor Kaplan, din plăci de oțel martensitic care se sudează bine și este foarte rezistent la acțiunea variațiilor mari de presiune provocate de cavitație. Acest procedeu a fost experimentat în laboratorul de mașini hidraulice de la Institutul politehnic din Urali.

Autorul propune un nou procedeu de montaj al rotorului Kaplan fără a mai fi nevoie să se execute găuri de prindere în palele rotorului. Procedeul prezintă avantaje evidente, însă era preferabil să fie expus în capitolul precedent.

Capitolul al IV-lea — Particularitățile execuției construcțiilor sudate — conține enumerarea condițiilor principale pe care trebuie să le satisfacă materialele utilizate la execuția prin sudură a organelor de mașini, procedeu tehnologic care capătă o mare dezvoltare actualmente. Se prezintă o analiză detaliată a caracteristicilor mecanice ale îmbinărilor sudate, a deformațiilor și tensiunilor care apar la sudare etc. Capitolul se încheie cu descrierea și prezentarea fotografiilor și schițelor unui număr mare de piese de turbine executate prin sudură.

Capitolul al V-lea — Sudarea oțelurilor inoxidabile — este consacrat unei ample analize a comportării la sudare a oțelurilor inoxidabile aliate cu crom care sînt frecvent utilizate pentru construcția acelor organe ale turbinelor Kaplan care sînt supuse cavitației. Spre exemplificare, sînt prezentate date asupra comportării în exploatare a pieselor turbinelor uzinei hidroelectrice Svirsk executate din oțel aliat cu crom. O importanță deosebită o prezintă paragraful consacrat reparației paletelor și carcasei fără a le demonta.

Capitolul al VI-lea — Sudarea oţelurilor austenitice — are ca obiect prezentarea caracteristicilor mecanice ale oţelurilor austenitice, subliniindu-se rezistenţa lor mare la coroziune. Datorită acestei proprietăţi oţelurile austenitice se utilizează în construcţia de turbine hidraulice pentru execuţia sau placarea diferitelor organe ce trebuie protejate de cavitaţie şi uzură. Autorul insistă asupra comportării la sudare a acestor oţeluri.

Capitolul al VII-lea — Procedee şi aparate utilizate în prelucrarea autogenă a metalelor — conţine descrierea procedeelor şi utilajelor folosite în mod curent în uzine pentru tăierea metalelor cu flacără.

Anexa cuprinzînd recomandări pentru executarea reparaţiilor rotoarelor şi carcaselor turbinelor Kaplan este de primă utilitate pentru inginerii care acţionează în domeniul montajului şi exploatării maşinilor hidraulice.

Monografia pe care am prezentat-o a fost întocmită pe baza consultării a 48 dintre cele mai importante lucrări apărute în acest domeniu în ultimii 25 de ani, precum şi pe baza experienţei acumulată de autor în activitatea sa în construcţia de turbine hidraulice.

Prin analiza efectelor cavitaţiei asupra maşinilor hidraulice şi mai ales prin soluţiile constructive moderne şi detaliat prezentate de combatere a acestor efecte, lucrarea lui B. A. Rabotnov prezintă interes şi este de un real folos pentru proiectanţi, pentru cercetătorii care studiază maşinile hidraulice, cît şi pentru inginerii de la exploatarea uzinelor hidroelectrice.

Şt. Zarea

---

* * * *Теория машин и механизмов* (Teoria maşinilor şi mecanismelor). ***92, 93***, Изд. АН СССР, Москва, 1962, 167 p.
Numerele anterioare ale revistei au apărut sub denumirea de „Труды Института Машиноведения, Семинар по ТММ".

Revista publică lucrările ştiinţifice ale seminarului de teoria maşinilor şi mecanismelor condus de acad. I. I. Artobolevschi.

În fascicula nr. 92 sînt cuprinse un număr de 5 lucrări :

1. A. A. Nichitin, *Variator electromecanic, cu limite largi de reglare a turaţiei.* În această lucrare este propus un variator care asigură posibilitatea reglării continue într-un interval foarte larg a turaţiilor. Reglarea se face în mers şi sub sarcină.

Elementul de bază al variatorului electromecanic îl constituie un electromotor a cărui carcasă suspendată este legată de axul rotorului prin intermediul unui variator de turaţie mecanic, de un tip oarecare.

Prin forma construcţiei propusă se poate transmite o putere de 3—4 ori mai mare decît puterea nominală a variatorului mecanic propriu-zis.

Lucrarea este interesantă şi utilă pentru proiectanţii şi constructorii de maşini-unelte.

2. Cian-Ti-Sian, *Analiza cinematică a mecanismelor cu cuple inferioare prin metoda matricelor pătratice de ordinul 4.* În acest articol este expusă situaţia generală a aplicării metodelor de calcul matricial în analiza cinematică a mecanismelor cu cuple inferioare. Metoda matricelor pătratice de ordinul 4 utilizată la analiza cinematică a mecanismelor articulate se dovedeşte a fi foarte eficientă.

Prin metoda expusă, pot fi rezolvate problemele de analiză cinematică a mecanismelor de orice tip. Pot fi determinate poziţiile elementelor, vitezele şi acceleraţiile lor precum şi traiectoriile diferitelor puncte de pe elementele respective.

În lucrare, se obține o sistematizare și simplificare a rezolvării problemelor de analiză cinematică pentru un număr foarte mare de mecanisme cu cuple inferioare prin utilizarea ecuațiilor de legătură generalizate, care derivă din ecuația matricială dedusă din condiția de contur închis al unui mecanism spațial cu 5 elemente și o cuplă de rotație sferică.

3. F. L. Litvin, Go-Kai, *Cercetarea angrenării roților dințate conice cu dinți curbați cu înălțimea h normal descrescătoare.* În această lucrare este prezentată o metodă de cercetare a angrenării roților dințate conice cu dinți curbați cu înălțime normal descrescătoare. După cum este știut, suprafețele exterioare ale profilului dinților unor astfel de roți nu sînt reciproc conjugate iar transmiterea mișcării de rotație se face în consecință cu raport de transmitere variabil. Metoda expusă permite determinarea pozițiilor punctelor succesive de tangență pe suprafețele dinților, fluctuațiile raportului de transmitere cît și parametrii pentru prelucrarea unor astfel de roți dințate pe mașini-unelte în vederea asigurării unui raport de transmitere corespunzător.

La sfîrșitul lucrării este prezentat un exemplu de calcul. Lucrarea este interesantă și utilă pentru proiectanții și constructorii de mașini.

4. V. I. Anilovici, I. V. Epstein, *Metoda numerică a seriilor Fourier în problemele de analiză a lanțurilor cinematice assurice cu cuple de rotație.* În acest articol autorii propun o schemă de calcul mai generală pentru grupele assurice, indiferent de clasă sau ordin și cu ajutorul căreia construiesc apoi seriile Fourier pentru funcțiile de transmisie pentru mecanismele plane cu cuple de rotație.

Schema de calcul este bazată pe metoda iterației și permite o rezolvare a problemei cu un grad de aproximare optim. Seriile Fourier ale funcțiilor de transmisie $\alpha_{iv} = \alpha_{iv}(\varphi)$ pot fi construite pentru toate mecanismele plane articulate după această schemă, independent de clasa sau ordinul grupelor assurice care intră în alcătuirea mecanismului respectiv.

Seriile Fourier scrise sub forma propusă de autor pot fi folosite și la calculul cinetostatic al mecanismelor.

Printr-o alegere convenabilă a constantelor, se asigură o convergență optimă a relațiilor stabilite. Seriile converg uniform spre funcțiile lor și pot fi diferențiate de un număr arbitrar de ori.

5. D. S. Borisov, *Dinamica sistemelor de dirijare după program în regimul de mișcare stabilizat.* În această lucrare sînt prezentate rezultatele cercetărilor teoretice și experimentale asupra motoarelor electrice cu intermitență — pas cu pas — lucrînd în regim stabilizat. Modelul dinamic al motoarelor cu intermitență, realizat experimental, permite efectuarea unei cercetări analitice a întregului sistem.

Sînt studiate problemele legate de apariția bătăilor în cazul în care motorul lucrează în zona regimurilor de rezonanță, cît și situația în care sistemul lucrează în regimul așa-zis al curenților tăiați.

Este arătat mijlocul de înlăturare a stărilor de rezonanță din sistemele pas cu pas. Cercetarea experimentală este efectuată pe o instalație specială care permite obținerea tuturor caracteristicilor sub formă de semnale electrice ce pot fi urmărite direct pe un oscilograf. Cu ajutorul instalației experimentale poate fi urmărit momentul de rotație total dintre stator și rotor în timpul mișcării, momentul sarcinilor exterioare aplicate axului motorului, deplasările și viteza unghiulară ale rotorului precum și curentul în înfășurarea statorului.

Fascicula nr. 93 cuprinde un număr de 7 comunicări :

1. I. V.-L. Dobroslavski, V. L. Veit, *Asupra rezolvării ecuației de mișcare a mașinilor acționate de forțe depinzînd de viteza și poziția elementului de reducere.* Ecuația diferențială de mișcare a unei mașini este neliniară în cazul în care forțele reduse depind de poziția și viteza unghiulară iar momentul de inerție redus numai de poziția elementului de reducere. Pentru

rezolvarea aproximativă a acestei ecuaţii există metode analitice grafice şi grafo-analitice. În lucrarea de faţă este prezentată o metodă analitică de aproximare succesivă care creează posibilitatea găsirii soluţiei periodice a ecuaţiei de mişcare a maşinii cu un grad de aproximare optim şi cu o simţitoare reducere a volumului de calcul în comparaţie cu metoda integrării numerice.

2. A. V. Sleahtin, *Oscilaţiile longitudinale ale unei bare de secţiune variabilă cu mase şi forţe concentrate.* În acest articol, sînt cercetate oscilaţiile longitudinale libere cît şi cele întreţinute ale unei bare cu secţiune variabilă în trepte, avînd un număr oarecare de mase concentrate. Pentru determinarea frecvenţelor oscilaţiilor proprii cît şi pentru rezolvarea problemei oscilaţiilor forţate ce iau naştere sub acţiunea forţelor periodice, este utilizată metoda parametrilor iniţiali.

Se arată în continuare că toate relaţiile deduse pentru oscilaţiile longitudinale rămîn valabile şi pentru oscilaţiile de torsiune în cazul în care se face înlocuirea maselor cu momentele de inerţie, a coeficienţilor de rigiditate şi a deplasărilor liniare cu cele unghiulare, iar a forţelor exterioare cu momente. La sfîrşitul lucrării se dă un exemplu de calcul numeric.

3. E. P. Soldatkin, *Angrenaj spaţial, cu roţi dinţate cu modul constant cu unghiul dintre axele roţilor variabil.* Acest articol este o scurtă prezentare a unui angrenaj spaţial format din roţi dinţate cu modul constant care permite transmiterea rotaţiei de la un ax la altul, în cazul varierii unghiului dintre cele două axe în limitele de la 0 la 180°. Construcţia este foarte simplă şi uşor de realizat ; roţile pot fi executate pe frezele obişnuite prin aplicarea unui dispozitiv special. Angrenajul realizat asigură o legătură cinematică fixă între cele două axe precum şi un raport de transmitere constant. Lucrarea este foarte interesantă şi poate avea multe aplicaţii practice.

4. E. P. Soldatkin, *Proiectarea mecanismelor cu came şi bare articulate după o lege de mişcare dată a elementului activ, cu reducerea la o valoare minimă a presiunii maxime din cupla cinematică superioară.* În această lucrare este propusă o metodă de proiectare mai generală, a mecanismelor cu came şi bare articulate lucrînd într-un regim de încărcare greu, pentru cazul în care este cunoscută legea de mişcare a elementului activ. Se obţine o reducere considerabilă a valorii maxime a presiunii de contact din cupla cinematică superioară, presiune datorită atît sarcinilor statice cît şi celor dinamice. Într-un capitol separat se dă un exemplu concret de proiectare a unui mecanism cu came şi bare articulate.

Lucrarea este utilă pentru proiectanţii şi constructorii de maşini.

5. A. P. Bessonov, *Ecuaţia de mişcare a mecanismului plan cu masă variabilă sub formă de energie.* În articolul său autorul prezintă deducerea ecuaţiei de mişcare a unui mecanism plan cu masă variabilă, utilizînd principiul *îngheţării* sistemelor. Într-o lucrare anterioară autorul dedusese ecuaţia de mişcare a unui mecanism plan cu masă variabilă, sub formă de ecuaţie de momente.

În cazul în care se neglijează viteza relativă de deplasare a centrului de masă în raport cu elementul considerat, sau procesul de variere a masei elementului se produce în aşa fel încît centrul masei nu se schimbă în raport cu elementul, momentul de inerţie redus al mecanismului cu masă variabilă se calculează după formula

$$J_{\pi}^{*} = \sum_{j=1}^{u}\left[J_{sj}\left(\frac{\omega_j}{\omega}\right)^2 + m_j\left(\frac{v_{sj}}{\omega}\right)^2\right].$$

În cazul în care se ia în considerare şi viteza relativă a deplasării centrului masei în raport cu elementul cu masă variabilă, momentul de inerţie redus al mecanismului se calculează după formula

$$J_{\pi}^{*} = \sum_{j=1}^{u}\left[J_{sj}\left(\frac{\omega_j}{\omega}\right)^2 + m_j\left(\frac{v_{sj\ \text{variabil}}}{\omega}\right)^2 - m_j\left(\frac{v_{sj\ \text{relativ}}}{\omega}\right)^2\right],$$

în care intervine un nou termen cu semn negativ. Aceasta face ca în anumite condiţii momentul de inerţie redus J^* al mecanismului să fie de asemenea negativ.

La sfîrşitul lucrării este dat un exemplu concret de calcul al unui mecanism de sinus avînd elementul condus variabil după o anumită lege.

6. V. P. Zencenco, *Sinteza structurală a sistemelor pneumatice din maşinile automate, pe baza distribuitorilor cu acţionare într-un singur sens.* Metoda de sinteză propusă permite să se alcătuiască sisteme pneumatice pentru maşini automate pe baza distribuitorilor cu acţionare într-un singur sens. Sistemele au o mare stabilitate la acţionările dinamice, vibraţii, şocuri etc. Metoda de sinteză a sistemelor pneumatice propusă de autor se bazează pe rezultatele obţinute în sinteza schemelor electronice şi electrice, lucru ce a permis să fie analizate toate variantele şi să fie alese cele mai bune.

7. A. P. Afonin, *Despre mişcarea în regim nestabilizat a unui motor electric cu intermitenţă.* În acest articol sînt studiate problemele de dinamică ale sistemelor pas cu pas, de tip reactiv lucrînd în regim tranzitoriu. Sînt date unele aprecieri asupra domeniului de utilitate optimă şi de stabilitate a sistemelor pas cu pas precum şi erorile lor dinamice.

Studiul este efectuat pe un model dinamic ce reproduce procesul studiat.

L. Calmaciuc

J. HOŘEJŠÍ, *Vetknutý trám a spojitý nosník* (Grinzi încastrate şi grinzi continue), vol. I, Vyd. vys. škola dopravná v Žiline v slovenskom vyd. techn. lit., N.P., Bratislava, 1963, 300 p.; vol. II, Státni pedagogické nakladatelstvi, Praha, 1962, 204 p.

Lucrarea docentului dr. ing. Hořejší, de la Institutul de drumuri din Žiline, cuprinde toate aspectele practice ale calculului grinzilor drepte, din punct de vedere al staticii construcţiilor. Primul volum este destinat unor rezultate cu caracter teoretic iar volumul al doilea cuprinde tabele de calcul practic.

În prima parte a lucrării se dau rezultate cu privire la deformaţia (rotiri, deplasări) unei grinzi drepte cu o singură deschidere, simplu rezemată, dublu încastrată sau simplu rezemată la un capăt şi încastrată la celălalt capăt; se consideră atît cazul grinzii cu moment de inerţie constant cît şi cazul grinzii cu vute drepte, în diferite cazuri de încărcare. Se dau metode analitice şi grafice de calcul. După studiul grinzilor cu încastrări elastice se trece în mod natural la studiul grinzilor continue, dîndu-se, în particular, rezultate pentru grinzile continue cu două, trei şi patru deschideri, admiţînd moment de inerţie constant sau secţiune variabilă. Diferite cazuri de rezemare la capete şi diferite moduri de încărcare sînt luate în considerare. De asemenea, se studiază modul de a obţine linii de influenţă în aceste cazuri, consecinţă imediată a faptului că s-a calculat starea de deformaţie. Forma de prezentare a rezultatelor permite utilizarea lor cu succes la calculul cadrelor.

În volumul al doilea se dau tabele numerice pentru calculul grinzii drepte cu o singură deschidere, cu sau fără vute, în diferite cazuri de rezemare şi de încărcare. De asemenea, se prezintă tabele pentru calculul liniilor de influenţă la grinzi continue cu două, trei şi patru deschideri.

Lucrarea de mai sus are un caracter monografic şi, cu toate că se adresează în primul rînd studenţilor din Institutele de învăţămînt superior tehnic, prin bogăţia materialului prezentat şi prin multiplele rezultate personale care sînt cuprinse, poate fi folosită atît în Institutele de proiectare cît şi ca auxiliar în cercetarea ştiinţifică.

P. P. Teodorescu

W. KRZYŚ, M. ŻYCZKOWSKI, *Sprężystość i plastyczność. Wybór zadań i przykładów* (Elasticitate şi plasticitate. Culegere de probleme şi exemple). Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa, 1962, 420 p.

Redactarea unei culegeri de probleme în domeniul teoriei elasticităţii este foarte dificilă. Într-adevăr, spre deosebire de alte capitole ale mecanicii teoretice, aici pentru fiecare problemă trebuie aplicată — în general — o teorie aparte; o asemenea culegere de probleme are deci un pronunţat caracter teoretic.

Lucrarea este împărţită în 14 capitole, fiecare din acestea cuprinzînd : o scurtă introducere teoretică, cu ecuaţiile şi rezultatele fundamentale necesare rezolvării grupului de probleme respectiv; un număr relativ mare de probleme propuse şi complet rezolvate, urmate de ample discuţii; o bogată bibliografie comentată privitoare la partea teoretică considerată.

Primele două capitole sînt dedicate problemelor legate de starea de tensiune şi starea de deformaţie în interiorul unui solid deformabil; se analizează variaţia tensiunilor şi deformaţiilor specifice în jurul unui punct, traiectoriile tensiunilor principale, starea de deformaţie plană etc. În capitolele III şi IV se introduce legea constitutivă a solidului deformabil (legea lui Hooke în cazurile izotrop şi anizotrop şi ecuaţiile fundamentale ale corpurilor cu proprietăţi reologice); ecuaţiile corespunzătoare sînt legate de energia de deformaţie (energia de deformaţie sub volum constant şi energia de schimbare a volumului fără schimbarea formei corpului).

Ecuaţiile fundamentale ale teoriei elasticităţii şi funcţiile de tensiune în cazul problemei plane şi în cazul problemei axial simetrice sînt introduse în capitolul al V-lea. În capitolul următor se prezintă ipotezele clasice de rezistenţă şi plasticitate a solidelor deformabile iar capitolul al VII-lea cuprinde noţiunile de bază ale teoriei plasticităţii. Metodele inversă şi semiinversă de calcul sînt folosite în capitolul al VIII-lea pentru rezolvarea unor probleme plane ale teoriei elasticităţii (cu ajutorul polinoamelor biarmonice şi a dezvoltărilor în serii trigonometrice) şi pentru rezolvarea unor probleme de torsiune a barei drepte de secţiune transversală oarecare.

În capitolul al IX-lea găsim probleme de torsiune şi încovoiere a barei drepte în domeniul elastoplastic. Unele aplicaţii legate de bare cu pereţi subţiri sînt tratate în capitolul al X-lea. Capitolele XI şi XII cuprind unele probleme speciale de discuri şi inele circulare (stare de tensiune plană sau discuri de grosime variabilă) şi cilindri plini sau cu goluri (stare de deformaţie plană sau problemă axial simetrică) în domeniu elastic şi în domeniu elastoplastic.

Capitolul al XIII-lea este dedicat încovoierii plăcilor plane subţiri dreptunghiulare şi circulare în domeniu elastic şi la stările limită; se folosesc variate metode de calcul (dezvoltări în serie trigonometrică, diferenţe finite etc.). În capitolul al XIV-lea se studiază problema penei plane (grindă perete cu contur triunghiular) în caz elastic şi în domeniu elastoplastic. De asemenea, menţionăm studiul semiplanului şi al semispaţiului, ţinînd seama şi de proprietăţile plastice ale solidului deformabil (probleme de contact, probleme practice importante în geotehnică etc.); se utilizează reprezentările cu ajutorul integralelor Fourier.

O anexă cuprinzînd unele integrale de funcţii trigonometrice, utile în practica de calcul, şi o bogată bibliografie (208 titluri) însoţesc lucrarea. Traducerea tablei de materii în limbile rusă şi engleză este folositoare cititorului nefamiliarizat cu limba polonă.

Cartea celor doi profesori de la Institutul politehnic din Cracovia se caracterizează printr-o foarte clară şi sistematică expunere a celor mai importante probleme dintr-un material foarte vast. Ea este destinată, în primul rînd, studenţilor institutelor tehnice de învăţămînt superior şi inginerilor proiectanţi, care întîlnesc probleme mai dificile din punct de vedere teoretic. Prin discuţiile ample pe care le cuprinde, prin sugestiile pe care le dă, prin problemele pe care le ridică, ea poate fi cercetată cu folos de un cerc larg de cititori care se ocupă cu probleme de mecanica solidelor deformabile.

P. P. Teodorescu

WALTER KAUFMANN, *Technische Hydro-und Aeromechanik* (Hidro- şi aeromecanica tehnică), Dritte verbesserte Auflage (ediţia a treia îmbunătăţită), Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1963, VIII + 417 p., 271 fig.

Prezentarea într-un singur volum a mecanicii fluidelor, chiar dacă acest lucru se face avîndu-se în vedere aplicaţiile tehnice şi lăsînd astfel la o parte o serie de dezvoltări teoretice, este destul de dificilă. Într-adevăr, este necesară o atenţie destul de mare pentru a deosebi esenţialul de accesoriu şi a da cititorului o imagine cît mai completă a acestei discipline.

Autorul a ales pentru prezentarea materiei o schemă oarecum clasică, mai ales în literatura de specialitate germană cu caracter tehnic, destul de deosebită de aceea care se utilizează astăzi în manualele cu un caracter teoretic mai pronunţat. Astfel, volumul este împărţit în trei părţi şi anume o introducere, statica fluidelor şi dinamica fluidelor, ultima ocupînd, aşa cum este firesc, cea mai mare parte a volumului.

Prima parte este consacrată prezentării proprietăţilor fluidelor şi sistemelor de unităţi de măsură, iar a doua conţine o expunere suficient de completă a staticii lichidelor şi gazelor.

În partea a treia, după o scurtă introducere în materie, apar trei subdiviziuni, în spiritul schemei despre care am vorbit mai înainte. Se tratează astfel mai întîi scurgerea unidimensională, apoi cea plană şi tridimensională şi apoi bazele dinamicii gazelor.

În cadrul scurgerii unidimensionale, se consideră mai întîi mişcarea fluidelor ideale şi apoi aceea a fluidelor vîscoase, în cadrul acesteia din urmă tratîndu-se destul de amănunţit sub aspectele practice scurgerea prin conducte şi prin canale.

Studiul mişcării plane şi al celei tridimensionale formează capitolul cel mai dezvoltat al volumului. Mai întîi este tratată mişcarea fluidelor ideale, cu o dezvoltare mai amplă a mişcării potenţiale plane cu diversele ei aplicaţii, urmată de elementele esenţiale ale teoriei mişcărilor axial-simetrice, teoriei valurilor şi teoriei vîrtejurilor.

După demonstrarea ecuaţiilor Navier-Stokes, expunerea consacrată mişcării fluidelor vîscoase conţine studiul scurgerilor lente, cu scurte referiri la teoria lubrificaţiei şi la scurgerea prin medii poroase, o expunere mai amplă a teoriei stratului limită, laminar şi turbulent, consideraţii asupra apariţiei turbulenţei, o serie de probleme cu caracter aplicativ, teoria vîrtejurilor într-un fluid vîscos şi teoria aripii, a reţelelor şi a elicei.

Ultima parte conţine la început tratarea mişcării unidimensionale a gazelor şi apoi o serie de consideraţii asupra aspectelor fundamentale ale mişcării potenţiale subsonice şi supersonice.

Această aranjare a materiei, pe care am schițat-o mai sus, nu exclude unele repetări și suprapuneri. Remarcăm de asemenea excluderea sistematică din demonstrații a metodelor vectoriale care sînt astăzi atît de răspîndite datorită simplității și caracterului lor sugestiv.

Cu toate acestea, cartea lui W. Kaufmann, scrisă clar și accesibilă pentru un cerc mai larg de cititori, are meritul de a da o idee de ansamblu destul de cuprinzătoare asupra mecanicii fluidelor și de a pune accentul pe latura aplicativă a problemelor tratate. Ca atare, este un bun manual pentru cei ce vor să studieze mecanica fluidelor și mai ales pentru ingineri.

T. Oroveanu

LOUIS BERGERON, *Water Hammer in Hydraulics and Wave Surges in Electricity* (Lovitura de berbec în hidraulică și undele electrice). John Wiley and Sons, Inc., Publishers, New York-London, 1961, 293 p.

Prin traducerea în limba engleză a ediției franceze din anul 1950, această remarcabilă lucrare, concretizînd experiența și rezultatele unei activități îndelungate și susținute în domeniul mișcărilor nepermanente de propagare a undelor de presiune în medii continue și elastice, va număra din ce în ce mai mulți cititori dornici de a cunoaște metoda elegantă și expeditivă de construcție grafică a soluției aplicată de autor în cele mai variate și interesante cazuri.

Importanța practică deosebită a fenomenului loviturii de berbec, în special în domeniul construcțiilor hidrotehnice, a determinat apariția unui șir de metode inginerești începînd încă de la sfîrșitul secolului trecut, care bazîndu-se în principiu pe soluția lui d'Alembert pentru ecuația undelor, diferă între ele prin condițiile la limită considerate, specifice fiecărei metode în parte, și care limitează domeniul ei de aplicabilitate la un număr mai mare sau mai mic de cazuri.

Printre aceste metode, care ne dau soluția de cele mai multe ori numai local (la vană) sau la anumite intervale de timp, metoda grafică, riguroasă, simplă și clară, formulată încă din anul 1928 de Löwy, ajunge prin lucrarea de față la o perfecțiune și un potențial de aplicabilitate deosebite, datorită dezvoltării și aprofundării ei de către autor cu mult spirit practic.

În prima parte a lucrării, autorul expune principiile metodei grafice de calcul a mișcărilor nepermanente a lichidelor compresibile în conducte forțate, începînd cu o serie de generalități privind regimul de scurgere nepermanentă și compresibilă, cum sînt ecuația de mișcare, expresia vitezei de propagare a undei de presiune în sistemul elastic fluid-conductă, caracteristica conductei în mișcare nepermanentă și principiul metodei grafice. În continuare se arată specificul construcției epurelor în cazul conductei de caracteristică constantă sau compusă din mai multe tronsoane de caracteristici diferite precum și în cazul bifurcărilor simple sau multiple, demonstrînd prin considerarea diferitelor condiții la limită, superioritatea netă a metodei grafice față de metoda algebrică a lui Alliévi.

Tot în această primă parte a lucrării se arată posibilitatea considerării pierderilor de presiune pe conductă sub forma unor pierderi locale echivalente, concentrate în unul sau mai multe puncte, precum și relațiile dintre presiune și debit impuse de rezervoare cu nivel liber, cu plutitor greu, cu piston și resort și cu cameră pneumatică.

În partea a doua a cărții, după ce scoate mai întîi în evidență importanța practică a metodei grafice, autorul o aplică într-un număr mare și variat de cazuri concrete, de interes practic deosebit și foarte greu sau chiar de nerezolvat prin celelalte metode cunoscute pînă în prezent. Astfel, se arată obținerea soluției în cazul închiderii instantanee a unei turbine alimentată de o conductă forțată unică, considerînd sau nu pierderile de sarcină și energia cinetică în conductă; lovitura de berbec directă pentru variația liniară a debitului în timp și lovitura indirectă presupunînd variația liniară în timp a secțiunii vanei sau a debitului, sau menținînd la vană suprapresiunea constantă. Apoi, deschiderea bruscă a vanei unei conducte forțate cu producerea unei cavitații și ținînd sau nu seama de pierderile de sarcină, sau închiderea și deschiderea periodică a vanei pentru unele valori ale perioadei de oscilație.

Mai departe consideră cazul unei conducte unice, avînd la un capăt un rezervor cu nivel constant (baraj de acumulare), iar la celălalt un castel de apă urmat de o vană și studiază închiderea instantanee și progresivă a vanei ținînd sau nețiînd seama de pierderile de sarcină pe conductă și la baza castelului de apă. De asemenea, se cercetează și cazul în care castelul de apă este înlocuit de o cameră pneumatică (hidrofor) și cînd conducta este de caracteristică constantă sau formată din tronsoane de diverse diametre.

O altă serie de probleme tehnice importante, pe care autorul le soluționează prin această metodă, sînt cele legate de funcționarea unei pompe pe o conductă relativ lungă. Astfel, sînt tratate fenomenele care apar la oprirea bruscă a unei pompe centrifuge ce funcționează pe o conductă prevăzută cu : un hidrofor, o clapetă de reținere, o vană șuntată de un „by-pass", sau o vană și supapă de descărcare, considerînd de asemenea momentul de inerție al pieselor rotitoare ale mașinilor precum și posibilitatea apariției cavitației într-un punct de pe conductă.

În continuare, se dă soluția într-un șir de cazuri și mai complicate, cum sînt : funcționarea unei hidrocentrale de munte compusă din turbină, conductă forțată, castel de apă, conductă de aducțiune și lac de acumulare ; deschiderea bruscă și închiderea lentă a unei vane pe o derivație a unei conducte ; pornirea bruscă a unei pompe centrifuge pe rețea ; punerea sub presiune a unei conducte cu considerarea pierderilor de sarcină ; oprirea unei pompe centrifuge pe o conductă unică sau formată din mai multe tronsoane de diametre diferite, cu și fără pierderi de sarcină ; închiderea bruscă a unei vane pe o conductă prevăzută cu o derivație ; închiderea simultană a mai multor orificii identice repartizate uniform în lungul conductei și, în sfîrșit, se analizează diferite manevre de preluare rapidă a sarcinii de lucru de către mai multe centrale hidroelectrice legate între ele de conducte complexe.

Tot în această parte a lucrării, pe care autorul a dezvoltat-o cel mai mult datorită importanței sale, se studiază și funcționarea unei pompe cu piston fără cameră pneumatică, sau a unei pompe de adîncime cu piston acționată hidraulic, sau a unei prese hidraulice alimentată de un acumulator hidraulic cu greutate, precum și cazul injecției la motoarele Diesel, unde se neglijează sau nu capacitatea camerelor pompei și a supapei de injecție față de cea a conductei, considerîndu-se și diversele efecte ale masei supapei și resortului. Acest lucru pune și mai mult în evidență posibilitățile nelimitate ale metodei grafice de integrare a ecuațiilor fenomenului și găsire a soluției, chiar și în cazul cînd datele problemei loviturii de berbec sînt funcții nealgebrice oricît de arbitrare.

În partea a treia și ultimă a acestei cărți, autorul extinde metoda de construire grafică a soluției și în alte ramuri ale mecanicii precum și în electrotehnică, aplicînd-o în domeniile acestor științe în care apar fenomene analoge cu cele de lovitură de berbec din hidraulică, fiind guvernate de ecuații diferențiale similare.

Astfel, în capitolul A se studiază cazul barelor elastice și al resoartelor cilindrice supuse la un efort axial variabil în timp și care dau naștere la o serie de unde longitudinale ce se propagă cu viteza sunetului, a cărei expresie este determinată în fiecare caz. În aplicațiile considerate, acest efort axial ia naștere sau prin șocul a două bare ce se ciocnesc cu o anumită viteză și au densități și secțiuni diferite, cu capete libere sau unul fix, sau prin șocul dintre o bară prismatică și o placă infinită, sau prin șocul dat de o masă contra unei bare fixată la celălalt capăt sau înfiptă într-un mediu rezistent. De asemenea, sînt considerate şi cazurile barei de secţiune variabilă şi al resoartelor cilindrice cu şi fără mase suplimentare la capete şi montate în serie sau luate individual.

În capitolul B se cercetează corzile vibrante şi undele transversale ce se propagă în lungul lor, construcţia grafică a soluţiei în cazul corzii pişcate sau lovite precum şi al corzii de secţiune variabilă agitată la un capăt.

În capitolul C se cercetează oscilaţiile torsionale ale unui arbore cilindric de secţiune constantă sau avînd două secţiuni diferite, cu capete libere sau cu volanţi fixaţi la capete.

În capitolul D se studiază problema mişcării nepermanente şi neuniforme a apei într-un canal în cazul variaţiei brusce a debitului.

În capitolul E, ultimul din această parte a lucrării, se consideră propagarea undelor electrice în lungul conductorilor lungi arătîndu-se construcţia soluţiei în cazul conectării unui acumulator pe o linie electrică lungă de caracteristică constantă sau formată din două porţiuni diferite, cu şi fără pierderi punctuale şi avînd legate la celălalt capăt sau în punctul de separare a celor două porţiuni de caracteristici diferite o serie de elemente electrice ca : rezistenţe, capacităţi sau bobine, montate în serie sau în paralel şi considerate individual sau în combinaţie. De asemenea, se studiază propagarea unei unde de trăsnet, de formă dată în timp ca tensiune şi curent, pe o linie electrică aeriană şi apoi subterană considerînd de asemenea elementele electrice de interes practic cum sînt condensatorul şi selful.

În continuare, sînt tratate o ultimă serie de cazuri privind variaţia în timp a curentului electric : conectarea prin intermediul unui reostat, manevrat după o lege arbitrară, a unui acumulator pe o linie electrică prevăzută cu diverse elemente, sau diferite cazuri de oscilaţii provocate de curenţii alternativi sinusoidali ca : oscilaţia unei antene semiundă, sau conectarea unui alternator pe o reţea prevăzută la celălalt capăt cu o rezistenţă.

Lucrarea se încheie cu o anexă în care se expun bazele teoretice ale metodei de construcţie grafică a soluţiei propusă de autori şi în care se deduc ecuaţiile diferenţiale ale fenomenului şi se arată aproximaţia ce se face în rezolvarea lor, cînd se ţine seama de pierderile de sarcină şi energia cinetică din conductă.

Conţinutul bogat al acestei lucrări, asigurat nu numai prin mulţimea ei şi prin marea varietate a cazurilor rezolvate, la care se mai adaugă importanţa lor practică deosebită, amprentă a unei îndelungate activităţi a autorului în multiple domenii inginereşti, fac din această carte un tratat de bază şi un ghid călăuzitor al soluţionării inginereşti expeditive a problemei mişcărilor unidimensionale şi nepermanente de propagări de unde în medii continue şi elastice.

Prin modul clar, elegant şi nivelul expunerii acestui conţinut autorul aduce o contribuţie de seamă în domeniul ştiinţelor aplicate.

Mircea Cazacu

A. E. GREEN, J. E. ADKINS, *Large elastic deformations and non-linear continuum mechanics* (Deformaţii elastice mari şi mecanica neliniară a continuului). Clarendon Press, Oxford, 1960, XIV + 348 p.

Bazele teoriei neliniare a elasticităţii au fost prezentate într-un tratat de teoria elasticităţii, scris de primul dintre cei doi autori împreună cu W. Zerna [1]; aceste rezultate, unele din ele aparţinînd autorilor menţionaţi, sînt astăzi clasice. După o scurtă trecere în revistă a celor mai importante date privitoare la aceste probleme, autorii expun metode generale de calcul și diferite aplicații atît pentru solidele cu proprietăți elastice cît și pentru solide cu o lege constitutivă mult mai complicată ; este util să se folosească cele două lucrări împreună, deoarece tratatul prof. Green (Universitatea din Durham) și Adkins (Universitatea din Nottingham) se bazează pe volumul anterior, menționat mai sus, constituind de fapt o dezvoltare și continuare a primelor capitole din acest volum.

---

[1] A. E. Green, W. Zerna, *Theoretical elasticity*, Oxford, 1954 (recenzată în St. cerc. mec. apl., **IX**, *3*, 787 (1958).

Teoria deformațiilor elastice mari a luat o dezvoltare mare în ultimul timp, datorită creșterii importanței pe care o are cauciucul în industrie și datorită necesității de a avea o concepție clară asupra proprietăților sale mecanice. În felul acesta s-au studiat inițial solide elastice, izotrope, omogene, incompresibile, cauciucul bucurîndu-se de asemenea proprietăți. După ce s-au obținut unele succese în această direcție, cîștigîndu-se experiență de calcul, s-a trecut treptat la corpuri elastice anizotrope și compresibile , dar dificultățile de rezolvare completă chiar a celor mai simple probleme au făcut să se dezvolte diferite metode aproximative de calcul. Menționăm astfel, în afară de autorii citați mai sus, cercetările fundamentale ale lui V. V. Novojilov, C. Truesdell și R.S. Rivlin. În prezent, numărul studiilor întreprinse în această direcție a crescut foarte mult, cuprinzînd și corpurile anelastice ; rezultate importante s-au obținut în U.R.S.S., S.U.A., R. P. Polonă, Anglia, Italia etc. De aceea, apariția unui tratat cuprinzător în această direcție este binevenită.

Lucrarea cuprinde 11 capitole și este urmată de o anexă privitoare la reducerea unui polinom matricial de termeni obținuți ca produse a diferite puteri a două matrice date la o formă canonică.

În capitolul I se reamintesc rezultatele și formulele fundamentale corespunzătoare problemelor neliniare ale solidelor deformabile. Se trece apoi la examinarea formei energiei de deformație în cazul a diferite sisteme cristaline (triclinic, monoclinic, rombic, tetragonal, cubic, exagonal) sau pentru diferite corpuri anizotrope (de exemplu corpuri cu izotropie transversă și corpuri ortotrope) ; în legătură cu aceasta se introduc și relațiile între tensiuni și deformații specifice. Anizotropia curbilinie este de asemenea luată în considerare. Se ține seama de posibilitatea existenței unor constrîngeri impuse, de natură geometrică ; astfel unele corpuri pot fi considerate incompresibile ; alteori trebuie luate în considerare corpuri neomogene, alcătuite din două materiale, dintre care unul joacă rol de armătură (pretensionată sau nu), de exemplu construcții foarte zvelte din beton armat, prevăzute cu tiranți. Se prezintă o formă generală a legii constitutive a solidului elastic, care corespunde și unui asemenea caz.

Capitolul al II-lea cuprinde metode generale exacte de rezolvare a problemelor elasticității anizotrope neliniare. Admițînd o formă generală pentru energia de deformație, se studiază probleme de solicitări axiale, torsiune și încovoiere pentru bare drepte alcătuite din material incompresibil sau nu în diferite ipoteze de anizotropie. Bara poate fi un cilindru plin sau gol (tub) de secțiune circulară, un cuboid etc. Unele din rezultate sînt date admițînd că energia de deformație se exprimă sub forma dată de Mooney (pentru corpuri asemănătoare cauciucului, care capătă deformații finite dar nu prea mari).

Starea de deformație plană este considerată în capitolul al III-lea ; în acest caz problema se simplifică considerabil. După ce se dau cele mai importante rezultate cu ajutorul calculului tensorial, se introduc funcțiile de variabilă complexă, încercîndu-se o formulare asemănătoare cu cea din cazul micilor deformații. Funcția lui Airy se va exprima în raport cu punctele corpului în starea deformată. Menționăm că este posibil să se introducă funcțiile de variabilă complexă fie legate de punctele corpului înainte de deformație fie în legătură cu punctele corpului după deformație ; ambele procedee sînt utile. Pentru corpurile izotrope sau cu izotropie transversă se obțin simplificări considerabile de calcul, care au fost puse în evidență de autori. Se arată că, dacă materialul este incompresibil, se obține o teoremă de reciprocitate cu ajutorul căreia este posibil să se deducă o soluție a ecuațiilor elasticității — în care coordonatele corpului deformat sînt variabile independente — din soluția corespunzătoare, în care coordonatele înainte de deformație joacă același rol. Se aplică rezultatele teoretice la problema încovoierii unui cuboid și pentru cazul unei forfecări generalizate. Pentru un corp elastic, izotrop și incompresibil, se obțin ecuații de deformație sub formă simetrică și în care nu apar constantele elastice, dacă se admite o energie de deformație de tip Mooney ; în acest caz se dau cîteva soluții particulare.

În capitolul al IV-lea se dau rezultate privitoare la starea de tensiune plană și la teoria de membrană a plăcilor curbe subțiri. Și în cazul deformațiilor finite, studiul este redus la planul median sau la suprafața mediană, ca și în cazul micilor deformații. Se arată că, în cazul problemelor axial simetrice, se obține un sistem de ecuații diferențiale care poate fi integrat, de obicei, prin metode numerice.

O metodă de aproximații succesive este dezvoltată în capitolul al V-lea. Se discută posibilitatea exprimării componentelor vectorului deplasare și tensorului tensiune sub forma unor dezvoltări în serie de puteri, pentru corpuri compresibile și incompresibile. Admițînd existența soluției problemei, se dă o atenție deosebită teoremelor de unicitate ce se pot stabili. Rezultatele obținute sînt aplicate la unele probleme bidimensionale (capitolul al VI-lea), în special în cazul unor stări de deformație plană. Introducînd funcțiile de variabilă complexă, se ajunge la o formulare asemănătoare cu cea din cazul micilor deformații, pentru termenii de ordinul întîi și de ordinul al doilea ; în felul acesta metodele de calcul Kolosov-Mushelișvili se pot aplica pe larg. Se consideră prima și a doua problemă fundamentală și se dau rezultate pentru planul elastic cu un gol circular sau cu o incluziune rigidă circulară.

În capitolul al VII-lea se dau unele rezultate în legătură cu solidele elastice armate cu corzi subțiri flexibile și inextensibile, menționîndu-se în special probleme ce se întîlnesc în industria de cauciuc. Se consideră cîteva probleme bidimensionale sau cu simetrie cilindrică.

Capitolul al VIII-lea este dedicat unor probleme de termodinamica deformațiilor. Se iau ecuația energiei și ecuația entropiei ca ecuații fundamentale ale termodinamicii și se admite existența unei energii specifice interioare sau a unei energii libere de tip Helmholtz. Se consideră cazurile în care temperatura sau entropia sînt constante. Autorii prezintă legile de propagare a căldurii pentru corpuri compresibile și incompresibile în caz general și în teoria clasică a corpurilor izotrope.

Rezultatele obținute sînt aplicate la probleme de stabilitate în capitolul al IX-lea. Se dau condiții de stabilitate pentru solidele elastice supuse la deformații finite atît în cazul corpurilor compresibile cît și pentru corpurile incompresibile. Autorii stabilesc astfel ecuațiile neutrale de echilibru. Unele rezultate se dau și pentru corpurile cu anumite deformații impuse. Menționăm studiul stabilității corpurilor incompresibile, supuse la tensiuni acționînd din toate direcțiile.

În capitolul al X-lea se dau unele rezultate experimentale interesante privind, în special, cauciucul vulcanizat. Se arată astfel cum poate fi aplicată teoria dezvoltată anterior pentru a evalua proprietățile mecanice reale ale materialelor. Menționăm experiențe privind cauciucul supus la întindere, la forfecare, la întindere plană uniformă, la torsiune etc.

Ultimul capitol reprezintă o trecere în revistă a unor rezultate recente din domeniul teoriei neliniare a solidelor cu legi constitutive mai complicate (în general solide anelastice). Aceste rezultate pot fi privite ca o extindere a teoriei corespunzătoare corpurilor elastice. Se consideră în special legile constitutive în care se folosesc operatori polinomiali, diferențiali în raport cu timpul. Cîteva cazuri particulare sînt date ; menționăm astfel teoria hipoelasticității.

Cu toate că lucrarea de mai sus are un pronunţat caracter teoretic, ea cuprinde destule aplicaţii spre a prezenta interes şi pentru cei care se ocupă de partea practică a unor anumite probleme. Autorii folosesc metode moderne de calcul; utilizarea calculului tensorial dă posibilitatea unei expuneri mai succinte şi unei lecturi deosebit de plăcute.

Prin structura lui, tratatul prof. Green şi Adkins poate fi folosit de un cerc larg de cititori, atît de cei care caută probleme practice, cît şi de cei pe care îi interesează probleme teoretice. Remarcăm de asemenea că sînt sugerate multe posibilităţi de cercetare viitoare, deci cartea prezintă un interes deosebit pentru cercetătorii ştiinţifici din domeniul mecanicii solidelor deformabile.

P. P. Teodorescu

PUBLICAŢII PRIMITE PRIN SCHIMB LA REDACŢIE

— Trudî Tallinskogo Politehniceskogo Instituta, *193*, *194*, *195*, *196*, *197*, *199* (1962).

— Dokladî Akademii Nauk Armianskoi SSR, **XXXV**, *5* (1962); **XXXVI**, *1*, *2*, (1963).

A. A. KUTUKOV, Konspect lekţii po kursu „Dinamika i krutilnîe kolebania porşnevîh dvigatelei vnutrennego sgorania'', Novocerkaskii Institut, Mehaniceskii Fakultet, 1962.

— Trudî Energheticeskogo Instituta. Moskva, **IL**, **XX** (1963).

— Stroitelnaia mehanika i rasciot soorujenii, *2* (1963).

— Godişnik na maşinno-elektrotehniceskaia institut, *I*, *II*, *III* (1961).

— Matematiceskogo-fyzikalny casopis, *2* (1963).

— Casopis pro pestovani matematiky, *2* (1963).

— Sudostroenie, *5* (1963).

— Sbornik — Statni vyzkumny ustav tepelné tehniky, **III** (1962).

— Priborî i tehnika eksperimenta, *2* (1963).

— Soobşenia Akademii Nauk Gruzinskoi SSR, *1* (1963).

— Jurnal Prikladnoi Mehaniki i Tehniceskoi Fiziki, *2* (1963).

— Prikladnaia mehanika, *1*, *2* (1963).

— Izvestia Akademii Nauk Estonskoi SSR, Seria fiziko-matematiceskih i tehniceskih nauk, *1* (1963).

— Referativnîi Jurnal — Mehanika, *5* (1963).

— Izvestia vîsşih ucebnîh zavedenii — Matematika, *2*, *3* (1963).

— Izvestia vîsşih ucebnîh zavedenii — Ţvetnaia metallurghia, *2* (1963).

— Technisches Zentralblatt — Abteilung Maschinenwesen, *3*, *4* (1963).

— Periodica Polytechnica, *1* (1963).

— Jenaer Rundschau, *2* (1963).

— Acta Technica CSAV, *3* (1963).

— Wissenschaftliche Zeitschrift der Technischen Universität Dresden, *1* (1963).

— Physica Status Solidi, *6* (1963).

— Kernenergie, *5* (1963).

— L'Industrie Lourde Tchécoslovaque, *7* (1963).

— Reports and Memoranda — Aeronautical Research Council, *3304*, *3305*, *3307*, *3310*, *3311*, *3314* (1963).

— Annual Bulletin of the Institute of Aerophysics, Toronto, 1963.

— UTIA Review, *22* (1963).

- UTIA Technical Note, *64*, *65* (1963).
- UTIA Report, *89* (1963).
- DVL-Bericht, *238* (1963).
- Records Officiels homologués au 1-er janvier, FAI-Paris, 1963.
- Transactions, Institute of Technology Stockholm, *206*, *208*, *209* (1963).
- Wissenschaftliche Zeitschrift der Humboldt-Universität zu Berlin, *5* (1962).

Disertaţii de la E. T. H. Zürich

H. BENDEL, *Die Berechnung von Spannungen und Verschiebungen in Erddämmen*, 1962, 106 p.

B. SCARPELLINI, *Approximation von Funktionen durch Linearkombinationen von Eigenfunktionen Sturm-Liouvillscher Differential-Gleichungen*, 1962, 43 p.

M. KUMMER, *Über eindimensionale und quasi-eindimensionale Gasmodelle*, 1962, 42 p.

J. VOGEL, *Verzerrungseffekte, Mischvorgänge und Rauschen in Transistor-Verstärker-und-Mischstufen*, 1962, 36 p.

Disertaţii de la Institutul Politehnic Aachen

W. LEHWALD, *Prüfung von Hartmetallen im Hinblick auf die Schneidenbeanspruchung beim unterbrochenen Schnitt*, 1962, 133 p.

K. JÜSTEL, *Über Aufbau und Betriebssicherheit numerischer Punktsteuerungen*, 1962, 119 p.

Disertaţii de la Universitatea Tehnică Berlin

K. H. SCHRADER, *Erzwungene, gekoppelte Biege und Drillschwingungen prismatischer Stäbe*, 1962, 59 p.

G. STIER, *Spannungsoptische Ermittlung von Spannungsverteilungen an elastischen Zwischenschichten*, 1962, 99 p.

H. SANDER, *Beitrag zur Theorie der endlichen Deformationen von Membranen*, 1961, 34 p.

- Proceedings of the Institute of Mechanical Engineers, *7*, *8*, *10*, *11*, *13*, *14* (1963).
- Aircraft Engineering, *6* (1963).
- Indian Journal of Technology, *3*, *4* (1963).
- ICSU Review of World Science, *2* (1963).
- Aviation Magazine, *373* (1963).
- Revue Générale des Sciences Pures et Appliquées, *1—2* (1963).

Disertaţii de la Institutul Politehnic Delft

J. W. REYN, *Differential-geometric considerations on the hodograph transformation for irrotational conical flow*, 1961, 58 p.

G. R. VELDKAMP, *Curvature theory in plane kinematics*, 1963, 179 p.

T. J. VIERSMA, *Investigation into the accuracy of hydraulic servomotors*, 1961, 144 p.

K. RIAD, *Analytical and experimental study of bed load distribution at alluvial diversions*, 1961, 112 p.

A. B. EL-KAREH, *Some electron optical devices*, 1962, 135 p.
— Astronautics and Aerospace Engineering, *3* (1963).
— The Physics of Fluids, *4* (1963).
— The Journal of the Franklin Institute, *4* (1963).
— Lubrication Engineering, *4* (1963).
— Battelle Technical Review, *4* (1963).
— IBM-Journal of Research and Development, *2* (1963).
— De Ingenieur, *24* (1963).
— Notiziario de la Ricerca Scientifica, *3* (1963).
— Aero France, *4—5* (1963).
— World Aviation Electronics, *6* (1963).
— Mechanical Power, 702 (1963).
— Journal of the Iron and Steel Institute, *6* (1963).
— Mechanical World and Engineering Record, *3527* (1963).
— Instrument Practice, *6* (1963).
— Scientific Lubrication, *6* (1963).

2557

R

4-6.40

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÎNE
INSTITUTUL DE MECANICĂ APLICATĂ „TRAIAN VUIA"

6

ANUL XIV
1963

1964 APR 20

STUDII ŞI CERCETĂRI DE
MECANICĂ APLICATĂ

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

COMITETUL DE REDACȚIE

Redactor responsabil:

ACADEMICIAN E. CARAFOLI

Membri:

ACADEMICIAN N. PROFIRI;
ACADEMICIAN A. BELEȘ;
CR. MATEESCU, membru corespondent al Academiei R.P.R.;
N. TIPEI, membru corespondent al Academiei R.P.R.;
R. BOGDAN, conferențiar la Institutul de petrol, gaze și geologie, București;
M. ARCAN, șef secție, Institutul de cercetări în construcții și economia construcțiilor (INCERC), București.

STUDII ȘI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ
APARE DE 6 ORI PE AN
Redacția: INSTITUTUL DE MECANICĂ APLICATĂ „TRAIAN VUIA"
Str. Const. Mille 15, tel. 17.34.09

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÎNE
INSTITUTUL DE MECANICĂ APLICATĂ „TRAIAN VUIA”

STUDII ŞI CERCETĂRI DE
MECANICĂ APLICATĂ

6

ANUL XIV

1963

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

Revista

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

publică :

- Studii originale *de înalt nivel cu caracter fundamental de interes general ştiinţific şi reflectare în practică.*
- Note *(lucrări mai scurte) cu caracter original sau constituind o punere la punct a unei anumite chestiuni.*
- Referate ştiinţifice şi tehnice *în care se expune : stadiul actual al unei anumite probleme, subliniindu-se aspectul nou, observaţii şi discuţii asupra unor lucrări de mecanică aplicată.*
- Recenzii *asupra cărţilor şi studiilor romîneşti sau străine.*

Domeniile de specialitate ale revistei sînt:

- *Astrodinamică (optimizarea traiectoriilor, calculul orbitelor sau al segmentelor de orbite, optimizarea transferului interorbital, impactul vehiculelor spaţiale cu meteoriţii, orbite sincrone, astrorelativitate, zborul în atmosfera rarefiată, reintrarea în atmosfera densă, frînarea şi captarea aerodinamică a unui vehicul cosmic).*
- *Aeromecanică (mecanica fluidelor, aerodinamică, dinamica gazelor, mecanica avionului, aeroelasticitate, aerodinamica motoarelor cu ardere internă, termo-aerodinamica motoarelor cu reacţie, ventilaţie, aeromotori).*
- *Hidromecanică (hidraulică, construcţii hidrotehnice, irigaţie, turbine şi pompe, amenajări hidraulice).*
- *Construcţii de maşini (cinematica şi dinamica mecanismelor, frecare, ungere, uzură, metode moderne de calculul maşinilor, automatizare, studiul suprafeţelor, tehnologia mediilor solide continue).*
- *Mecanică generală (rezistenţa materialelor, elasticitate, plasticitate, vibraţii şi şocuri, stabilitate, analogii electrice şi hidraulice).*
- *Statica şi dinamica construcţiilor (metode pentru calculul static şi dinamic al construcţiilor, studiul materialelor neomogene, geotehnică, stabilitatea terenurilor, metode de executarea lucrărilor de construcţii).*
- *Tehnica măsurătorilor (aparate electronice pentru măsurarea mărimilor mecanice, utilizarea ultrasunetului şi a izotopilor radioactivi în tehnică).*

Revista urmăreşte stimularea activităţii ştiinţifice precum şi difuzarea lucrărilor valoroase, primind în acest scop spre publicare articole de la toţi specialiştii din ţară şi de la colaboratorii din străinătate.

★

Articolele vor fi redactate într-o formă concisă şi clară, evitîndu-se introduceri lungi referitoare la părţile cunoscute ale problemei.

Manuscrisele se vor preda în trei exemplare, dactilografiate la două rînduri, iar formulele vor fi scrise clar şi citeţ cu cerneală. Figurile şi graficele se vor desena în tuş pe hîrtie de calc. Se vor utiliza figuri numai cînd este absolut necesar şi în număr cît mai mic.

Literatura citată în text se va insera la sfîrşitul lucrării sub formă de bibliografie. Se va indica numele autorului, titlul lucrării, tomul, pagina, locul, editura, anul de apariţie, iar pentru revistă se va indica şi numărul respectiv. Trimiteri la lucrări nepublicate nu se admit.

Pe lîngă text se vor înainta pentru fiecare exemplar rezumate în limba romînă, eventual în rusă, franceză, engleză şi germană. Rezumatele vor fi în medie una pagină dactilografiată la 20 pagini de text.

Aceleaşi norme sînt valabile şi pentru colaborările din străinătate, care pot fi redactate în limbile rusă, engleză, franceză sau germană.

Manuscrisele se vor trimite la sediul Institutului de mecanică aplicată, Bucureşti str. C. Mille nr. 15, raionul „16 Februarie”.

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÎNE
INSTITUTUL DE MECANICĂ APLICATĂ „TRAIAN VUIA"

STUDII ȘI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

Tomul XIV, nr. 6 1963

SUMAR

STUDII

Pag.

M. HANGAN, Structuri statice la care apar simultan *n* articulații plastice 1249
VALERIU PETCU, O concepție nouă în calculul plastic al structurilor de beton armat 1259
V. MANEA, Calculul plăcilor circulare elastice subțiri în teoria fără ipoteza Love-Kirchhoff 1277
M. VASILESCU și GH. LUCA, Asupra comportării rocilor străbătute de tunelul de aducțiune al hidrocentralei „V. I. Lenin" de la Bicaz. 1303
AUGUSTIN PETRE și CRISTIAN STĂNESCU, Efecte aeroelastice asupra eficacității aripioarelor, ținînd seamă de influența restrîngerilor de fixare 1323
CHRISTIAN PELECUDI, Analogia electrică în cinematica mecanismelor plane . . 1339
D. TUTUNARU și ELENA MURGULESCU, Mecanisme matematice rezultate din mecanismul lui Isaac Newton 1359
CHR. PELECUDI și C. PARASCHIV, Contribuții la metoda proiecțiilor folosită în cinematica mecanismelor plane 1387
V. N. CONSTANTINESCU, Determinarea aproximativă a distribuției presiunilor în lagărele lubrificate cu gaze în regim turbulent 1415
GH. VASILCA, AL. NICA, O. BIȚĂ și I. DINCĂ, Unele aspecte ale influenței tipului de structură asupra comportării la alunecare și uzură la două aliaje de aluminiu. 1431
CONSTANTIN SABIN IOAN, Jeturi plane compresibile mărginite de pînze de jet subțiri 1449
AL. MARINESCU, Asupra problemei urcării în timp minim a rachetelor 1465

NOTE

DAN PAVELESCU, IVAN ILIUC și SANDA BARBUL, Aspecte privind proprietățile de antiuzură ale unor aditivi de extremă presiune, la temperaturi ridicate . . 1479

APARATE ȘI INSTALATII

I. JAKAB, A. ZAHARESCU și I. RUGINĂ, Amplificator de curent continuu cu 6 canale pentru măsurători tensometrice 1485
M. P. POPOV, E. D. DECIU și I. MITRICĂ, Traductor pentru măsurarea forțelor . . . 1491

MANIFESTĂRI ȘTIINȚIFICE PESTE HOTARE

GH. BUZDUGAN, Colocviul internațional RILEM cu tema „Măsurarea și interpretarea efectelor dinamice și ale vibrațiilor construcțiilor", Budapesta, 7—11 iulie 1963 1497
D. MANGERON, Congresul internațional al matematicienilor, Stockholm, 15—22 august 1962. Probleme interesînd mecanica aplicată 1501

RECENZII 1505
PUBLICAȚII PRIMITE PRIN SCHIMB LA REDACȚIE 1517
INDEX ALFABETIC 1519

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

Журнал

„ТРУДЫ И ИССЛЕДОВАНИЯ ПО ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКЕ"

публикует:

- Оригинальные исследования *высокого уровня, представляющие общий научный интерес, связанный с практикой.*
- Заметки (*краткие работы*) *оригинального характера, представляющие уточнение некоторого вопроса.*
- Научные и технические рефераты, *в которых излагаются: современное состояние определенной задачи с выявлением нового подхода к ней, замечания и обсуждения некоторых работ по прикладной механике.*
- Рецензии *на румынские или зарубежные книги и исследования. В журнале публикуются работы по следующим специальностям*:
- *Астродинамика* (*оптимальные траектории, расчет орбит или отрезков орбит, оптимальная межорбитальная теплопередача, удар космических экипажей о метеориты, полет в разреженной атмосфере, возвращение в плотную атмосферу, торможение и аэродинамическое улавливание космического экипажа*).
- *Аэромеханика* (*механика жидкостей и газов, аэродинамика, газодинамика, механика самолета, аэроупругость, аэродинамика двигателей внутреннего сгорания, термоаэродинамика реактивных двигателей, вентиляция, ветродвигатели*).
- *Гидромеханика* (*гидравлика, гидромеханические сооружения, орошение, гидравлические турбины и насосы, гидравлические устройства*).
- *Машиностроение* (*кинематика и динамика механизмов, трение, смазка, износ, современные методы расчета различных машин, автоматизация, исследование поверхностей, механика сплошных твердых сред*).
- *Общая механика* (*сопротивление материалов, упругость, пластичность вибрация и удары, устойчивость, электрические и гидравлические аналогии*).
- *Статика и динамика сооружений* (*методы статического и динамического расчета сооружений, исследование неоднородных материалов, механика грунтов, устойчивость грунтов, методы производства строительных работ*).
- *Техника измерений* (*электронные приборы для измерения механических величин, применение ультразвука и радиоактивных изотопов в механике.*

Журнал предназначен для стимулирования научной деятельности, а также для распространения выдающихся работ и принимаем с этой целью к опубликованию статьи всех отечественных специалистов и зарубежных сотрудников.

*

Статьи должны быть написаны в сжатой и ясной форме, избегая длинных введений (*относящихся к уже известным частям проблемы*).

Рукописи следует направлять в трех экземплярах, напечатанных на машинке через два интервала, формулы должны быть вписаны чернилами четко и ясно. Рисунки и графики следует делать китайской тушью на кальке. Присылать рисунки следует только в случае совершенной необходимости и в ограниченном количестве.

Литература, цитированная в тексте должна даваться общим списком в конце статьи. Нужно указывать инициалы и фамилию автора, заглавие, том, страницу, место издания, издательство, год издания, а для журналов — и соответствующий номер. Ссылки на неопубликованные работы не допускаются.

Кроме текста, для каждого экземпляра нужно представлять резюме на румынском языке или же на русском, французском, английском или немецком языках. Резюме должно составлять 1 страницу, написанную на машинке, на 20 страниц текста. Эти же нормы относятся и к работам зарубежных сотрудников, редактированным на русском, английском, французском или немецком языках.

Рукописи препровождаются по адресу: Институт прикладной механики, Бухарест, ул. Константин Милле, № 15, район „16 Februarie".

Le périodique

« STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ »
(ÉTUDES ET RECHERCHES DE MÉCANIQUE APPLIQUÉE)

publie :

● *des* études originales *à caractère hautement scientifique, recherches fondamentales d'intérêt général, orientées vers l'activité pratique;*

● *des* notes *(communications brèves) à caractère général, ou constituant une mise au point d'une certaine question;*

● *des* exposés scientifiques et techniques *où l'on expose: l'état actuel d'un certain problème, en soulignant son aspect nouveau; des remarques et discussions concernant certains travaux de mécanique appliquée;*

● *des* notes bibliographiques *au sujet des livres et des études roumains et étrangers.*

Les domaines de spécialité de la revue sont les suivants:

● *astrodynamique (réalisation des trajectoires optimums, calcul des orbites ou des segments d'orbites, obtention du transfert interorbital optimum, impact des véhicules spatiaux avec les météorites, orbites synchrones, astrorelativité, vol en atmosphère raréfiée, retour dans l'atmosphère dense, freinage et saisie aérodynamique d'un véhicule cosmique);*

● *aéromécanique (mécanique des fluides, aérodynamique, dynamique des gaz, mécanique de l'avion, aéroélasticité, aérodynamique des moteurs à combustion interne, thermo-aérodynamique des moteurs à réaction, ventilation, aéromoteurs);*

● *hydromécanique (hydraulique, constructions hydrotechniques, irrigation, turbines hydrauliques et pompes);*

● *constructions mécaniques (cinématique et dynamique des mécanismes, frottement, lubrification, usure, méthodes modernes de calcul des machines, automation, étude des surfaces, technologie des milieux solides continus);*

● *mécanique générale (résistance des matériaux, élasticité, plasticité, vibrations et chocs, stabilité, analogies électriques et hydrauliques);*

● *statique et dynamique des constructions (méthode de calcul statique et dynamique des constructions, étude des matériaux hétérogènes, mécanique des sols, stabilité des terrains, méthodes d'exécution des travaux de construction);*

● *technique des mesures (appareils électroniques pour la mesure des grandeurs mécaniques, utilisation des ultra-sons et des isotopes radioactifs en technique).*

La revue tend à stimuler la recherche scientifique et la diffusion des travaux méritoires en publiant, dans ce but, les articles scientifiques des collaborateurs roumains et étrangers.

★

Les articles seront rédigés dans un style concis et clair, étant évitées les introductions trop longues concernant les données connues des problèmes.

Les manuscrits seront envoyés en trois exemplaires, dactylographiés, aux formules écrites de manière lisible, à l'encre. Les figures, ainsi que les diagrammes, seront tracés à l'encre de Chine sur du papier calque. On utilisera le nombre de figures strictement indispensable.

Les références bibliographiques seront mentionnées à la fin de l'article. On y indiquera le nom de l'auteur, le titre de l'ouvrage, le tome, la page, le lieu de la parution et, pour les périodiques, on ajoutera le numéro auquel on se réfère. On ne fera pas mention des travaux non publiés.

Les manuscrits seront accompagnés d'un résumé en roumain ou, éventuellement, en russe, français, anglais ou allemand (environ une page pour 20 pages dactylographiées de texte).

Les mêmes normes sont valables pour les collaborateurs étrangers, qui peuvent rédiger leurs travaux en russe, anglais, français ou allemand.

Les manuscrits seront envoyés à l'adresse suivante: Institut de Mécanique Appliquée « Traian Vuia », 15, str. Constantin Mille, Bucarest, Roumanie.

STUDII

STRUCTURI STATICE LA CARE APAR SIMULTAN n ARTICULAȚII PLASTICE

DE

M. HANGAN[1]

539.3

1. PRINCIPII DE CALCUL

În proiectarea structurilor statice ale construcțiilor de beton armat, utilizarea calculului din domeniul plastic sau elasto-plastic este menit a scoate în evidență și utiliza rezervele de rezistență pe care le au aceste structuri, datorită proprietăților plastice ale materialelor.

Metodele de calcul utilizate pleacă de la anumite ipoteze simplificatoare, care se pun la baza calculului structurilor în domeniul plastic, arătate pe larg în diferite lucrări în acest domeniu [1] — [6], și în genere de la legături simple, liniare pe unele domenii, între sarcinile ce cresc proporțional, momentul încovoietor dintr-o secțiune plastificată și curbura din acea secțiune.

În prezenta lucrare vom căuta a scoate în evidență o serie de proprietăți ale structurilor statice de n ori nedeterminate la care, sub una sau mai multe tipuri de încărcare, n articulații plastice sau un număr mai mic de articulații plastice $m \leqslant n$ apar simultan; vom căuta a arăta totodată condițiile în care cele n sau m articulații plastice, pot să apară sub mai multe tipuri de încărcări.

★

În calculul structurilor în domeniul plastic, luînd ca necunoscute de calcul în locul momentelor încovoietoare din secțiunile critice, raportul dintre aceste momente încovoietoare și cele de plastificare $\rho = M/\mathcal{M}$, se pot obține o serie de avantaje dintre care vom cita în primul rînd :

---

[1] Institutul de construcții, București.

— oarecare ușurință de calcul și de încadrare a rădăcinilor sistemului de ecuații, aceste rădăcini fiind cuprinse toate între 0 și 1 ;

— posibilitatea proiectării astfel făcută încît articulațiile plastice să apară simultan în toată structura, într-o parte a structurii sau în întreaga structură, în ordinea dorită ;

— limitarea domeniului de supraîncărcare în care să apară un număr dorit de articulații plastice.

În cele ce urmează se vor adînci unele probleme ce apar în calculul acestor structuri, dîndu-se și unele exemple de calcul.

Admitem că pentru structurile statice luate în considerație, s-au fixat pe o cale oarecare secțiunile critice și s-au luat ca necunoscute statice chiar momentele încovoietoare în aceste secțiuni. De asemenea, admitem că, în mod schematic, funcționalitatea dintre sarcinile ce cresc proporțional în toată structura, momentul încovoietor dintr-o secțiune critică precum și rotirea secțiunilor vecine ale unei articulații plastice, se dezvoltă ca în figura 1.

Sistemul de ecuații ale staticii construcțiilor, care rezolvă un sistem static nedeterminat la care se iau ca necunoscute momentele încovoietoare din anumite secțiuni, are forma

$$\sum a_{ij} M_j = b_i, \qquad \begin{matrix} i = 1, \dots, n, \\ j = 1, \dots, n. \end{matrix} \tag{1}$$

Să admitem că am luat necunoscute statice chiar momentele încovoietoare în cele n secțiuni critice ce se vor plastifica primele, pentru a aduce construcția în stadiul static determinat.

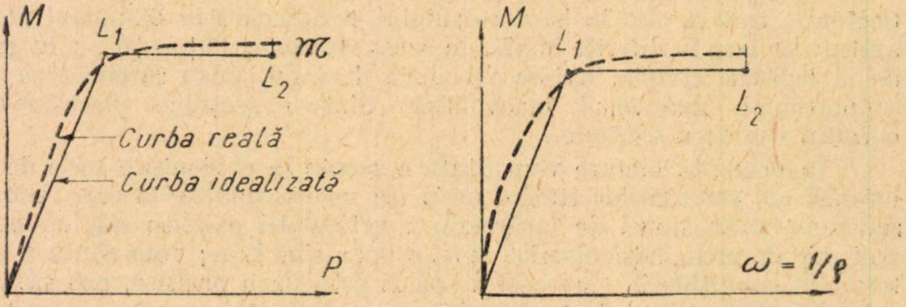


Fig. 1

Dacă pentru fiecare din punctele critice ale sistemului cunoaștem momentele încovoietoare de plastificare $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \dots, \mathfrak{M}_n$, putem exprima pentru o anumită stare de încărcare momentele încovoietoare, încă necunoscute, în funcție de momentele de plastificare prin relațiile

$$M_1 = \rho_1 \mathfrak{M}_1, \; M_2 = \rho_2 \mathfrak{M}_2, \; \dots, M_n = \rho_n \mathfrak{M}_n \tag{2}$$

și introducînd notațiile

$$\bar{a}_{11} = a_{11}\,\mathcal{M}_1,\ \bar{a}_{12} = a_{12}\,\mathcal{M}_2, \ldots,\ \bar{a}_{1n} = a_{1n}\,\mathcal{M}_n \tag{3}$$

sistemul de ecuaţii (1) devine

$$\sum \bar{a}_{ij}\,\rho_j = b_i, \quad \begin{matrix} i = 1, \ldots, n, \\ j = 1, \ldots, n. \end{matrix} \tag{4}$$

Sistemul de ecuaţii (4) permite oarecare consideraţii generale care să conducă şi la diferite puncte de plecare ale unor metode de proiectare a structurilor.

2. STRUCTURI ÎN CARE ARTICULAŢIILE PLASTICE APAR SIMULTAN

Să punem condiţia că n articulaţii plastice, pentru o anumită încărcare determinată prin valorile $b_1, b_2, \ldots, b_n$, să apară simultan în toată structura. În aceste condiţii vom avea

$$\rho_1 = \rho_2 = \ldots = \rho_n = \rho \tag{5}$$

iar sistemul (4) devine

$$\sum \bar{a}_{ij} = b_i/\rho,$$

de unde rezultă

$$\sum a_{ij}\,\mathcal{M}_j = b_i/\rho \quad \begin{matrix} i = 1, \ldots, n, \\ j = 1, \ldots, n. \end{matrix} \tag{6}$$

Rezultă deci că momentele de plastificare se pot obţine din momentele încovoietoare ale unui caz de încărcare oarecare, prin multiplicarea momentelor încovoietoare cu coeficientul $1/\rho$ stabilit conform celor precedente.

Calculul prin aproximaţii succesive poate fi utilizat şi în acest caz, astfel cum a fost utilizat în mod general [6].

Se pot studia pe această cale atît structurile ce au bare cu secţiune constantă, cît şi cele cu secţiune variabilă, introducînd coeficienţii c, c', c'', k' şi k'' utilizaţi în studiul grinzilor de beton armat cu vute [7].

Aplicaţia 1. Grinda continuă cu un număr nesfîrşit de cîmpuri egale, identic încărcate. Admitem că valorile momentelor încovoietoare de plastificare sînt aceleaşi pe reazeme şi în mijlocul cîmpurilor. Să însemnăm cu indicii r şi c momentele încovoietoare şi celelalte caracteristici ale secţiunilor pe reazeme şi în cîmpuri.

Necunoscutele statice fiind momentele încovoietoare de pe reazem din sistemul (6), rezultă că pentru reazemul i se poate scrie relaţia

$$c_i \frac{l_i}{I_i}\mathcal{M}_{(i-1)} + 2\left[c_i'' \frac{l_i}{I_i} + c_{i+1}' \frac{l_{i+1}}{I_{i+1}}\right]\mathcal{M}_i + c_{i+1}\frac{l_{i+1}}{I_{i+1}}\mathcal{M}_{i+1} = -\frac{l_i}{I_i} k_i'' m_i'' +$$

$$+ \frac{l_{i+1}}{I_{i+1}} k_{i+1}' m_{i+1}' \Bigg],$$

unde coeficienţii c, c', c'', k', k'' caracterizează vutele de pe reazemele grinzii continue [6] şi au valori egale cu unitatea în cazul grinzilor cu moment de inerţie constant (fig. 2).

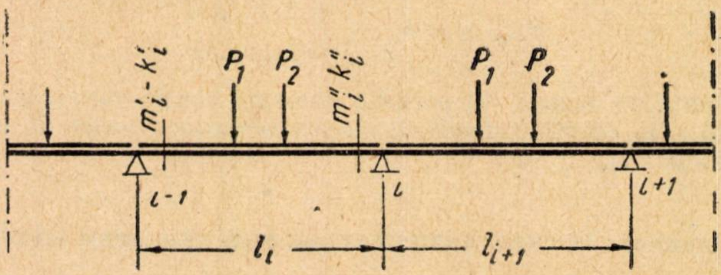


Fig. 2

Cum, pentru cazul avut în vedere,

$$\mathfrak{M}_{i-1} = \mathfrak{M}_i = \mathfrak{M}_{i+1} = \mathfrak{M}_{i+2} = \ldots = \mathfrak{M}$$

rezultă

$$\mathfrak{M} = -\frac{1}{3} m_i.$$

Pentru o sarcină uniform distribuită, se obţin pe reazeme momentele încovoietoare $M_r = -p.\, l^2/12$ iar în cîmp $M_c = p.\, l^2/24$.

Pentru obţinerea distribuţiei de momente încovoietoare de plastificare se poate utiliza metoda de calcul [5] în care relaxarea grinzii pe reazemele plastificate se echivalează cu introducerea unor momente încovoietoare suplimentare $\overline{M}$ în punctele de plastificare (fig 3).

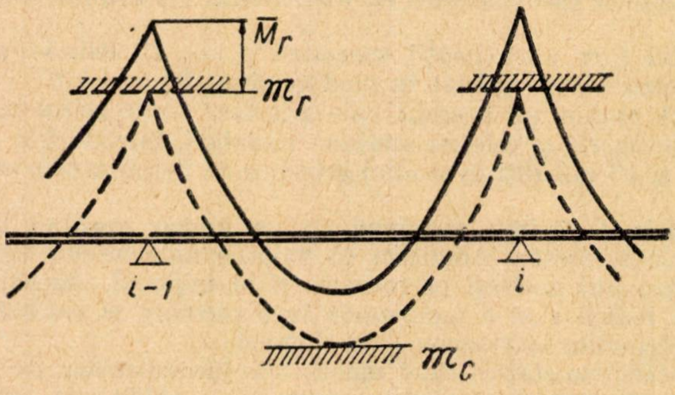


Fig. 3

Într-adevăr, dacă momentul de plastificare al grinzii este acelaşi pe reazeme şi în cîmp, se vor introduce pe reazeme momentele $\overline{M}_r$ şi vom avea $\dfrac{-M_r + \overline{M}_r}{\mathfrak{M}_r} = \dfrac{M_c + \overline{M}_r}{\mathfrak{M}_c}$.

Dacă $\mathfrak{M}_r = -\mathfrak{M}_c$ rezultă

$$\overline{M}_r = \frac{1}{2}(M_r - M_c),$$

ceea ce pentru o sarcină uniform repartizată conduce la $\overline{M}_r = p.l^2/48$ şi rezultă pentru momentele de plastificare de pe reazeme şi din cîmp $\mathfrak{M}_r = \mathfrak{M}_c = p\cdot l^2/16$

Aplicaţia 2. Grinda continuă cu un număr nesfîrşit de cîmpuri la care $\mathfrak{M}_c = \alpha\mathfrak{M}_r$ $(\alpha \leqslant 1)$ iar încărcarea în regim elastic dă momentele încovoietoare $M_c = \beta M_r$ pentru deschiderile încărcate.

Cînd reazemele ajung la plastificare $M_r = \mathfrak{M}_r$ iar în cîmp vom avea momentul încovoietor M_c (fig. 2).

Se introduce momentul încovoietor de relaxare pe reazem $\overline{M}_r$ şi se ţine seama că $\mathfrak{M}_c = -\alpha\mathfrak{M}_r$.

Rezultă

$$\frac{-M_r + \overline{M}_r}{-\mathfrak{M}_r} = \frac{M_c + \overline{M}_r}{\mathfrak{M}_c},$$

de unde valoarea lui $\overline{M}_r$ va fi

$$\overline{M}_r = \frac{\alpha M_r - M_c}{1 + \alpha}.$$

Ţinînd seama de relaţia $M_c = \beta M_r$ vom avea

$$\overline{M}_r = \frac{\alpha - \beta}{1 + \alpha} M_r = \gamma M_r.$$

Momentul încovoietor negativ va rămîne

$$M_r^{*} = M_r - \frac{\alpha - \beta}{1 + \alpha} M_r = \frac{1 + \beta}{1 + \alpha} M_r = \delta_1 M_r$$

iar momentul încovoietor în cîmp

$$M_c^{*} = \beta M_r + \frac{\alpha - \beta}{1 + \alpha} M_r = \alpha \frac{1 + \beta}{1 + \alpha} M_r = \delta_2 M_r.$$

Valorile lui γ sînt date în figura 4 pentru $\alpha = 0 \div 1,5$ şi $\beta = 0 \div \div 1,5$. Valorile δ_1 şi δ_2 pot fi transpuse de asemenea în grafice.

Pentru o grindă cu deschideri egale, uniform încărcate cu o sarcină distribuită, $M_c = -0,5\ M_r$. Rezultă momentul încovoietor ce se introduce prin plastificare în nod

$$\overline{M}_r = \frac{\alpha - 0,5}{1 + \alpha} M_r = \gamma M_r,$$

pentru $\alpha = 0,667$,

$$\overline{M}_r = \frac{0,167}{1,67} M_r = 0,1\,M_r$$

iar momentele încovoietoare în grindă vor deveni

$$M_r^* = M_r - 0,1\,M_r = 0,9\,M_r,$$

$$M_c^* = 0,5\,M_r + 0,1\,M_r = 0,6\,M_r.$$

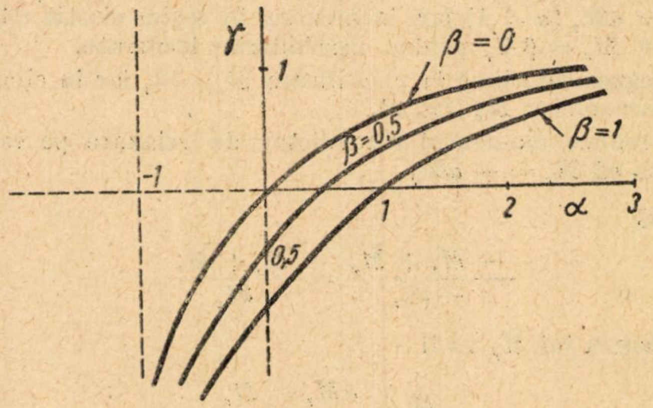


Fig. 4

Aceste valori pot fi obținute și cu ajutorul graficului din figura 4. Raportul între valorile M^* și $\mathfrak{M}$ indică multiplicatorul sarcinii de calcul, necesar pentru a se ajunge la plastificare.

3. ARTICULAȚII PLASTICE APĂRUTE SIMULTAN SUB MAI MULTE TIPURI DE ÎNCĂRCĂRI

Punem problema diferitelor combinații de sarcină care ar putea să facă să apară simultan n articulații plastice în structură, în aceleași secțiuni.

Grupul de ecuații (6) poate fi scris sub forma

$$\frac{\Sigma a_{1j}\mathfrak{M}_j}{b_1} = \frac{\Sigma a_{2j}\mathfrak{M}_j}{b_2} = \dots = \frac{\Sigma a_{nj}\mathfrak{M}_j}{b_n} = \frac{1}{\rho}. \qquad (7)$$

Relațiile acestea arată că numai în cazul în care pentru diferite încărcări se păstrează proporționalitatea între valorile $b_1, b_2, \dots, b_n$ din diferite ipoteze de încărcare, grupul (6) poate fi satisfăcut și, în consecință, variind pe ρ se pot obține condiții de plastificare simultană a celor n articulații plastice.

Asemenea încărcări nu sînt curente, ele pot însă apare în unele cazuri și de aici rezultă că există structuri care să se poată plastifica simultan, în toate articulațiile, la încărcări de diferite forme. Cum valorile b depind la grinzi continue de încărcările celor două deschideri vecine, se poate face observația că în toate cazurile o asemenea plastificare poate fi realizată numai dacă schimbarea încărcării unui cîmp este compensată de schimbări intervenite în încărcările cîmpurilor vecine.

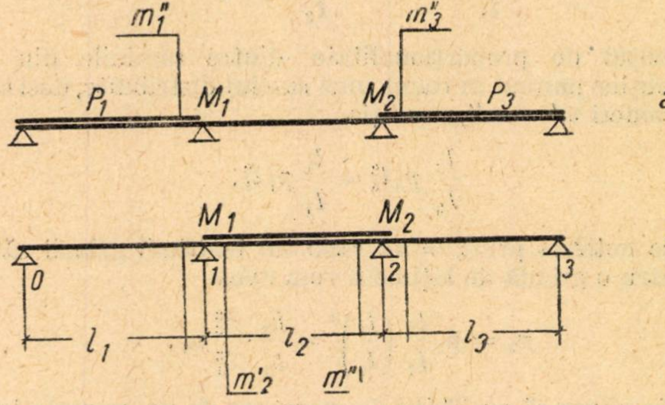


Fig. 5

Pentru o grindă continuă, plecîndu-se de la o deschidere oarecare, încărcată oricum, se pot aranja din aproape în aproape încărcările deschiderilor vecine, astfel ca relațiile (7) să fie satisfăcute.

Pentru $\rho = 1$ momentele de plastificare sînt chiar rădăcinile sistemului (6).

Sistemul de relații (7) permite, fie determinarea momentelor de plastificare totală simultană a unei structuri, fie sarcinile de plastificare, fie raportul dintre rigiditățile diferitelor bare, astfel încît pentru sarcinile date și momentele de plastificare stabilite, plastificarea întregii structuri să se facă simultan.

Aplicația 3. Să cercetăm condițiile în care o grindă continuă cu trei deschideri, de două ori static nedeterminată, poate ajunge la plastificare totală în ipotezele de încărcare din figura 5, *a* și *b*.

Sistemul de ecuații care dă valorile $\mathfrak{M}$ pentru cele două ipoteze de încărcare din figura 5 va fi

$$2\left(\frac{l_1}{I_1}+\frac{l_2}{I_2}\right)\mathfrak{M}_1+\frac{l_2}{I_2}\mathfrak{M}_2=-\frac{l_1}{I_1}m_1'',$$

$$\frac{l_2}{I_2}\mathfrak{M}_1+2\left(\frac{l_2}{I_2}+\frac{l_3}{I_3}\right)\mathfrak{M}_2=-\frac{l_3}{I_3}m_3',$$

sau încă

$$2\left(\frac{l_1}{I_1}+\frac{l_2}{I_2}\right)\mathfrak{M}_1+\frac{l_2}{I_2}\mathfrak{M}_2=-\frac{l_2}{I_2}m_2',$$

$$\frac{l_2}{I_2}\mathfrak{M}_1 + 2\left(\frac{l_2}{I_2}+\frac{l_3}{I_3}\right)\mathfrak{M}_2 = -\frac{l_2}{I_2}m_2''.$$

Condiţia de a obţine aceleaşi valori $\mathfrak{M}_1$ şi $\mathfrak{M}_2$ este

$$\frac{l_1}{I_1}m_1''\,m_2'' = \frac{l_3}{I_3}m_2'\,m_3'.$$

Coeficientul de proporţionalitate dintre sarcinile din cele două încărcări se obţine punînd în cazul unei sarcini distribuite, deci cînd pentru una din deschideri $m' = m''$, condiţia

$$\frac{l_3}{I_3}p_3 l_3^2 = \frac{l_1}{I_1}p_1 l_1^2.$$

Dacă se notează prin $\xi = h/l$ raportul înălţimii grinzii către deschiderea ei, pentru o grindă de lăţime b vom avea

$$p_3 = p_1\frac{I_3}{I_1}\left(\frac{l_1}{l_3}\right)^3 = \frac{b_3}{b_1}\cdot\frac{\xi_3^3}{\xi_1^3}p_1.$$

Condiţia necesară egalităţii de momente de pe reazeme la cele două încărcări va fi

$$\frac{l_1^3}{I_1}p_1 = \frac{l_2^3}{I_2}p_2 = \frac{l_3^3}{I_3}p_3$$

sau încă

$$\frac{p_1}{b_1\xi_1^3} = \frac{p_2}{b_2\xi_2^3} = \frac{p_3}{b_3\xi_3^3}.$$

Aplicaţia 4. Pentru o grindă continuă avînd un număr nesfîrşit de cîmpuri cu deschideri şi momente de inerţie alternative l_1, I_1 şi l_2, I_2, să cercetăm condiţia de a se obţine plastificarea simultană a nodurilor sub sarcini diferite (fig. 6).

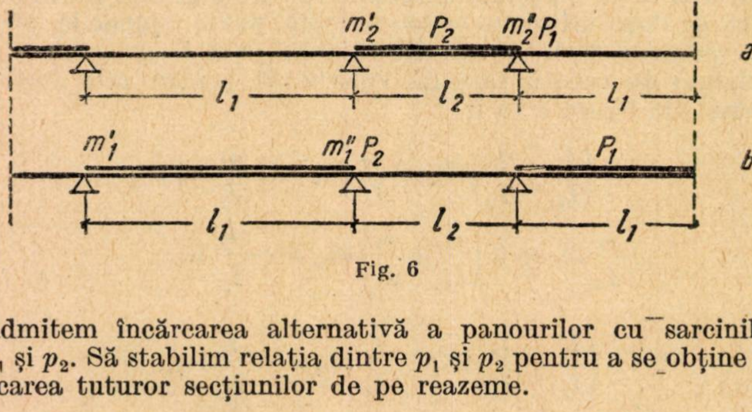


Fig. 6

Admitem încărcarea alternativă a panourilor cu sarcinile distribuite p_1 şi p_2. Să stabilim relaţia dintre p_1 şi p_2 pentru a se obţine simultan plastificarea tuturor secţiunilor de pe reazeme.

Legătura momentului de plastificare cu sarcinile în cele două ipoteze de încărcare va fi dată de relaţiile

$$3\mathcal{M}\left(\frac{l_1}{I_1}+\frac{l_2}{I_2}\right)=-\frac{l_2}{I_2}m_2',$$

$$3\mathcal{M}\left(\frac{l_1}{I_1}+\frac{l_2}{I_2}\right)=-\frac{l_1}{I_1}m_1''.$$

Relaţia dintre încărcările p_1 şi p_2 şi elementele geometrice ale grinzii pentru o plastificare instantanee va fi

$$p_2\frac{l_2^3}{I_2}=p_1\frac{l_1^3}{I_1}$$

de unde rezultă

$$p_2=\frac{l_1^3}{l_2^3}\cdot\frac{I_2}{I_1}p_1,$$

valoare care se mai poate scrie, dacă $\xi = h/l$,

$$p_2=\frac{b_2\xi_2^3}{b_1\xi_1^3}p_1.$$

Pentru structurile la care articulaţiile plastice apar instantaneu, nu se pun condiţii de compatibilitate.

★

Metoda de calcul utilizată în cele precedente poate fi utilizată şi pentru rezolvarea altor probleme similare.

Să admitem că am urmări ca rădăcinile unui sistem să fie astfel aranjate încît articulaţiile plastice să apară în n puncte dorite şi să se realizeze

$$\rho_1>\rho_2>\rho_3>\cdots>\rho_n.$$

Să notăm

$$\rho_1=\rho\alpha_1,\ \rho_2=\rho\alpha_2,\cdots,\ \rho_n=\rho\alpha_n,$$

cu respectarea condiţiei

$$\alpha_1>\alpha_2>\alpha_3>\cdots>\alpha_n.$$

Sistemul (3) devine

$$\sum\bar{a}_{ij}\,\alpha_j=\frac{b_i}{\rho},\quad \begin{matrix} j=1,\ldots,n,\\ i=1,\ldots,n,\end{matrix} \tag{8}$$

şi permite stabilirea parametrilor α_{ij}, a_{ij} sau b_i ai unei structuri astfel încît să satisfacă condiţiile puse anterior. În genere se pot pune probleme de

— a obţine ordinea dorită a articulaţiilor plastice,

— a limita după nevoi domeniul de apariţie al acestor articulaţii, în genere de a-l restrînge la un interval cît mai redus.

Analitic aceste probleme aduc oarecare greutăţi din cauza apariţiei diferitelor articulaţii plastice şi se poate recurge la metoda generală [5] de calcul prin aproximaţii succesive.

Primită la redacţie la 29 iulie 1963

STATIC STRUCTURES IN WHICH *n* PLASTIC HINGES OCCUR SIMULTANEOUSLY

ABSTRACT

Using a system of equations for which the ratios of the real bending moments to the plastifying bending moments $\rho = M/\mathfrak{M}$ are taken as static unknowns, this paper studies structures for which the plastification occurs simultaneously in the whole structure.

It is shown that for a given structure, several loading diagrams may exist, which increasing proportionally, may lead to a simultaneous plastification of a certain number of plastic hinges. Several numerical examples are given.

BIBLIOGRAFIE

1. BAKER A. L. L., Note on Meeting at Stockholm, June, 1960.
2. BAKER I. F., *A review of recent investigations into behavior of steel frames in the plastic range*. I. Inst. Civ. Engr., **31** (1949).
3. GUYON Y., *The strength of statically indeterminate prestressed concrete structures*. Symposium of the Strength Structures, London, 1956.
4. GVOZDEV A. A., *Calculul capacităţii portante a construcţiilor prin metoda echilibrului limită*. Gosstroiizdat, Moscva, 1949.
5. HANGAN M., *Le calcul des structures hyperstatiques dans le domaine plastique*. Annales de l'Institut Technique du Bâtiment et des Travaux Publics, Mars-Avril, 1963.
6. — *Le calcul des structures plastiques en béton armé dans l'hypothèse d'une plastification partielle*. Acta technica, Prague, 1962.
7. — *Construcţii de beton armat* (Cap. I. şi II). Edit. tehnică, Bucureşti, 1963.
8. PETCU V., *Un principiu fundamental în proiectarea structurilor static nedeterminate de beton armat, în domeniul plastic*. St. cerc. mec. apl., **XII**, *5* (1961).

O CONCEPȚIE NOUĂ ÎN CALCULUL PLASTIC AL STRUCTURILOR DE BETON ARMAT

DE

VALERIU PETCU[1])

539.4

I. INTRODUCERE

Studiile teoretice și experimentale consacrate determinării capacității portante a structurilor static nedeterminate de beton armat au pus în evidență proprietatea de deformare plastică a acestor structuri.

Din punctul de vedere al calculului static, apariția și dezvoltarea deformațiilor plastice într-o structură static nedeterminată, solicitată de un grup de încărcări constante și de un grup de încărcări care cresc progresiv în funcție de un singur parametru, are drept consecință apariția succesivă a *articulațiilor plastice* în secțiunile cele mai solicitate, denumite *secțiuni critice*.

Acest fenomen se manifestă pînă la ruperea plastică a structurii.

Ruperea plastică a unei structuri static nedeterminate de beton armat se poate prezenta sub una din următoarele două forme :

— transformarea structurii, în totalitate sau în parte, într-un mecanism, ca urmare a apariției unui număr suficient de articulații plastice ;

— distrugerea unei secțiuni critice oarecare, ca urmare a epuizării capacității de rotire a articulației plastice corespunzătoare.

Aceste două tipuri de rupere plastică implică lipsa ruperii premature a structurii datorită acțiunii forțelor tăietoare și absența fenomenelor de instabilitate a echilibrului.

Prin definiție, *rezerva de rezistență plastică a unei structuri solicitată de încărcări alcătuind o anumită schemă de încărcare este egală cu diferența dintre valoarea totală a încărcărilor corespunzătoare ruperii și valoarea totală a încărcărilor corespunzătoare apariției primei articulații plastice.*

---

[1]) Institutul de cercetări în construcții și economia construcțiilor (INCERC), București.

Este evident că această rezervă atinge valoarea sa maximă în cazul în care ruperea structurii se produce prin transformarea ei în mecanism. Obținerea unui astfel de tip de rupere depinde de mărimea domeniului elasto-plastic al structurii.

Domeniul elasto-plastic al unei structuri este reprezentat de ansamblul fenomenelor care caracterizează comportarea structurii din momentul apariției primei articulații plastice pînă în momentul ruperii plastice.

Mărimea acestui domeniu este definită de raportul

$$\frac{P_r - P_1}{P_1},$$

în care :

P_1 este încărcarea care caracterizează sistemul de încărcări temporare, corespunzătoare apariției primei articulații plastice în structură ;

P_r — încărcarea care caracterizează sistemul de încărcări temporare, corespunzătoare ruperii structurii.

Condiția necesară, dar nu totdeauna și suficientă, pentru ca ruperea unei structuri să aibă loc prin transformarea ei în mecanism constă în adoptarea unei astfel de soluții a momentelor plastice din secțiunile critice, încît mărimea domeniului elasto-plastic să fie cît mai mică cu putință.

Din punctul de vedere al dispoziției încărcărilor temporare, structurile se împart în :

— structuri cu o singură schemă de încărcare, și

— structuri cu mai multe scheme de încărcare.

În primul caz, soluția optimă a momentelor plastice corespunde apariției simultane a tuturor articulațiilor plastice ale mecanismului de rupere, deoarece în această situație mărimea domeniului elasto-plastic este nulă. Această soluție se obține prin considerarea proporționalității între momentele plastice și momentele elastice corespunzătoare.

De aici rezultă că *soluția optimă a momentelor plastice ale unei structuri cu o singură schemă de încărcare este dată de calculul elastic.*

Este evident că în cazul structurilor cu mai multe scheme de încărcare, mărimea domeniului elasto-plastic poate fi nulă pentru cel mult una din aceste scheme.

Posibilitatea de a alege după voie mărimile procentelor de armare din secțiunile critice, cu condiția ca momentele plastice corespunzătoare să asigure preluarea de către structură a încărcărilor de rupere prescrise, conduce, teoretic, la un număr infinit de soluții ale momentelor plastice.

Fiecăreia din aceste soluții îi corespunde un ansamblu de valori ale mărimii domeniului plastic, fiecare valoare corespunzînd unei anumite scheme de încărcare.

Se denumește *limită superioară* valoarea maximă a mărimii domeniului elasto-plastic pentru o soluție oarecare a momentelor plastice.

Din cele expuse anterior rezultă că *soluția optimă a momentelor plastice ale unei structuri cu mai multe scheme de încărcare corespunde celei mai mici valori a limitelor superioare ale domeniului elasto-plastic.*

Studiul care urmează este consacrat stabilirii și fundamentării teoretice a principiului care stă la baza determinării soluției optime a momentelor plastice în cazul structurilor de beton armat alcătuite din bare.

II. IPOTEZE ȘI DEFINIȚII

Teoria dezvoltată în acest studiu se bazează pe următoarele ipoteze și definiții :

1. Articulația plastică în betonul armat este regiunea unei bare sau a unei plăci în lungul căreia efortul unitar în armătura întinsă este mai mare sau cel puțin egal cu limita de curgere. Secțiunea din această regiune, în care se atinge pentru prima dată limita de curgere în armătura întinsă, se numește *secțiune critică*. În calculul plastic al structurilor se admite că articulația plastică este concentrată în secțiunea critică.
2. Fiecare secțiune critică se caracterizează printr-un *moment plastic*, acesta fiind momentul încovoietor corespunzător atingerii limitei de curgere în armătura întinsă a secțiunii.
3. Valoarea momentului plastic al unei secțiuni critice poate fi aleasă arbitrar, datorită posibilității de a alege după voie mărimea procentului de armare al secțiunii considerate.
4. Ruperea unei structuri de beton armat se caracterizează prin transformarea ei, în totalitate sau în parte, într-un mecanism, înainte de distrugerea vreunei secțiuni critice datorită depășirii capacității ei de rotire.
5. Distribuția armăturii în lungul elementelor structurii asigură apariția articulațiilor plastice exclusiv în secțiunile critice fixate în prealabil.
6. Distribuția armăturii transversale asigură structura împotriva ruperii datorită forțelor tăietoare.
7. Structura nu manifestă nici un fenomen de instabilitate a echilibrului înainte de apariția ultimei articulații plastice care transformă structura în mecanism.
8. Deformațiile structurii în momentul formării ultimei articulații plastice sînt suficient de mici în raport cu lungimile barelor pentru a nu influența sensibil asupra mărimii și distribuției eforturilor care se dezvoltă în barele structurii.
9. Structura se comportă perfect elastic pînă în momentul apariției primei articulații plastice.
10. Structura este solicitată de două sisteme de încărcări imobile aplicate static, și anume :
    - un sistem de încărcări permanente constante, caracterizate prin încărcarea G;
    - un sistem unic de încărcări temporare, variind în funcție de un singur parametru, exprimat prin încărcarea P, aceasta putînd varia de la zero la valoarea sa de rupere P_r. Asupra structurii se pot aplica, atît întregul sistem, cît și numai

părţi ale acestuia, formînd astfel, împreună cu încărcările permanente, diferite scheme de încărcare.

11. O schemă de încărcare este formată din toate încărcările permanente şi dintr-un anumit număr de încărcări temporare, alese astfel încît momentul elastic, în valoare absolută, produs de aceste din urmă încărcări, într-o anumită secţiune critică, să fie maxim.

12. Încărcarea temporară corespunzătoare stadiului de exploatare a structurii, a cărei mărime este dată în prescripţii oficiale, se numeşte *încărcare de exploatare.*

13. *Supraîncărcarea* este, prin definiţie, valoarea creşterii încărcării temporare peste valoarea ei corespunzătoare stadiului de exploatare a structurii.

    Creşterea încărcării temporare de la valoarea ei de exploatare la valoarea corespunzătoare apariţiei primei articulaţii plastice se numeşte *supraîncărcare elastică.* Supraîncărcarea elastică caracterizează domeniul de comportare elastică a structurii. Valoarea ei reprezintă rezerva de rezistenţă elastică a structurii.

    Creşterea încărcării temporare de la valoarea corespunzătoare apariţiei primei articulaţii plastice pînă la valoarea corespunzătoare ruperii structurii se numeşte *supraîncărcare plastică.*

    Supraîncărcarea plastică caracterizează domeniul de comportare elasto-plastică a structurii. Valoarea ei reprezintă rezerva de rezistenţă plastică a structurii. Creşterea încărcării temporare de la valoarea ei de exploatare la valoarea corespunzătoare ruperii structurii se numeşte *supraîncărcare totală.*

    Supraîncărcarea totală este expresia cantitativă a întregii rezerve de rezistenţă a structurii.

III. COEFICIENTUL DE SUPRAÎNCĂRCARE PLASTICĂ

Se consideră o structură oarecare de beton armat, solicitată de încărcări permanente şi temporare care alcătuiesc o anumită schemă de încărcare.

Fie :

P_e — valoarea încărcării P care caracterizează încărcările temporare de exploatare ;

P_1 — valoarea încărcării P care caracterizează încărcările temporare corespunzătoare apariţiei primei articulaţii plastice în structură ;

P_r — valoarea încărcării P care caracterizează încărcările temporare de rupere.

Prin definiţie, raportul

$$\lambda_r = \frac{P_r}{P_e} \tag{1}$$

se denumeşte *coeficient de supraîncărcare totală.*

Relaţia (1) poate fi pusă sub forma

$$\lambda_r = \frac{P_1}{P_e} \cdot \frac{P_r}{P_1}. \tag{1'}$$

Cu notaţiile

$$\lambda_e = \frac{P_1}{P_e} \tag{2}$$

şi

$$\lambda_p = \frac{P_r}{P_1} \tag{3}$$

relaţia (1') devine

$$\lambda_r = \lambda_e \cdot \lambda_p. \tag{4}$$

Prin definiţie, coeficientul λ_e se numeşte *coeficient de supraîncărcare elastică.* Acest coeficient caracterizează mărimea supraîncărcării elastice. Întrucît supraîncărcarea elastică este totdeauna pozitivă sau cel puţin nulă, rezultă că

$$\lambda_e \geqslant 1.$$

În consecinţă, *valoarea minimă a coeficientului de supraîncărcare elastică este egală cu unitatea.*

Valoarea maximă a coeficientului de supraîncărcare elastică corespunde situaţiei în care toate articulaţiile plastice ale mecanismului de rupere apar simultan.

În acest caz, $P_1 = P_r$ şi din relaţiile (1) şi (2) se deduce

$$\lambda_{e\ max} = \lambda_r.$$

Cu alte cuvinte, *valoarea maximă a coeficientului de supraîncărcare elastică este egală cu valoarea coeficientului de supraîncărcare totală.*

Prin urmare, coeficientul de supraîncărcare elastică îndeplineşte condiţiile

$$1 \leqslant \lambda_e \leqslant \lambda_r. \tag{5}$$

Prin definiţie, coeficientul λ_p se numeşte *coeficient de supraîncărcare plastică.* Acest coeficient caracterizează mărimea supraîncărcării plastice, respectiv mărimea domeniului elasto-plastic.

Relaţiile (4) şi (5) arată că acest coeficient îndeplineşte condiţiile

$$1 \leqslant \lambda_p \leqslant \lambda_r. \tag{6}$$

De aici rezultă următoarele concluzii:

— *valoarea minimă a coeficientului de supraîncărcare plastică este egală cu unitatea,* şi

— *valoarea maximă a coeficientului de supraîncărcare plastică este egală cu coeficientul de supraîncărcare totală.*

Relația (4) arată că *coeficientul de supraîncărcare totală este egal cu produsul coeficienților de supraîncărcare elastică și plastică.*

Pe baza ipotezelor de calcul admise, din relația (1) se deduce că coeficientul de supraîncărcare totală are o valoare unică pentru toate schemele posibile de încărcare.

În consecință, coeficienții de supraîncărcare elastică și plastică vor avea cîte o anumită valoare pentru fiecare schemă de încărcare, aceste valori satisfăcînd totdeauna relația (4), în care λ_r are o valoare unică, independentă de schemele de încărcare.

O proprietate remarcabilă a structurilor de beton armat este reprezentată de posibilitatea de a se stabili numărul și caracteristicile mecanismelor de rupere pentru toate schemele posibile de încărcare. După cum s-a menționat mai sus, această proprietate este datorită posibilității de alegere, după voie, a mărimii procentelor de armare din secțiunile critice, singura condiție a acestei alegeri fiind aceea ca momentele plastice astfel obținute să asigure preluarea de către structură a încărcărilor de rupere.

Fiecare mecanism de rupere plastică este definit de numărul și poziția articulațiilor plastice.

Din punct de vedere teoretic, se poate construi totdeauna o schemă de încărcare astfel încît prima articulație plastică să apară într-o anumită secțiune critică. De aici rezultă că numărul coeficienților de supraîncărcare plastică este egal cu numărul tuturor secțiunilor critice ale structurii considerate.

În general, valoarea fiecărui coeficient de supraîncărcare plastică diferă de valorile celorlalți coeficienți, datorită particularităților schemelor de încărcare și valorilor diferite ale momentelor plastice din secțiunile critice.

Pentru fiecare soluție a momentelor plastice, corespunzătoare unui anumit ansamblu al valorilor procentelor de armare din secțiunile critice, se obține un ansamblu de valori ale coeficienților de supraîncărcare plastică.

Fiecare ansamblu are o *limită superioară*, egală cu valoarea celui mai mare coeficient de supraîncărcare plastică.

Anterior s-a arătat că mărimea domeniului elasto-plastic este dată de raportul

$$\frac{P_r - P_1}{P_1} = \lambda_p - 1.$$

De aici rezultă că coeficientul de supraîncărcare plastică caracterizează mărimea domeniului elasto-plastic al structurii pentru orice schemă de încărcare.

De aceea, problema de optimum prezentată în prima parte a lucrării poate fi enunțată astfel:

Soluția optimă a momentelor plastice a unei structuri de beton armat cu scheme multiple de încărcare corespunde ansamblului coeficienților de supraîncărcare plastică a cărui limită superioară are valoarea minimă.

IV. EXPRESIA GENERALĂ A MOMENTELOR PLASTICE

Fie λ_{pi} coeficientul de supraîncărcare plastică, corespunzător secțiunii critice i a unei structuri de beton armat.

Acest coeficient are expresia

$$\lambda_{pi} = \frac{P_r}{P_{1i}}, \tag{7}$$

în care P_{1i} este valoarea încărcării P care caracterizează încărcările temporare corespunzătoare apariției primei articulații plastice în secțiunea critică i.

Fie

$$M_i = (a_i G + b_i P)\, l \tag{8}$$

expresia momentului elastic maxim (în valoare absolută) din secțiunea critică i, în care:

a_i este coeficientul de influență al momentului elastic produs de încărcările permanente;

b_i — coeficientul de influență al momentului elastic produs de încărcările temporare, corespunzător schemei de încărcare care conduce la valoarea maximă a acestui moment;

l — deschiderea de referință.

Momentul plastic din secțiunea critică i are expresia

$$M_{pi} = (a_i G + b_i P_{1i})\, l \tag{9}$$

sau, ținîndu-se seama de relația (7),

$$M_{pi} = \left(a_i G + \frac{b_i}{\lambda_{pi}} P_r \right) l. \tag{9'}$$

Prin urmare, *momentul plastic al unei secțiuni critice oarecare a unei structuri de beton armat alcătuite din bare este egal cu suma dintre momentul elastic produs de încărcările permanente și raportul dintre momentul elastic maxim produs de încărcările temporare de rupere și coeficientul de supraîncărcare plastică corespunzător secțiunii critice considerate.*

V. TEOREMELE SOLUȚIEI OPTIME

Fie 1, 2,...,i,..., s secțiunile critice ale unui mecanism de rupere plastică.

Ecuația de echilibru plastic al mecanismului, stabilită pe baza principiului lucrului mecanic virtual, este

$$\sum_{i=1}^{s} M_{pi}\, \theta_i = L_G + L_P, \tag{10}$$

în care :

θ_i este rotirea virtuală produsă în articulația plastică din secțiunea i;

L_G — lucrul mecanic virtual produs de încărcările permanente;

L_P — lucrul mecanic virtual produs de încărcările temporare de rupere.

După înlocuirea momentului plastic M_{pi} prin expresia sa dată de relația (9′), ecuația (10) devine

$$G l \sum_{i=1}^{s} a_i \theta_i + P_r l \sum_{i=1}^{s} \frac{b_i}{\lambda_{pi}} \theta_i = L_G + L_P. \tag{10′}$$

Pe de altă parte, există totdeauna egalitatea

$$G l \sum_{i=1}^{s} a_i \theta_i = L_G. \tag{11}$$

În consecință, ecuația (10′) devine

$$\sum_{i=1}^{s} \frac{b_i}{\lambda_{pi}} \theta_i = \frac{L_P}{P_r l}. \tag{12}$$

În această ecuație necunoscutele sînt coeficienții de supraîncărcare plastică λ_{pi} ($i = 1, 2, \ldots, s$).

O ecuație de acest tip poate fi scrisă pentru fiecare mecanism de rupere plastică.

Sistemul care se obține în acest mod conține un număr de ecuații inferior numărului de secțiuni critice, deoarece numărul mecanismelor posibile de rupere plastică este totdeauna inferior numărului de secțiuni critice ale structurii.

În consecință, sistemul de ecuații admite, din punct de vedere teoretic, o infinitate de soluții ale coeficienților de supraîncărcare plastică, adică o infinitate de soluții ale momentelor plastice. Identificarea soluției optime are la bază următoarele teoreme :

TEOREMA 1. *În calculul plastic al unei structuri static nedeterminate de beton armat, cu caracteristicile geometrice și statice date, realizarea egalității tuturor coeficienților de supraîncărcare plastică nu este posibilă decît în cazul în care numărul ecuațiilor de echilibru plastic este egal cu unitatea.*

Demonstrație. Fie n_s numărul tuturor secțiunilor critice și n_e numărul tuturor ecuațiilor de echilibru plastic al structurii.

Egalitatea tuturor coeficienților de supraîncărcare plastică (al căror număr este egal cu cel al secțiunilor critice) permite formarea a $n_s - 1$ ecuații suplimentare.

Pe de altă parte, numărul ecuațiilor suplimentare necesare pentru obținerea unei soluții a momentelor plastice este $n_s - n_e$.

În consecință. nu se poate realiza egalitatea tuturor coeficienților de supraîncărcare plastică decît în cazul în care este îndeplinită condiția

$$n_s - n_e = n_s - 1,$$

de unde rezultă

$$n_e = 1,$$

ceea ce demonstrează teorema enunțată.

Fie λ_p^* valoarea comună a coeficienților de supraîncărcare plastică, care poate fi obținută în cazul unei structuri cu un singur mecanism de rupere plastică.

Din ecuația (12) se deduce

$$\lambda_p^* = \frac{P_r l}{L_G} \sum_{i=1}^{s} b_i \, \theta_i . \tag{13}$$

TEOREMA 2. *Dacă o structură static nedeterminată de beton armat admite un singur mecanim de rupere plastică, atunci cea mai mică valoare a limitei superioare care poate fi atinsă de ansamblul coeficienților de supraîncărcare plastică este dată de soluția corespunzătoare egalității tuturor acestor coeficienți.*

Demonstrație. Se consideră soluția structurii corespunzătoare egalității tuturor coeficienților de supraîncărcare plastică, adică

$$\lambda_{pi} = \lambda_p^*, \quad (i = 1, 2, \ldots, s).$$

Această soluție satisface, evident, ecuația de echilibru plastic (12).

Din examinarea ecuației (12) rezultă că orice altă soluție a coeficienților de supraîncărcare plastică, diferită de soluția precedentă, va conține în mod necesar cel puțin un coeficient de supraîncărcare plastică mai mic decît λ_p^* și, în consecință, cel puțin un coeficient de supraîncărcare plastică mai mare dect λ_p^*, ceea ce demonstrează teorema enunțată.

TEOREMA 3. *În calculul plastic al unei structuri static nedeterminate de beton armat, cu mai multe mecanisme de rupere plastică, există totdeauna o soluție a valorilor momentelor plastice pentru care* $n_s - n_e + 1$ *coeficienți de supraîncărcare plastică sînt egali între ei, restul de* $n_e - 1$ *coeficienți de supraîncărcare plastică avînd valori mai mici decît valoarea comună a primilor coeficienți.*

Observație preliminară. Se consideră o soluție oarecare a coeficienților de supraîncărcare plastică ai structurii, care satisface ecuațiile (12), și fie X un mecanism de rupere plastică avînd m secțiuni critice.

O nouă soluție a coeficienților de supraîncărcare plastică poate fi obținută prin mărirea valorilor a $m-1$ coeficienți de supraîncărcare plastică aparținînd primei soluții, corespunzători unui număr de $m-1$ secțiuni critice.

În acest caz, coeficientul de supraîncărcare plastică al ultimei secțiuni critice va rezulta mai mic decît valoarea corespunzătoare din soluția inițială, ca urmare a necesității ca noua soluție să satisfacă ecuația (12).

În concluzie, mărirea coeficienților de supraîncărcare plastică a $m - 1$ secțiuni critice ale unui mecanism de rupere plastică avînd m secțiuni critice are drept consecință micșorarea coeficientului de supraîncărcare plastică al ultimei secțiuni critice.

Demonstrația teoremei. Fie X un mecanism de rupere plastică a structurii. Teorema 1 permite să se obțină o soluție a momentelor plastice din secțiunile critice ale acestui mecanism, independentă de celelalte mecanisme ale structurii, în care toți coeficienții de supraîncărcare plastică sînt egali între ei.

Fie λ^{*}_{pX} valoarea comună a acestor coeficienți.

Efectuînd această operație pentru fiecare din mecanismele I, II, III,..., L ale structurii, se obține seria de valori $\lambda^{*}_{pI}, \lambda^{*}_{pII}, \lambda^{*}_{pIII}, \ldots, \lambda^{*}_{pL}$.

Se presupune că acești coeficienți satisfac condițiile

$$\lambda^{*}_{pI} \geqslant \lambda^{*}_{pII} \geqslant \lambda^{*}_{pIII} \geqslant \ldots \geqslant \lambda^{*}_{pL}.$$

Aceste inegalități arată că dacă se exclude cîte o secțiune critică din fiecare din mecanismele II, III,..., L și dacă se egalează coeficienții de supraîncărcare plastică ai celorlalte secțiuni critice ale acestor mecanisme cu coeficienții de supraîncărcare plastică ai tuturor secțiunilor critice ale mecanismului I (valoarea comună a acestor coeficienți fiind λ^{*}_{pI}), se obțin $n_s - n_e + 1$ coeficienți de supraîncărcare plastică egali cu λ^{*}_{pI} și $n_e - 1$ coeficienți de supraîncărcare plastică mai mici decît λ^{*}_{pI}, întrucît observația preliminară se aplică coeficienților de supraîncărcare plastică ai tuturor secțiunilor critice excluse.

Din punctul de vedere al calculului plastic, egalitatea a $n_s - n_e + 1$ coeficienți de supraîncărcare plastică dă $n_s - n_e$ ecuații suplimentare care, împreună cu n_e ecuații de echilibru plastic, formează un sistem de n_s ecuații cu n_s necunoscute. Soluția acestui sistem permite să se determine valorile momentelor plastice din toate secțiunile critice ale structurii.

Observație. Fiecare secțiune critică ce se exclude trebuie să facă parte numai dintr-un singur mecanism. Cu alte cuvinte, nici o secțiune exclusă nu trebuie să aparțină la două sau mai multe mecanisme.

VI. PRINCIPIUL SOLUȚIEI OPTIME

Cele trei teoreme enunțate și demonstrate mai sus reprezintă fundamentarea teoretică a existenței principiului care permite obținerea soluției optime a unei structuri static nedeterminate de beton armat.

Enunțul acestui principiu este următorul :

Soluția optimă a momentelor plastice a unei structuri static nedeterminate de beton armat alcătuită din bare, solicitată de încărcări care pot forma diferite scheme de încărcare, se obține prin egalarea între ei a unui anumit număr de coeficienți de supraîncărcare plastică, în funcție de numărul ecuațiilor suplimentare necesare pentru obținerea momentelor plastice din toate secțiunile critice, astfel încît restul coeficienților de supraîncărcare plastică să aibă valori mai mici decît valoarea comună a primilor coeficienți.

Acest principiu stă la baza obţinerii soluţiei optime a momentelor plastice la o structură de beton armat, întrucît el asigură :

— aceeaşi mărime a domeniului elasto-plastic pentru majoritatea schemelor de încărcare (teorema 3) ;

— cea mai mică valoare a limitei superioare a ansamblului valorilor coeficienţilor de supraîncărcare plastică (teoremele 1 şi 2).

VII. OBSERVAŢII ASUPRA CONCEPŢIEI COEFICIENTULUI DE SUPRAÎNCĂRCARE PLASTICĂ

1. Din studiul prezentat mai sus rezultă că coeficientul de supraîncărcare plastică reprezintă o concepţie unitară şi independentă în calculul plastic al structurilor de beton armat, deoarece :

— constituie baza dezvoltării unei teorii generale privind calculul plastic al structurilor de beton armat alcătuite din bare ;

— reprezintă o evaluare cantitativă a mărimii domeniului elasto-plastic ;

— dă posibilitate să se determine coeficientul de supraîncărcare elastică şi, prin aceasta, permite obţinerea unei evaluări cantitative a mărimii domeniului elastic.

2. Deşi concepţia coeficientului de supraîncărcare plastică a fost elaborată şi dezvoltată făcîndu-se apel exclusiv la noţiunile care caracterizează diferitele etape din cursul variaţiei încărcărilor temporare, totuşi rezultatele obţinute pe baza acestei concepţii, în ceea ce priveşte stabilirea soluţiei optime, sînt identice cu cele deduse pe baza principiului redistribuţiei optime [1], al cărui suport este concepţia coeficientului de redistribuţie.

Explicaţia acestei coincidenţe este dată în cele ce urmează.

După cum s-a arătat anterior, apariţia şi dezvoltarea deformaţiilor plastice într-o structură static nedeterminată solicitată de un grup de încărcări permanente constante şi de un grup de încărcări temporare care cresc progresiv, în funcţie de un singur parametru, are drept consecinţă apariţia succesivă a articulaţiilor plastice. Din punctul de vedere al calculului static, acest fenomen are ca efect modificarea schemei statice a structurii pentru fiecare articulaţie plastică nou formată. Datorită acestui fapt, din momentul apariţiei primei articulaţii plastice pînă în momentul epuizării capacităţii de rezistenţă a structurii are loc o permanentă redistribuire a eforturilor, a cărei mărime este exprimată prin *coeficientul de redistribuţie.*

Pentru o anumită schemă de încărcare, coeficientul de redistribuţie este, prin definiţie, raportul dintre încărcarea totală (permanentă şi temporară) de rupere şi încărcarea totală corespunzătoare apariţiei primei articulaţii plastice.

Expresia generală a coeficientului de redistribuţie este [2]

$$r = \frac{G + P_r}{\alpha G + \beta P_r}, \tag{14}$$

în care α şi β sînt doi coeficienţi subunitari.

În cazul particular al structurilor alcătuite din bare, și numai în acest caz, coeficientul α este egal cu unitatea.

În consecință, expresia coeficientului de redistribuție devine în acest caz

$$r = \frac{G + P_r}{G + \beta P_r}, \tag{15}$$

în care

$$\beta = \frac{P_1}{P_r}. \tag{16}$$

Întrucît G și P_r sînt două constante ale căror valori sînt independente de schemele de încărcare ale structurii, rezultă că coeficientul de redistribuție este funcție exclusiv de coeficientul β.

Relația (16) se poate pune sub forma

$$\beta = \frac{1}{\frac{P_r}{P_1}} = \frac{1}{\lambda_p}. \tag{17}$$

Cu alte cuvinte, coeficientul β, care caracterizează valoarea coeficientului de redistribuție, este egal cu inversul coeficientului de supraîncărcare plastică.

Ținînd seama de relația (17), expresia coeficientului de redistribuție devine

$$r = \frac{G + P_r}{G + \frac{P_r}{\lambda_p}}. \tag{18}$$

În cadrul concepției coeficientului de redistribuție, rezolvarea problemei de optimum a soluției momentelor plastice se bazează pe *principiul redistribuției optime* [1]. Conform acestui principiu, *soluția optimă a momentelor plastice a unei structuri static nedeterminate de beton armat, solicitată de încărcări care pot forma diferite scheme de încărcare, se obține prin egalarea între ei a unui anumit număr de coeficienți de redistribuție, în funcție de numărul ecuațiilor suplimentare necesare pentru obținerea momentelor plastice din toate secțiunile critice, astfel încît restul coeficienților de redistribuție să aibă valori mai mici decît valoarea comună a primilor coeficienți.*

Sursa coincidenței dintre soluția optimă stabilită pe baza principiului enunțat în lucrare și cea corespunzătoare principiului redistribuției optime, în cazul structurilor alcătuite din bare, constă în faptul că pentru aceste structuri coeficientul de redistribuție depinde exclusiv de coeficientul de supraîncărcare plastică.

În plus, forma relației (18), care pune în evidență variația în același sens a mărimilor acestor doi coeficienți, justifică analogia de exprimare a celor două principii.

3. Din punct de vedere practic, avantajul folosirii concepției coeficientului de supraîncărcare plastică în locul concepției coeficientului de redistribuție este evident, întrucît în relațiile de calcul intervin în acest caz numai încărcările temporare și elementele legate de acestea.

VIII. MOMENTE PLASTICE OPTIME ȘI MOMENTE PLASTICE DE CALCUL

La proiectarea structurilor de beton armat în domeniul plastic intervin condiții de rupere și de exploatare care limitează gradul de exploatare a rezervei plastice de rezistență [3]. Din punctul de vedere al calculului plastic, aceste condiții au ca rezultat limitarea valorii coeficientului de supraîncărcare plastică pentru fiecare secțiune critică în parte.

Fie :

λ'_{pi} — coeficientul de supraîncărcare al secțiunii critice i, stabilit pe baza condițiilor de rupere și de exploatare;

λ^0_{pi} — coeficientul de supraîncărcare al secțiunii critice i, stabilit pe baza principiului soluției optime;

M^0_{pi} — momentul plastic al secțiunii critice i, obținut pe baza principiului soluției optime;

M_{pi} — momentul plastic de calcul al secțiunii critice i, care asigură îndeplinirea tuturor condițiilor de rupere și de exploatare corespunzătoare acestei secțiuni.

În practică pot avea loc două cazuri și anume :

I. $\lambda^0_{pi} \leqslant \lambda'_{pi}$

Pentru secțiunile în care are loc această inegalitate, momentele plastice de calcul sînt egale cu momentele plastice optime, adică

$$M_{pi} = M^0_{pi} = \left(a_i G + \frac{b_i}{\lambda^0_{pi}} P_r\right) l .$$

II. $\lambda^0_{pi} > \lambda'_{pi}$

În secțiunile în care are loc această inegalitate momentele plastice de calcul sînt date de relația

$$M_{pi} = \left(a_i G + \frac{b_i}{\lambda'_{pi}} P_r\right) l .$$

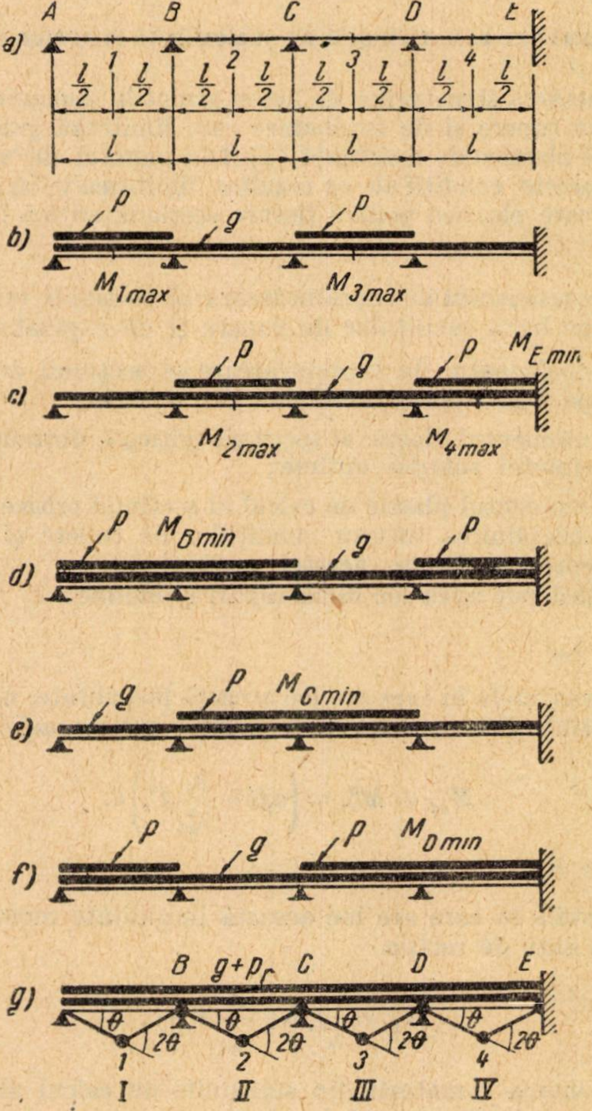
Dimensionarea armăturii din secțiunile de calcul ale structurii se face totdeauna pe baza momentelor de rupere.

Aceste momente se obțin prin mărirea cu 5% a momentelor plastice de calcul [4], adică

$$M_{ri} = 1{,}05\ M_{pi} .$$

IX. EXEMPLU DE CALCUL

Grinda continuă cu 4 deschideri egale, simplu rezemată la o extremitate şi încastrată perfect la cealaltă extremitate, solicitată de încărcări uniform distribuite (figura, a).


A
B
C
D
E
a)
1
2
3
4
l/2
l
p
g
b)
M_{1max}
M_{3max}
c)
$M_{E min}$
M_{2max}
M_{4max}
d)
$M_{B min}$
e)
$M_{C min}$
f)
$M_{D min}$
g)
g+p
θ
2θ
I
II
III
IV

Schemele posibile de încărcare sînt reprezentate în figură, *b*, *c*, *d*,*e*,*f*.

Secţiunile critice şi mecanismele de rupere plastică sînt indicate în figură, *g*.

Secțiunea critică din cîmpul fiecărei deschideri s-a considerat la mijlocul deschiderii.

Coeficienții de influență a_i și b_i sînt dați în tabelă [5].

Tabelă

Secțiunea	a_i	b_i
1	0,072	0,098
2	0,034	0,077
3	0,044	0,077
4	0,041	0,057
B	0,106	0,119
C	0,077	0,106
D	0,085	0,101
E	0,082	0,113

În cele de mai jos, încărcările G și P au semnificațiile

$$G = g\,l, \text{ respectiv } P = p\,l.$$

Prin aplicarea teoremei 1 pentru fiecare din cele patru mecanisme de rupere plastică *I*, *II*, *III* și *IV* (figura, *g*), se obțin valorile coeficienților $\lambda^{\cdot}_{pI}$, $\lambda^{\cdot}_{pII}$, $\lambda^{\cdot}_{pIII}$ și $\lambda^{\cdot}_{pIV}$ după cum urmează:

Mecanismul I

$L_P = 0{,}250\ P_r\, l\ \theta,$

$\Sigma b_i\, \theta_i = 0{,}098 \times 2\theta + 0{,}119 \times \theta = 0{,}315\ \theta,$

$$\lambda^{\cdot}_{pI} = \frac{0{,}315}{0{,}250} = 1{,}26.$$

Mecanismul II

$L_P = 0{,}250\ P_r\, l\ \theta,$

$\Sigma b_i\, \theta_i = 0{,}077 \times 2\theta + 0{,}119 \times \theta + 0{,}106 \times \theta = 0{,}379\ \theta,$

$$\lambda^{\cdot}_{pII} = \frac{0{,}379}{0{,}250} = 1{,}52.$$

Mecanismul III

$L_P = 0{,}250\ P_r\, l\ \theta,$

$$\Sigma\, b_i\, \theta_i = 0{,}077 \times 2\theta + 0{,}106 \times \theta + 0{,}101 \times \theta = 0{,}361\ \theta,$$

$$\lambda^{\bullet}_{pIII} = \frac{0{,}361}{0{,}250} = 1{,}45.$$

Mecanismul IV

$L_p = 0{,}250\ P,\, l\, \theta,$

$\Sigma\, b_i\, \theta_i = 0{,}057 \times 2\theta + 0{,}101 \times \theta + 0{,}113 \times \theta = 0{,}328\ \theta,$

$$\lambda^{\bullet}_{pIV} = \frac{0{,}328}{0{,}250} = 1{,}31.$$

Rezultatele obținute permit scrierea inegalităților

$$\lambda^{\bullet}_{pII} > \lambda^{\bullet}_{pIII} > \lambda^{\bullet}_{pIV} > \lambda^{\bullet}_{pI}.$$

Conform teoremei 3, ecuațiile suplimentare sînt

$$\lambda^0_{p2} = \lambda^0_{pB} = \lambda^0_{pC} = \lambda^0_{pD} = \lambda^0_{pE}.$$

Aceste ecuații au fost stabilite prin excluderea secțiunilor critice *1*, *3* și *4* ale mecanismelor *I*, *III* și *IV*.

Valoarea comună a coeficienților de supraîncărcare plastică λ^0_{p2}, λ^0_{pB}, λ^0_{pC}, λ^0_{pD} și λ^0_{pE} este $\lambda^{\bullet}_{pII}$.

Valorile coeficienților de supraîncărcare plastică λ^0_{p1}, λ^0_{p3} și λ^0_{p4} sînt date de ecuația de echilibru plastic (12), scrisă pentru fiecare din mecanismele *I*, *III* și *IV*.

Se obține succesiv:

Mecanismul I

$$\frac{b_1}{\lambda^0_{p1}}\, 2\,\theta + \frac{b_B}{\lambda^0_{pB}}\, \theta = 0{,}250\ \theta,$$

$b_1 = 0{,}098,\ b_B = 0{,}119,\ \lambda^0_{pB} = \lambda^{\bullet}_{pII} = 1{,}52.$

Rezultă

$$\lambda^0_{p1} = 1{,}14.$$

Mecanismul III

$$\frac{b_3}{\lambda^0_{p3}}\, 2\,\theta + \frac{b_C}{\lambda^0_{pC}}\, \theta + \frac{b_D}{\lambda^0_{pD}}\, \theta = 0{,}250\ \theta,$$

$b_3 = 0{,}077,\ b_C = 0{,}106,\ b_D = 0{,}101,\ \lambda^0_{pC} = \lambda^0_{pD} = \lambda^{\bullet}_{pII} = 1{,}52.$

Rezultă

$$\lambda^0_{p3} = 1{,}35.$$

Mecanismul IV

$$\frac{b_4}{\lambda^0_{p4}}\, 2\,\theta + \frac{b_D}{\lambda^0_{pD}}\, \theta + \frac{b_E}{\lambda^0_{pE}}\, \theta = 0{,}250\ \theta,$$

$$b_4 = 0{,}057,\ b_D = 0{,}101,\ b_E = 0{,}113,\ \lambda^0_{pD} = \lambda^0_{pE} = \lambda^{*}_{pII} = 1{,}52.$$

Rezultă

$$\lambda^0_{p4} = 1{,}05.$$

Momentele plastice optime sînt date de relația (9′):

$$M^0_{p1} = +\left(0{,}072\,G + \frac{0{,}098}{1{,}14}P_r\right)l = +\,(0{,}072\ G + 0{,}086\ P_r)\,l,$$

$$M^0_{p2} = +\left(0{,}034\,G + \frac{0{,}077}{1{,}52}P_r\right)l = +\,(0{,}034\ G + 0{,}051\ P_r)\,l,$$

$$M^0_{p3} = +\left(0{,}044\,G + \frac{0{,}077}{1{,}35}P_r\right)l = +\,(0{,}044\ G + 0{,}057\ P_r)\,l,$$

$$M^0_{p4} = +\left(0{,}041\,G + \frac{0{,}057}{1{,}05}P_r\right)l = +\,(0{,}041\ G + 0{,}054\ P_r)\,l,$$

$$M^0_{pB} = -\left(0{,}106\,G + \frac{0{,}119}{1{,}52}P_r\right)l = -\,(0{,}106\ G + 0{,}078\ P_r)\,l,$$

$$M^0_{pC} = -\left(0{,}077\,G + \frac{0{,}106}{1{,}52}P_r\right)l = -\,(0{,}077\ G + 0{,}070\ P_r)\,l,$$

$$M^0_{pD} = -\left(0{,}085\,G + \frac{0{,}101}{1{,}52}P_r\right)l = -\,(0{,}085\ G + 0{,}067\ P_r)\,l,$$

$$M^0_{pE} = -\left(0{,}082\,G + \frac{0{,}113}{1{,}52}P_r\right)l = -\,(0{,}082\ G + 0{,}074\ P_r)\,l.$$

CONCLUZII

Se prezintă deci principiul care permite obținerea soluției optime a momentelor plastice în cazul structurilor de beton armat alcătuite din bare. Acest principiu este fundamentat teoretic prin demonstrarea a trei teoreme.

Teoria elaborată se bazează pe concepția coeficientului de supraîncărcare plastică.

Primită la redacție la 17 august 1963

A NEW CONCEPT IN THE PLASTIC DESIGN OF REINFORCED CONCRETE STRUCTURES

ABSTRACT

A theory of the plastic design of redundant reinforced concrete structures is presented, based on the concept of plastic overload factor.

By definition, *the plastic overload factor is the ratio of the load which characterizes the ultimate live loads to the load which characterizes the live loads corresponding to the occurrence of the first plastic hinge*. The number of plastic overload factors of a structure is equal to the number of critical sections.

Based on this concept, a principle is established which leads to the optimum solution of the plastic moments for redundant reinforced concrete structures consisting of bars, under the assumption of their transformation into mechanisms, owing to the effect of permanent loads and ultimate live loads.

In accordance with this principle, *the optimum solution of the plastic moments of a redundant reinforced concrete structure consisting of bars, subjected to loads which may form different loading schemes, is obtained by equalizing between them a certain number of plastic overload factors, depending on the number of additional equations required for obtaining the plastic moments of all the critical sections, so that the remaining plastic overload factors should take values smaller than the common value of the first factors.*

The principle is theoretically based on the demonstration of three theorems.

The last part of the paper includes an example of calculation which illustrates the procedure for obtaining the optimum solution of the plastic moments by applying the theory in the case of a continuous beam.

BIBLIOGRAFIE

1. V. PETCU *Un principiu fundamental în proiectarea structurilor static nedeterminate de beton armat în domeniul plastic*. St. cerc. mec. apl., **XII**, *5* (1961).
2. — *Calculul plastic al plăcilor continue armate cruciș*. Standardizarea, **14**, *5* (1962).
3. — *Problemele proiectării plastice a structurilor static nedeterminate de beton armat*. Revista construcţiilor și a materialelor de construcţii, **13**, *8* (1961).
4. — *Calculul plastic al grinzilor continue de beton armat*. Revista construcţiilor şi a materialelor de construcţii, **15**, *6* (1963).
5. *** *Справочник проектировщика* (*Расчетно-теоретический*). Госстройиздат, Москва, 1960.

STUDII

CALCULUL PLĂCILOR CIRCULARE ELASTICE SUBȚIRI ÎN TEORIA FĂRĂ IPOTEZA LOVE-KIRCHHOFF

DE

V. MANEA

539.3

1. INTRODUCERE

În [1] am arătat cum se poate construi soluția ecuațiilor plăcilor plane elastice subțiri din teoria fără ipoteza Love-Kirchhoff, stabilite în [2], utilizînd metoda funcțiilor analitice. În articolul de față ne propunem ca pe baza rezultatelor obținute să construim soluția concretă pentru placa circulară, placa infinită cu gaură circulară și placa în formă de coroană circulară. Pentru aceasta vom transcrie cîteva dintre rezultatele obținute în [2] necesare pentru calculele ce vor urma.

Astfel, pentru momente și forța tăietoare avem expresiile

$$M_{11}+M_{22}=(\lambda^{*}+\mu)\frac{h^{3}}{3}\left[\varphi'(z)+\overline{\varphi'(z)}\right]+M_{11}^{*}+M_{22}^{*}, \tag{1.1}$$

$$\begin{aligned} M_{22}-M_{11}+2\mathrm{i}\,M_{12}=-\mu\frac{h^{3}}{3}\left[\bar{z}\,\varphi''(z)+\chi''(z)\right]+M_{22}^{+}-{}\\ -M_{11}^{+}+2\mathrm{i}\,M_{12}^{+}+M_{22}^{*}-M_{11}^{*}+2\mathrm{i}\,M_{12}^{*}, \end{aligned} \tag{1.2}$$

$$N_{13}-\mathrm{i}N_{23}=4D\varphi''(z)+N_{13}^{+}-\mathrm{i}N_{23}^{+}+N_{13}^{*}-\mathrm{i}N_{23}^{*}, \tag{1.3}$$

unde

$$\begin{aligned} M_{11}^{+}&=-2D'\frac{\partial^{2}V}{\partial x_{1}\partial x_{2}},\\ M_{22}^{+}&=2D'\frac{\partial^{2}V}{\partial x_{1}\partial x_{2}},\\ M_{12}^{+}&=D'\left(\frac{\partial^{2}V}{\partial x_{1}^{2}}-\frac{\partial^{2}V}{\partial x_{2}^{2}}\right), \end{aligned} \tag{1.4}$$

$$M^*_{11} = D\,\Delta U^* - 2D'\,\frac{\partial^2 U^*}{\partial x_2^2},$$

$$M^*_{22} = D\,\Delta U^* - 2D'\,\frac{\partial^2 U^*}{\partial x_1^2}, \tag{1.5}$$

$$M^*_{12} = 2D'\,\frac{\partial^2 U^*}{\partial x_1 \partial x_2},$$

$$N^+_{13} - \mathrm{i}N^+_{23} = -B\left(\frac{\partial V}{\partial x_2} - \mathrm{i}\,\frac{\partial V}{\partial x_1}\right),$$

$$N^*_{13} - \mathrm{i}N^*_{23} = -B\left(\frac{\partial W^*}{\partial x_1} - \mathrm{i}\,\frac{\partial W^*}{\partial x_2}\right), \tag{1.6}$$

iar

$$D = (\lambda^* + 2\mu)\,\frac{h^3}{12},$$

$$D' = \mu\,\frac{h^3}{12}, \tag{1.7}$$

$$B = \mu h,$$

prin h înțelegînd grosimea plăcii.

Rotațiile și deplasarea pe verticală sînt date de relațiile

$$w_1 + \mathrm{i}w_2 = \varphi(z) + z\,\overline{\varphi'(z)} + \overline{\chi'(z)} + w_1^+ + \mathrm{i}w_2^+ + w_1^* + \mathrm{i}w_2^*, \tag{1.8}$$

respectiv

$$w = \mathcal{R}e\left[-\bar{z}\varphi(z) - \chi(z) + 4\,\frac{D}{B}\,\varphi'(z)\right] + w^*, \tag{1.9}$$

unde

$$w_1^+ + \mathrm{i}w_2^+ = -\frac{\partial V}{\partial x_2} + \mathrm{i}\,\frac{\partial V}{\partial x_1},$$

$$w_1^* + \mathrm{i}w_2^* = \frac{\partial U^*}{\partial x_1} + \mathrm{i}\,\frac{\partial U^*}{\partial x_2}, \tag{1.10}$$

respectiv

$$w^* = W^* - U^*. \tag{1.11}$$

În expresiile de mai sus au intervenit funcțiile analitice $\varphi(z)$ și $\chi(z)$ precum și funcția $V(x_1, x_2)$ soluție a ecuației lui Helmholtz

$$D'\,\Delta V - BV = 0. \tag{1.12}$$

Au intervenit de asemenea și funcțiile $U(x_1, x_2)$ și $W(x_1, x_2)$ ce sînt soluții particulare ale ecuațiilor

$$D\Delta U^* - BW^* = 0, \tag{1.13}$$

$$B\Delta W^* - X_3 = 0. \tag{1.14}$$

Determinarea funcțiilor $\varphi(z)$, $\chi(z)$ și $V(x_1, x_2)$ se face cu ajutorul condițiilor la limită. Aceste condiții sînt

$$\begin{aligned} -2\mathrm{i}\,D\left\{2\varphi(z) + z\,\overline{\varphi'(z)} - z\,\varphi'(z) - \frac{\mu}{\lambda^* + 2\mu}\left[\varphi(z) + z\,\overline{\varphi'(z)} + \chi'(z)\right]\right\} + \\ + BzV - 2D'\left(\frac{\partial V}{\partial x_1} + \mathrm{i}\,\frac{\partial V}{\partial x_2}\right) + C_1 = \int_0^s (M_{n1}^{**} + \mathrm{i}M_{n2}^{**} - zN_{n3}^{**})\,\mathrm{d}s \quad \text{pe } L, \end{aligned} \tag{1.15}$$

$$2\mathrm{i}\,D\left[\overline{\varphi'(z)} - \varphi'(z)\right] - BV + C_0 = \int_0^s N_{n3}^{**}\,\mathrm{d}s \quad \text{pe } L, \tag{1.16}$$

pentru prima problemă, respectiv

$$\varphi(z) + z\overline{\varphi'(z)} + \overline{\chi'(z)} - \frac{\partial V}{\partial x_2} + \mathrm{i}\,\frac{\partial V}{\partial x_1} = w_1^{**} + \mathrm{i}w_2^{**} \quad \text{pe } L, \tag{1.17}$$

$$\mathcal{R}e\left[-\bar{z}\varphi(z) - \chi(z) + 4\,\frac{D}{B}\,\varphi'(z)\right] = w^{**}, \tag{1.18}$$

pentru cea de-a doua, L fiind conturul plăcii. S-a notat mai sus

$$M_{n1}^{**} + \mathrm{i}M_{n2}^{**} = M_{n1} + \mathrm{i}M_{n2} - (M_{n1}^* + \mathrm{i}M_{n2}^*),\, N_{n3}^{**} = N_{n3} - N_{n3}^*, \tag{1.19}$$

respectiv

$$w_1^{**} + \mathrm{i}w_2^{**} = w_1 + \mathrm{i}w_2 - (w_1^* + \mathrm{i}w_2^*),\ w^{**} = w - w^*, \tag{1.20}$$

unde M_{n1}, M_{n2}, N_{n3}, respectiv w_1, w_2, w, sînt date pe frontieră, iar

$$(M_{n1}^* + \mathrm{i}M_{n2}^*)\,\mathrm{d}s = \mathrm{i}\,\Delta U^*\,\mathrm{d}z + 2\mathrm{i}\mathrm{d}\left(\frac{\partial U^*}{\partial x_1} + \mathrm{i}\,\frac{\partial U^*}{\partial x_2}\right),\, N_{n3}^* = B\,\frac{\mathrm{d}W^*}{\mathrm{d}n}, \tag{1.21}$$

respectiv

$$w_1^* + \mathrm{i}w_2^* = \frac{\partial U^*}{\partial x_1} + \mathrm{i}\,\frac{\partial U^*}{\partial x_2},\ w^* = W^* - U^*\cdot \tag{1.22}$$

Ne vor fi utile în cele ce urmează relațiile

$$M_{n1} + \mathrm{i}M_{n2} = (M_{nn} + \mathrm{i}M_{ns})\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}, \tag{1.23}$$

$$w_1 + \mathrm{i}w_2 = (w_n + \mathrm{i}w_s)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}. \tag{1.24}$$

2. PLACA CIRCULARĂ

Pentru construirea soluției în acest caz vom exprima funcțiile $\varphi(z)$ și $\chi(z)$ sub forma unor serii de puteri

$$\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n , \tag{2.1}$$

$$\chi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a'_n z^n \cdot \tag{2.2}$$

În ceea ce privește funcția $V(x_1, x_2)$, utilizînd coordonatele polare, se poate exprima sub forma

$$V(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} I_n(\nu r)\,(b_n \cos n\theta + c_n \sin n\theta), \tag{2.3}$$

sau sub formă complexă

$$V(r,\theta) = \sum_{-\infty}^{\infty} a''_n\, I_n(\nu r)\, \mathrm{e}^{n\mathrm{i}\theta} , \tag{2.3'}$$

unde $I_n(\nu r)$ reprezintă funcțiile Bessel de speța întîia de argument imaginar, pentru care avem $I_n(\nu r) = I_{-n}(\nu r)$, iar

$$a''_n = \frac{b_n - \mathrm{i}c_n}{2} \tag{2.4}$$

și evident

$$a''_{-n} = \overline{a''_n} . \tag{2.4'}$$

Am notat mai sus

$$\nu^2 = \frac{B}{D} \cdot \tag{2.5}$$

Determinarea coeficienților din seriile (2.1), (2.2) și (2.3') o facem cu ajutorul condițiilor la limită. Pentru prima problemă vom folosi condițiile (1.15) și (1.16). Scriind membrii din dreapta ai acestora sub forma

$$\int_0^\theta (M^{**}_{n1} + \mathrm{i}M^{**}_{n2} - R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\, R\mathrm{d}\theta = \sum_{-\infty}^{\infty} A_k\, \mathrm{e}^{k\mathrm{i}\theta} , \tag{2.6}$$

$$\int_0^\theta N^{**}_{n3}\, R\mathrm{d}\theta = \sum_{-\infty}^{\infty} B_k\, \mathrm{e}^{k\mathrm{i}\theta} , \tag{2.7}$$

unde presupunem că M^{**}_{n1}, M^{**}_{n2} și N^{**}_{n3} sînt funcții de θ a căror primă derivată satisface condițiile lui Dirichlet și ținînd seama de relația

$$\frac{\partial}{\partial x_1} + \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial x_2} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\left(\frac{\partial}{\partial r} + \mathrm{i}\frac{\partial}{r\partial\theta}\right) \tag{2.8}$$

în urma înlocuirii în condițiile amintite conform cu (2.1), (2.2) și (2.3'), în care punem $z = Re^{i\theta}$, respectiv $r = R$, R fiind raza plăcii, obținem

$$\begin{gathered} -2iD\Big\{2\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n e^{ni\theta} + 2\bar{a}_1 Re^{i\theta} + \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\bar{a}_{n+2}R^{n+2}e^{-ni\theta} - \\ -\sum_{n=0}^{\infty} na_n R^n e^{ni\theta} - \frac{\mu}{\lambda^* + 2\mu}\Big[\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n e^{ni\theta} + \bar{a}_1 Re^{i\theta} + \\ + \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\bar{a}_{n+1}R^{n+2}e^{-ni\theta} + \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\bar{a}'_{n+1}R^n e^{-ni\theta}\Big]\Big\} + \\ + 2D'\sum_{-\infty}^{\infty} a''_{n-1}\mathcal{J}_{n-1}(\nu R)e^{ni\theta} + C_1 = \sum_{-\infty}^{\infty} A_k\, e^{ki\theta}, \end{gathered} \tag{2.9}$$

$$\begin{gathered} 2iD\Big[\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\bar{a}_{n+1}R^n e^{-ni\theta} - \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}R^n e^{ni\theta}\Big] - \\ - B\sum_{-\infty}^{\infty} a''_n I_n(\nu R)e^{ni\theta} + C_0 = \sum_{-\infty}^{\infty} B_k\, e^{ki\theta}. \end{gathered} \tag{2.10}$$

Am notat în (2.9)

$$\mathcal{J}_{n-1}(\nu R) = \left(\frac{\nu^2 R}{2} + \frac{n-1}{R}\right) I_{n-1}(\nu R) - \left(\frac{dI_{n-1}(\nu r)}{dr}\right)_{r=R}. \tag{2.11}$$

Identificînd coeficienții de pe lîngă e^0, $e^{i\theta}$, $e^{ni\theta}$ și $e^{-ni\theta}$ în (2.9) și (2.10) rezultă ecuațiile algebrice

$$\begin{gathered} -2iD\Big[2a_0 + 2\bar{a}_2 - \frac{\mu}{\lambda^* + 2\mu}(a_0 + 2\bar{a}_2 R^2 + \bar{a}'_1)\Big] + 2D' a''_{-1}\mathcal{J}_{-1}(\nu R) = A_0 - C_1 \\ -2iD\Big[2a_1 R + \bar{a}_1 R - a_1 R - \frac{\mu}{\lambda^* + 2\mu}(a_1 + \bar{a}_1)R\Big] + 2D' a''_0\mathcal{J}_0(\nu R) = A_1 \\ -2iD\Big(2a_n R^n - na_n R^n - \frac{\mu}{\lambda^* + 2\mu}a_n R^n\Big) + 2D' a''_{n-1}\mathcal{J}_{n-1}(\nu R) = A_n \\ \text{(pentru } n \geqslant 2\text{)}, \\ -2iD\Big\{(n+2)\bar{a}_{n+2}R^{n+2} - \frac{\mu}{\lambda^* + 2\mu}[(n+2)\bar{a}_{n+2}R^{n+2} + (n+1)\bar{a}'_{n+1}R^n]\Big\} + \\ + 2D' a''_{-n-1}\mathcal{J}_{-n-1}(\nu R) = A_n \qquad \text{(pentru } n \geqslant 1\text{)}, \end{gathered} \tag{2.12}$$

respectiv

$$2iD(\bar{a}_1 - a_1) - Ba''_0 I_0(\nu R) = B_0 - C_0,$$

$$-2\mathrm{i}D(n+1)\,a_{n+1}\,R^n - Ba_n''\,I_n(\nu R) = B_n \qquad (\text{pentru } n \geqslant 1), \qquad (2.13)$$

$$2\mathrm{i}D\,(n+1)\,\bar{a}_{n+1}\,R^n - Ba_{-n}''\,I_{-n}\,(\nu R) = B_{-n} \qquad (\text{pentru } n \geqslant 1).$$

La aceste ecuații adaugăm condiția ca rotația de rigid să fie nulă adică [2]

$$a_0 + \bar{a}_1' = 0. \qquad (2.14)$$

Din cea de-a doua ecuație (2.12) rezultă

$$a_0'' = \frac{\mathcal{R}e\,A_1}{2D'\mathcal{J}_0(\nu R)}, \qquad (2.15)$$

$$\mathcal{R}e\,a_1 = -\frac{\mu}{\lambda^* + \mu}\,\frac{\mathcal{J}m A_1}{4D'R}, \qquad (2.16)$$

iar din prima ecuație (2.13) că $\mathcal{J}\,n\,a_1$ poate fi luată arbitrară. Rezolvînd ecuația a treia (2.12) împreună cu cea de-a doua (2.13), în care schimbăm n cu $n-1$, obținem

$$a_n = \mathrm{i}\,\frac{BI_{n-1}(\nu R)\,A_n + 2D'\mathcal{J}_{n-1}(\nu R)\,B_{n-1}}{BD\,I_{n-1}(\nu R)\,R^n\left(2 - n - \dfrac{\mu}{\lambda^* + 2\mu}\right) + 2DD'\mathcal{J}_{n-1}(\nu R)\,R^{n-1}}$$

$$(\text{pentru } n \geqslant 2), \qquad (2.17)$$

$$a_{n-1}'' = -\frac{2\mathrm{i}DR^{n-1}\,na_n}{BI_{n-1}(\nu R)} - \frac{B_{n-1}}{BI_{n-1}(\nu R)} \qquad (\text{pentru } n \geqslant 2). \qquad (2.18)$$

Din prima ecuație (2.12) împreună cu (2.14) deducem

$$a_0 = -\bar{a}_1' = \mathrm{i}\,\frac{C_1 - A_0}{4D} - \frac{\lambda^* + \mu}{\lambda^* + 2\mu}\,R^2\,\bar{a}_2 - \frac{\mathrm{i}\,\mu}{\lambda^* + 2\mu}\,\mathcal{J}_{-1}(\nu R)\,\bar{a}_1'' \qquad (2.19)$$

iar din ultima (2.12)

$$a_{n+1}' = \frac{\lambda^* + \mu}{\mu}\cdot\frac{n+2}{n+1}\,R^2\,a_{n+2} - \mathrm{i}\,\frac{\mathcal{J}_{-1}(\nu R)\,a_{n+1}''}{(n+1)\,R^n} + \mathrm{i}\,\frac{A_{-n}}{2(n+1)\,D'}$$

$$(\text{pentru } n \geqslant 1). \qquad (2.20)$$

Ultima ecuație (2.13) coincide cu penultima deoarece $B_n = \overline{B}_{-n}$, după cum rezultă din (2.7).

Pentru cea de-a doua problemă scriem părțile drepte ale expresiilor (1.17) și (1.18) sub forma

$$w_1^{**} + \mathrm{i}\,w_2^{**} = \sum_{-\infty}^{\infty} A_k'\,e^{ki\theta} \qquad \text{pe } L, \qquad (2.21)$$

$$w^{**} = \sum_{-\infty}^{\infty} B_k'\,e^{ki\theta} \qquad \text{pe } L, \qquad (2.22)$$

unde presupunem că $w_1^{**} + \mathrm{i}w_2^{**}$ și w^{**} sînt funcții de θ ale căror derivate de ordinul doi satisfac condițiile lui Dirichlet, și apoi înlocuim conform cu (2.1), (2.2) și (2.3′) obținînd

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n \mathrm{e}^{n\mathrm{i}\theta} + a_1 R\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)\,\bar{a}_{n+2} R^{n+2}\,\mathrm{e}^{-n\mathrm{i}\theta} + \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\,\bar{a}'_{n+1} R^n \mathrm{e}^{-n\mathrm{i}\theta} + \\ + \mathrm{i} \sum_{-\infty}^{\infty} a''_{n-1}\, \mathfrak{L}_{n-1}(\nu R)\,\mathrm{e}^{n\mathrm{i}\theta} = \sum_{-\infty}^{\infty} A'_k\, \mathrm{e}^{k\mathrm{i}\theta}, \tag{2.23}$$

respectiv

$$-a_0 R\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} - \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} R^{n+1} \mathrm{e}^{n\mathrm{i}\theta} - \sum_{n=0}^{\infty} a'_n R^n \mathrm{e}^{n\mathrm{i}\theta} + 4\frac{D}{B}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\,a_{n+1} R^n \mathrm{e}^{n\mathrm{i}\theta} - \\ - \bar{a}_0 R\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - \sum_{n=0}^{\infty} \bar{a}_{n+1} R^{n+2}\mathrm{e}^{-n\mathrm{i}\theta} - \sum_{n=0}^{\infty} \bar{a}'_n R^n \mathrm{e}^{-n\mathrm{i}\theta} + \\ + 4\frac{D}{B}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\,\bar{a}_{n+1} R^n \mathrm{e}^{n\mathrm{i}\theta} = 2\sum_{-\infty}^{\infty} B'_k\,\mathrm{e}^{k\mathrm{i}\theta}. \tag{2.24}$$

Am notat mai sus

$$\mathfrak{L}_{n-1}(\nu R) = \left(\frac{\mathrm{d}I(\nu r)}{\mathrm{d}r}\right)_{r=R} - \frac{n-1}{R} I_{n-1}(\nu R). \tag{2.25}$$

Identificînd coeficienții de pe lîngă e^0, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$, $\mathrm{e}^{n\mathrm{i}\theta}$ și $\mathrm{e}^{-n\mathrm{i}\theta}$ în aceste egalități, rezultă următoarele ecuații algebrice:

$$\begin{gathered} a_0 + 2\bar{a}_2 R^2 + \bar{a}'_1 + \mathrm{i}a''_{-1}\,\mathfrak{L}_{-1}(\nu R) = A'_0, \\ (a_1 + \bar{a}_1) R + \mathrm{i}a_0\,\mathfrak{L}_0(\nu R) = A'_1, \\ a_n R^n + \mathrm{i}a''_{n-1}\,\mathfrak{L}_{n-1}(\nu R) = A'_n \qquad (\text{pentru } n \geqslant 2), \end{gathered} \tag{2.26}$$

$$(n+2)\,\bar{a}_{n+2} R^{n+2} + (n+1)\,\bar{a}'_{n+1} R^n + \mathrm{i}a''_{-n-1}\,\mathfrak{L}_{-n-1}(\nu R) = A'_{-n} \ (\text{pentru } n \geqslant 1),$$

respectiv

$$\begin{gathered} -(a_1+\bar{a}_1)\left(R^2 - 4\frac{D}{B}\right) - a'_0 - \bar{a}'_0 = 2B'_0, \\ -a_2\left(R^3 - 8\frac{DR}{B}\right) - a'_1 R - \bar{a}_0 R = 2B'_1, \\ -\bar{a}_2\left(R^3 - 8\frac{DR}{B}\right) - \bar{a}'_1 R - a_0 R = 2B'_{-1}, \\ -a_{n+1}\left[R^{n+2} - 4(n+1)\frac{DR^n}{B}\right] - a'_n R^n = 2B'_n, \end{gathered} \tag{2.27}$$

$$-\bar{a}_{n+1}\left[R^{n+2}-4\,(n+1)\,\frac{DR^{n}}{B}\right]-\bar{a}'_{n}\,R^{n}=2B'_{-n}.$$

Din ecuația a doua (2.26) deducem

$$\mathcal{Re}\,a_1=\frac{\mathcal{Re}\,A'_1}{2R}, \tag{2.28}$$

$$a''_0=\frac{\mathcal{Im}\,A'_1}{\mathfrak{L}_0\,(\nu R)}, \tag{2.29}$$

iar din prima (2.27)

$$\mathcal{Re}\,a'_0=-B'_0-\mathcal{Re}\,a_1\left(R^2-4\,\frac{D}{B}\right). \tag{2.30}$$

Deoarece $B'_n=\bar{B}'_n$, ultimele patru ecuații ale sistemului (2.27) se reduc la două ecuații independente, de exemplu a doua și a patra. Conjugata ecuației întîia și ecuația a treia pentru $n=2$ din (2.26), împreună cu ecuația a doua (2.27), formează sistemul

$$\begin{gathered}\bar{a}_0+a'_1+2a_2\,R^2-\mathrm{i}a''_1\,\mathfrak{L}_{-1}\,(\nu R)=A'_0\,,\\ a_2\,R^2+\mathrm{i}a''_1\,\mathfrak{L}_1\,(\nu R)=A'_2\,,\\ -\,(\bar{a}_0+a'_1)\,R-a_2\left(R^3-8\,\frac{DR}{B}\right)=2B'_1.\end{gathered} \tag{2.31}$$

Înlocuind n cu $n+1$ în ecuația a treia și n cu $n-1$ în conjugata celei de-a patra ecuații (2.26) și adăugînd ecuația a patra (2.27) avem

$$\begin{gathered}a_{n+1}\,R^{n+1}+\mathrm{i}a''_n\,\mathfrak{L}_n\,(\nu R)=A'_{n+1},\\ (n+1)\,a_{n+1}\,R^{n+1}+na'_n\,R^{n-1}-\mathrm{i}a''_n\,\mathfrak{L}_{-n}(\nu R)=\bar{A}'_{-n+1}\quad(\text{pentru } n\geqslant 2),\\ -\,a_{n+1}\left[R^2-4\,(n+1)\,\frac{D}{B}\right]R^n-a'_n\,R^n=2B'_n.\end{gathered} \tag{2.32}$$

Rezolvînd sistemul (2.31) și (2.32) obținem

$$\bar{a}_0+a'_1=-\,\frac{A'_0\,\mathfrak{L}_1\,(\nu R)+A'_2\,\mathfrak{L}_{-1}\,(\nu R)+2B_{-1}\,R\,[2\mathfrak{L}_1\,(\nu R)+\mathfrak{L}_{-1}\,(\nu R)]}{\left(R^2+8\,\frac{D}{B}\right)\mathcal{L}_1(\nu R)+R^2\,\mathfrak{L}_{-1}\,(\nu R)}, \tag{2.33}$$

$$a_2=\frac{[A'_0\,\mathfrak{L}_1\,(\nu R)+A'_2\,\mathfrak{L}_{-1}\,(\nu R)]\,R+2B'_{-1}\,\mathfrak{L}_1\,(\nu R)}{\left(R^2+8\,\frac{D}{B}\right)R\,\mathfrak{L}_1\,(\nu R)+R^3\,\mathfrak{L}_{-1}\,(\nu R)}, \tag{2.34}$$

$$a''_1=\mathrm{i}\,\frac{R^2\,\bar{A}'_0-\left(R^2+8\,\frac{D}{B}\right)A'_2+2B'_1\,R}{\left(R^2+8\,\frac{D}{B}\right)\mathfrak{L}_1\,(\nu R)+R^2\,\mathfrak{L}_{-1}\,(\nu R)}, \tag{2.35}$$

respectiv

$$a_{n+1} = \frac{\overline{A}'_{-n+1}\,\mathfrak{L}_n(\nu R) + A'_{n+1}\,\mathfrak{L}_{-n}(\nu R) + 2n\,B'_n\,R^{-1}\,\mathfrak{L}_n(\nu R)}{\left[R^2 + 4n(n+1)\dfrac{D}{B}\right]R^{n-1}\,\mathfrak{L}_n(\nu R) + R^{n+1}\,\mathfrak{L}_{-n}(\nu R)}, \qquad (2.36)$$

$$a'_n = -\frac{\left[R^2 - 4n(n+1)\dfrac{D}{B}\right]\left[A'_{n+1}\,\mathfrak{L}_{-n}(\nu R) + \overline{A}'_{-n+1}\,\mathfrak{L}_n(\nu R)\right]}{\left[R^2 + 4n(n+1)\dfrac{D}{B}\right]R^{n-1}\,\mathfrak{L}_n(\nu R) + R^{n+1}\,\mathfrak{L}_{-n}(\nu R)} + \frac{+\,2B'_n\,R\left[(n+1)\,\mathfrak{L}_n(\nu R) + \mathfrak{L}_{-n}(\nu R)\right.}{\left[R^2 + 4n(n+1)\dfrac{D}{B}\right]R^{n-1}\,\mathfrak{L}_n(\nu R) + R^{n+1}\,\mathfrak{L}_{-n}(\nu R)}, \qquad (2.37)$$

$$a''_n = \mathrm{i}\,\frac{-A'_{n+1}\left[R^2 + 4n(n+1)\dfrac{D}{B}\right] + \overline{A}'_{-n+1}\,R^2 + 2nB'_n\,R}{\left[R^2 + 4n(n+1)\dfrac{D}{B}\right]\mathfrak{L}_n(\nu R) + R^2\,\mathfrak{L}_{-n}(\nu R)}, \qquad (2.38)$$

formule valabile pentru $n \geqslant 2$.

Prespunerea făcută în legătură cu dezvoltările în serie Fourier (2.6), (2.7) sau (2.21), (2.22) ne asigură că coeficienții acestora satisfac inegalitățile [3]

$$|A_k| < \frac{M}{k^3},\ |A_{-k}| < \frac{M}{k^3},$$
$$(k = 1, 2, \ldots) \qquad (2.39)$$
$$|B_k| < \frac{N}{k^3},\ |B_{-k}| < \frac{N}{k^3},$$

respectiv

$$|A'_k| < \frac{M'}{k^3},\ |A'_{-k}| < \frac{M'}{k^3},$$
$$(2.40)$$
$$|B'_k| < \frac{N'}{k^3},\ |B'_{-k}| < \frac{N'}{k^3},$$

unde M, N, M', N' sînt constante convenabil alese. Pe baza formulelor (2.17), (2.18) și (2.20), respectiv (2.36), (2.37) și (2.38), rezultă că coeficienții seriilor (2.1), (2.2) și (2.3′) satisfac inegalitățile

$$|a_n| < \frac{P}{n^3},\ |a'_n| < \frac{P'}{n^3},\ |a''_n| < \frac{P''}{n^3}, \qquad (2.41)$$

P, P' și P'' fiind constante, ceea ce asigură convergența absolută și uniformă a acestor serii.

În ceea ce priveşte unicitatea soluţiei, este uşor de văzut că în cazul în care A_n şi B_n, respectiv A'_n şi B'_n, sînt nuli rezultă din formulele (2.17), (2.18) şi (2.20), respectiv (2.36), (2.37) şi (2.38), că şi coeficienţii seriilor (2.1), (2.2) şi (2.3') sînt nuli, ceea ce arată că soluţia obţinută este într-adevăr unică.

3. PLACA INFINITĂ CU GAURĂ CIRCULARĂ

După cum am arătat în [2], pentru construirea soluţiei în acest caz trebuie să luăm

$$\varphi(z) = \frac{\mathscr{M}_1^{**} + \mathrm{i}\mathscr{M}_2^{**}}{8\pi D} \ln z + \Gamma z + \gamma + \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} z^{-n} , \tag{3.1}$$

$$\chi(z) = \frac{\mathscr{M}_1^{**} - \mathrm{i}\mathscr{M}_2^{**}}{8\pi D} z \ln z + \gamma_1 \ln z + \Gamma' z^2 + \gamma' z + \gamma'' + \sum a'_{-n} z^{-n}, \tag{3.2}$$

$$V(r,\theta) = \sum_{\infty}^{\infty} a'''_n K_n(\nu r)\, \mathrm{e}^{ni\theta} , \tag{3.3}$$

unde

$$\mathscr{M}_1^{**} + \mathrm{i}\mathscr{M}_2^{**} = -\oint_{L_1} (M_{n1}^{**} + \mathrm{i}M_{n2}^{**} - zN_{n3}^{**})\, \mathrm{d}s , \tag{3.4}$$

$$(\lambda^* + \mu)\frac{h^3}{3}(\Gamma + \bar{\Gamma}) = \lim_{|z|\to\infty} (M_{11}^{**} + M_{22}^{**}), \tag{3.5}$$

$$-\mu\frac{h^3}{3} 2\Gamma' = \lim_{|z|\to\infty} (M_{22}^{**} - M_{11}^{**} + 2\mathrm{i}\, M_{12}^{**}). \tag{3.6}$$

Sensul de integrare în (3.4) este cel care lasă la stînga domeniul exterior cercului de rază R şi prin urmare $\mathrm{d}s = -R\,\mathrm{d}\theta$, iar limitele de integrare $0, -2\pi$. Totuşi, în cele ce urmează, vom considera pozitiv sensul trigonometric, luînd în schimb momentele şi forţa tăietoare aplicate pe contur cu semnul minus. Prin $K_n(\nu r)$ am notat funcţiile Bessel de speţa a doua de argument imaginar ce au proprietatea $K_n(\nu r) = K_{-n}(\nu r)$. Avem de asemenea

$$a'''_{-n} = \overline{a'''_n}. \tag{3.7}$$

În cazul primei probleme vom scrie părţile drepte ale condiţiilor la limită (1.15) şi (1.16), în care schimbăm semnul momentelor şi forţei tăietoare, sub forma

$$-\int_0^{\theta} (M_{n1}^{**} + \mathrm{i}M_{n2}^{**} - R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} N_{n3}^{**})\, R\mathrm{d}\theta = \alpha\theta + \sum_{-\infty}^{\infty} A_k \mathrm{e}^{ki\theta} \cdot \tag{3.8}$$

$$-\int_0^{\theta} N_{n3}^{**}\, R\mathrm{d}\theta = \sum_{-\infty}^{\infty} B_k \mathrm{e}^{ki\theta} , \tag{3.9}$$

unde presupunem că M_{n1}^{**}, M_{n2}^{**} și N_{n3}^{**} satisfac aceleași condiții ca în cazul dezvoltărilor (2.6) și (2.7). În [2] am arătat că momentele rămîn mărginite pentru $|z| \to \infty$ dacă

$$\mathcal{N}_3^{**} = -\oint_{L_1} N_{n3}^{**}\, \mathrm{d}s = 0\,, \tag{3.10}$$

ceea ce justifică de ce în (3.9) nu apare un termen proporțional cu θ ca în (3.8).

Înlocuind acum în (1.15) și (1.16) conform cu (3.1), (3.2) și (3.3) pentru $z = R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, respectiv $r = R$, precum și cu (3.8) și (3.9), obținem

$$\begin{aligned} &-2\mathrm{i}\left\{\frac{\mathcal{M}_1^{**} + \mathrm{i}\mathcal{M}_2^{**}}{8\pi D}\left(\frac{\lambda^* + \mu}{\lambda^* + 2\mu} 2\ln R - \frac{\lambda^* + 3\mu}{\lambda^* + 2\mu}\right) + \frac{(2\lambda^* + 3\mu)\gamma - \mu\overline{\gamma'}}{\lambda^* + 2\mu} + \right.\\ &+ \frac{\mathcal{M}_1^{**} + \mathrm{i}\mathcal{M}_2^{**}}{4\pi D}\mathrm{i}\theta + \left[\frac{\lambda^* + \mu}{\lambda^* + 2\mu}(\Gamma + \overline{\Gamma})R - \frac{\mu}{\lambda + 2\mu}\cdot\frac{\gamma_1}{R}\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - \frac{2\mu}{\lambda^* + 2\mu}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} + \\ &+ \frac{\lambda^* + \mu}{\lambda^* + 2\mu}\,\frac{\mathcal{M}_1^{**} - \mathrm{i}\mathcal{M}_2^{**}}{8\pi D} + 2\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} R^{-n}\mathrm{e}^{-n\mathrm{i}\theta} - \sum_{n=1}^{\infty} n\overline{a}_{-n} R^{-n}\mathrm{e}^{(n+2)\mathrm{i}\theta} + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} n a_{-n} R^{-n}\mathrm{e}^{-n\mathrm{i}\theta} - \frac{\mu}{\lambda^* + 2\mu}\left[\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} R^{-n}\mathrm{e}^{-n\mathrm{i}\theta} - \sum_{n=1}^{\infty} n a_{-n} R^{-n}\mathrm{e}^{-(n+2)\mathrm{i}\theta} - \right.\\ &\left.\left. - \overline{a}'_{-1} R^{-2}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta} - \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)\overline{a}'_{-n-1}\mathrm{e}^{(n+2)\mathrm{i}\theta}\right]\right\} + 2D'\sum_{-\infty}^{\infty} a_{n-1}''' \mathcal{K}_{n-1}(\nu R)\,\mathrm{e}^{n\mathrm{i}\theta} + \\ &+ C_1 = \alpha\theta + \sum_{-\infty}^{\infty} A_k \mathrm{e}^{k\mathrm{i}\theta}\,, \end{aligned} \tag{3.11}$$

respectiv

$$\begin{aligned} &2\mathrm{i}D\left[\Gamma - \overline{\Gamma} + \frac{\mathcal{M}_1^{**} - \mathrm{i}\mathcal{M}_2^{**}}{8\pi D} R^{-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - \frac{\mathcal{M}_1^{**} + \mathrm{i}\mathcal{M}_2^{**}}{8\pi D} R^{-1}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} - \right.\\ &\left. - \sum_{n=1}^{\infty} n a_{-n} R^{(n+1)\mathrm{i}\theta} + \sum_{n=1}^{\infty} n\overline{a}_{-n} R^{-n-1}\,\mathrm{e}^{-(n+1)\mathrm{i}\theta}\right] - \\ &- B\sum_{-\infty}^{\infty} a_{n+1}''' K_{n+1}(\nu R)\,\mathrm{e}^{(n+1)\mathrm{i}\theta} + C_0 = \sum_{-\infty}^{\infty} B_k \mathrm{e}^{k\mathrm{i}\theta}\,. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Am notat în (3.12)

$$\mathcal{K}_{n-1}(\nu R) = \left(\frac{\nu^2 R}{2} + \frac{n-1}{R}\right) K_{n-1}(\nu R) - \left(\frac{\mathrm{d}K_{n-1}(\nu r)}{\mathrm{d}r}\right)_{r=R}. \tag{3.13}$$

Identificînd coeficienții de pe lîngă e^0, θ, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$, $\mathrm{e}^{n\mathrm{i}\theta}$ etc. în aceste egalități rezultă

$$
\begin{gathered}
-2\mathrm{i}D\left[\frac{\mathcal{M}_1^{**}+\mathrm{i}\mathcal{M}_2^{**}}{8\pi D}\left(\frac{\lambda^*+\mu}{\lambda^*+2\mu}2\ln R-\frac{\lambda^*+3\mu}{\lambda^*+2\mu}\right)+\frac{(2\lambda^*+3\mu)\gamma-\mu\overline{\gamma'}}{\lambda^*+2\mu}\right]+ \\
+2D'\,a_{-1}'''\,\mathcal{K}_{-1}(\nu R)=A_0-C_1,\ \frac{\mathcal{M}_1^{**}\mathrm{i}\mathcal{M}_2^{**}}{2\pi}=\alpha, \\
-2\mathrm{i}D\left[\frac{\lambda^*+\mu}{\lambda^*+2\mu}(\Gamma+\overline{\Gamma})R-\frac{\mu}{\lambda^*+2\mu}\frac{\gamma_1}{R}\right]+2\,D'\,a_0'''\,\mathcal{K}_0(\nu R)=A_1, \\
-2\,\mathrm{i}D\left[-\frac{2\mu\overline{\Gamma}R}{\lambda^*+2\mu}+\frac{3\lambda^*+5\mu}{\lambda^*+2\mu}a_{-1}R^{-1}\right]+2D'\,a_{-2}'''\,\mathcal{K}_{-2}(\nu R)=A_{-1}, \\
\hfill (3.14) \\
-2\,\mathrm{i}D\left[\frac{\lambda^*+\mu}{\lambda^*+2\mu}\,\frac{\mathcal{M}_1^{**}-\mathrm{i}\mathcal{M}_2^{**}}{8\pi D}+\frac{\mu\overline{a}_{-1}'R^{-2}}{\lambda^*+2\mu}\right]+2D'\,a_1'''\,\mathcal{K}_1(\nu R)=A_2, \\
-2\,\mathrm{i}D\,\frac{(2+n)(\lambda^*+2\mu)-\mu}{\lambda^*+2\mu}a_{-n}R^{-n}+2D'\,a_{-n-1}'''\,\mathcal{K}_{-n-1}(\nu R)=A_{-n} \\
\hfill (\text{pentru } n\geqslant 2), \\
-2\,\mathrm{i}D\left[-\frac{n(\lambda^*+\mu)}{\lambda^*+2\mu}\overline{a}_{-n}R^{-n}+\frac{(n+1)\mu}{\lambda^*+2\mu}\overline{a}_{-n-1}'R^{-n-2}\right]+ \\
+2\,D'\,a_{n+1}'''\,\mathcal{K}_{n+1}(\nu R)=A_{n+2} \qquad (\text{pentru } n\geqslant 1),
\end{gathered}
$$

respectiv

$$
\begin{gathered}
2\,\mathrm{i}D(\Gamma-\overline{\Gamma})-Ba_0'''\,K_0(\nu R)=B_0-C_0, \\
\mathrm{i}\,\frac{\mathcal{M}_1^{**}-\mathrm{i}\mathcal{M}_2^{**}}{4\pi}R^{-1}-Ba_1'''\,K_1(\nu R)=B_1, \\
-\mathrm{i}\,\frac{\mathcal{M}_1^{**}+\mathrm{i}\mathcal{M}_2^{**}}{4\pi}R^{-1}-Ba_{-1}'''\,K_{-1}(\nu R)=B_{-1}, \qquad (3.15) \\
-2\,\mathrm{i}Dn\overline{a}_{-n}R^{-n-1}-Ba_{n+1}'''\,K_{n+1}(\nu R)=B_{n+1} \quad (\text{pentru } n\geqslant 1), \\
2\,\mathrm{i}Dna_{-n}R^{-n-1}-Ba_{-n-1}'''\,K(\nu R)=B_{-n-1} \quad (\text{pentru } n\geqslant 1).
\end{gathered}
$$

La aceste ecuații adăugăm condiția ca rotația de rigid să fie nulă, adică

$$\gamma+\overline{\gamma'}=0 \tag{3.16}$$

precum şi (3.5) şi (3.6) cu ajutorul cărora determinăm $\mathcal{R}e\,\Gamma$ şi Γ'. Din ecuaţia a treia (3.14) rezultă că

$$\gamma_1=\frac{(\lambda^*+2\mu)R}{2\mu D}\,\mathcal{I}m\,A_1+\frac{\lambda^*+\mu}{\mu}R^2(\Gamma+\overline{\Gamma}), \tag{3.17}$$

$$a_0'''=\frac{\mathcal{K}_0(\nu R)}{2D'}\,\mathcal{R}e\,A_1, \tag{3.18}$$

iar din prima (3.15) că $\mathcal{J}m\,\Gamma$ poate fi luată arbitrară. Din ecuația a doua (3.15), identică cu cea de-a treia, deducem

$$a_1''' = \mathrm{i}\,\frac{\mathcal{M}_1^{**} - \mathrm{i}\mathcal{M}_2^{**}}{4\pi BRK_1(\nu R)} - \frac{B_1}{BK_1(\nu R)}, \tag{3.19}$$

iar din cea de-a cincea (3.14)

$$a'_{-1}\,R^{-2} = -\,\frac{\lambda^* + \mu}{\mu}\,\frac{\mathcal{M}_1^{**} + \mathrm{i}\mathcal{M}_2^{**}}{8\pi D} + \frac{\lambda^* + 2\mu}{2\mu}\,\frac{A_2}{D} - \mathcal{K}_1(\nu R)\,\bar{a}_1''' \cdot \tag{3.20}$$

Rezolvînd prima ecuație (3.14) împreună cu (3.16) obținem

$$2\gamma = \mathrm{i}\,\frac{A_0 - C_1}{2D} - \mathrm{i}\,\frac{D'}{D}\,\mathcal{K}_{-1}(\nu R)\,a_1''' - \frac{\mathcal{M}_1^{**} + \mathrm{i}\mathcal{M}_2^{**}}{8\pi D}\left(\frac{\lambda^* + \mu}{\lambda^* + 2\mu}\,2\ln R - \right.$$
$$\left. - \frac{\lambda^* + 3\mu}{\lambda^* + 2\mu}\right). \tag{3.21}$$

Ecuația a patra (3.14) împreună cu conjugata ecuației a patra (3.15) pentru $n = 1$ formează un sistem de două ecuații cu necunoscutele a_{-1} și a_2''' pentru care rezultă valorile

$$a_{-1} = \frac{\mathrm{i}}{2}\,\frac{\left(A_{-1} - \mathrm{i}\,\dfrac{4\mu\,\Gamma' DR}{\lambda^* + 2\mu}\right) BK_2(\nu R) + 2\,\overline{B}_2 D'\,\mathcal{K}_{-2}(\nu R)}{\dfrac{3\lambda^* + 5\mu}{\lambda^* + 2\mu}\,BDR^{-1}K_2(\nu R) - 2DD'\,\mathcal{K}_{-2}(\nu R)}, \tag{3.22}$$

$$a_2''' = -\,\frac{B_2\,\dfrac{3\lambda^* + 5\mu}{\lambda^* + 2\mu}\,DR^{-1} + \left(\overline{A}_{-1} + \mathrm{i}\,\dfrac{4\mu\,\Gamma' DR}{\lambda^* + 2\mu}\right) DR^{-2}}{\dfrac{3\lambda^* + 5\mu}{\lambda^* + 2\mu}\,BDR^{-1}K_2(\nu R) - 2\,DD'\,R^{-2}\,\mathcal{K}_{-2}(\nu R)} \cdot \tag{3.23}$$

Rezolvînd acum ecuația a șasea (3.14) împreună cu conjugata celei de-a patra (3.15) pentru $n \geqslant 2$ obținem

$$a_{-n} = \frac{\mathrm{i}}{2}\,\frac{A_{-n}\,BK_{n+1}(\nu R) + 2\overline{B}_{n+1}\,D'\,\mathcal{K}_{-n-1}(\nu R)}{\dfrac{(2+n)(\lambda^* + 2\mu) - \mu}{\lambda^* + 2\mu}\,BDR^{-n}K_{n+1}(\nu R) - 2n\,DD'R^{-n-1}\,\mathcal{K}_{-n-1}(\nu R)}, \tag{3.24}$$

$$a_{n+1}''' = -\,\frac{B_{n+1}\,\dfrac{(2+n)(\lambda^* + 2\mu) - \mu}{\lambda^* + 2\mu}\,DR^{-n} + n\overline{A}_{-n}\,DR^{-n-1}}{\dfrac{(2+n)(\lambda^* + 2\mu) - \mu}{\lambda^* + 2\mu}\,BDR^{-n}K_{n+1}(\nu R) - 2n\,DD'\,R^{-n-1}\,\mathcal{K}_{-n-1}(\nu R)}. \tag{3.25}$$

Din ultima ecuație (3.14) deducem

$$a'_{-n-1} = -\frac{\mathrm{i}(\lambda^* + 2\mu)R^{n+2}}{2(n+1)\mu D}\overline{A}_{n+2} + \frac{n(\lambda^* + \mu)R^2}{(n+1)\mu}a_{-n} + \mathrm{i}\frac{R^{n+2}\mathcal{K}_{n+1}(\nu R)\overline{a}'''_{n+1}}{n+1} \tag{3.26}$$

valabilă pentru $n \geqslant 1$.

În ceea ce priveşte convergenţa seriilor din (3.1), (3.2) şi (3.3) se poate arăta, urmînd acelaşi raţionament ca la punctul precedent, că, datorită presupunerii admise în legătură cu dezvoltările (3.8) şi (3.9), aceasta este absolută şi uniformă.

4. PLACA ÎN FORMĂ DE COROANĂ CIRCULARĂ

Pentru construirea soluţiei în acest caz vom lua, conform celor stabilite în [2],

$$\varphi(z) = \frac{\mathcal{N}_3^{**}}{8\pi D} z \ln z + \frac{\mathcal{M}_1^{**} + \mathrm{i}\mathcal{M}_2^{**}}{8\pi D}\ln z + \sum_{-\infty}^{\infty} a_n z^n, \tag{4.1}$$

$$\chi(z) = \frac{\mathcal{M}_1^{**} - \mathrm{i}\mathcal{M}_2^{**}}{8\pi D} z \ln z + \gamma_1 \ln z + \sum_{-\infty}^{\infty} a'_n z^n, \tag{4.2}$$

$$V(r, \theta) = \sum_{-\infty}^{\infty} [a''_n I_n(\nu r) + a'''_n K_n(\nu r)]\, \mathrm{e}^{n\mathrm{i}\theta}, \tag{4.3}$$

unde

$$\mathcal{N}_3^{**} = -\oint_{L_1} N_{n3}^{**}\, \mathrm{d}s, \tag{4.5}$$

$$\mathcal{M}_1^{**} + \mathrm{i}\mathcal{M}_2^{**} = -\oint_{L_1} (M_{n1}^{**} + \mathrm{i}M_{n2}^{**} - zN_{n3}^{**})\, \mathrm{d}s, \tag{4.6}$$

sensul de integrare fiind cel care lasă la stînga domeniul exterior cercului interior de rază R_1. Totuşi vom considera pozitiv sensul trigonometric, luînd pe cercul interior momentele şi forţa tăietoare cu semn schimbat. Avem de asemenea

$$a''_{-n} = a''_{n}, \tag{4.7}$$

$$a'''_{-n} = \overline{a}'''_n, \tag{4.8}$$

deoarece $V(r, \theta)$ este o funcţie reală.

În cazul primei probleme vom scrie părţile drepte ale condiţiilor la limită (1.15) şi (1.16) sub forma

$$-\int_0^{\theta} (M_{n1}^{**} + \mathrm{i}M_{n2}^{**} - R_1 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}N_{n3}^{**})\, R\, \mathrm{d}\theta = \alpha_1\theta + \sum_{-\infty}^{\infty} A_{k1}\, \mathrm{e}^{k\mathrm{i}\theta}, \tag{4.9}$$

$$-\int_0^\theta N_{n3}^{**} R_1 \,\mathrm{d}\theta = \beta_1 \theta + \sum_{-\infty}^{\infty} B_{k1} \mathrm{e}^{ki\theta}, \tag{4.10}$$

pentru cercul interior de rază R_1, respectiv

$$\int_0^\theta (M_{n1}^{**} + \mathrm{i} M_{n2}^{**} - R_2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} N_{n3}^{**}) R_2 \,\mathrm{d}\theta = \alpha_2 \theta + \sum_{-\infty}^{\infty} A_{k2} \mathrm{e}^{ki\theta}, \tag{4.11}$$

$$\int_0^\theta N_{n3}^{**} R_2 \,\mathrm{d}\theta = \beta_2 \theta + \sum_{-\infty}^{\infty} B_{k2} \mathrm{e}^{ki\theta}, \tag{4.12}$$

pentru cercul exterior de rază R_2, unde presupunem că M_{n1}^{**}, M_{n2}^{**} și N_{n3}^{**} satisfac aceleași condiții ca în cazul dezvoltărilor (2.6) și (2.7).

Înlocuind în (1.15) și (1.16) conform cu (4.1), (4.2), (4.3), respectiv (4.9) – (4.12), obținem

$$\begin{aligned}
-2\,\mathrm{i}D \Bigg\{ & \frac{\mathscr{M}_1^{**} + \mathrm{i}\mathscr{M}_2^{**}}{8\pi D}\left(\frac{\lambda^* + \mu}{\lambda^* + 2\mu} 2 \ln R_j - \frac{\lambda^* + 3\mu}{\lambda^* + 2\mu}\right) + \frac{\mathscr{M}_1^{**} + \mathrm{i}\mathscr{M}_2^{**}}{4\pi D}\,\mathrm{i}\theta + \\
& + \left[\frac{\mathscr{N}_3^{**}}{8\pi D}\left(\frac{\lambda^* + \mu}{\lambda^* + 2\mu} 2 R_j \ln R_j - \frac{\mu R_j}{\lambda^* + 2\mu}\right) - \frac{\mu}{\lambda^* + 2\mu}\cdot\frac{\gamma_1}{R_j}\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + \\
& + \frac{\lambda^* + \mu}{\lambda^* + 2\mu}\,\frac{\mathscr{M}_1^{**} - \mathrm{i}\mathscr{M}_2^{**}}{8\pi D}\,\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta} + 2\sum_{-\infty}^{\infty} a_n R_j^n \mathrm{e}^{ni\theta} - \sum_{-\infty}^{\infty} (n-2)\,\overline{a}_{-n+2} R_j^{-n+2} \mathrm{e}^{ni\theta} - \\
& - \sum_{-\infty}^{\infty} n\, a_n R_j^n \mathrm{e}^{ni\theta} - \frac{\mu}{\lambda^* + 2\mu}\Bigg[\sum_{-\infty}^{\infty} a_n R_j^n \mathrm{e}^{ni\theta} - \sum_{-\infty}^{\infty} (n-2)\,\overline{a}_{-n+2} R_j^{-n+2} \mathrm{e}^{ni\theta} - \\
& - \sum_{-\infty}^{\infty} (n-1)\,\overline{a}'_{-n+1} R_j^{-n} \mathrm{e}^{ni\theta}\Bigg]\Bigg\} + 2D' \sum_{-\infty}^{\infty} [a''_{n-1} \mathscr{I}_{n-1}(\nu R) + a'''_{n-1} \mathscr{K}_{n-1}(\nu R)]\,\mathrm{e}^{ni\theta} + \\
& + C_{0j} = \alpha_j \theta + \sum_{-\infty}^{\infty} A_{kj} \mathrm{e}^{ki\theta},
\end{aligned} \tag{4.13}$$

$$\begin{aligned}
2\mathrm{i}D \Bigg[& -\frac{\mathscr{N}_3^{**}}{4\pi D}\,\mathrm{i}\theta + \frac{\mathscr{M}_1^{**} - \mathrm{i}\mathscr{M}_2^{**}}{8\pi D} R_j^{-1} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - \frac{\mathscr{M}_1^{**} + \mathrm{i}\mathscr{M}_2^{**}}{8\pi D} R_j^{-1} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} + \\
& + \sum_{-\infty}^{\infty} (-n+1)\,\overline{a}_{-n+1} R_j^{-n} \mathrm{e}^{ni\theta} - \sum_{-\infty}^{\infty} (n+1)\, a_{n+1} R_j^n \mathrm{e}^{ni\theta}\Bigg] - \\
& - B \sum_{-\infty}^{\infty} [a''_n I_n(\nu R) + a'''_n K_n(\nu R)]\,\mathrm{e}^{ni\theta} + C_{1j} = \beta_j \theta + \sum_{-\infty}^{\infty} B_{kj} \mathrm{e}^{ki\theta},
\end{aligned} \tag{4.14}$$

în care indicele $j = 1$ corespunde cercului interior, iar $j = 2$ cercului exterior. Identificînd coeficienții de pe lîngă e^0, θ, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$ etc. în aceste egalități rezultă

$$- 2\,\mathrm{i}D\left[\frac{\mathscr{M}_1^{**} + \mathrm{i}\,\mathscr{M}_2^{**}}{8\pi D}\left(\frac{\lambda^* + \mu}{\lambda^* + 2\mu}2\ \ln R_j - \frac{\lambda^* + 3\mu}{\lambda^* + 2\mu}\right) + 2a_0 + 2\bar{a}_2 R_j^2 - \right.$$

$$\left. - \frac{\mu}{\lambda + 2\mu}(a_0 + 2\bar{a}_2 R_j^2 + \bar{a}_1')\right] + 2D'\,[a_{-1}'' \mathcal{J}_{-1}(\nu R_j) + a_{-1}''' \mathcal{K}_{-1}(\nu R_j)] =$$

$$= A_{0j} - C_{0j}\,, \qquad \frac{\mathscr{M}_1^{**} + \mathrm{i}\,\mathscr{M}_2^{**}}{2\pi} = \alpha_j\,,$$

$$- 2\mathrm{i}D\left[\frac{\mathscr{N}_3^{**}}{8\pi D}\left(\frac{\lambda^* + \mu}{\lambda^* + 2\mu}2\,R_j\ \ln R_j - \frac{\mu\,R_j}{\lambda^* + 2\mu}\right) - \frac{\mu}{\lambda^* + 2\mu}\frac{\gamma_1}{R_j} + \right.$$

$$\left. + \frac{\lambda^* + \mu}{\lambda^* + 2\mu}(a_1 + \bar{a}_1)R_j\right] + 2D'\,[a_0'' \mathcal{J}_0(\nu R_j) + a_0''' \mathcal{K}_0(\nu R_j)] = A_{1j}\,, \tag{4.15}$$

$$- 2\,\mathrm{i}D\left[\frac{\lambda^* + \mu}{\lambda^* + 2\mu}\,\frac{\mathscr{M}_1^{**} - \mathrm{i}\,\mathscr{M}_2^{**}}{8\pi D} - \frac{\mu}{\lambda^* + 2\mu}(a_2 R_j^2 - \bar{a}_{-1}' R_j^{-2})\right] +$$

$$+ 2\,D'\,[a_1'' \mathcal{J}_1(\nu R_j) + a_1''' \mathcal{K}_1(\nu R_j)] = A_{2j}\,,$$

$$- 2\,\mathrm{i}D\left[\frac{(2 - n)(\lambda^* + 2\mu) - \mu}{\lambda^* + 2\mu}a_n R_j^n - \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu}(n - 2)\,\bar{a}_{-n+2} R_j^{-n+2} - \right.$$

$$\left. - (n - 1)\,\bar{a}'_{-n+1} R_j^{-n}\right] + 2D'\ [a_{n-1}'' \mathcal{J}_{n-1}(\nu R_j) + a_{n-1}''' \mathcal{K}_{n-1}(\nu R_j)] = A_{nj}$$

$$(\text{pentru } n \geqslant 3 \text{ și } n \leqslant -1),$$

respectiv

$$2\,\mathrm{i}D\,(\bar{a}_1 - a_1) - B\ [a_0'' I_0(\nu R_j) + a_0''' K_0(\nu R_j)] = B_{0j} - C_{1j}\,, \quad \frac{\mathscr{N}_3^{**}}{2\pi} = \beta_j\,,$$

$$2\,\mathrm{i}D\left[\frac{\mathscr{M}_1^{**} - \mathrm{i}\,\mathscr{M}_2^{**}}{8\pi D}R_j^{-1} - 2\,a_2\,R_j\right] - B\,[a_1'' I_1(\nu R_j) + a_1''' K_1(\nu R_j)] = B_{1j}\,,$$

$$2\,\mathrm{i}D\left[- \frac{\mathscr{M}_1^{**} + \mathrm{i}\,\mathscr{M}_2^{**}}{8\pi D}R_j^{-1} + 2\bar{a}_2 R_j\right] - B[a_{-1}'' I_{-1}(\nu R_j) + a_{-1}''' K_{-1}(\nu R_j)] = B_{-1j}\,, \tag{4.16}$$

$$2\,\mathrm{i}D\,[(- n + 1)\,\bar{a}_{-n+1} R_j^{-n} - (n + 1)\,a_{n+1} R_j^n] - B[a_n'' I_n(\nu R_j) +$$

$$+ a_n''' K_n(\nu R_j)] = B_{nj} \qquad (\text{pentru } n \geqslant 2 \text{ și } n \leqslant -2).$$

Dînd lui j succesiv valorile 1 și 2 obținem un sistem de ecuații cu necunoscutele a_n, a_n', a_n'' și a_n'''. Adăugăm de asemenea condiția ca rotația de rigid să fie nulă, adică

$$a_0 + \bar{a}_1' = 0. \tag{4.17}$$

Se observă din cea de-a doua ecuație (4.15) și (4.16) că soluția este posibilă numai dacă

$$\alpha_1 = \alpha_2, \tag{4.18}$$

respectiv

$$\beta_1 = \beta_2, \tag{4.19}$$

ceea ce este echivalent cu condiția ca rezultanta momentelor și forțelor tăietoare aplicate pe conturul interior și exterior al plăcii să fie nulă.

Din ecuația a treia (4.15) se observă că separînd partea reală de cea imaginară obținem

$$\frac{2\mu D}{R_1}\gamma_1 - 4(\lambda^* + \mu) D R_j \mathcal{R}e\, a_1 = (\lambda^* + 2\mu)\mathcal{I}m\, A_{1j} +$$

$$+ \frac{\mathcal{N}_3^{**}}{4\pi}[2(\lambda^* + \mu) R_j \ln R_j - \mu R_j], \tag{4.20}$$

$$2D'[a_0'' \mathcal{J}_0(\nu R_j) + a_0''' \mathcal{K}_0(\nu R_j)] = \mathcal{R}e\, A_{1j}. \tag{4.21}$$

Înlocuind în fiecare ecuație $j = 1$, respectiv $j = 2$, obținem două sisteme de ecuații algebrice ale căror soluții sînt

$$\gamma_1 = \frac{\lambda^* + 2\mu}{2\mu D}\frac{R_1 R_2}{R_2^2 - R_1^2}(R_2 \mathcal{I}m\, A_{11} - R_1 \mathcal{I}m\, A_{12}) +$$

$$+ \frac{\lambda^* + \mu}{\mu}\frac{\mathcal{N}_3^{**}}{4\pi D}\frac{R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2}(\ln R_1 - \ln R_2), \tag{4.22}$$

$$\mathcal{R}e\, a_1 = \frac{\lambda^* + 2\mu}{4(\lambda^* + \mu)}\frac{R_1 \mathcal{I}m\, A_{11} - R_2 \mathcal{I}m\, A_{12}}{R_2^2 - R_1^2} + \frac{\mathcal{N}_3^{**}}{8\pi D}\frac{1}{R_2^2 - R_1^2}\Bigg[R_1^2 \ln R_1 -$$

$$- R_2^2 \ln R_2 + \frac{\mu(R_2^2 - R_1^2)}{2(\lambda^* + \mu)}\Bigg], \tag{4.23}$$

respectiv

$$a_0'' = \frac{\mathcal{R}e\, A_{11}\mathcal{K}_0(\nu R_2) - \mathcal{R}e\, A_{12}\mathcal{K}_0(\nu R_1)}{2D'[\mathcal{J}_0(\nu R_1)\mathcal{K}_0(\nu R_2) - \mathcal{J}_0(\nu R_2)\mathcal{K}_0(\nu R_1)]}, \tag{4.24}$$

$$a_0''' = \frac{\mathcal{R}e\, A_{12}\mathcal{J}_0(\nu R_1) - \mathcal{R}e\, \mathcal{J}_0(\nu R_2)}{2D'[\mathcal{J}_0(\nu R_1)\mathcal{K}_0(\nu R_2) - \mathcal{J}_0(\nu R_2)\mathcal{K}_0(\nu R_1)]}. \tag{4.25}$$

Scriind ecuația a patra (4.15) împreună cu cea de-a treia (4.16) sub forma

$$\mathrm{i}\, a_2 R_j^2 - \mathrm{i}\,\overline{a}'_{-1} R_j^{-2} + a_1'' \mathcal{J}_1(\nu R_j) + a_1''' \mathcal{K}_1(\nu R_j) =$$

$$= \frac{A_{1j}}{2D'} + \mathrm{i}\frac{\lambda^* + \mu}{\mu}\frac{\mathcal{M}_1^{**} - \mathrm{i}\,\mathcal{M}_2^{**}}{8\pi D}, \tag{4.26}$$

$$4\,\mathrm{i}a_2 R_j - \frac{B}{D} a_1'' I_1(\nu R_j) - \frac{B}{D} a_1''' K_1(\nu R_j) = \frac{B_{1j}}{D} - 2\mathrm{i}\,\frac{\mathcal{M}_1^{**} - \mathrm{i}\,\mathcal{M}_2^{**}}{8\pi D} R_j^{-1}, \tag{4.27}$$

unde $j = 1, 2$, se observă că avem un sistem algebric de patru ecuaţii cu patru necunoscute a_2, $\bar{a}'_{-1}$, a_1'' şi a_1''', a cărui soluţie se poate obţine aplicînd regula lui Crammer. În ceea ce priveşte ecuaţia a patra (4.16) este uşor de observat, avînd în vedere (4.7), (4.8) precum şi relaţia

$$B_{-1j} = \overline{B}_{1j}, \tag{4.28}$$

că este conjugata ecuaţiei precedente.

Presupunînd a_2, a_1'' şi a_1''' determinate prin rezolvarea sistemului (4.26) şi (4.27), din prima ecuaţie (4.15) pentru $j = 1$, în care considerăm C_{01} arbitrară, împreună cu (4.17) rezultă

$$\begin{aligned} 2\,a_0 = {} & -\frac{\mathcal{M}_1^{**} + \mathrm{i}\,\mathcal{M}_2^{**}}{8\pi D}\left(\frac{\lambda^* + \mu}{\lambda^* + 2\mu}\, 2 \ln R_1 - \frac{\lambda^* + 3\mu}{\lambda^* + 2\mu}\right) + \mathrm{i}\,\frac{A_{01} - C_{01}}{2D} - \\ & - 2\,\frac{\lambda^* + \mu}{\lambda^* + 2\mu}\,\bar{a}_2 R_1^2 - \frac{\mathrm{i}\,\mu}{\lambda^* + 2\mu}\,[a_{-1}'' \mathcal{J}_{-1}(\nu R_1) + a_{-1}''' \mathcal{K}_{-1}(\nu R_1)]. \end{aligned} \tag{4.29}$$

Punînd $j = 2$ tot în prima ecuaţie (4.15) putem determina valoarea constantei C_{02}.

Se observă că putem scrie ultima ecuaţie (4.15) împreună cu conjugata ei pentru $n \leqslant -1$ (în care schimbăm însă n cu $-n + 2$) şi ultima ecuaţie (4.16) (în care de asemenea schimbăm pe n cu $n - 1$) sub forma unui sistem de şase ecuaţii cu şase necunoscute

$$\begin{aligned} & -2\,\mathrm{i}D\left[\frac{(2 - n)(\lambda^* + 2\mu) - \mu}{\lambda^* + 2\mu}\, a_n R_j^n - \frac{\lambda^* + \mu}{\lambda^* + 2\mu}(n - 2)\,\bar{a}_{-n+2} R_j^{-n+2} - \right. \\ & \left. -(n - 1)\,\bar{a}'_{-n+1} R_j^{-n}\right] + 2D'\,[a_{n-1}'' \mathcal{J}_{n-1}(\nu R_j) + a_{n-1}''' \mathcal{K}_{n-1}(\nu R_j)] = \mathrm{A}_{nj}, \end{aligned} \tag{4.30}$$

$$\begin{aligned} & 2\,\mathrm{i}D\left[-\frac{\lambda^* + \mu}{\lambda^* + 2\mu}\, n\,a_n R_j^n + \frac{n(\lambda^* + 2\mu) - \mu}{\lambda^* + 2\mu}\,\bar{a}_{-n+2} R_j^{-n+2} + \right. \\ & \left. + (n - 1)\,a'_{n-1} R_j^{n-2}\right] + 2D'\,[a_{n-1}'' \mathcal{J}_{-n+1}(\nu R_j) + a_{n-1}''' \mathcal{K}_{-n+1}(\nu R_j)] = \overline{A}_{(-n+2)j}, \end{aligned} \tag{4.31}$$

$$\begin{aligned} & 2\mathrm{i}D[-n\,a_n R_j^{n-1} + (-n + 2)\,\bar{a}_{-n} R_j^{-n+1}] - B\,[a_{n-1}'' I_{n-1}(\nu R_j) + \\ & \qquad + a_{n-1}''' K_{n-1}(\nu R_j)] = B_{(n-1)j}, \end{aligned} \tag{4.32}$$

unde $n \geqslant 3$ iar $j = 1, 2$. Rezolvînd acest sistem obţinem valorile necunoscutelor a_n, $\bar{a}_{-n+2}$, $\bar{a}'_{-n+1}$, a'_{n-1}, a''_{n-1} şi a'''_{n-1} pentru $n \geqslant 3$. Ultima ecuaţie (4.16) pentru $n \leqslant -2$ coincide cu conjugata ecuaţiei pentru $n \geqslant 2$.

Se observă că pentru calculul coroanei circulare este necesară efectuarea unor operații mult mai laborioase decît în cazul problemei interioare sau exterioare cercului, motiv pentru care am considerat numai prima problemă pentru coroana circulară.

5. APLICAȚII

Am ales cîteva dintre cele mai simple cazuri de solicitare cu scopul de a pune în evidență deosebirile față de formularea clasică.

A. Solicitarea plăcii circulare sub acțiunea unui moment de încovoiere M_{RR} și răsucire $M_{R\theta}$ constante pe contur, forța tăietoare fiind nulă.

Utilizînd formula (1.24) avem

$$M_{n1} + \mathrm{i} M_{n2} = (M_{RR} + \mathrm{i} M_{R\theta})\, e^{\mathrm{i}\theta} \tag{a}$$

și prin urmare înlocuind (2.6) rezultă

$$\int_0^\theta (M_{n1} + \mathrm{i} M_{n2})\, R \mathrm{d}\theta = -\,\mathrm{i} R\, (M_{RR} + \mathrm{i} M_{R\theta})\, (e^{\mathrm{i}\theta} - 1), \tag{b}$$

de unde

$$\begin{aligned} A_0 &= \mathrm{i}\, (M_{RR} + \mathrm{i}\, M_{R\theta})\, R, \\ A_1 &= -\,\mathrm{i}\, (M_{RR} + \mathrm{i}\, M_{R\theta})\, R, \\ A_n &= 0, \ (n \geqslant 2). \end{aligned} \tag{c}$$

Avem evident

$$B_n = 0, \ (n \geqslant 0). \tag{d}$$

Înlocuind în (2.15) – (2.20) obținem

$$\begin{aligned} a_0 &= -\,\overline{a}_1' = \mathrm{i}\, \frac{C_0 - \mathrm{i}\, (M_{RR} + \mathrm{i}\, M_{R\theta})}{4D}, \\ \mathcal{R}e\, a_1 &= \frac{\lambda^* + 2\mu}{\lambda + \mu}\, \frac{M_{RR}}{4D}, \\ a_0'' &= \frac{R M_{R\theta}}{2D}, \\ a_n &= a_n' = a_{n-1}'' = 0, \quad (n \geqslant 2), \end{aligned} \tag{e}$$

și prin urmare

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= a_0 + a_1 z, \\ \chi(z) &= a_0' + a_1' z, \\ V(r, \theta) &= a_0''\, I_0(\nu r). \end{aligned} \tag{f}$$

Starea de solicitare este dată de (1.1), (1.2) şi (1.3) în care înlocuim conform cu (f)

$$
\begin{gathered}
M_{11} + M_{22} = 2M_{RR},\\
M_{22} - M_{11} + 2\mathrm{i}\, M_{12} = 2\mathrm{i}\, M_{R\theta} \frac{\nu^2 I_0(\nu r) - \dfrac{2}{r}\dfrac{\mathrm{d}I_0}{\mathrm{d}r}}{\nu^2 I_0(\nu r) - \dfrac{2}{R}\left(\dfrac{\mathrm{d}I_0(\nu r)}{\mathrm{d}r}\right)_{r=R}}\, \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\theta},\\
N_{13} - \mathrm{i}\, N_{23} = -\,\mathrm{i}\, \frac{BM_{R\theta}}{D'} \frac{\dfrac{\mathrm{d}I_0(\nu r)}{\mathrm{d}r}\cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{\nu^2 I_0(\nu R) - \dfrac{2}{R}\left(\dfrac{\mathrm{d}I_0(\nu r)}{\mathrm{d}r}\right)_{r=R}},
\end{gathered}
\tag{g}
$$

sau ţinînd seama de relaţiile

$$
\begin{gathered}
M_{11} + M_{22} = M_{rr} + M_{\theta\theta},\\
M_{\theta\theta} - M_{rr} + 2\mathrm{i}\, M_{,\theta} = (M_{22} - M_{11} + 2\mathrm{i}\, M_{12})\, \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta},\\
N_{r3} - \mathrm{i}\, N_{\theta 3} = (N_{13} - \mathrm{i}\, N_{23})\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta},
\end{gathered}
\tag{h}
$$

deducem

$$
\begin{gathered}
M_{rr} = M_{\theta\theta} = M_{RR},\\
M_{r\theta} = M_{R\theta} \frac{\nu^2 I_0(\nu r) - \dfrac{2}{r}\dfrac{\mathrm{d}I_0(\nu r)}{\mathrm{d}r}}{\nu^2 I_0(\nu r) - \dfrac{2}{R}\left(\dfrac{\mathrm{d}I_0(\nu r)}{\mathrm{d}r}\right)_{r=R}},\\
N_{r3} = 0,\ N_{\theta 3} = \frac{BM_{R\theta}}{D'} \frac{\dfrac{\mathrm{d}I_0(\nu r)}{\mathrm{d}r}}{\nu^2 I_0(\nu R) - \dfrac{2}{R}\left(\dfrac{\mathrm{d}I_0(\nu r)}{\mathrm{d}r}\right)_{r=R}}.
\end{gathered}
\tag{l}
$$

Rotaţiile şi deplasarea pe verticală corespunzătoare acestei stări de solicitare se obţin din (1.8) şi (1.9)

$$
w_1 + \mathrm{i}w_2 = \left[\frac{M_{RR}\, r}{(\lambda^* + \mu)\dfrac{h^3}{3}} + \frac{M_{R\theta}\dfrac{\mathrm{d}I_0(\nu r)}{\mathrm{d}r}}{\nu^2 I_0(\nu R) - \dfrac{2}{R}\left(\dfrac{\mathrm{d}I_0(\nu r)}{\mathrm{d}r}\right)_{r=R}}\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}, \tag{m}
$$

sau utilizînd (1.24)

$$w_r + \mathrm{i}w_\theta = \frac{M_{RR}\, r}{(\lambda^* + \mu)\dfrac{h^3}{3}} + \frac{M_{R\theta}\dfrac{\mathrm{d}I_0(\nu r)}{\mathrm{d}r}}{\nu^2 I_0(\nu R) - \dfrac{2}{R}\left(\dfrac{\mathrm{d}I_0(\nu r)}{\mathrm{d}r}\right)_{r=R}}, \tag{n}$$

respectiv

$$w = \frac{M_{RR}}{(\lambda^* + \mu)\dfrac{h^3}{3}}(R^2 - r^2). \tag{p}$$

B. Solicitarea plăcii circulare încastrată pe contur sub acțiunea unei sarcini exterioare constante X_3.

Ca soluții particulare ale ecuațiilor (1.13) și (1.14) luăm

$$\begin{aligned} 2U^* &= -\frac{X_3}{D}\frac{x_1^4 + x_2^4}{4\,!}, \\ 2W^* &= -\frac{X_3}{D}\frac{x_1^2 + x_2^2}{2}, \end{aligned} \tag{a}$$

și ca urmare

$$\begin{aligned} w_1^* + w_2^* &= -\frac{X_3}{D}\frac{x_1^3 + x_2^3}{2.3\,!}, \\ w^* &= -\frac{X_3}{2}\left(\frac{x_1^4 + x_2^4}{4\,!D} - \frac{x_1^2 + x_2^2}{2B}\right). \end{aligned} \tag{b}$$

Întrucît $w_1 + \mathrm{i}w_2$ și w sînt nule pe contur, din (1.21) și (1.23) prin trecere la coordonate polare rezultă

$$\begin{aligned} w_1^* + \mathrm{i}w_2^* &= \frac{X_3R^3}{48\,D}(3\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{-3\mathrm{i}\theta}), \\ w^* &= \frac{X_3}{2}\left[\frac{R^2}{2\,B} - \frac{R^4}{8.4\,!D}(\mathrm{e}^{4\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{-4\mathrm{i}\theta} + 6)\right], \end{aligned} \tag{c}$$

de unde deducem

$$\begin{aligned} A_1' &= \frac{X_3R^3}{16D},\ A'_{-3} = \frac{X_3R^3}{48D}, \\ B_0' &= \frac{X_3}{2}\left(\frac{R^2}{2\,!\,B} - \frac{3R^4}{4.4\,!\,D}\right), \\ B_4' &= B'_{-4} = -\frac{X_3R^4}{2^4\,4\,!\,D}\,. \end{aligned} \tag{d}$$

Înlocuind în (2.28) – (2.36) obținem

$$\bar{a}_0 + a_1' = 0,\ \mathcal{R}e\, a_0' = -\frac{X_3 R^2}{64 D}\left(R^2 + 8\frac{D}{B}\right),\ a_0'' = 0,$$
$$\mathcal{R}e\, a_1 = \frac{X_3 R^2}{32 D},\ a_4' = \frac{X_3}{4.48.\,D}, \tag{e}$$

și prin urmare

$$\varphi(z) = a_0 + a_1 z,$$
$$\chi(z) = a_0' + a_1' z + a_4' z^4, \tag{f}$$
$$V(r,\theta) = 0.$$

Pentru starea de solicitare a plăcii obținem

$$M_{11} + M_{22} = \frac{(\lambda^* + \mu) h^3}{3}(a_1 + \bar{a}_1) - (\lambda^* + \mu)\frac{h^3 X_3}{6D}\frac{x_1^2 + x_2^2}{4},$$
$$M_{22} - M_{11} + 2\mathrm{i} M_{12} = -4\mu h^3 a_4' z^2 + \frac{\mu h^3 X_3}{6D}\frac{x_1^2 - x_2^2}{4}, \tag{g}$$
$$N_{13} - \mathrm{i} N_{23} = -\frac{X_3}{2}(x_1 - \mathrm{i} x_2),$$

iar pentru rotații și deplasare

$$w_1 + \mathrm{i} w_2 = (a_1 + \bar{a}_1) z + 4 a_4' z - \frac{X_3}{12D}(x_1^3 + \mathrm{i} x_2^3),$$
$$w = -\frac{a_0' + \bar{a}_0'}{2} + 2\frac{D}{B}(a_1 + \bar{a}_1) - (a_1 + \bar{a}_1)\frac{z\bar{z}}{2} - \frac{1}{2}(a_4' z^4 + \bar{a}_4' \bar{z}^4) +$$
$$+ \frac{X_3}{2}\left(\frac{x_1^4 + x_2^4}{4!\,D} - \frac{x_1^2 + x_2^2}{2B}\right). \tag{h}$$

Trecînd la coordonate polare și utilizînd relațiile (h) de la aplicația A avem

$$M_{rr} = \frac{(\lambda^* + \mu) h^3 X_3}{48 D}\left(\frac{R^2}{2} - r^2\right) - \frac{\mu h^3 X_3}{96 D} r^2,$$
$$M_{\theta\theta} = \frac{(\lambda^* + \mu) h^3 X_3}{48 D}\left(\frac{R^2}{2} - r^2\right) + \frac{\mu h^3 X_3}{96 D}, \tag{i}$$
$$N_{r3} = -\frac{X_3 r}{2},$$
$$M_{r\theta} = N_{\theta 3} = 0,$$

respectiv

$$
\begin{aligned}
w_r &= \frac{X_3 r (R^2 - r^2)}{16 D},\\
w &= \frac{X_3}{64 D}(R^2 - r^2)^2 + \frac{X_3}{4B}(R^2 - r^2),
\end{aligned}
\tag{m}
$$

rezultate ce coincid cu cele clasice cu excepţia deplasării pe verticală în a cărei expresie apare efectul alunecării transversale.

C. Placa infinită cu gaură circulară supusă încovoierii uniforme. Marginile găurii fiind libere rezultă

$$\alpha = A_k = B_k = 0. \tag{a}$$

Presupunînd că la infinit avem

$$
\begin{aligned}
M_{11} &= M_{22} = M,\\
M_{12} &= 0,
\end{aligned}
\tag{b}
$$

din (3.5) şi (3.6) deducem

$$
\begin{aligned}
\Gamma + \bar{\Gamma} &= \frac{2M}{(\lambda^* + \mu)\frac{h^3}{3}},\\
\Gamma' &= 0.
\end{aligned}
\tag{c}
$$

Ca urmare din (3.17) rezultă

$$\gamma_1 = \frac{MR^2}{2D'}. \tag{d}$$

Funcţiile (3.1), (3.2) şi (3.3) în acest caz devin

$$
\begin{aligned}
\varphi(z) &= \Gamma z + \gamma,\\
\chi(z) &= \gamma_1 \ln z + \gamma' z + \gamma'',\\
V(r, \theta) &= 0.
\end{aligned}
\tag{e}
$$

Înlocuind în (1.1), (1.2) şi (1.3) obţinem

$$
\begin{aligned}
M_{11} + M_{22} &= (\lambda^* + \mu)\frac{h^3}{3}(\Gamma + \bar{\Gamma}),\\
M_{22} - M_{11} + 2iM_{12} &= \mu \frac{h^3}{3}\frac{\gamma_1}{z^2},\\
N_{13} - iN_{23} &= 0,
\end{aligned}
\tag{f}
$$

sau trecînd la coordonate polare

$$M_{rr} = M\left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right),$$

$$M_{\theta\theta} = M\left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right). \tag{g}$$

D. Placa infinită cu gaură circulară liberă supusă încovoierii după o direcție.

Marginile găurii fiind libere rezultă

$$\alpha = A_k = B_k = 0. \tag{a}$$

Presupunînd că la infinit avem

$$M_{11} = M,$$

$$M_{22} = M_{12} = 0, \tag{b}$$

din (3.5) și (3.6) deducem

$$\Gamma + \bar{\Gamma} = \frac{M}{(\lambda^* + \mu)\frac{h^3}{3}}, \tag{c}$$

respectiv

$$\Gamma' = \frac{M}{8D'}, \tag{d}$$

iar din (3.17), (3.22), (3.23) și (3.26)

$$\gamma_1 = \frac{MR^2}{4\,D'}, \tag{e}$$

$$a_{-1} = \frac{2\mu\,\bar{\Gamma}'\,BR^3\,K_2(\nu R)}{(3\lambda^* + 5\mu)\,BR\,K_2(\nu R) - 2(\lambda^* + 2\mu)\,D'\,\mathcal{K}_{-2}(\nu R)}, \tag{f}$$

$$a_2''' = -\frac{4i\mu\,\Gamma'\,D}{(3\lambda^* + 5\mu)\,BR\,K_2(\nu R) - 2(\lambda^* + 2\mu)\,D'\,\mathcal{K}_{-2}(\nu R)}, \tag{g}$$

$$a'_{-2} = \frac{\lambda^* + \mu}{2\mu}\,R^2 a_{-1} + i\,\frac{R^2}{2}\,\mathcal{K}_2(\nu R)\,a_2'''. \tag{h}$$

Ca urmare, (3.1), (3.2) și (3.3) devin

$$\varphi(z)\,\Gamma z + \gamma + \frac{a_{-1}}{z},$$

$$\chi(z) = \gamma_1 \ln z + \Gamma' z^2 + \gamma' z + \gamma'' + \frac{a'_{-2}}{z^2}, \tag{l}$$

$$V(r,\ \theta) = a'''_{-2}\,K_{-2}(\nu r)\,e^{-2i\theta} + a_2'''\,K_2(\nu r)\,e^{2i\theta}.$$

Avem de asemenea

$$\begin{aligned}
M_{11} + M_{22} &= (\lambda^* + \mu)\frac{h^3}{3}\left(\Gamma + \overline{\Gamma} - \frac{a_{-1}}{z^2} - \frac{\bar{a}_{-1}}{z^2}\right),\\
M_{22} - M_{11} + 2\mathrm{i}M_{12} &= -\mu\frac{h^3}{3}\left(\frac{2\bar{z}\,a_{-1}}{z^3} - \frac{\gamma_1}{z^2} + 2\Gamma' + \frac{6a'_{-2}}{z^4}\right) +\\
&\quad + 2D'\left[2\frac{\partial^2 V}{\partial x_1\,\partial x_2} + \mathrm{i}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial x_2^2}\right)\right],\\
N_{13} - \mathrm{i}\,N_{23} &= 8D\frac{a_{-1}}{z^3} - \mathrm{i}B\left(\frac{\partial V}{\partial x_1} - \mathrm{i}\frac{\partial V}{\partial x_2}\right),
\end{aligned} \tag{m}$$

sau trecînd la coordonate polare și înlocuind conform relațiilor (c) — (h) obținem în definitiv

$$\begin{aligned}
2M_{rr} &= M\left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right) + \frac{M}{2H}\biggl\{2BR\,K_2(\nu R)\biggl[3\lambda^* + 5\mu - 2\lambda^*\frac{R^2}{r^2} +\\
&\quad + 3(\lambda^* + \mu)\frac{R^4}{r^4}\biggr] - 4(\lambda^* + 2\mu)D'\biggl[\mathcal{K}_{-2}(\nu R) + 3\,\mathcal{K}_2(\nu R) +\\
&\quad + \frac{4R}{r}\frac{\mathrm{d}K_2(\nu r)}{\mathrm{d}r} - \frac{4R}{r^2}K_2(\nu r)\biggr]\biggr\}\cos 2\theta,\\
2\,M_{\theta\theta} &= M\left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right) - \frac{M}{2H}\biggl\{2BRK_2(\nu R)\biggl[3\,\lambda^* + 5\mu + 2(\lambda^* + 2\mu)\frac{R^2}{r^2} +\\
&\quad + 3(\lambda^* + \mu)\frac{R^4}{r^4}\biggr] - 4(\lambda^* + 2\mu)\,D'\biggl[\mathcal{K}_{-2}(\nu R) + 3\,\mathcal{K}_2(\nu R) +\\
&\quad + \frac{4R}{r}\cdot\frac{\mathrm{d}K_2(\nu r)}{\mathrm{d}r} - \frac{4R}{r^2}K_2(\nu r)\biggr]\biggr\}\cos 2\theta,\\
2\,M_{r\theta} &= -\frac{M}{2H}\biggl\{2BRK_2(\nu R)\biggl[3\lambda^* + 5\mu - 2\mu\frac{R^2}{r^2} - 3(\lambda^* + \mu)\frac{R^4}{r^4}\biggr] -\\
&\quad - 4(\lambda^* + 2\mu)D'\biggl[\mathcal{K}_{-2}(\nu R) - 3\,\mathcal{K}_2(\nu R) - \frac{2R}{r}\frac{\mathrm{d}K_2(\nu r)}{\mathrm{d}r} +\\
&\quad + \left(\frac{BR}{D'} + \frac{8R}{r^2}\right)K_2(\nu r)\biggr]\biggr\}\sin 2\theta,\\
N_{r3} &= \frac{2(\lambda^* + 2\mu)\,MBK_2(\nu R)}{H}\left(\frac{R^2}{r^2} - \frac{K_2(\nu r)}{K_2(\nu R)}\right)\frac{R}{r}\cos 2\theta,
\end{aligned} \tag{n}$$

$$N_{\theta 3} = \frac{2(\lambda^{*} + 2\mu) MBK_2(\nu R)}{H}\left(\frac{R^3}{r^3} + \frac{1}{2K_2(\nu R)} \cdot \frac{\mathrm{d}K_2(\nu r)}{\mathrm{d}r}\right)\sin 2\theta,$$

unde

$$H = (3\lambda^{*} + 5\mu) BRK_2(\nu R) - 2(\lambda^{*} + 2\mu) D' \mathcal{K}_{-2}(\nu R). \qquad \text{(p)}$$

Se observă că M_{rr}, $M_{r\theta}$ şi $N_{r\theta}$ devin nule pe marginea găurii, adică pentru $r = R$, ceea ce corespunde condiţiei la limită pentru marginea liberă. În schimb $M_{\theta\theta}$ şi $N_{\theta 3}$ nu se anulează pentru $r = R$ luînd valori extreme pentru $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$, respectiv $\theta = k\pi$, unde $k = 1, 3, 5, 7$. Acest rezultat descrie efectul de concentrare a momentelor şi forţei tăietoare datorit prezenţei găurii, rezultat analog cu cel din teoria elasticităţii plane obţinut de Kirsch [3].

Primită la redacţie la 15 iulie 1963

CALCUL DES PLAQUES MINCES CIRCULAIRES ÉLASTIQUES DANS LA THÉORIE SANS L'HYPOTHÈSE DE LOVE-KIRCHHOFF

RÉSUMÉ

En partant des résultats obtenus dans un article antérieur sur la construction de la solution des équations des plaques minces planes élastiques dans la théorie sans l'hypothèse de Love-Kirchhoff, l'auteur construit la solution concrète pour la plaque circulaire, la plaque infinie à orifice circulaire et la couronne circulaire.

Comme applications, il considère quelques-uns des cas les plus simples et fait ressortir les différences par rapport à la théorie classique.

BIBLIOGRAFIE

1. V. MANEA, *Consideraţii asupra teoriei plăcilor plane elastice subţiri.* St. cerc. mec. apl., *4* (1963).
2. — *Construirea soluţiei ecuaţiilor plăcilor plane elastice subţiri din teoria fără ipoteza Love-Kirchhoff prin metoda funcţiilor analitice.* St. cerc. mec. apl., *5* (1963).
3. Н. И. МУСХЕЛИШВИЛИ, *Некоторые основные задачи математической теории упругости.* Изд. АН СССР, Москва, 1949.

ASUPRA COMPORTĂRII ROCILOR STRĂBĂTUTE DE TUNELUL DE ADUCȚIUNE AL HIDROCENTRALEI „V. I. LENIN" DE LA BICAZ

(REZULTATELE OBȚINUTE ÎN GALERIILE EXPERIMENTALE ȘI CONSIDERAȚIUNI PRIVIND DIMENSIONAREA CĂMĂȘUIELII) [1]

DE

M. VASILESCU și GH. LUCA

621.311.21 : 552

Una din lucrările cele mai importante, executată în cadrul Planului de electrificare al Republicii Populare Romîne, este hidrocentrala „V. I. Lenin" de la Bicaz.

Utilizîndu-se condițiile naturale favorabile pe care le prezintă rîul Bistrița în zona orășelului Bicaz (fig. 1) se reușește să se amenajeze o hidrocentrală cu o putere instalată de 210 MW, o producție de energie în anul normal de 500 GWh și un volum acumulat în lacul de la Izvorul Muntelui de 1,2 miliarde m^3.

Căderea brută maximă de 149 m este obținută prin bararea Bistriței cu un baraj de 127 m înălțime constructivă și prin execuția unui tunel de aducțiune de 4,8 km lungime care taie cotul de circa 14 km pe care îl face Bistrița între Izvorul Muntelui și punctul numit Stejarul, unde este amplasată centrala.

Datorită debitului instalat important, 178 m^3/s, deși pe baza calculelor tehnico-economice s-a adoptat o viteză a apei pe aducțiune destul de ridicată, 4,64 m/s, diametrul tunelului a rezultat destul de mare: 7,00 m.

Ca tip tunelul este de bază, fără ferestre de atac intermediare, soluție impusă de situația locală topografică.

---

[1] Comunicare prezentată la sesiunea științifică jubiliară a Institutului de mecanică aplicată „Traian Vuia" al Academiei R.P.R., București, 4–7 iulie 1960.

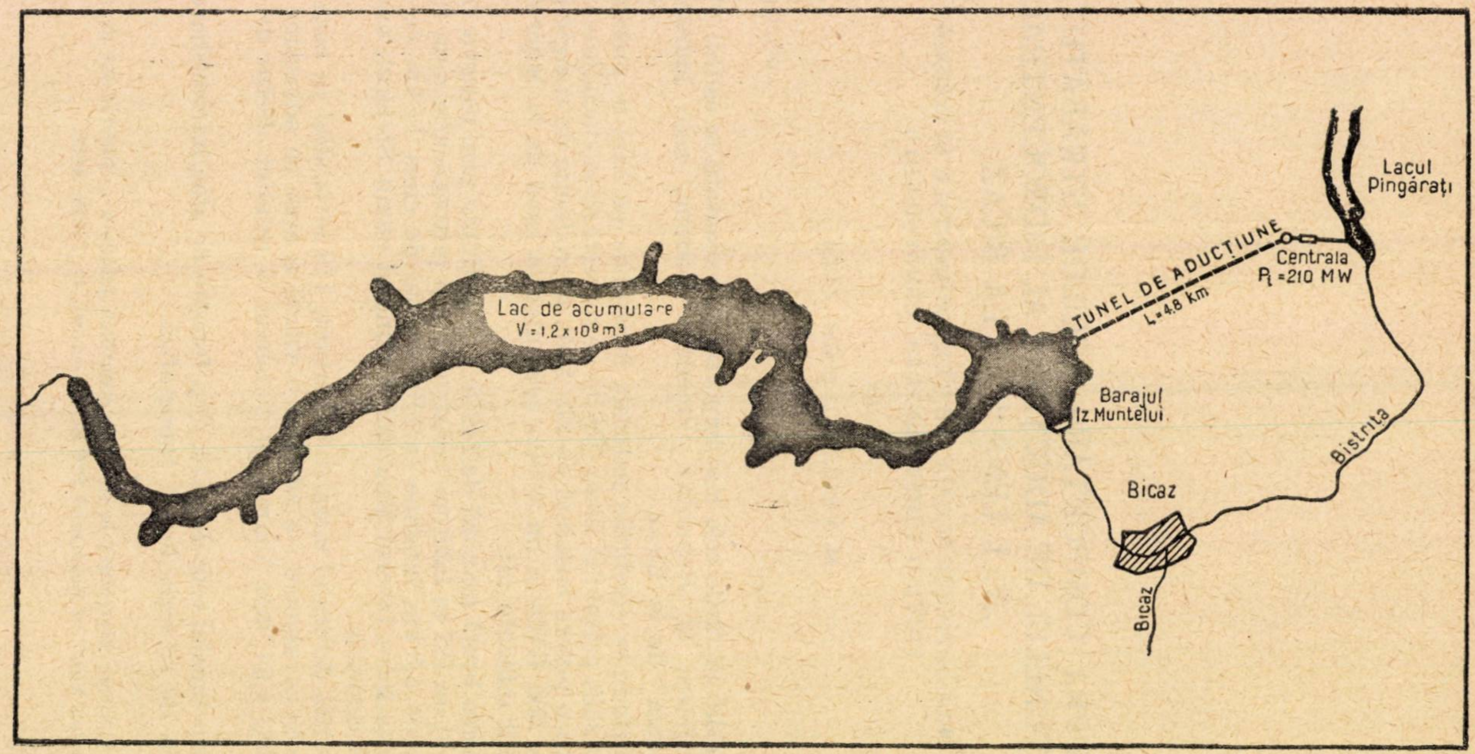

Lacul
Pîngărați
Centrala
P_i =210 MW
TUNEL DE ADUCȚIUNE
L=4.8 km
Lac de acumulare
V=1,2 x 10^9 m^3
Barajul
Iz.Muntelui
Bicaz
Bistrița
Bicaz

Fig. 1. — Schema de amenajare a hidrocentralei „V. I. Lenin".

Presiunea interioară maximă variază în lungul aducțiunii între 4,8 kg/cm^2 la priză și 7,3 kg/cm^2 în dreptul castelului de echilibru.

I. PREZENTAREA PRINCIPALELOR PROBLEME CARE S-AU PUS LA PROIECTAREA ACESTEI ADUCȚIUNI

Întreaga amenajare este situată în zona flișului Carpaților Răsăriteni, lucru care a influențat sensibil condițiile care au stat la baza proiectării lucrărilor.

În timp ce roca de bază în zona barajului este constituită din gresii eocene, tunelul de aducțiune străbate pe aproape totalitatea lungimii lui formațiuni senoniene în care rocile principale sînt marnele, marno-argilele șistoase, marno-calcare și într-un procent redus gresii (fig. 2).

Aceste roci neinfluențate de factorii tectonici, de apă și de aer au aspect semistîncos; sub influența factorilor enumerați mai sus, în special marno-argilele, trec la aspectul rocilor moi. În contact prelungit cu apa își măresc totodată volumul, fapt care duce la apariția unor importante presiuni suplimentare.

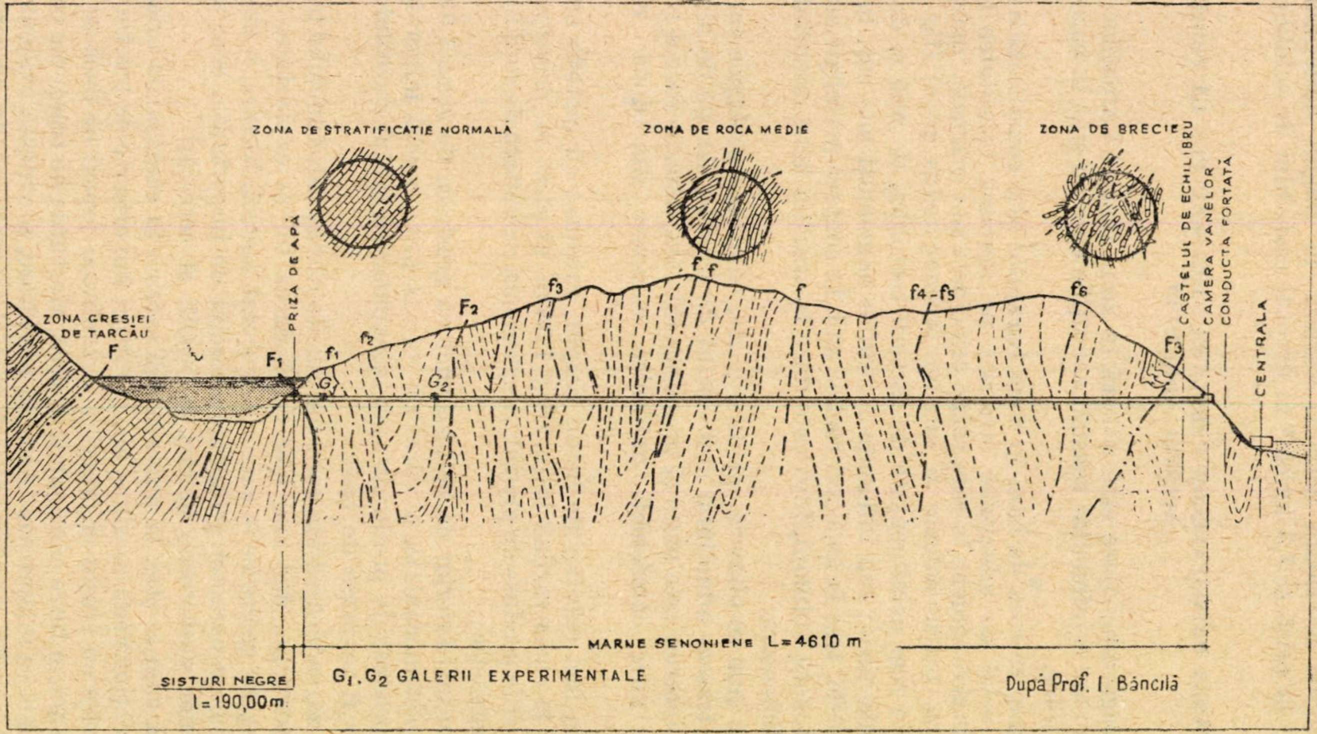
După cum se observă, pe de o parte, condițiile geologice care se întîlnesc pe traseul aducțiunii sînt destul de dificile, iar pe de altă parte diametrul interior este mare și presiunea ridicată, situație care a condus la adoptarea unei cămășuieli puternice compuse din două elemente (fig. 3, *a*) :

— un inel exterior de beton simplu, executat cu metoda austriacă, cu grosimi la cheie variind între 0,8 și 1,35 m, al cărui rol principal era să preia eforturile produse de presiunea exterioară exercitată de rocă în perioada de construcție;

— un inel interior de beton armat cu grosimea de circa 1,00 m executat complet mecanizat, al cărui rol este să preia o cotă importantă din eforturile produse de presiunea apei în exploatare, restul socotindu-se inițial că vor fi preluate de rocă.

Precizarea încărcărilor care vor solicita cămășuiala tunelului în perioada de construcție, dar mai ales după darea lui în exploatare, datorită condițiilor grele geologice în care s-a executat această lucrare, a pus o serie de probleme cu caracter geotehnic deosebit de importante, care au făcut obiectul unor numeroase lucrări de studii și cercetări.

După cum se știe, la punerea sub sarcină în cămășuiala oricărei galerii de aducțiune sub presiune apar eforturi importante de tracțiune. Studiile teoretice au arătat și practica a confirmat faptul că dacă se asigură un contact intim între cămășuială și rocă, eforturile de tracțiune care apar în cămășuială se micșorează. Această micșorare, provocată evident de faptul că deformațiile cămășuielii sînt parțial împiedicate de prezența rocii, atinge valori mai mari sau mai mici funcție de calitățile elastice ale rocii.

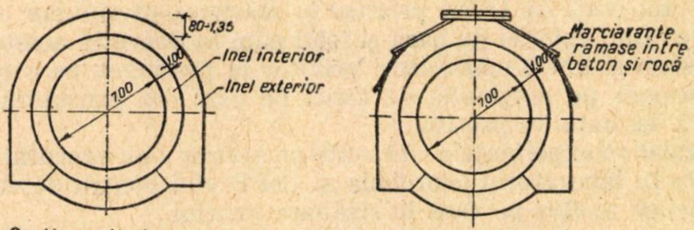

ZONA DE STRATIFICAŢIE NORMALĂ
ZONA DE ROCA MEDIE
ZONA DE BRECIE
ZONA GRESIEI DE TARCĂU
F
F1
PRIZA DE APĂ
G1
f1
f2
G2
F2
f3
f f
f
f4-f5
f6
F3
CASTELUL DE ECHILIBRU
CAMERA VANELOR
CONDUCTA FORŢATĂ
CENTRALA
MARNE SENONIENE L=4610 m
SISTURI NEGRE
l=190,00m
G1.G2 GALERII EXPERIMENTALE

După Prof. I. Băncilă

Fig. 2. — Profil geologic prin tunelul de aducţiune.

Apărea deci ca o problemă importantă determinarea coeficientului de rezistență elastică a rocii K(kg/cm^3), egal cu raportul dintre presiunea exercitată pe intradosul escavației p(kg/cm^2) și deformația razei excavației u(cm).

Problema determinării valorilor coeficientului de rezistență elastică în cazul acestui tunel de aducțiune se complică însă datorită apariției unor condiții speciale legate, în esență, tot de caracterul specific al rocilor pe care le străbate tunelul.



a. Secțiunea tip teoretică

b. Secțiunea tip reală

Fig. 3. — Secțiuni prin cămășuială.

Astfel, din cauză că pe majoritatea traseului apăreau împingeri mari, ceea ce făcea ca marceavantele care căptușesc bolta excavației în timpul execuției să nu poată fi scoase cînd se betona cămășuiala exterioară fără a periclita viața muncitorilor, s-a pus problema influenței pe care o poate avea prezența acestui material lemnos între beton și rocă asupra lui K (fig. 3,*b*).

O altă problemă importantă este dacă se poate sau nu conta pe prezența fenomenului de umflare a marnelor ca element descărcător în ceea ce privește eforturile produse de presiunea interioară a apei în cămășuiala tunelului.

În ceea ce privește armarea cămășuielii interioare de beton, se punea problema în ce măsură este necesar să fie dimensionată, astfel ca la apariția unei fisuri în beton, armătura să poată impiedica deschiderea fisurii respective pentru ca pierderile de apă să nu crească simțitor.

II. LUCRĂRILE EXPERIMENTALE ŞI OBSERVAŢIILE EFECTUATE ÎN CURSUL ANILOR 1953—1955

Pentru a lămuri aceste probleme care prin natura lor nu puteau fi rezolvate judicios pe cale teoretică, s-a executat un vast program de lucrări experimentale.

După cum se știe, informațiile principale privitor la felul cum se va comporta în exploatare cămășuiala unui tunel de aducțiune sub presiune se obțin prin efectuarea unor încercări în galerii experimentale. Ținînd seama de acest lucru s-au executat două galerii experimentale : prima la

180 m de la portalul galeriei de bază Tunel — Intrare şi a doua la 770 m de la acelaşi portal, galerii în care în cursul anilor 1953—1955 s-au efectuat mai multe serii de încercări cu apă sub presiune, iniţial direct pe rocă (februarie, iulie, octombrie 1953 şi mai 1954) şi ulterior în galeria nr. 2 pe o cămăşuială de beton în februarie—martie 1955.

În afara acestor experienţe s-au mai efectuat încercări de compresibilitate pe rocă cu prese hidraulice, măsurători cu ajutorul unor stîlpi metalici proiectaţi de ISPE privitor la mărimea presiunilor exercitate de rocă pe tavanul galeriei de bază şi felul cum se dezvoltă aceste presiuni în timp precum şi unele măsurători privitor la presiunea pe care o exercită apa exterioară pe porţiunile de tunel pe care era executată cămăşuiala exterioară la data respectivă.

Paralel cu experienţele efectuate pe şantier s-au executat şi o serie de experienţe în laboratorul geotehnic al ISPE-ului pentru determinarea caracteristicilor rocilor pe care le străbate tunelul.

Totodată analiza lucrărilor executate pe şantier a contribuit la obţinerea unor date importante privitor la mărimea forţelor produse de împingerea muntelui, a felului cum se dezvoltă aceste forţe în timp, cît şi a direcţiei pe care acţionează aceste forţe.

În cele ce urmează vom descrie experienţele efectuate în galeriile de încercări, vom arăta foarte pe scurt şi rezultatele celorlalte experienţe şi observaţii şi la sfîrşit vom prezenta concluziile la care s-a ajuns privitor la problemele care trebuiau să fie rezolvate.

EXPERIENŢELE EFECTUATE ÎN GALERIA NR. 2

Baza principală experimentală a constituit-o galeria de încercări nr. 2, amplasată la 770 m de la portalul Tunel-Intrare, pe dreapta tunelului, aproximativ perpendicular pe direcţia aducţiunii.

Adîncimea la care a fost situată galeria, faţă de suprafaţa terenului, a fost de circa 200 m, lungimea ei circa 37 m, din care tronsonul experimental propriu-zis avea circa 15 m lungime (fig. 4).

Tronsonul experimental a fost amplasat în roci destul de dure marno-calcar compact, gresie calcaroasă, marno-calcar grezos cu excepţia porţiunii terminale, circa 4 m, excavată în şisturi argilo-marnoase.

Pentru măsurarea deformaţiilor în timpul experienţelor s-a folosit un aparat de tip Kiesser[2]) construit de ISPE prevăzut cu microcomparatoare cu o sensibilitate de 10 μ.

Prima serie de încercări a constat din trei experienţe executate în zilele de 13, 15 şi 16 iulie. Deformaţiile s-au măsurat în două secţiuni transversale situate la circa 5,50 m una de alta. Înregistrarea deformaţiilor s-a făcut pe cîte trei diametri în fiecare secţiune, unul vertical şi ceilalţi doi înclinaţi la 30° faţă de orizontală.

---

[2]) A. Kiesser, *Wasserdichte Druckstollen und Druckschächte mit Kernring-Auskleidung*, SBZ, *23—24* (1950).

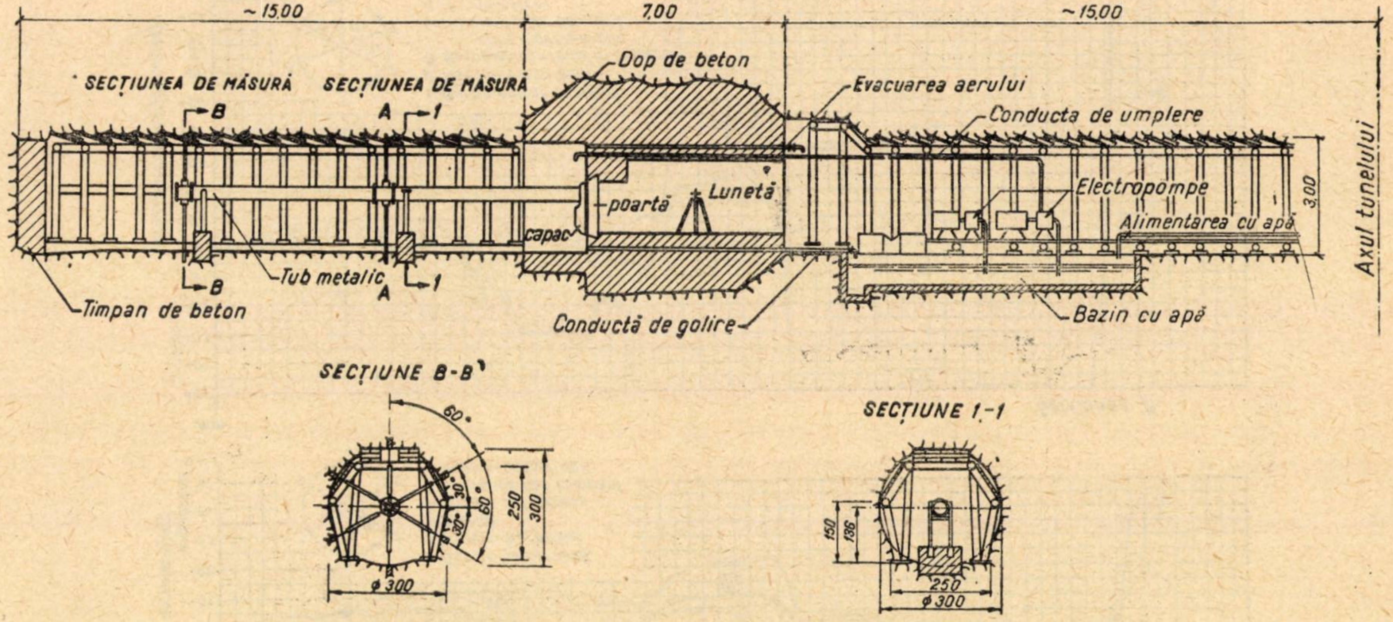

~15,00
7,00
~15,00
SECȚIUNEA DE MĂSURĂ
SECȚIUNEA DE MĂSURĂ
B
A
1
Dop de beton
Evacuarea aerului
Conducta de umplere
Axul tunelului
poartă
Lunetă
Electropompe
Alimentarea cu apă
3,00
capac
Tub metalic
B
A
1
Timpan de beton
Conductă de golire
Bazin cu apă
SECȚIUNE B-B'
60°
30°
30°
60°
250
300
ϕ 300
SECȚIUNE 1-1
150
136
250
ϕ 300

Fig. 4. — Galeria de încercări nr. 2. Experiențe pe rocă (iulie și octombrie 1953).

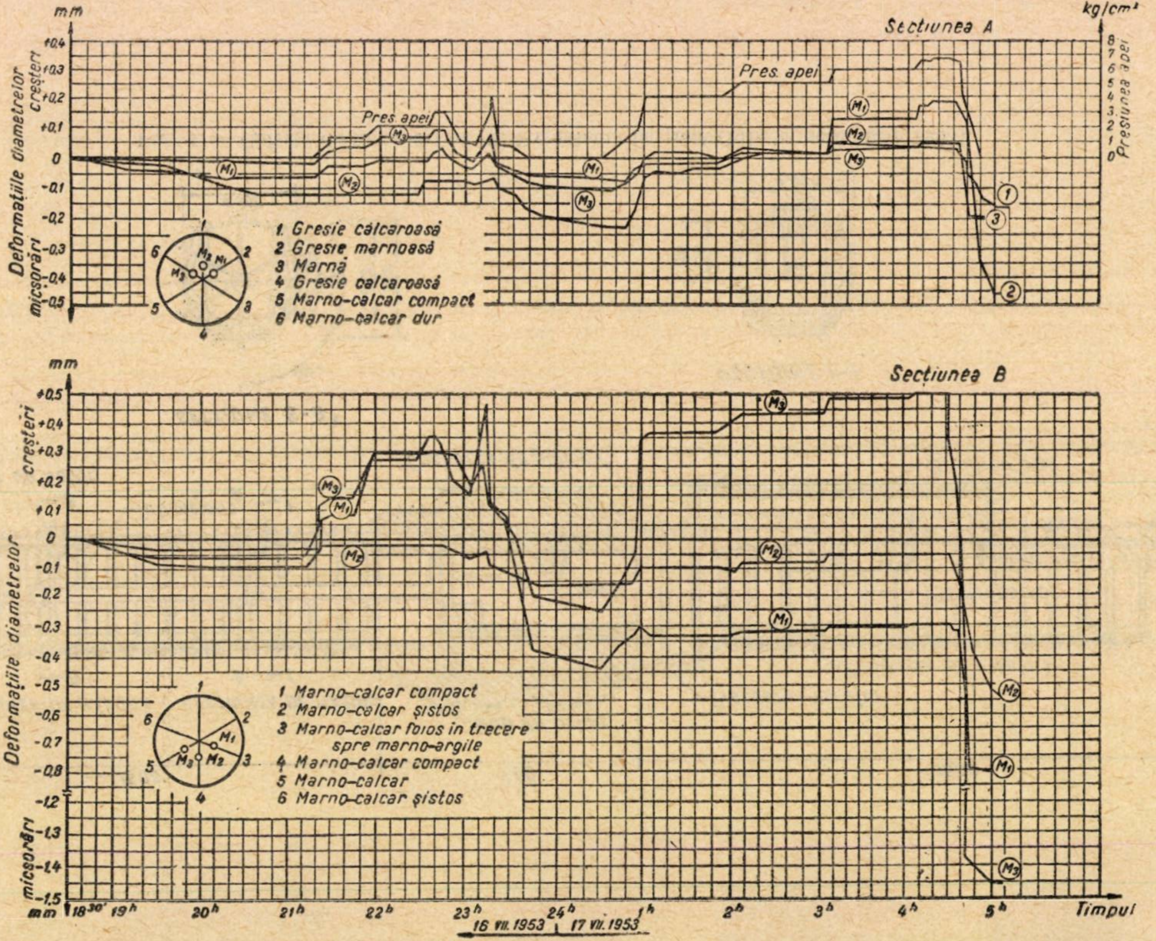


Fig. 5. — Galeria de încercări nr. 2. Deformațiile măsurate la încercările pe rocă din 16—17 iulie 1953.

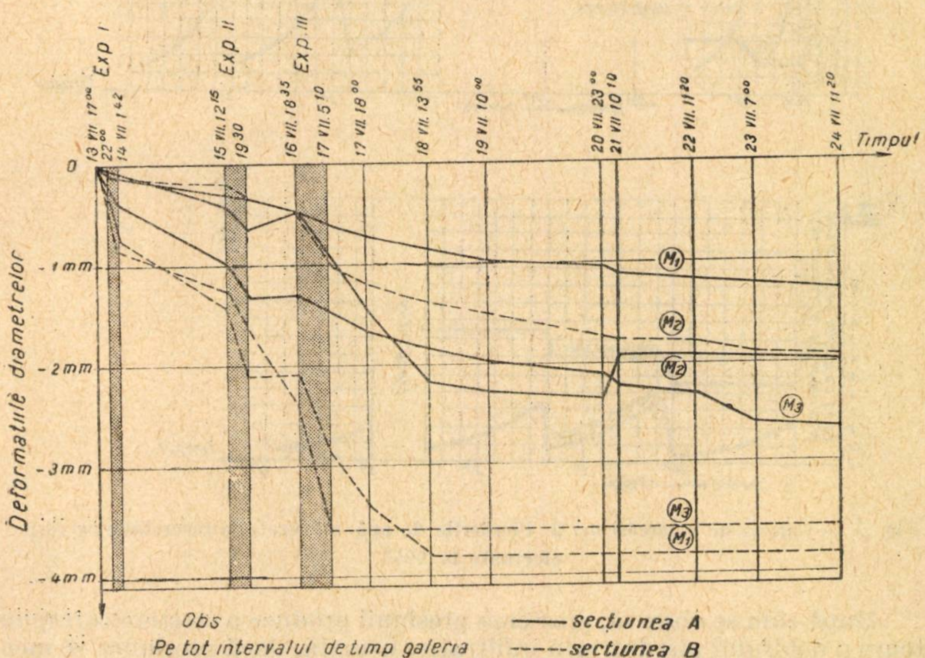
Analizîndu-se rezultatele obţinute s-a ajuns la concluzia că este indicată efectuarea unei noi serii de încercări pentru a obţine date suplimentare privitoare la deformaţia diametrelor orizontale.

Aceste noi încercări s-au efectuat în octombrie 1953 şi au constat din două serii de experienţe. Concomitent cu înregistrarea deformaţiilor în cursul tuturor acestor experienţe s-au efectuat şi măsurători privitor la pierderile de apă.

După cum se observă în figura 5, cumulînd toate deformaţiile măsurate în cursul unei experienţe rezultă, pentru toate tijele şi la toate experienţele, micşorări ale diametrului excavaţiei. Aceste deformaţii sînt destul de mici (~ 1 mm la o experienţă) cu excepţia cazurilor cînd probabil s-au produs dislocări în rocă ceea ce a dus la apariţia unor deformaţii bruşte de ordinul 3—4 mm.

În figura 6 s-au reprezentat cumulat, pe toată perioada corespunzătoare seriei I de experienţe, toate deformaţiile înregistrate.

După cum se observă, microcomparatoarele din secţiunea *A* şi microcomparatorul M_2 din secţiunea *B*, microcomparator ale cărui tije



Obs
Pe tot intervalul de timp galeria a fost plină cu apă cu excepţia cîtorva ore în ziua de 15 VII.1953
În timpul experienţelor presiunea apei a atins valori pînă la 6 kg/cm²

Fig. 6. — Galeria de încercări nr. 2. Deformaţiile măsurate la seria de încercări pe rocă din iulie 1953 (cumulate).

au fost încastrate aproximativ în capul unor strate de marno-calcar, au înregistrat deformaţii totale de circa 2 mm în timp ce celelalte diametre din secţiunea *B* s-au micşorat cu circa 4 mm. De asemenea, trebuie să relevăm legătura directă între volumul de apă introdus suplimentar în rocă, perioadele de pompare şi mărimea deformaţiilor produse de umflare.

Tot în figura 6 se observă că fenomenul de umflare nu creşte în intensitate incontinuu în timp ci din contră, dacă nu intervin noi factori exteriori care să-l activeze, se stabilizează.

Variaţia pierderilor de apă măsurate, în cursul acestor experienţe, este reprezentată funcţie de presiune şi de timp în figura 7.

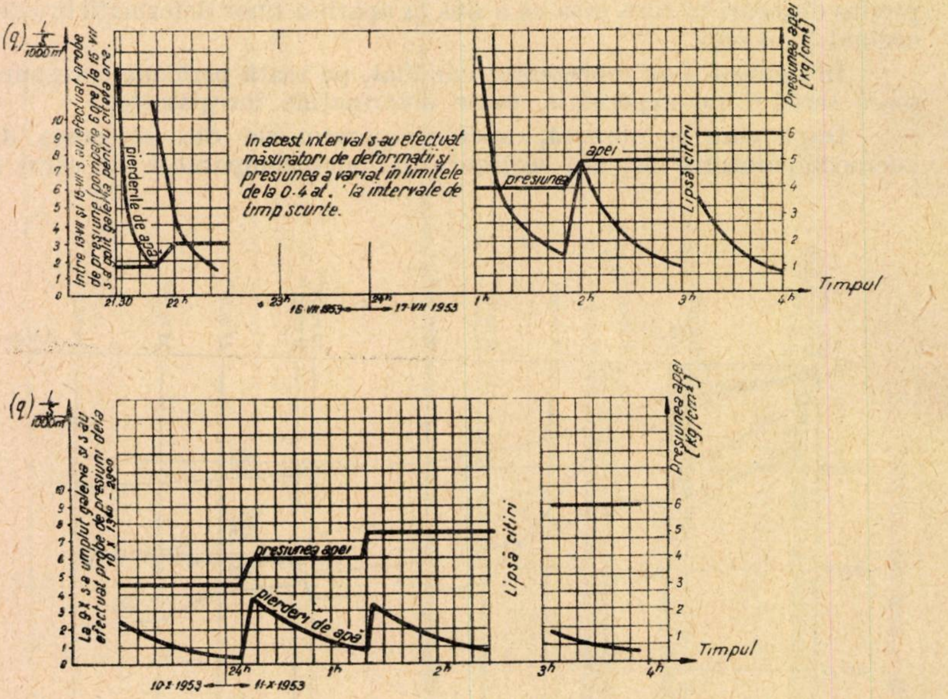


Fig. 7. — Galeria de încercări nr. 2. Pierderile de apă măsurate la încercările pe rocă efectuate în 1953.

După cum se observă, creşterea presiunii produce o creştere corespunzătoare a debitului pierdut prin infiltraţie, urmată, dacă presiunea se menţine constantă un timp mai lung, de micşorarea debitului spre o valoare constantă corespunzătoare pierderilor în situaţia de regim.

Astfel, după circa 10 ore de pompare, pierderile ating valori în jurul a 1 l/s/1000 m² de rocă.

Paralel cu experienţele efectuate în galeria nr. 2 s-au executat şi o serie de încercări în galeria experimentală nr. 1 excavată într-o zonă de marno-argile şi marno-calcare la o adîncime de circa 100 m sub suprafaţa terenului.

Şi aceste experienţe, la care măsurătorile s-au efectuat cu un aparat de tip Amsler, au confirmat faptul că în contact cu apa roca se umflă şi totodată au arătat că umflarea se manifestă pe toate diametrele.

În mai—iunie 1954 s-a betonat tronsonul experimental al galeriei nr. 2 pentru a se obţine date asupra influenţei fenomenului de umflare a rocii combinat cu prezenţa marceavantelor de lemn între beton şi rocă. Cămăşuiala (fig. 8) constă dintr-un inel de beton marca 250 prevăzut în secţiunea transversală cu o armătură de siguranţă alcătuită din 4 ∅16/ml, iar longitudinal 4 ∅ 10/ml. Grosimea medie teoretică a inelului 0,30 m ; cea reală a rezultat 0,45 m.

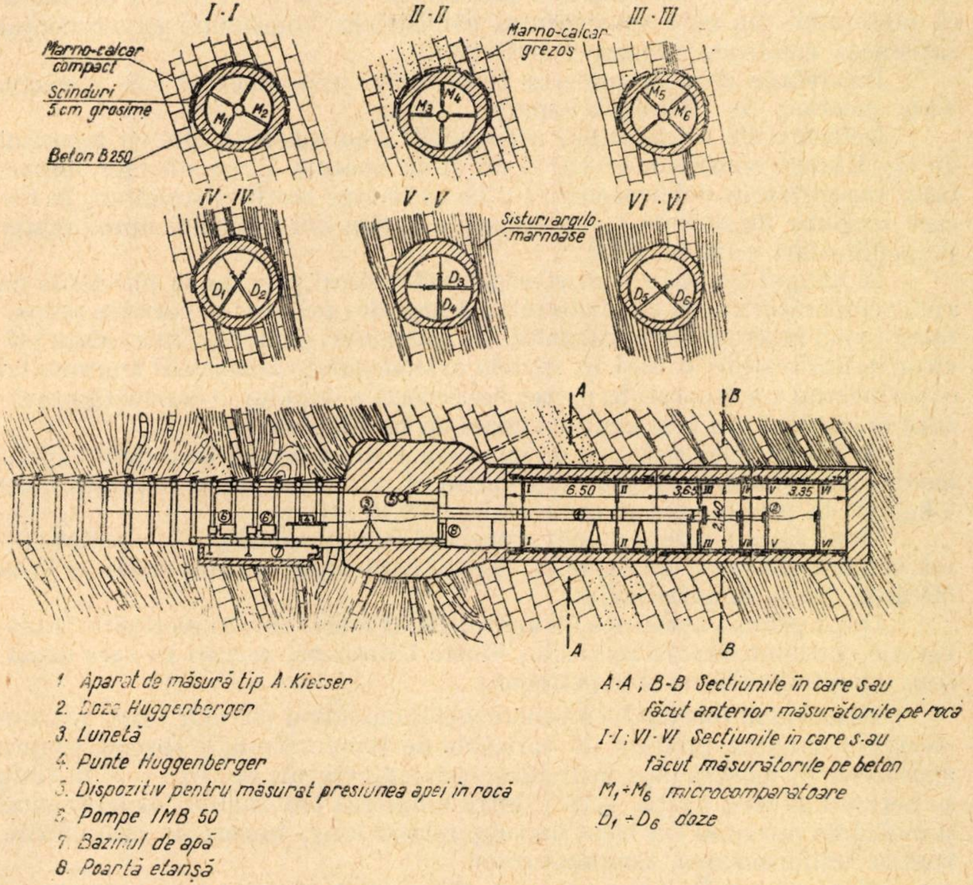

I-I
II-II
III-III
Marno-calcar compact
Scînduri 5 cm grosime
Beton B250
Marno-calcar grezos
M_1
M_2
M_3
M_4
M_5
M_6
IV-IV
V-V
VI-VI
Şisturi argilo-marnoase
D_1
D_2
D_3
D_4
D_5
D_6
A
B
6.50
3.65
3.35
2.40
I
II
III
IV
V
VI
1 Aparat de măsură tip A. Kiesser
2. Doze Huggenberger
3. Lunetă
4. Punte Huggenberger
5. Dispozitiv pentru măsurat presiunea apei în rocă
6. Pompe IMB 50
7. Bazinul de apă
8. Poartă etanşă
A-A ; B-B Secţiunile în care s-au făcut anterior măsurătorile pe rocă
I-I ; VI-VI Secţiunile în care s-au făcut măsurătorile pe beton
$M_1 \div M_6$ microcomparatoare
$D_1 \div D_6$ doze

Fig. 8. — Galeria de încercări nr. 2. Experienţele pe cămăşuială de beton (februarie-martie 1955).

Pe primele două tronsoane de 6,50, respectiv 3,65 m lungime s-au lăsat, între extradosul cămăşuielii şi rocă, căptuşeli de brad de circa 5 cm grosime după cum se observă în figura 8. Pe tronsonul trei de 3,35 m lungime, cămășuiala de beton s-a așezat direct pe rocă. Pe toate tronsoanele s-au executat injecții între cămășuială și rocă, în două faze, la presiunea de 6 at. Remarcăm că betonarea cămășuielii s-a făcut nu tocmai îngrijit, cu întreruperi de turnare pe unele rosturi longitudinale de circa 5 zile.

Pentru verificarea mărcii betonului realizat pe șantier s-au efectuat încercări în laborator privind rezistențele la rupere prin compresiune, tracțiunea din încovoiere cît și modulul de elasticitate la compresiune. Comparîndu-se rezultatele obținute cu prevederile GOST și STAS s-a constatat că materialul din care s-a executat cămășuiala tronsonului experimental satisfăcea condițiile impuse mărcii 250.

Încercările privind punerea tronsonului experimental sub presiune s-au efectuat în februarie—martie 1955.

Deformațiile intradosului cămășuielii s-au măsurat atît cu aparatul de tip Kiesser construit de ISPE cît și cu aparate Huggenberger importate. Înregistrarea deformațiilor s-a făcut în șase secțiuni simultan, în fiecare secțiune măsurîndu-se deformațiile a cîte doi diametri aproximativ perpendiculari unul pe altul.

În timpul probelor s-au efectuat măsurători privitor la pierderile de apă, temperatura rocii și a betonului și mai ales privitor la variația temperaturii apei în timpul experiențelor. De asemenea, pentru a obține date privitor la infiltrațiile în rocă în spatele extradosului cămășuielii tronsonului experimental s-a montat, la partea superioară a dopului, o conductă prevăzută la capătul din tronsonul de acces cu un manometru.

În cursul celor trei serii de experiențe presiunea în tronsonul experimental s-a ridicat în trepte reușindu-se să se atingă valori cuprinse între 6 kg/cm^2 la prima serie și circa 13 kg/cm^2 la ultima.

După fiecare serie s-a golit tronsonul experimental și s-a cercetat starea cămășuielii constatîndu-se de fiecare dată buna ei comportare și lipsa oricăror fisuri longitudinale.

După prima experiență au apărut fisuri foarte fine în secțiunile transversale corespunzătoare rosturilor dintre tronsoane, rosturi în care armătura longitudinală nu s-a petrecut.

Menționăm totodată că pentru a elimina într-o cît mai mare măsură efectele secundare produse de variațiile de temperatură, în special, asupra aparatelor de măsură (apa introdusă avea temperaturi de circa +3° în timp ce betonul și roca aveau +16°), între umplerea tronsonului experimental și ridicarea presiunii s-a lăsat un timp relativ lung, uneori de circa 6 zile, pentru uniformizarea temperaturilor.

Pe baza deformațiilor și presiunilor măsurate s-au putut calcula încărcările și eforturile care au apărut în cămășuiala galeriei în timpul experiențelor (fig. 9 și 10).

Măsurătorile au arătat, la toate trei experiențele la terminarea perioadei de pompare, după ce se cobora presiunea la 0, deformații remanente spre interior.

Micșorarea finală a diametrelor este evident produsă de apariția unor presiuni suplimentare pe extradosul cămășuielii. Valorile medii ale acestor presiuni exterioare suplimentare s-au calculat, cu ajutorul teoriei

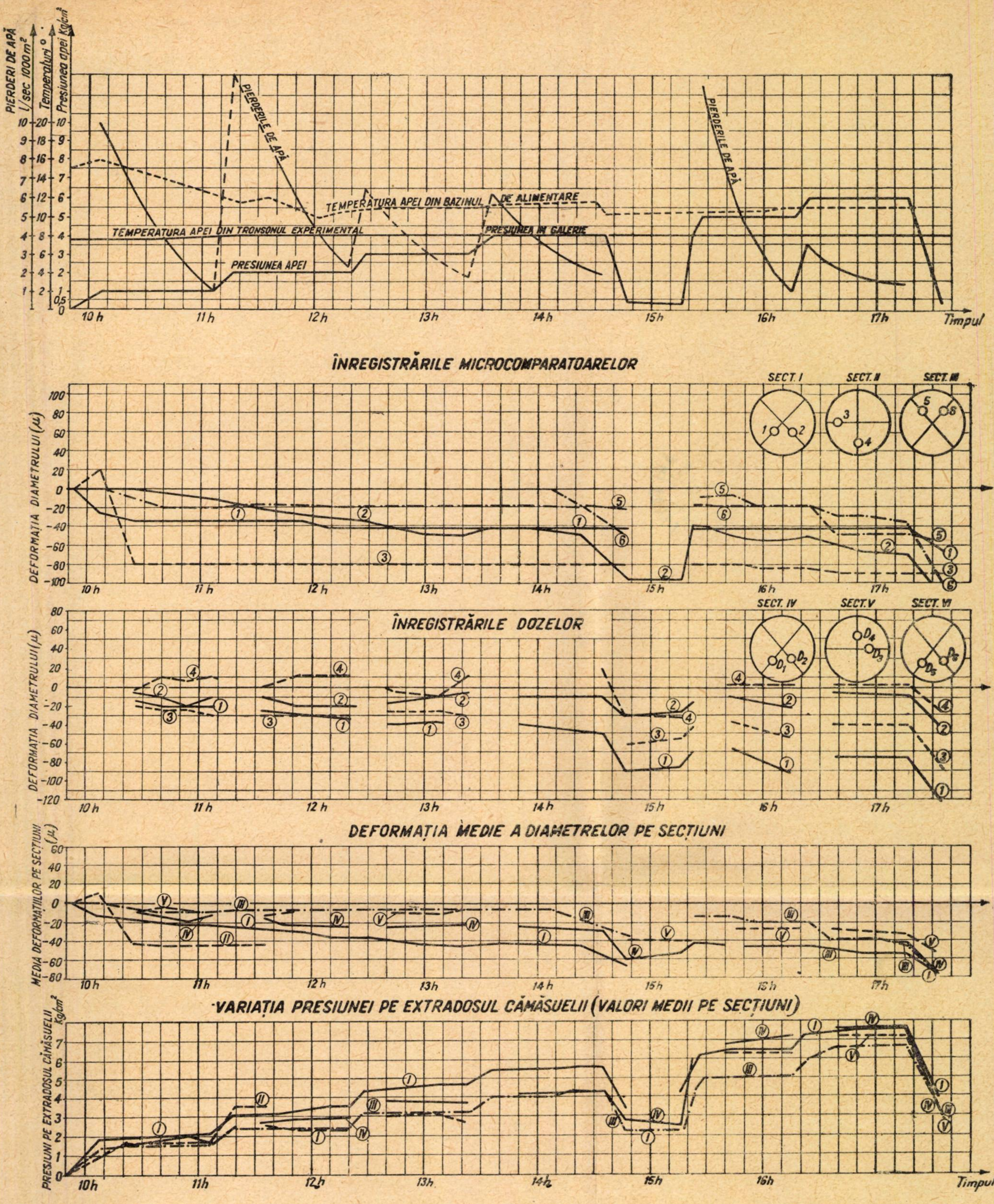


Fig. 9. — Galeria de încercări nr. 2. Măsurătorile efectuate la experienţa I (februarie-martie 1955) (galeria experimentală prevăzută cu o cămăşuială de beton).

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM
KÖZPONTI KÖNYVTÁRA
1848

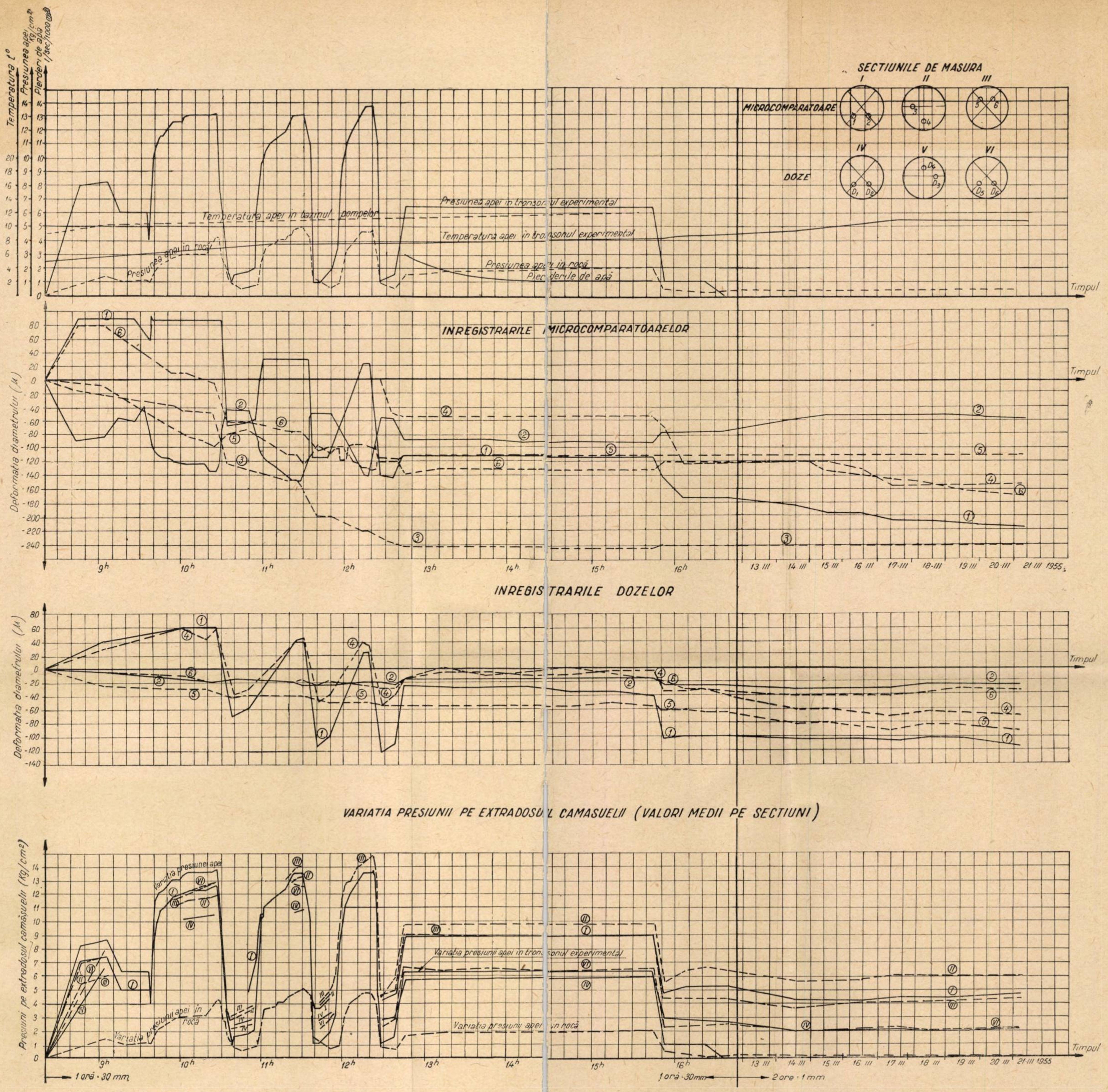


Fig. 10. — Galeria de încercări nr. 2. Măsurătorile efectuate la experiența III (februarie-martie 1955) (galeria experimentală prevăzută cu o cămășuială de beton).

tuburilor groase pentru toate secțiunile în care au existat măsurători concomitente pe doi diametri conjugați.

Pentru exemplificare dăm în tabela 1 valorile deformațiilor medii, presiunii exterioare suplimentare q_{ex} și eforturilor de compresiune maxime (la intrados) la sfîrșitul primei experiențe.

Tabela 1

	Sect. I		Sect. III		Sect. IV		Sect. V	
	M_1	M_2	M_5	M_6	D_1	D_2	D_3	D_4
Deformația diametr. [μ]	− 65	−106	−60	−100	−120	−40	−90	−23
Def. medie [μ]		− 85,5		− 80		−80		−56.5
Pres. exterioară q_{ex} $\left[\frac{kg}{cm^2}\right]$		3,13		2,71		2,65		2,13
Rezistențele la intrados $\left[\frac{kg}{cm^2}\right]$		−12,90 *)		− 11,43		−11,02		− 8,52

*) Cu semnul minus s-au notat compresiunile.

S-a încercat să se stabilească și felul cum au variat eforturile în cămășuiala de beton pe toată durata seriei de încercări, o problemă mult mai complicată deoarece a trebuit să se țină seama de influența variațiilor de temperatură, reușindu-se să se evalueze cu titlu informativ corecțiile care trebuie aduse pentru a ține seamă de acești factori. Rezultatele obținute au un caracter numai informativ deoarece cu aparatura de care s-a dispus nu s-a putut stabili cu suficientă exactitate alura curbei după care a variat temperatura cămășuielii de beton în tot timpul experiențelor.

Simultan cu măsurătorile de deformații s-au efectuat și măsurătorile privind pierderile de apă ale tronsonului experimental (fig. 9, 10). Și de data aceasta s-a remarcat influența mare pe care o are asupra mărimii pierderilor gradul de îmbibare cu apă a rocii, respectiv timpul de pompare.

Comparînd rezultatele obținute la aceste experiențe cu cele obținute la încercările făcute pe rocă se observă că nu apare nici o diferență sensibilă în ceea ce privește ordinul de mărime al pierderilor care, în ambele cazuri, după o perioadă mai lungă de pompare se stabilizează în jurul a 1l/s/1000 m² valoare care corespunde unei galerii practic impermeabile.

Pentru orientare s-a calculat ordinul de mărime al coeficientului de permeabilitate al rocii în ansamblu, rezultînd $k_{\text{rocă}} = 2{,}5 + 4 \cdot 10^{-8}$ m/s.

În concluzie, cămășuiala tronsonului experimental a rezistat bine deși a fost solicitată uneori în condiții foarte grele imediat după o răcire puternică la presiuni alternate de ordinul a 13 at.

Menționăm că o răcire a cămășuielii de numai 5°C produce o micșorare a razei extradosului de circa 180 μ, ceea ce, dacă n-ar fi existat o stare de precomprimare inițială produsă de rocă, ar fi dus la dezlipirea cămășuielii de rocă și implicit la fisurarea ei la punerea sub sarcină.

Pe baza rezultatelor experiențelor efectuate în galeria nr. 2 atît pe rocă cît și pe beton, s-a examinat problema distribuției neuniforme a presiunilor care apar pe extradosul cămășuielii.

Analizînd măsurătorile făcute la experiențele pe rocă se poate afirma că distribuția presiunilor produse de umflare într-o anumită secțiune a galeriei este mai uniformă decît distribuția coeficientului de rezistență elastică K_0.

În tabela 2 sînt date pentru exemplificare valorile lui K_0 deduse pe baza deformațiilor măsurate pe diferite diametre și cît la sută reprezintă aceste valori față de K_0 mediu calculat pe baza deformației medii a diametrelor secțiunii respective. Totodată este făcut același lucru și pentru produsul $K_0\delta$ (δ = deformația totală produsă de umflare, măsurată pe diametrul respectiv), produs care, într-o primă aproximație, caracterizează mărimea presiunilor pe care le poate produce umflarea.

Tabela 2

	Secțiunea *A*				Secțiunea *B*			
	M_1	M_2	M_3	M_{mediu}	M_1	M_2	M_3	M_{mediu}
K_0 [kg/cm³]	1 900	1 200	1 040	1 250	197	915	175	250
K_0 [% din cel mediu]	152	96	83	100	79	366	70	100
Umflări totale δ [μ]	1 300	2 233	2 680	2 004	3 913	1 968	3 670	3 184
δ [% din cel mediu]	65	101	134	100	123	62	115	100
K_0 δ [kg/cm²]	247	244	268	251	77	180	64	79
K_0 δ [% din cel mediu]	98	97	107	100	97,5	226	81	100

După cum se observă, gradul de neuniformitate al valorilor K_0 este sensibil mai mare decît al produsului $K_0\delta$.

Pe de altă parte, experiențele efectuate pe cămășuiala de beton au arătat că umflarea rocii și presiunea interioară a apei produc ovalizări diferite care suprapunînd efectele se anulează în mare măsură.

În tabela 3 sînt arătate spre exemplificare o serie de date obținute în secțiunea I din galeria 2.

Se observă că la puneri repetate sub sarcină urmate de reveniri, ovalizarea secțiunii sub sarcină merge descrescînd $+225\mu$, $+178\ \mu$, $+168\mu$, la fel deci și rezistențele suplimentare produse de apariția momentelor.

Dăm acum foarte pe scurt rezultatele celorlalte experiențe efectuate pe șantier și în laborator.

Încercările de compresibilitate pe rocă cu prese hidraulice au arătat că modulul de compresibilitate corespunzător unei încărcări pînă la 6 kg/cm² pe zonele cu rocă dură, unde predominăm arno-calcarele, poate varia în limite foarte largi de la 150 000 la 32 000 kg/cm², funcție de frecvența intercalațiilor de alte roci mai tari sau mai slabe, înclinarea straturilor, vecinătatea unor falii etc., dar în special funcție de timpul care a trecut de la excavare și pînă la punerea rocii sub sarcină, timp în care calitățile mecanice ale rocii se înrăutățesc datorită acțiunii apei și aerului.

Tabela 3

Presiunea apei $\left[\frac{kg}{cm^2}\right]$	0	13,7	~0	13,6	~0	13,5	~0
Deformația diametrului 1 ΔD_1 [μ]	0	+ 88	−65	+ 31	−115	+ 24	−139
Deformația diametrului 2 ΔD_2 [μ]	0	−137	−44	−147	− 49	−144	− 53
$\lvert \Delta D_2 - \Delta D_1 \rvert$ [μ]	0	225	21	178	66	168	86
$\frac{\Delta D_1 + \Delta D_2}{2}$ [μ]	0	− 24,5	−54,5	− 58	− 82	− 60	− 96
Rezistențele la intrados $\left[\frac{kg}{cm^2}\right]$	0	− 4,10	− 9,10	− 9,69	− 13,70	− 10,0	− 16,03

Măsurătorile cu stîlpi metalici privitor la mărimea presiunilor exercitate de rocă pe tavanul galeriei de bază. Datele înregistrate au arătat foarte clar cum crește în timp intensitatea presiunilor produse de împingerea muntelui (fig. 11).

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM KÖZPONTI KÖNYVTÁRA 1848

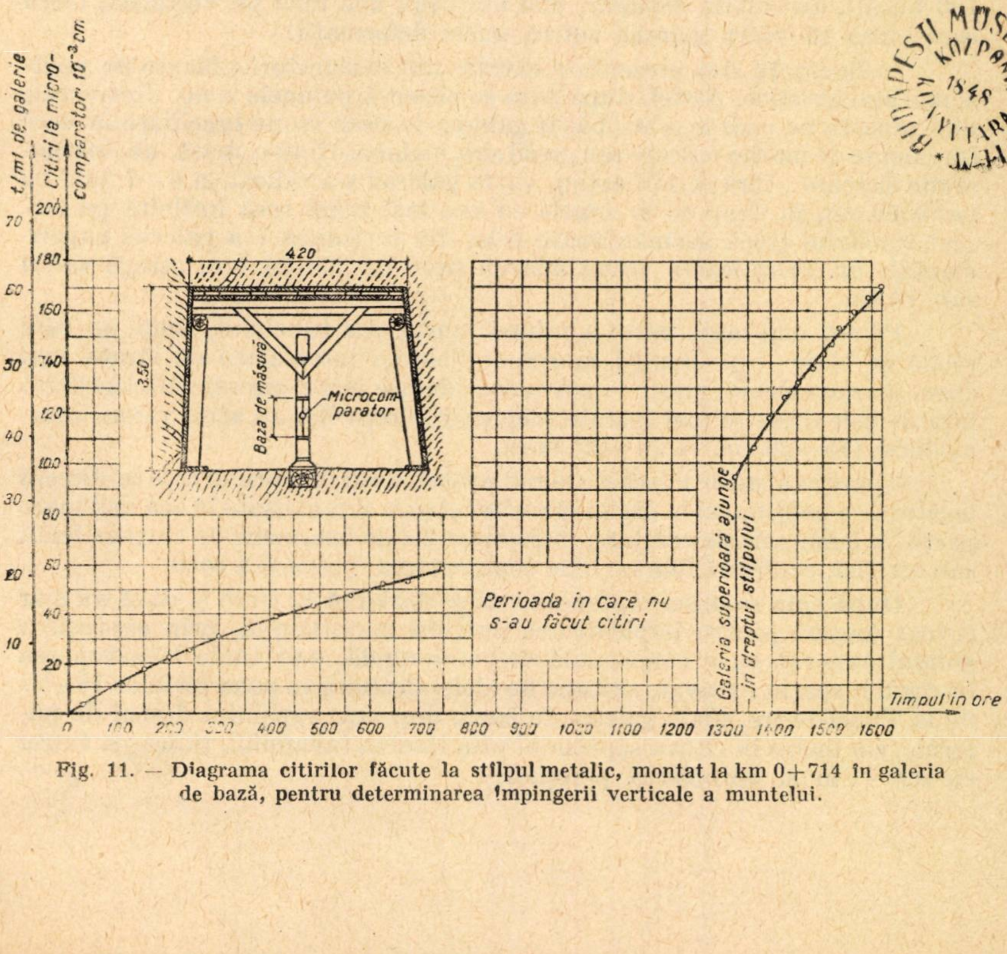


Fig. 11. — Diagrama citirilor făcute la stîlpul metalic, montat la km 0 + 714 în galeria de bază, pentru determinarea împingerii verticale a muntelui.

Astfel, stîlpul montat la km 0 + 714 prelua la 10 zile după montare 9 t, la 25 zile 18 t, iar la 55 zile după execuţia galeriei superioare 40 t.

Determinări privitor la presiunea exercitată de apa exterioară pe extradosul cămăşuielii. Astfel de măsurători efectuate pe zone umede la Tunel-Intrare în bolta inelelor nr. 34 şi 88 au semnalat presiuni exterioare pînă la 1 at.

Experienţele efectuate în laborator. Şi aceste experienţe au scos în evidenţă compactitatea rocilor pe care le străbate tunelul, conţinutul lor bogat în argilă şi mai ales influenţa pe care o are acest conţinut asupra celorlalte caracteristici.

Remarcăm că şi în laborator s-a putut constata fenomenul de umflare a marnelor în contact cu apa. Încercările efectuate în edometru au semnalat apariţia unor forţe produse de umflare — deformaţiile erau împiedicate — între 0,15 şi 3,5 kg/cm^2.

Date obţinute în timpul execuţiei pe şantier. O mare importanţă pentru concluziile la care s-a ajuns o prezintă observaţiile efectuate asupra mişcării reperilor topo plantaţi pe talpa galeriei de bază.

Urmărindu-se prin citiri sistematice felul cum a variat poziţia acestor reperi funcţie de timp, s-a constatat că toţi reperii montaţi pe tunel, peste 100 bucăţi, au suferit deplasări mai mari sau mai mici pe verticală, lucru care arată că vatra galeriei suferă unele deformaţii.

În figura 12 sînt prezentate extrase din măsurătorile făcute pe unele zone caracteristice. Astfel, după cum se observă pe unele zone dintre cele mai proaste pe care le-a străbătut galeria de bază (zone brecifiate în care fragmente de marno-calcare sau gresii sînt înglobate într-o masă de marno-argile şistoase , fără stratificaţie), vatra galeriei s-a ridicat în 6—7 luni cu peste 50 cm, în timp ce în zonele cu cea mai bună rocă întîlnită pe traseul tunelului (rocă asemănătoare celei din secţiunea I a galeriei experimentale nr. 2) ridicarea vetrei într-un timp de 20—24 luni atinge valori sub 10 cm.

Pe cea mai mare parte a primei jumătăţi a tunelului, zonă pe care rocile ca tărie — predomină marno-argilele cu intercalaţii de strate mai dure, marno-calcare, gresii — pot fi considerate într-o situaţie intermediară faţă de cele descrise mai înainte, deplasările reperilor au atins valori intermediare (15—20 cm în 20—25 luni).

Apariţia acestor mişcări ale radierului, a căror mărime este în directă legătură cu conţinutul în argilă al rocilor şi care sînt cauzate în cea mai mare parte de fenomene de refulare, mai corect zis de fenomene de curgere lentă sub sarcină, confirmă foarte bine comportarea plastică a rocii.

După cum se observă, fenomenul se dezvoltă în timp şi dacă nu s-ar fi luat măsuri pentru împiedicarea curgerii materialului, prin căptuşirea golului excavat cu o cămăşuială de beton rigidă, s-ar tinde la astuparea întregului spaţiu excavat, situaţie de altfel întîlnită în zona inelelor 18—22 de la Tunel-Ieşire, unde galeria de bază, deşi era sprijinită destul de puternic, s-a închis în cîteva săptămîni prin lăsarea tavanului, ridicarea vetrei cu 0,8—1 m şi apropierea pereţilor.

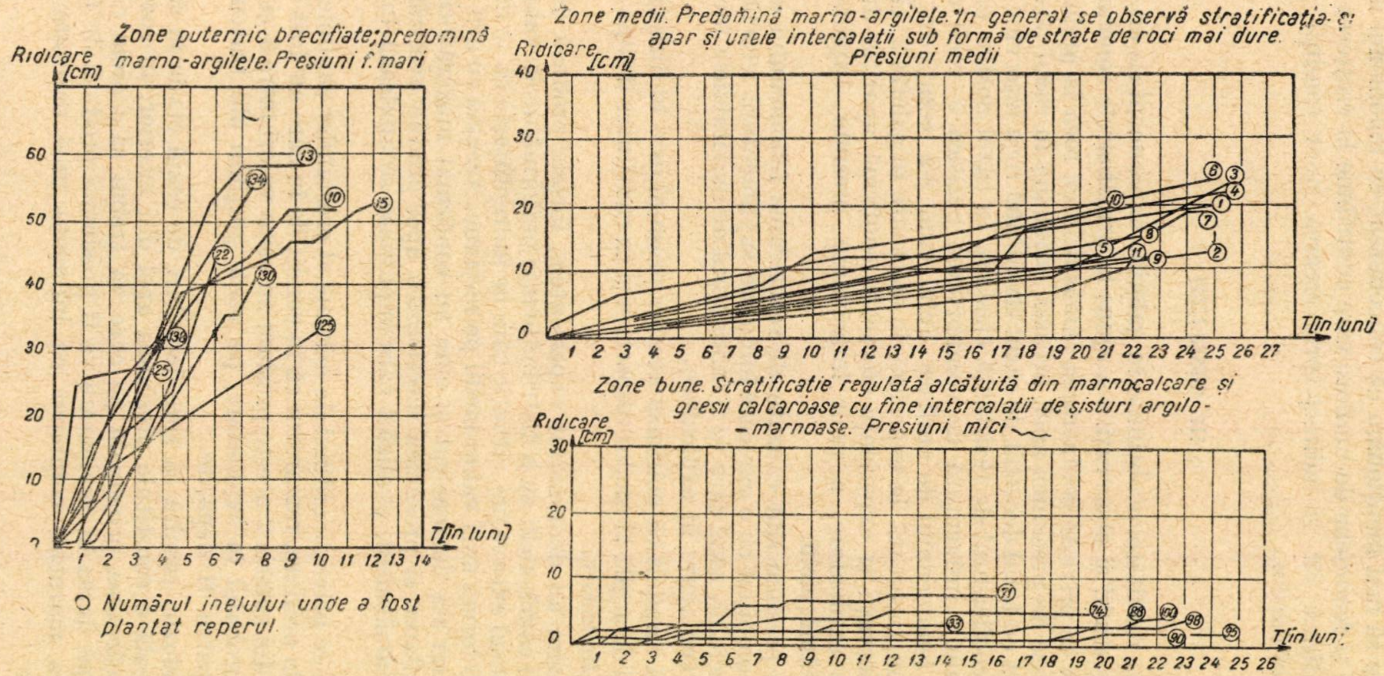


Fig. 12. — Diagramele mișcării reperilor topo pe radierul galeriei de bază.

Trebuie să mai menţionăm că concomitent cu fenomenul de curgere se manifestă şi fenomene de umflare care contribuie la creşterea deformaţiilor atît direct cît şi indirect prin crearea unor condiţii favorabile producerii refulărilor.

III. CONCLUZII

Pe baza rezultatelor obţinute în galeriile experimentale cît şi a tuturor celorlalte studii şi observaţii s-a ajuns la următoarele concluzii:

În ceea ce priveşte conlucrarea cămăşuielii cu roca la preluarea eforturilor produse de presiunea apei, această problemă în cazul nostru apare sub un aspect cu totul deosebit de cazul clasic cînd roca intervine în calcule numai prin coeficientul de rezistenţă elastică. În cazul nostru conlucrarea este foarte mult influenţată de comportarea plastică a rocii combinată cu prezenţa fenomenului de umflare. Felul cum s-a comportat cămăşuiala de beton încercată la experienţele efectuate în galeria 2 cît şi toate celelalte observaţii şi experienţe efectuate confirmă apariţia după darea tunelului în exploatare, a unor importante presiuni suplimentare pe extradosul cămăşuielii.

Aceste presiuni sînt cauzate de reactivarea fenomenului de umflare a marnelor combinat cu o oarecare înmuiere suplimentară a rocilor pe zona din jurul tunelului, zonă care va fi influenţată de inevitabilele mici pierderi de apă care vor apare în exploatare.

Rezultă implicit că mărimea acestor presiuni este în directă legătură cu conţinutul de argilă al rocilor respective şi cu cantitatea de apă introdusă suplimentar în masiv.

După cum au demonstrat experienţele, forţele produse de umflare pe extradosul cămăşuielii au o distribuţie mai uniformă decît valorile locale K_0 pe extradosul excavaţiei, situaţie care ne îndreptăţeşte să le introducem în calcule sub forma unei valori medii pe secţiune. Aceasta cu atît mai mult cu cît aşa cum s-a demonstrat şi cum au confirmat măsurătorile experimentale, umflarea şi presiunea interioară a apei produc ovalizări de sens contrar ale cămăşuielii, ovalizări care suprapuse se anulează într-o mare măsură.

În ceea ce priveşte ordinul de mărime al presiunilor suplimentare medii produse de umflare, remarcăm că în condiţiile în care au fost executate experienţele din galeria 2 aceste presiuni au atins valori între 3 şi 7 kg/cm^2, valori care probabil în exploatare, pe unele porţiuni ale traseului aducţiunii, vor putea fi depăşite.

În concluzie, rezultă că spre deosebire de cazul clasic în care încărcarea principală o constituie presiunea apei din interior, în cazul acestei aducţiuni încărcarea principală pe care va trebui să o preia cămăşuiala tunelului după darea în exploatare va fi presiunea produsă de fenomenul de umflare a marnelor combinat cu influenţa unei oarecare înmuieri suplimentare.

Excepţii vor putea totuşi să apară numai în zonele cu rocă relativ dură (gresii, marno-calcare) cu conţinut foarte redus de argilă şi cu infiltraţii iniţiale relativ puternice de apă, astfel ca influenţa apei introduse suplimentar cu ocazia dării în funcţiune a tunelului să nu mai activeze sensibil umflarea.

În ceea ce priveşte problema marceavantelor de lemn care rămîn între cămăşuială şi rocă, dat fiind caracterul plastic al rocii chiar dacă lemnul ar putrezi nu se poate presupune că va apare vreun spaţiu liber între beton şi rocă. Experienţele efectuate în galeria 2 nu au semnalat nici o deosebire între comportarea tronsonului pe care s-au lăsat căptuşeli de lemn şi comportarea tronsonului de pe care s-a scos tot materialul lemnos.

Privitor la dimensionarea armăturii, în cazul acestei aducţiuni, din cauza coeficientului de permeabilitate redus al marnelor senoniene (circa 10^{-8} m/s) pe care le străbate tunelul, nu se pune problema ca secţiunea armăturii să fie astfel stabilită încît să nu permită deschiderea fisurilor.

În ceea ce priveşte volumul pierderilor de apă în exploatare, se poate afirma, ţinînd seama de permeabilitatea redusă a rocii şi de distanţele mari pînă la suprafeţele drenante, că el va fi practic neglijabil.

Mai trebuie să menţionăm doi factori care vor influenţa favorabil comportarea cămăşuielii tunelului : faptul că darea în exploatare s-a făcut la un interval de timp destul de lung după betonarea cămăşuielii ($2 \div 8$ ani pentru inelul exterior, $0{,}5 \div 3$ ani pentru inelul interior) cît şi faptul că cea mai mare parte din presiunea interioară de exploatare nu este realizată prin panta tunelului ci prin existenţa unui mare lac de acumulare.

După cum se ştie, şi după cum a reeşit şi din cele expuse mai înainte, toate fenomenele de care depinde împingerea muntelui se dezvoltă în timp cu viteze mai mari sau mai mici funcţie de tăria rocii. În cazul nostru însă există un interval de timp suficient de mare între betonarea cămăşuielii şi darea în exploatare pentru ca să se poată presupune că şi pe zonele dure s-a ajuns aproape de situaţia de echilibru. Efectul favorabil al acestor presiuni s-a văzut în problema marceavantelor şi este de presupus că ele contribuie la apariţia unei oarecare precomprimări a cămăşuielii înainte de darea tunelului în exploatare.

Faptul că cea mai mare parte a presiunii interioare este creată de existenţa unui mare lac de acumulare ($1{,}2 \cdot 10^9$ m^3), care cere un timp de umplere lung, exclude posibilitatea atingerii presiunii maxime de exploatare într-un timp foarte scurt, ceea ce creează condiţiile ca paralel cu creşterea presiunii interioare să crească şi presiunile exterioare produse de umflarea rocii, efectele celor două încărcări anulîndu-se într-o bună măsură (darea tunelului în exploatare s-a făcut în noiembrie 1960 iar nivelele în lac, apropiate de nivelul maxim de exploatare, s-au atins abia după circa 8 luni). Pe baza concluziilor arătate mai sus s-a trecut la redimensionarea cămăşuielii tunelului, reuşindu-se să se economisească, faţă de varianta în care se executa iniţial cămăşuiala tunelului, 17 500 m^3 excavaţii, 6 000 m^3 beton simplu, 11 500 m^3 beton armat şi circa 6 000 t fier beton, ceea ce a reprezentat ca investiţii circa 35 de milioane de lei.

Primită la redacţie la 10 iulie 1963

О ПОВЕДЕНИИ ПОРОД, ПРОЙДЕННЫХ ПОДВОДЯЩИМ ТУННЕЛЕМ ГЭС ИМ. В. И. ЛЕНИНА В БИКАЗЕ

РЕЗЮМЕ

Благодаря большому внутреннему диаметру (7,00 м), относительно большому внутреннему напору (5—7 кг/см^2) и чрезвычайно трудным геологическим условиям, при проектировании и проходке подводящего туннеля ГЭС им. В. И. Ленина в Биказе был поднят ряд вопросов, связанных, в сущности, с поведением породы, среди которых отмечаем следующие:

— какую часть усилий, произведенных напором воды изнутри, воспринимает порода?

— в какой мере это участие породы изменяется вследствие того, что при проходке, когда укладывается бетонная облицовка, невозможно снимать полностью деревянные крепления?

— можно ли полагаться на внешние давления, вызываемые явлением разбухания мергелей, в которых проходит туннель, в качестве разгружающего фактора для усилий, произведенных напором воды изнутри в облицовке туннеля;

— каким образом должна быть выбрана арматура, чтобы препятствовать возрастанию инфильтраций в гипотезе появления трещин в бетоне?

Результаты, полученные в экспериментальных штреках, выполненных на трассе туннеля, и сделанные замечания относительно поведения породы на проходящих зонах, привели к ряду выводов относительно нагрузок, действующих на облицовку туннеля во время эксплуатации, выводы, значительно отличающиеся от классических гипотез.

В результате этих исследований достигнута значительная экономия бетона и арматуры.

STUDII

EFECTE AEROELASTICE ASUPRA EFICACITĂȚII ARIPIOARELOR, ȚINÎND SEAMĂ DE INFLUENȚA RESTRÎNGERILOR DE FIXARE

DE

AUGUSTIN PETRE și CRISTIAN STĂNESCU

533 : 539.3

1. INTRODUCERE. ECUAȚII DE BAZĂ

Structurile aviatice moderne sînt foarte flexibile și deformațiile elastice ale acestora nu mai pot fi neglijate în privința eficacității aripioarelor.

După cum se știe, aripioarele realizează prin bracajul lor un moment de ruliu, care este însă modificat atunci cînd se ține seama de deformația elastică a suprafeței portante. Într-adevăr, momentul de răsucire, care există în orice situație de zbor, torsionează aripa în lungul anvergurii micșorînd efectul aerodinamic obținut prin bracajul aripioarelor.

În modul acesta, momentul de ruliu este diminuat (atenuarea eficacității comenzilor) și această scădere se accentuează pe măsură ce crește viteza de zbor, deoarece momentul de răsucire depinde de pătratul acestei viteze, pe cînd rigiditatea aripii nu depinde de viteză. Va exista deci o viteză critică de anulare a efectului aripioarelor, la care bracajul devine complet ineficace.

Obiectul lucrării prezente este determinarea vitezei critice de anulare a efectului aripioarelor, pentru suprafețele portante de secțiune constantă, în ipoteza mai generală a considerării acestora ca bare cu pereți subțiri.

Există astfel posibilitatea să se obțină cantitativ efectul restrîngerilor impuse de condițiile la limită, funcție de parametrii geometrici și elastici care intervin precum și de efectul existenței unui moment de răsucire variabil în lungul anvergurei. Prima etapă în soluționarea problemei o constituie determinarea unghiului de răsucire φ în lungul anvergurei. În acest scop, se folosesc ecuațiile teoriei răsucirii împiedicate a barelor cu pereți subțiri, bazate pe ipoteza lui A. A. Umanski, conform căreia deplasarea în lungul anvergurei este

$$u\,(y, s) = \omega\,(s)\,\psi\,(y), \tag{1.1}$$

unde $\omega\,(s)$ este deplanarea din cazul răsucirii libere, iar $\psi\,(y)$ este o funcție necunoscută. S-au luat aici ca variabile y în lungul anvergurei, iar s în lungul conturului profilului. Răsucirea împiedicată se caracterizează prin constrîngeri în deplanare și apariția în consecință a tensiunilor normale care, în conformitate cu legea lui Hooke, sînt date de relația

$$\sigma = E\,\omega\,\frac{\mathrm{d}\,\psi}{\mathrm{d}\,y}\cdot \tag{1.2}$$

Ecuația care determină unghiul de răsucire φ este [1]

$$k^2\,\frac{\mathrm{d}^4\varphi}{\mathrm{d}y^4} - \frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}y^2} = -\,\frac{m_t}{GI_d} + \frac{k^2}{GI_p}\,\frac{\mathrm{d}^2 m_t}{\mathrm{d}y^2}, \tag{1.3}$$

unde

$$k = \sqrt{\frac{EI_\omega}{\nu G I_d}}\,.$$

S-au introdus următoarele notații :

E — modulul de elasticitate longitudinal,
G — modulul de elasticitate transversal,
I_ω — momentul de inerție sectorial (bimoment de inerție),
I_d — momentul de inerție la răsucirea liberă,
I_p — momentul de inerție dirijat,
$m_t = \dfrac{\mathrm{d}M_t}{\mathrm{d}y}$ — momentul de răsucire, distribuit pe unitatea de lungime în lungul anvergurii,
$\nu = 1 - \dfrac{I_d}{I_p}$ — coeficientul de deplanare.

În funcție de unghiul de răsucire φ și de momentul de răsucire distribuit m_t se obțin, folosind ecuațiile teoriei răsucirii împiedicate, următoarele relații :

$$M_t = GI_d\left[\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}y} + k^2\left(\frac{1}{GI_p}\,\frac{\mathrm{d}m_t}{\mathrm{d}y} - \frac{\mathrm{d}^3 p}{dy}\right)\right], \tag{1.4}$$

$$\psi(y) = -\,\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}y} + \frac{(1-\nu)\,k^2}{\nu}\left(\frac{1}{GI_p}\,\frac{\mathrm{d}m_t}{\mathrm{d}y} - \frac{\mathrm{d}^3\varphi}{\mathrm{d}\,y}\right), \tag{1.5}$$

prima dînd momentul de răsucire într-o secțiune oarecare, iar a doua funcția $\psi\,(y)$. Cunoașterea acestei funcții este necesară pentru determinarea deplasării longitudinale u și a tensiunilor normale σ .

Relațiile (1.1), (1.2), (1.4) și (1.5) vor fi utilizate la scrierea condițiilor la limită.

2. ECUAȚIA PROBLEMEI ȘI INTEGRAREA EI

În cele ce urmează se admite că axa elastică a suprafeței portante este perpendiculară pe planul de simetrie al avionului și că segmentele de aripă în lungul cozii sînt rigide, ceea ce permite neglijarea încovoierii în această direcție. Prin urmare, unghiul de incidență va varia în lungul anvergurii numai datorită răsucirii suprafeței portante.

Anvergura aripii se notează $2\,\bar{b}$. Aripioarele sînt așezate simetric față de axul longitudinal al avionului, ele întinzîndu-se pînă la extremitățile aripii; cu notațiile din figura 1, anvergura unei aripioare va fi $\bar{b} - \bar{b}_1$.

Se notează cu e distanța măsurată în lungul cozii de la axa elastică la linia centrelor aerodinamice și cu d distanța de la axa elastică la linia centrelor de greutate.

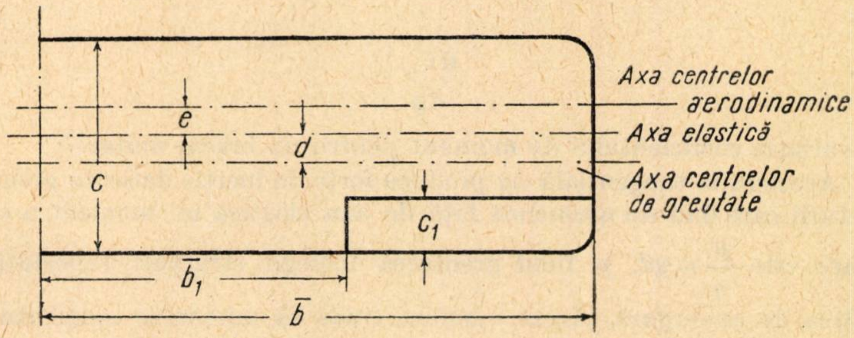


Fig. 1

Ecuația diferențială a problemei se obține folosind ecuația (1.3) și explicitînd momentul de răsucire distribuit m_t.

În urma bracajului aripioarelor cu un unghi β, distribuția incidenței în lungul anvergurii este [2]

$$i(y) = \sqrt{\frac{c_1}{c}}\,\beta + \varphi(y) - \frac{\omega y}{V},$$

în care c_1 este coarda aripioarei iar c aceea a aripii. Termenul $\omega\, y/V$ exprimă unghiul de incidență suplimentar care apare în urma rotației avionului, în jurul axului longitudinal, cu viteza unghiulară ω.

Admițînd proporționalitatea portanței locale cu incidența locală, se poate calcula portanța corespunzătoare acestei incidențe și deci momentul dat de ea față de axa elastică

$$q\,c\,e\,\frac{\mathrm{d}C_z}{\mathrm{d}\beta}\,\beta + q\,c\,e\,\frac{\mathrm{d}C_z}{\mathrm{d}i}\,\varphi - q\,c\,e\,\frac{\mathrm{d}C_z}{\mathrm{d}i}\cdot\frac{\omega y}{V},$$

în care s-a notat cu

$q = \frac{\rho}{2} V^2$ — presiunea dinamică,

$\frac{\mathrm{d} C_z}{\mathrm{d} i}$ — panta curbei de portanță,

$\frac{\mathrm{d} C_z}{\mathrm{d} \beta}$ — variația coeficientului de portanță pentru un bracaj unitar.

Ca urmare a bracajului apare şi momentul

$$q c^2 \frac{\mathrm{d} C_m}{\mathrm{d} \beta} \beta,$$

unde

$$\frac{\mathrm{d} C_m}{\mathrm{d} \beta}$$

este variația coeficientului de moment pentru un bracaj unitar.

Accelerația tangențială $\dot{\omega} y$ produce forțe de inerție datorite greutății structurii care dau de asemenea față de axa elastică un moment a cărui valoare este $\frac{p}{q} \dot{\omega} y d$, p fiind greutatea întregii structuri raportată la unitatea de anvergură. Acest moment tinde să micşoreze momentul de ruliu provocat de bracaj. Cu aceste elemente se poate calcula momentul de răsucire m_t,

$$m_t = - q c e \frac{\mathrm{d} C_z}{\mathrm{d} \beta} \beta - q c e \frac{\mathrm{d} C_z}{\mathrm{d} i} \varphi + q c e \frac{\mathrm{d} C_z}{\mathrm{d} i} \frac{\omega y}{V} - q c^2 \frac{\mathrm{d} C_m}{\mathrm{d} \beta} \beta + \frac{p}{g} \dot{\omega} y d \quad (2.1)$$

iar ecuația (1.3) devine

$$k^2 \frac{\mathrm{d}^4 \varphi}{\mathrm{d} y^4} + \left(\frac{k^2 q c e}{G I_p} \frac{\mathrm{d} C_z}{\mathrm{d} i} - 1 \right) \frac{\mathrm{d}^2 \varphi}{\mathrm{d} y^2} - \frac{q c e}{G I_d} \cdot \frac{\mathrm{d} C_z}{\mathrm{d} i} \varphi = \frac{q c e}{G I_d} \left(\frac{\mathrm{d} C_z}{\mathrm{d} \beta} + \frac{c}{e} \frac{\mathrm{d} C_m}{\mathrm{d} \beta} \right) \beta -$$

$$- \frac{q c e}{G I_d} \left(\frac{\omega}{V} \frac{\mathrm{d} C_z}{\mathrm{d} i} + \frac{p d}{q c e g} \dot{\omega} \right) y. \quad (2.2)$$

După cum se remarcă, această ecuație este de ordinul patru, pe cînd ecuația obținută prin aplicarea teoriei lui Saint-Venant, a răsucirii libere, este de ordinul doi.

Integrarea acestei ecuații conduce la determinarea unghiului de răsucire elastică φ în lungul anvergurii. Făcînd schimbarea de variabilă

$$y = \bar{b} \zeta \quad (2.3)$$

şi introducînd parametrii adimensionali

$$
\begin{aligned}
k &= \frac{\bar{k}^2}{\bar{b}^2},\\
\alpha^2 &= \frac{q\,c\,e\,\bar{b}^2}{GI_d}\frac{\mathrm{d}C_z}{\mathrm{d}i},\\
k_1 &= -\frac{q\,c\,e\,\bar{b}^2}{GI_d}\left(\frac{\mathrm{d}C_z}{\mathrm{d}\beta}+\frac{c}{e}\frac{\mathrm{d}C_m}{\mathrm{d}\beta}\right)\beta,\\
k_2 &= \frac{q\,c\,e\,\bar{b}^3}{GI_d}\left(\frac{\omega}{V}\cdot\frac{\mathrm{d}C_z}{\mathrm{d}i}+\frac{pd}{q\,c\,e\,g}\,\dot{\omega}\right),
\end{aligned}
\tag{2.4}
$$

ecuaţia (2.2) devine

$$
k\frac{\mathrm{d}^4\varphi}{\mathrm{d}\zeta^4}+\left[k(1-\nu)\,\alpha^2-1\right]\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}\zeta^2}-\alpha^2\varphi=-k_1-k_2\,\zeta. \tag{2.5}
$$

Dacă se introduce notaţia

$$
\xi=\frac{\bar{b}_1}{\bar{b}}, \tag{2.6}
$$

atunci soluţia ecuaţiei diferenţiale (2.5) este

$$
\begin{aligned}
\varphi_1 &= C_1\sin a\zeta + C_2\cos a\zeta + C_3\,\mathrm{sh}\,b\zeta + C_4\,\mathrm{ch}\,b\zeta + \frac{k_2}{\alpha^2}\zeta,\ (0\leqslant|\zeta|\leqslant\xi),\\
\varphi_2 &= C_5\sin a\zeta + C_6\cos a\zeta + C_7\,\mathrm{sh}\,b\zeta + C_8\,\mathrm{ch}\,b\zeta + \frac{k_1}{\alpha^2}+\frac{k_2}{\alpha^2}\zeta,\\
&(\xi\leqslant|\zeta|\leqslant 1),
\end{aligned}
\tag{2.7}
$$

unde

$$
a,b=\sqrt{\frac{\pm\left[k(1-\nu)\,\alpha^2-1\right]+\sqrt{k^2(1-\nu)^2\alpha^4+2k(1+\nu)\,\alpha^2+1}}{2k}}, \tag{2.8}
$$

ele fiind modulele rădăcinilor ecuaţiei caracteristice. În deducerea soluţiei s-a ţinut seama că bracajul are loc numai în dreptul aripioarelor, pe restul anvergurii parametrul k_1 fiind nul.

Rămîn de determinat constantele de integrare pentru cunoaşterea unghiului de răsucire. O primă grupă de ecuaţii se obţine prin satisfacerea condiţiilor la limită. Prinderea aripii de fuselaj şi extremitatea liberă a acesteia conduce la

$$
\begin{aligned}
&C_2+C_4=0,\\
&a\left[b^2k(1-\nu)-1\right]C_1-b\left[a^2k(1-\nu)+1\right]C_3=\frac{\nu}{\alpha^2}k_2,\\
&-bC_5\cos a+bC_6\sin a+a\,C_7\,\mathrm{ch}\,b+a\,C_8\,\mathrm{sh}\,b=\frac{k_2}{a\,\alpha^3\sqrt{k}},\\
&a^2\left[b^2k(1-\nu)-1\right](C_5\sin a+C_6\cos a)+\\
&+b^2\left[a^2k(1-\nu)+1\right](C_7\,\mathrm{sh}\,b+C_8\,\mathrm{ch}\,b)=0.
\end{aligned}
\tag{2.9}
$$

Primele două ecuații exprimă că prinderea aripii de fuselaj împiedică secțiunea ($\zeta = 0$) să se rotească și să se deplaseze longitudinal. Ultimele două ecuații asigură satisfacerea la extremitatea liberă a aripii ($\zeta = 1$) a următoarelor condiții : extremitatea se poate roti, deci momentul de răsucire M_t este nul și se poate deplana, adică nu apar eforturi unitare normale ($\sigma_y = 0$). Transcrierea acestor condiții s-a făcut utilizînd soluția (2.7), precum și relațiile (1.1), (1.2), (1.4) și (1.5) în care momentul distribuit m_t a fost înlocuit în funcție de unghiul de rotire φ, conform expresiei (2.1). Restul ecuațiilor necesare, pentru completarea sistemului de ecuații, rezultă din condițiile de continuitate în secțiunea $\zeta = \xi$. Aceste ecuații sînt :

$$\begin{gathered}(C_1 - C_5)\sin a\,\xi + (C_2 - C_6)\cos a\,\xi + (C_3 - C_7)\,\mathrm{sh}\,b\,\xi + \\ + (C_4 - C_8)\,\mathrm{ch}\,b\,\xi = \frac{k_1}{\alpha^2}, \\ a\,[b^2 k(1-\nu) - 1]\,[-(C_1 - C_5)\cos a\,\xi + (C_2 - C_6)\sin a\,\xi] + \\ + b\,[a^2 k(1-\nu) + 1]\,[(C_3 - C_7)\,\mathrm{ch}\,b\,\xi + (C_4 - C_8)\,\mathrm{sh}\,b\,\xi] = 0, \\ -b\,(C_1 - C_5)\cos a\,\xi + b\,(C_2 - C_6)\sin a\,\xi + \\ + a\,(C_3 - C_7)\,\mathrm{ch}\,b\,\xi + a\,(C_4 - C_8)\,\mathrm{sh}\,b\,\xi = 0, \\ a^2\,[b^2 k(1-\nu) - 1]\,[(C_1 - C_5)\sin a\,\xi + (C_2 - C_6)\cos a\,\xi] + \\ + b^2\,[a^2 k(1-\nu) + 1]\,[(C_3 - C_7)\,\mathrm{sh}\,b\,\xi + \\ + (C_4 - C_8)\,\mathrm{ch}\,b\,\xi] = 0,\end{gathered} \tag{2.10}$$

ele exprimînd continuitatea în secțiunea menționată respectiv a unghiului de răsucire φ, a deplasării longitudinale u, a momentului de răsucire M_t precum și a efortului unitar normal σ. Din ecuațiile (2.10) se obține

$$\begin{aligned}C_1 - C_5 &= \frac{k_1 b^2\,[a^2 k(1-\nu) + 1]}{\alpha^2 (a^2 + b^2)}\sin a\,\xi, \\ C_2 - C_6 &= \frac{k_1 b^2\,[a^2 k(1-\nu) + 1]}{\alpha^2 (a^2 + b^2)}\cos a\,\xi, \\ C_3 - C_7 &= \frac{k_1 a^2\,[b^2 k(1-\nu) - 1]}{\alpha^2 (a^2 + b^2)}\,\mathrm{sh}\,b\,\xi, \\ C_4 - C_8 &= \frac{-k_1 a^2\,[b^2 k(1-\nu) - 1]}{\alpha^2 (a^2 + b^2)}\,\mathrm{ch}\,b\,\xi.\end{aligned} \tag{2.11}$$

Rotirea elastică a aripii va fi dată atunci, conform expresiei (2.7), de relația

$$\begin{gathered}\varphi = C_1\sin a\zeta + C_2\cos a\zeta + C_3\,\mathrm{sh}\,b\zeta + C_4\,\mathrm{ch}\,b\zeta + \\ + \frac{k_2}{\alpha^2}\zeta - \delta\frac{k_1}{\alpha^2(a^2 + b^2)}\{b^2[a^2 k(1-\nu) + 1]\cos a(\zeta - \xi) - \\ - a^2[b^2 k(1-\nu) - 1]\,\mathrm{ch}\,b(\zeta - \xi)\} + \delta\frac{k_1}{\alpha^2},\end{gathered} \tag{2.12}$$

unde

$$\delta = 0 \text{ pentru } 0 \leqslant \zeta \leqslant \xi,$$
$$\delta = 1 \text{ pentru } \xi \leqslant \zeta \leqslant 1,$$

constantele de integrare $C_j\,(j = 1,2,3,4)$ urmînd a fi determinate.

Din sistemul (2.9) – (2.11) eliminînd constantele C_5, C_6, C_7 şi C_8, rezultă

$$\begin{gathered}
C_2 + C_4 = 0,\\
a\,b_1\,C_1 - b\,a_1\,C_3 = \frac{\nu}{\alpha^2}\,k_2,\\
-\,b\cos a\;C_1 + b\sin a\;C_2 + a\operatorname{ch} b\;C_3 + a\operatorname{sh} b\;C_4 =\\
= \frac{k_2}{\alpha^3\sqrt{k}} + \frac{k_1\,b^3\,a_1}{\alpha^2\,(a^2+b^2)}\sin a\,(1-\xi) -\\
-\,\frac{k_1\,a^3\,b_1}{\alpha^2\,(a^2+b^2)}\operatorname{sh} b\,(1-\xi), \qquad (2.13)\\
a^2\,b_1\sin a\;C_1 + a^2\,b_1\cos a\;C_2 + b^2\,a_1\operatorname{sh} b\;C_3 +\\
+\,b^2\,a_1\operatorname{ch} b\;C_4 = \frac{k_1\,a^2\,b^2\,a_1\,b_1}{\alpha^2\,(a^2+b^2)}\cos a\,(1-\xi) -\\
-\,\frac{k_1\,a^2\,b^2\,a_1\,b_1}{\alpha^2\,(a^2+b^2)}\operatorname{ch} b\,(1-\xi).
\end{gathered}$$

Eliminînd de asemenea constantele C_3 şi C_4 acest sistem devine

$$\begin{gathered}
\left(\frac{a^2\,b_1}{b\,a_1}\operatorname{ch} b - b\cos a\right)C_1 + (b\sin a - a\operatorname{sh} b)\;C_2 =\\
= \frac{k_1}{\alpha^2}\left[\frac{b^3\,a_1\sin a\,(1-\xi) - a^3\,b_1\operatorname{sh} b\,(1-\xi)}{a^2+b^2}\right] + \frac{k_2}{\alpha^2}\left[\frac{a\,\nu\operatorname{ch} b}{b\,a_1} + \frac{1}{\alpha\sqrt{k}}\right],\\
(a^2\,b_1\sin a + a\,b\,b_1\operatorname{sh} b)\;C_1 + (a^2\,b_1\cos a - b^2\,a_1\operatorname{ch} b)\;C_2 = \qquad (2.14)\\
= \frac{k_1}{\alpha^2}\,\frac{\nu\,a^2\,b^2}{a^2+b^2}\,[\operatorname{ch} b\,(1-\xi) - \cos a\,(1-\xi)] + \frac{k_2}{\alpha^2}\,\nu\,b\operatorname{sh} b,
\end{gathered}$$

unde s-a notat

$$\begin{aligned}
a^2\,k\,(1-\nu) + 1 &= a_1,\\
b^2\,k\,(1-\nu) - 1 &= b_1.
\end{aligned} \qquad (2.15)$$

Determinantul coeficienţilor constantelor C_1 şi C_2 va fi

$$\Delta = \begin{vmatrix} \dfrac{a^2\,b_1}{b\,a_1}\operatorname{ch} b - b\cos a & b\sin a - a\operatorname{sh} b \\ a^2\,b_1\sin a + a\,b\,b_1\operatorname{sh} b & a^2 b_1\cos a - b^2\,a_1\operatorname{ch} b \end{vmatrix},$$

respectiv

$$\Delta = -2\,a^2 b\, b_1 + a\,(a^2 - b^2)\, b_1 \sin a \operatorname{sh} b + \frac{b^4 a_1 - a^4 b_1}{b\, a_1} \cos a \operatorname{ch} b. \tag{2.16}$$

Notînd

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \begin{array}{l} \dfrac{k_1}{\alpha^2}\left[\dfrac{b^3 a_1 \sin a(1-\xi) - a^3 b_1 \operatorname{sh} b\,(1-\xi)}{a^2+b^2}\right] + \\ \qquad + \dfrac{k_2}{\alpha^2}\left[\dfrac{a \nu \operatorname{ch} b}{b\, a_1} + \dfrac{1}{\alpha\sqrt{k}}\right] \end{array} & b \sin a - a \operatorname{sh} b \\ \begin{array}{l} \dfrac{k_1}{\alpha^2}\dfrac{\nu\, a^2\, b^2}{a^2+b^2}\Bigl[\operatorname{ch} b\,(1-\xi) - \\ - \cos a\,(1-\xi) + \dfrac{k_2}{\alpha^2}\,\nu\, b \operatorname{sh} b\Bigr] \end{array} & a^2 b_1 \cos a - b^2 a_1 \operatorname{ch} b \end{vmatrix}, \tag{2.17}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \dfrac{a^2 b_1}{b\, a_1} \operatorname{ch} b - b \cos a & \begin{array}{r} \dfrac{k_1}{\alpha^2}\left[\dfrac{b^3 a_1 \sin a(1-\xi) - a^3 b_1 \operatorname{sh} b(1-\xi)}{a^2+b^2}\right] + \\ + \dfrac{k_2}{\alpha^2}\left[\dfrac{a\ \nu \operatorname{ch} b}{b\, a_1} + \dfrac{1}{\alpha\sqrt{k}}\right] \end{array} \\ a^2 b_1 \sin a + a\, b\, b_1 \operatorname{sh} b & \begin{array}{r} \dfrac{k_1}{\alpha^2}\dfrac{\nu\ a^2\ b^2}{a^2+b^2}\,[\operatorname{ch} b\,(1-\xi) - \\ - \cos a\,(1-\xi)] + \dfrac{k^2}{\alpha^2}\,\nu\, b \operatorname{sh} b \end{array} \end{vmatrix},$$

valorile constantelor C_1 și C_2 vor fi

$$C_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \qquad C_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}. \tag{2.18}$$

Dezvoltînd determinații Δ_1 și Δ_2 se obține

$$\begin{aligned} \Delta_1 = \frac{k_1}{\alpha^2}\Biggl\{\frac{\nu\, a^2 b^2}{a^2+b^2}\Bigl[& b \sin a\, \xi - b \sin a \operatorname{ch} b\,(1-\xi) + a \operatorname{sh} b\, \xi - \\ - a \operatorname{sh} b \cos a\,(1-\xi)\Bigr] - \frac{a^5 b_1^2}{a^2+b^2} & \cos a \operatorname{sh} b\,(1-\xi) - \frac{b^5 a_1^2}{a^2+b^2} \operatorname{ch} b \sin a\,(1-\xi)\Biggr\} + \\ + \frac{k_2}{\alpha^2}\Bigl[\frac{\nu\, a^3 b_1}{b\, a_1} \operatorname{ch} b \cos a - & \nu\, b^2 \operatorname{sh} b \sin a + \frac{a^2 b_1}{\alpha\sqrt{k}} \cos a - \\ & - \frac{b^2 a_1}{\alpha\sqrt{k}} \operatorname{ch} b - a\, b\, \nu\Bigr], \end{aligned} \tag{2.19}$$

$$\Delta_2 = \frac{k_1}{\alpha^2}\left[\frac{\nu\, a^2 b^3}{a^2+b^2}\cos a\,\xi + \frac{\nu\, a^4 b\, b_1}{(a^2+b^2)\, a_1}\operatorname{ch} b\xi - \frac{\nu\, a^2 b^3}{a^2+b^2}\cos a \operatorname{ch} b\,(1-\xi) - \right.$$

$$- a\,\frac{b^4 b_1 a_1}{a^2+b^2}\operatorname{sh} b \sin a\,(1-\xi) - \frac{\nu\, a^4 b\, b_1}{(a^2+b^2)\, a_1}\operatorname{ch} b \cos a\,(1-\xi) +$$

$$\left. + \frac{a^5 b_1^2}{a^2+b^2}\sin a \operatorname{sh} b\,(1-\xi)\right] + \frac{k_2}{\alpha_2}\left[- \nu\, b^2 \operatorname{sh} b \cos a - \frac{a\, b_1}{\alpha\sqrt{k}}\sin a - \right.$$

$$\left. - \frac{a\, b\, b_1}{\alpha\sqrt{k}}\operatorname{sh} b - \frac{\nu\, a^3 b_1}{b\, a_1}\operatorname{ch} b \sin a\right],$$

expresii care se pot pune sub forma

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \frac{k_1}{\alpha^2}\mathcal{F}_{11} + \frac{k_2}{\alpha^2}\mathcal{F}_{12}, \\ \Delta_2 &= \frac{k_1}{\alpha^2}\mathcal{F}_{21} + \frac{k_2}{\alpha^2}\mathcal{F}_{22}. \end{aligned} \tag{2.20}$$

Constantele C_1 și C_2 vor avea deci expresia

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{k_1}{\alpha^2}\frac{\mathcal{F}_{11}}{\Delta} + \frac{k_2}{\alpha^2}\frac{\mathcal{F}_{12}}{\Delta}, \\ C_2 &= \frac{k_1}{\alpha^2}\frac{\mathcal{F}_{21}}{\Delta} + \frac{k_2}{\alpha^2}\frac{\mathcal{F}_{22}}{\Delta}, \end{aligned} \tag{2.21}$$

Din primele două ecuații ale sistemului (2.13) se obține

$$\begin{aligned} C_3 &= \frac{k_1}{\alpha^2}\frac{ab_1}{ba_1}\frac{\mathcal{F}_{11}}{\Delta} + \frac{k_2}{\alpha^2}\left[\frac{ab_1}{ba_1}\frac{\mathcal{F}_{12}}{\Delta} - \frac{\nu}{ba_1}\right], \\ C_4 &= -\frac{k_1}{\alpha^2}\frac{\mathcal{F}_{21}}{\Delta} - \frac{k_2}{\alpha^2}\frac{\mathcal{F}_{22}}{\Delta}. \end{aligned} \tag{2.22}$$

Valorile acestor constante introduse în (2.12) determină deformația oricărei secțiuni a aripii.

3. DETERMINAREA VITEZEI CRITICE DE INVERSIUNE A COMENZILOR

Pentru a se determina viteza critică de anulare a efectului comenzilor se pune condiția de anulare a cuplului în jurul axului longitudinal al avionului respectiv

$$2\int_0^{\bar{b}} q\, C_z\, c y\, \mathrm{d}y = 2\, q\, c\, \bar{b}^2 \int_0^1 C_z\, \zeta\, \mathrm{d}\zeta = 0. \tag{3.1}$$

Deoarece portanța locală poate fi pusă sub forma

$$C_z = \frac{\mathrm{d}C_z}{\mathrm{d}i}\varphi + \frac{\mathrm{d}C_z}{\mathrm{d}\beta}\beta - \frac{\mathrm{d}C_z}{\mathrm{d}i}\frac{\omega b}{V}\zeta, \tag{3.2}$$

unde s-a ținut seama atît de deformație cît și de micșorarea de portanță produsă de rotirea avionului, expresia (3.1) devine

$$\int_0^1 \left[\frac{\mathrm{d}C_z}{\mathrm{d}i}\varphi\zeta + \frac{\mathrm{d}C_z}{\mathrm{d}\beta}\beta\zeta - \frac{\mathrm{d}C_z}{\mathrm{d}i}\frac{\omega b}{V}\zeta^2\right]\mathrm{d}\zeta = 0. \tag{3.3}$$

Introducînd aici deformația de răsucire (2.12) și integrînd se obține

$$\begin{aligned} &\frac{C_1}{\alpha^2}(\sin a - a\cos a) + \frac{C_2}{\alpha^2}(a\sin a + \cos a - 1) + \frac{C_3}{b^2}(b\,\mathrm{ch}\,b - \mathrm{sh}\,b) + \\ &+ \frac{C_4}{b^2}(b\,\mathrm{sh}\,b - \mathrm{ch}\,b + 1) + \frac{k_1}{\alpha^2}\left\{\frac{a^2 b_1}{(a^2+b^2)\,b^2}[b\,\mathrm{sh}\,b(1-\xi) - \mathrm{ch}\,b(1-\xi)] - \right. \\ &\left. - \frac{b^2 a_1}{(a^2+b^2)\,a^2}[a\sin a(1-\xi) + \cos a(1-\xi)] + \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1-\xi^2}{2}\right\} + \frac{k_2}{3\alpha^2} + \\ &+ \frac{\dfrac{\mathrm{d}C_z}{\mathrm{d}\beta}}{\dfrac{\mathrm{d}C_z}{\mathrm{d}i}}\frac{1-\xi^2}{2}\beta - \frac{\omega b}{3V} = 0. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Această condiție reprezintă relația care există între viteza de rotire în jurul axului longitudinal ω și bracajul aripioarelor β.

Introducînd aici constantele (2.21), (2.24) și ținînd seama de (2.4) se obține

$$\begin{aligned} &\frac{\dfrac{\mathrm{d}C_z}{\mathrm{d}\beta} + \dfrac{c}{e}\dfrac{\mathrm{d}C_m}{\mathrm{d}\beta}}{\dfrac{\mathrm{d}C_z}{\mathrm{d}i}}\beta\left\{\frac{\mathcal{F}_{11}}{a^2\Delta}(\sin a - a\cos a) + \frac{\mathcal{F}_{21}}{a^2\Delta}(a\sin a + \cos a - 1) + \right. \\ &+ \frac{ab_1}{b^3 a_1}\frac{\mathcal{F}_{11}}{\Delta}(b\,\mathrm{ch}\,b - \mathrm{sh}\,b) - \frac{\mathcal{F}_{21}}{b^2\Delta}(b\,\mathrm{sh}\,b - \mathrm{ch}\,b + 1) + \\ &+ \frac{a^2 b_1}{(a^2+b^2)\,b^2}[b\,\mathrm{sh}\,b(1-\xi) - \mathrm{ch}\,b(1-\xi)] - \\ &\left. - \frac{b^2 a_1}{(a^2+b^2)\,a^2}[a\sin a(1-\xi) + \cos a(1-\xi)] + \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1-\xi^2}{2}\right\} - \frac{\dfrac{\mathrm{d}C_z}{\mathrm{d}\beta}}{\dfrac{\mathrm{d}C_z}{\mathrm{d}i}}\frac{1-\xi^2}{2}\beta - \end{aligned}$$

$$- \frac{\omega \bar{b}}{V} \left\{ \frac{\mathcal{F}_{12}}{a^2 \Delta} (\sin a - a \cos a) + \frac{\mathcal{F}_{22}}{a^2 \Delta} (a \sin a + \cos a - 1) + \right.$$

$$\left. + \left[\left(\frac{a b_1}{b a_1} \frac{\mathcal{F}_{12}}{\Delta} - \frac{\nu}{b a_1} \right) \frac{1}{b^2} (b \operatorname{ch} b - \operatorname{sh} b) \right] - \frac{\mathcal{F}_{22}}{b^2 \Delta} (b \operatorname{sh} b - \operatorname{ch} b + 1) \right\} = 0. \tag{3.5}$$

Relația între viteza de rotație și bracaj se poate deci scrie

$$\frac{\dfrac{\omega \bar{b}}{V}}{\beta} = \frac{\dfrac{\dfrac{\mathrm{d} C_z}{\mathrm{d} \beta} + \dfrac{c}{e} \dfrac{\mathrm{d} C_m}{\mathrm{d} \beta}}{\dfrac{\mathrm{d} C_z}{\mathrm{d} i}} \left\{ \dfrac{\mathcal{F}_{11}}{a^2 \Delta} (\sin a - a \cos a) + \dfrac{\mathcal{F}_{21}}{a^2 \Delta} (a \sin a + \cos a - 1) + \mathcal{A} \right\}}{\dfrac{\mathcal{F}_{12}}{a^2 \Delta} (\sin a - a \cos a) + \dfrac{\mathcal{F}_{22}}{a^2 \Delta} (a \sin a + \cos a - 1) + \mathcal{B}}, \tag{3.6}$$

unde

$$\mathcal{A} = \frac{a b_1}{b^3 a_1} \frac{\mathcal{F}_{11}}{\Delta} (b \operatorname{ch} b - \operatorname{sh} b) - \frac{\mathcal{F}_{21}}{b^2 \Delta} (b \operatorname{sh} b - \operatorname{ch} b + 1) +$$

$$+ \frac{a^2 b_1}{(a^2 + b^2) b^2} [b \operatorname{sh} b (1 - \xi) - \operatorname{ch} b (1 - \xi)] - \frac{b^2 a_1}{(a^2 + b^2) a^2} [a \sin a (1 - \xi) +$$

$$+ \cos a (1 - \xi)] + \frac{1}{\alpha^2} + \frac{c}{e} \frac{\dfrac{\mathrm{d} C_m}{\mathrm{d} \beta}}{\dfrac{\mathrm{d} C_z}{\mathrm{d} i}} \frac{1 - \xi^2}{2},$$

$$\mathcal{B} = \left[\left(\frac{a b_1}{b a_1} \frac{\mathcal{F}_{12}}{\Delta} - \frac{\nu}{b a_1} \right) \frac{1}{b^2} (b \operatorname{ch} b - \operatorname{sh} b) \right] - \frac{\mathcal{F}_{22}}{b^2 \Delta} (b \operatorname{sh} b - \operatorname{ch} b + 1) \cdot$$

Comparînd această relație cu cea corespunzătoare din cazul aripilor elastice studiată în cazul teoriei de răsucire a aripii după Saint-Venant, respectiv

$$\frac{\dfrac{\omega \bar{b}}{V}}{\beta} = \frac{\left(\dfrac{\mathrm{d} C_z}{\mathrm{d} \beta} + \dfrac{c}{e} \dfrac{\mathrm{d} C_m}{\mathrm{d} \beta} \right) \left(\dfrac{\cos a \xi}{\cos \alpha} - 1 \right) - \dfrac{c}{e} \dfrac{\mathrm{d} C_m}{\mathrm{d} \beta} \alpha^2 \dfrac{1 - \xi^2}{2}}{\dfrac{\mathrm{d} C_z}{\mathrm{d} i} \left(\dfrac{\mathrm{tg} \alpha}{\alpha} - 1 \right)}, \tag{3.7}$$

se poate constata efectul introducerii teoriei de bară cu pereți subțiri la răsucire împiedicată. Se poate aprecia astfel cantitativ efectul restrîngerilor de fixare precum și efectul restrîngerilor de deplanare în lungul structurii produse datorită variației de moment de răsucire.

Se observă că dacă se ia $\nu = 0$ sau $k = 0$, ecuația (3.6) se reduce la (3.7) fiind deci o generalizare a acesteia din urmă.

Pentru a calcula viteza critică de inversiune a efectului comenzilor se anulează numărătorul membrului drept al relației (3.6). Se obține astfel

$$\frac{-\dfrac{\mathrm{d}C_z}{\mathrm{d}\beta}}{\dfrac{c}{e}\dfrac{\mathrm{d}C_m}{\mathrm{d}\beta}} = 1 +$$

$$+\frac{\dfrac{1-\xi^2}{2}}{\dfrac{\mathcal{F}_{11}}{a^2\Delta}(\sin a - a\cos a) + \dfrac{\mathcal{F}_{21}}{a^2\Delta}(a\sin a + \cos a - 1) + \dfrac{ab_1}{b^3 a_1}\dfrac{\mathcal{F}_{11}}{\Delta}(b\,\mathrm{ch}\,b - \mathrm{sh}\,b) + \mathcal{C}},$$

unde

$$\mathcal{C} = -\frac{\mathcal{F}_{21}}{b^2\Delta}(b\,\mathrm{sh}\,b - \mathrm{ch}\,b + 1) + \frac{a^2 b_1}{(a^2+b^2)\,b^2}[b\,\mathrm{sh}\,b(1-\xi) - \mathrm{ch}\,b(1-\xi)] -$$
$$-\frac{b^2 a_1}{(a^2+b^2)\,a^2}[a\sin a\,(1-\xi) + \cos a\,(1-\xi)] + \frac{1}{\alpha^2}.$$

Din această relație, ținînd seama de (2.4), (2.8), (2.15), (2.17), (2.19) și (2.20), se obține viteza critică de inversare a efectului comenzilor. Dînd pentru α diferite valori pentru parametrii cunoscuți ai aripii, membrul drept al ecuației (3.8) va lua diferite valori. Prin interpolare se va obține valoarea parametrului α, deci a vitezei critice de inversare a efectului comenzilor pentru valoarea corespunzătoare a membrului stîng al ecuației (3.8).

Pentru cazurile reale, valorile coeficientului k sînt mici, astfel încît expresia (3.8) permite simplificări. Neglijînd termenii mici în comparație cu cei rămași se obține

$$\frac{-\dfrac{\mathrm{d}C_z}{\mathrm{d}\beta}}{\dfrac{c}{e}\dfrac{\mathrm{d}C_m}{\mathrm{d}\beta}} = 1 - \frac{\dfrac{1-\xi^2}{2}\alpha^2}{\dfrac{\cos\alpha\xi + \nu\alpha\sqrt{k}\,[\sin\alpha\xi + \sin\alpha(1-\xi)]}{\nu\alpha\sqrt{k}\sin\alpha + \cos\alpha} - 1}. \tag{3.9}$$

Se observă că efectul restrîngerilor potrivit teoriei de bară cu pereți subțiri este introdus prin termenul $\nu\sqrt{k}$. Ecuația (3.9) este rezolvată în tabelă și grafic în figurile 2–4.

Pentru calculul vitezei critice de anulare a efectului comenzilor, se procedează deci în modul următor:

Se calculează termenul $\nu\sqrt{k}$, precum și raportul $\dfrac{-\dfrac{\mathrm{d}C_z}{\mathrm{d}\beta}}{\dfrac{c}{e}\dfrac{\mathrm{d}C_m}{\mathrm{d}\beta}}$, urmărind

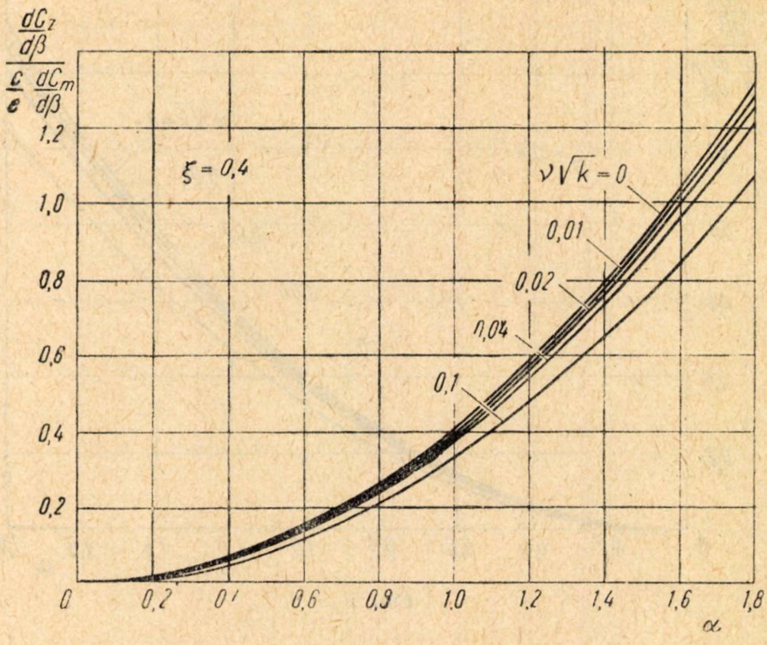

$\frac{dC_z}{d\beta} / \frac{c}{e}\frac{dC_m}{d\beta}$
1,2
1,0
0,8
0,6
0,4
0,2
ξ = 0,4
$\nu\sqrt{k} = 0$
0,01
0,02
0,04
0,1
0
0,2
0,4
0,6
0,8
1,0
1,2
1,4
1,6
1,8
α

Fig. 2

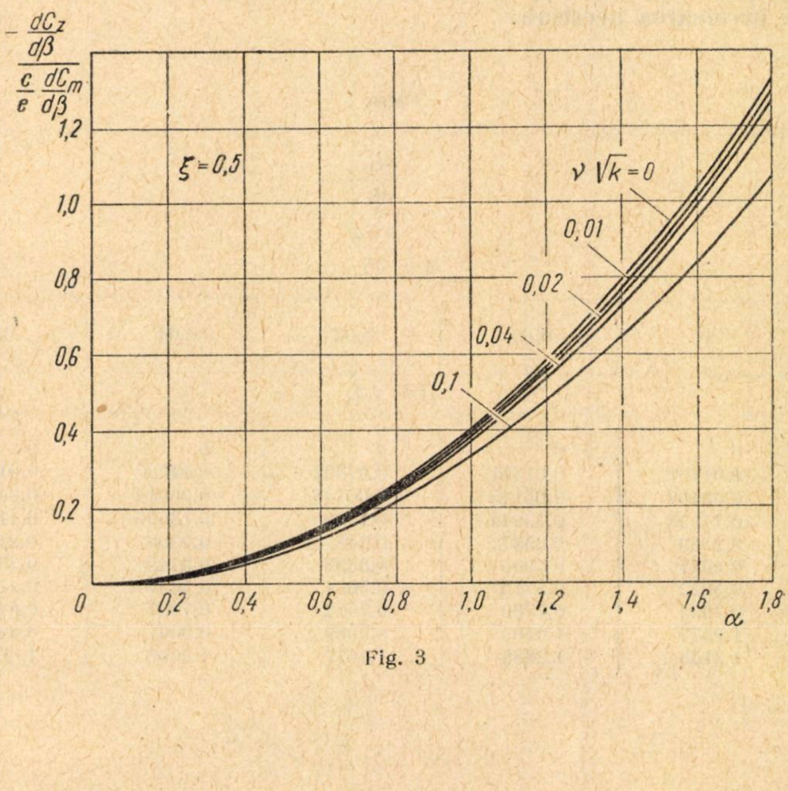

$-\frac{dC_z}{d\beta} / \frac{c}{e}\frac{dC_m}{d\beta}$
1,2
1,0
0,8
0,6
0,4
0,2
ξ = 0,5
$\nu\sqrt{k} = 0$
0,01
0,02
0,04
0,1
0
0,2
0,4
0,6
0,8
1,0
1,2
1,4
1,6
1,8
α

Fig. 3

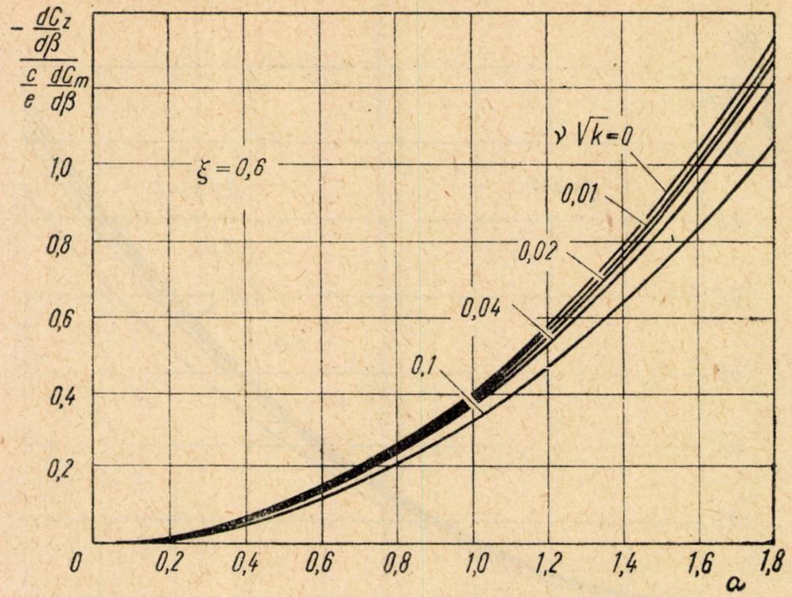


Fig. 4

valoarea lui ξ. Cu ajutorul curbelor date în figurile 2—4 se obţine valoarea lui α din care se obţine viteza critică de anulare a efectului comenzilor şi inversarea acestora.

Tabelă

	$-\dfrac{\dfrac{dC_z}{d\beta}}{\dfrac{c}{e}\cdot\dfrac{d\,C_m}{d\beta}}$				
$\nu\sqrt{k}$ / α	0	0,01	0,02	0,04	0,1
			ξ = 0,4		
0	0	0	0	0	0
0,2	0,01409	0,01351	0,01322	0,01235	0,01002
0,4	0,06407	0,06145	0,06145	0,06014	0,05219
0,6	0.14528	0,13944	0,13990	0,13550	0,1194
0,8	0.2583	0,2537	0,2487	0,2396	0,2120
1,0	0.4041	0,3966	0,3893	0,3743	0,3312
1,2	0,5822	0,5712	0,5601	0,5387	0,4760
1,4	0,7934	0,7780	0,7612	0,7327	0,6468
1,6	1,0377	1,0169	0,9989	0,9567	0,8435
1,8	1,3158	1,2885	1,2617	1,2096	1,0653

Tabelă (continuare)

$\xi = 0,5$					
0	0	0	0	0	0
0,2	0,0132	0,0125	0,0125	0,0119	0,0093
0,4	0,0625	0,0610	0,0610	0,0610	0,0521
0,6	0,1429	0,1346	0,1379	0,1335	0,1178
0,8	0,2549	0,2505	0,2460	0,2374	0,2129
1,0	0,3993	0,3921	0,3851	0,3706	0,3292
1,2	0,5772	0,5663	0,5556	0,5347	0,4737
1,4	0,7899	0,7745	0,7593	0,7295	0,6447
1,6	1,0386	1,0173	0,9998	0,9557	0,8473
1.8	1.3252	1,2964	1,2684	1,2141	1,0664
$\xi = 0,6$					
0	0	0	0	0	0
0,2	0,0121	0,0113	0,0112	0.0105	0,0081
0,4	0,0606	0,0588	0,0588	0,0571	0,0510
0,6	0,1460	0,1371	0,1351	0,1319	0,1173
0,8	0,2501	0,2460	0,2451	0,2332	0,2081
1,0	0,3933	0,3863	0,3795	0,3655	0,3252
1,2	0,5712	0,5605	0,5438	0,5292	0,4697
1,4	0,7857	0,7702	0,7549	0,7250	0.6410
1,6	1,0397	1,0177	0,9989	0,9551	0,8401
1,8	1,3372	1.3068	1,2772	1,2203	1,0672

Primită la redacție la 9 august 1963

AEROELASTIC EFFECTS ON THE AILERON EFFECTIVENESS, BY CONSIDERING THE END RESTRAINTS

ABSTRACT

A study is presented on aileron effectiveness for wings with constant cross-section, the wing being considered as a thin walled rod. The differential equation of the problem is established and integrated under the assumption, that the stresses normal to the cross-section, caused by torsion are proportional to the unitary axial strain.

Further on, the relation between the rotation velocity of the aircraft about the longitudinal axis and the deflection of the wing ailerons for a steady state motion is established.

The reverse critical velocity may be determined from this relation.

For current values of the quantities which characterize the thin walled rods the formula obtained permits simplifications and the results are expressed in terms of non-dimensional parameters in tables and diagrams.

BIBLIOGRAFIE

1. AUGUSTIN PETRE, MIHAIL ATANASIU, *Bare cu pereți subțiri*. Edit. tehnică, București, 1960.
2. R. BISPLINGHOFF, H. ASHLEY, R. HALFMAN, *Aeroelasticity*. Addison-Wesley, 1959.

STUDII

ANALOGIA ELECTRICĂ ÎN CINEMATICA MECANISMELOR PLANE

DE

CHRISTIAN PELECUDI

531.1

Avantajele utilizării analogiei electrice în cercetările de mecanică aplicată au fost scoase de multe ori în evidență în literatura de specialitate. Această metodă s-a aplicat cu succes în problemele de hidro și aeromecanică, în problemele de elasticitate, plasticitate etc. De asemenea, a avut rezultate bune în problemele de rezistența materialelor, în problemele de deformații ale sistemelor de corpuri, ale cadrelor sau fermelor.

În problemele de cinematică a mecanismelor, respectiv pentru determinarea parametrilor cinematici — poziții, viteze, accelerații — la sistemele de corpuri rigide în mișcări relative, s-a întrebuințat procedeul numit mecano-electric adecvat unei instalații corespunzătoare [1], [2], [3], [4]. Aceasta, permițînd modelarea unui mecanism ai cărui parametri geometrici pot fi ușor variați, conduce cu ajutorul unui traductor însoțit de aparate electrice și electronice de înmulțire, derivare sau integrare la înscrierea pe ecranul oscilografului catodic a variației în timp sau sub formă hodografică a parametrilor cinematici cercetați. Avantajele procedeului și instalației utilizate constînd în apariția directă a curbelor de variație, a rapidității obținerii informațiilor diferiților parametri, a manevrării și reglării ușoare, a exactității suficiente în cercetările experimentale și a posibilității determinării abaterilor mecanismului construit față de cel proiectat etc. au fost de mult semnalate ca deosebit de utile în studiile de cercetare și de verificare.

De curînd s-a luat cunoștință de metoda și instalația pentru determinarea curbelor de bielă la mecanismele plane cu patru elemente, executată de H. Blumenthal sub conducerea lui W. Rössner [5], [6]. Aceasta utilizează analogia electrică a mecanismelor curbelor cicloide. Realizarea sa deosebită constă în faptul că reține de pe ramurile cicloidelor numai punctele corespunzătoare pozițiilor mecanismului de generarea curbelor cicloide suprapuse pozițiilor mecanismului bielă manivelă sau de alt gen.

Cum ramurile cicloidelor sînt destul de dese, apare pe ecranul oscilografului o regiune luminată mărginită de două ramuri concentrice (suma şi diferenţa amplitudinilor) în care ies în evidenţă punctele reţinute, ce prin desimea lor formează curba continuă de bielă.

În prezentul articol urmărim construcţia reţelelor electrice corespunzătoare reţelelor mecanice ale mecanismelor cu elemente rigide, analogia obţinîndu-se prin intermediul utilizării numerelor complexe. Metodele analitice cu folosirea variabilelor complexe în cercetarea de analiză şi de sinteză a mecanismelor au fost începute de Darboux şi apoi prelucrate şi continuate de S. A. Gherşgorn, L. G. Loiţianski, A. I. Lurie, Z. S. Bloch. Lucrările acad. I. I. Artobolevski [7], D. Mangeron [8] şi ale noastre [9] sînt deosebit de utile în analiza şi sinteza mecanismelor pe această cale. Scrierea relaţiilor, sub formă complexă, referitoare la parcurgerea diverselor conture, închise sau deschise, ale lanţurilor cinematice, conduce astfel la ecuaţii asemănătoare ecuaţiilor corespunzătoare legilor Kirchhoff relative la curentul alternativ sinusoidal. Pe această bază se pot forma reţelele electrice analoge celor mecanice, care în anumite situaţii reproduc chiar schema mecanismului, astfel că se pot obţine rezultate rapide în determinarea poziţiilor, vitezelor unghiulare şi acceleraţiilor unghiulare ale elementelor, respectiv poziţiile, vitezele şi acceleraţiile diferitelor puncte ale mecanismelor.

În scrierea ecuaţiilor au mare importanţă sistematizările structurale efectuate asupra mecanismelor plane de M. Grübler [10], L. P. Assur [11], I. I. Artobolevski [7], [12], G. G. Baranov [13], K. Hain [14], N. Manolescu [15] precum şi în lucrarea [16].

STUDIUL STRUCTURAL

a) Se consideră un sistem de corpuri rigide libere în mişcare plană schematizate prin bare drepte (fig. 1). Se formează în felul acesta un contur poligonal simplu închis cu b laturi-bare şi v vîrfuri-noduri ($b = v$).

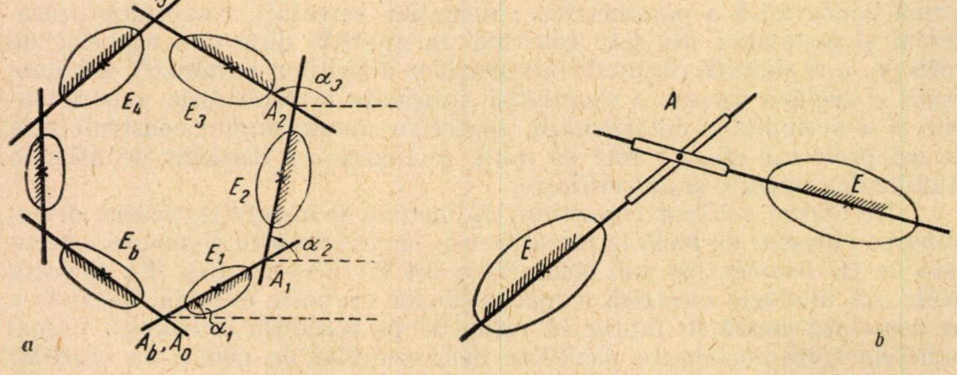


Fig. 1

Aici, ca și în cazul sistemelor complexe cu mai multe conture, se consideră că laturile conturului se urmează una de pe alta în asemenea succesiune încît în conturul dat să nu existe vîrfuri care se repetă. Fiecare latură a conturului intră numai în două și numai două vîrfuri [17], [18], [19].

Acest lanț de corpuri prezintă în total $L = 3\ b$ grade de libertate, corespunzînd la $2v = 2b$ parametri care poziționează vîrfurile $A_1, A_2, \ldots, A_v$ și la b parametri care poziționează punctele legate de fiecare bară față de vîrfurile conturului poligonal, respectiv $(x_{A_1}, x_{A_2}, \ldots, x_{A_v})$ $(y_{A_1}, y_{A_2}, \ldots, y_{A_v})$ și $(r_{E_1}, r_{E_2}, \ldots, r_{E_b})$. Deoarece vom urmări mișcarea relativă a nodurilor $A_1, A_2, \ldots, A_v$, le vom materializa prin introducerea în schema generală poligonală formată cu bare drepte, diade reduse de aspect patru formate cu două cuple de translație exterioare și o cuplă de rotație interioară, suprapuse. Deși numărul corpurilor se modifică crescînd la $3b$, pentru fiecare nod cîte două elemente ale diadei respective, dar din cauza legăturilor introduse $3v = 3b$, pentru fiecare nod cîte trei cuple inferioare, gradul de libertate total rămîne același

$$L = 3n - 2c = 3b. \tag{1}$$

De altfel, diada, care este o grupă cinematică cu grad de mobilitate zero, nu modifică gradul de libertate al lanțului cinematic. În schimb introducerea diadelor transformă lanțul de corpuri libere într-un lanț cinematic, apropiindu-l practic de formațiunea mecanismelor. Astfel, dacă dispar unele din cuplele cinematice inferioare, fie de rotație, fie de translație, se atrage în egală măsură micșorarea numărului de elemente și reducerea cu aceeași mărime a gradului de libertate a lanțului :

$$\begin{aligned} &\text{— numărul elementelor} && n = 3\ b - K, \\ &\text{— numărul cuplelor cinematice} && c = 3\ b - K, \\ &\text{— gradul de libertate} && L = 3\ b - K. \end{aligned} \tag{2}$$

În consecință, pentru lanțul cinematic simplu poligonal avem

$$L = n = c, \tag{3}$$

gradul de libertate fiind egal cu numărul cuplelor cinematice inferioare, respectiv cu numărul elementelor-bare ale lanțului. Această situație corespunde deci cazului în care barele drepte, care schematizează corpurile lanțului, se întîlnesc între ele numai în cîte două noduri-vîrfuri și care corespund în mecanism cu cuplele cinematice inferioare pe care lanțul le-a păstrat din cele ale diadelor reduse utilizate. Astfel, în fiecare nod-vîrf simplu al conturului poligonal există 0,1,2 sau 3 cuple cinematice inferioare și $-1,0,1,2$ elemente auxiliare ca părți rămase din componența diadelor.

La aplicarea formulei numărului de conture-bucle, independente, $B = c - n + 1$ [15], [16], [19] se obține în orice situație $B = 1$, întrucît s-a văzut că dispariția unei cuple cinematice atrage dispariția unui element, astfel că termenii respectivi din formulă se compensează reciproc. În electrotehnică formula corespunzătoare conturelor independente într-o rețea electrică $B = l - v + 1$ conduce evident la același rezultat întrucît între numărul de laturi-bare l și numărul de vîrfuri-noduri v avem $l = v$.

Impunerea unor condiții suplimentare în mișcarea relativă a elementelor-bare ale lanțurilor corespunde cu introducerea a K' condiții de legătură. Acestea pot corespunde legăturilor impuse de cuplele cinematice superioare, adică $K' = c_4$, dacă acestea există în mecanisme, şi deci

$$L = c - K' = c_5 - c_4, \tag{4}$$

unde c_5 sînt cuplele cinematice inferioare, iar c_4 sînt cuplele cinematice superioare. Pe exemplul unui mecanism cu camă de rotaţie şi tachet de rotaţie (fig. 2) se obţine :

— între elementele bare *1* şi *3* cupla de rotaţie $A_0 = A_3$,

— între elementele bare *1* şi *2* cupla de rotaţie A_1,

— între elementele bare *2* şi *3* diada A_2 cu trei cuple inferioare şi două elemente constitutive, precum şi condiţia introdusă de cupla superioară.

Deci :

$$n = 5,\ c_5 = 5,\ c_4 = 1 \text{ şi } L = 4,$$
$$b = 3,\ v = 3 \text{ şi } B = 1.$$

La mecanismul bielă-manivelă dezaxat (fig. 3) se obţin :

— între elementele bare *1* şi *2* cupla de rotaţie A_1,

— între elementele bare *2* şi *3* cupla de rotaţie A_2,

— între elementele bare *3* şi *4* cupla de rotaţie, cupla de translaţie şi culisa A_3,

— între elementele bare *4* şi *1* există o legătură rigidă fără cuple, formînd un singur element, care este baza mecanismului.

Deci :

$$n = 4,\ c_5 = 4 \text{ şi } L = 4,$$
$$b = 4,\ v = 4 \text{ şi } B = 1.$$

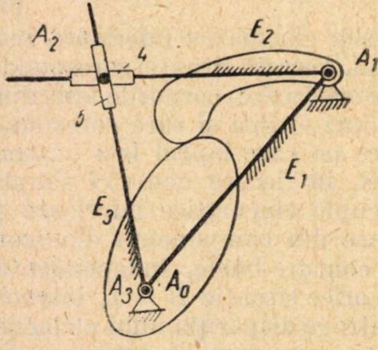


Fig. 2

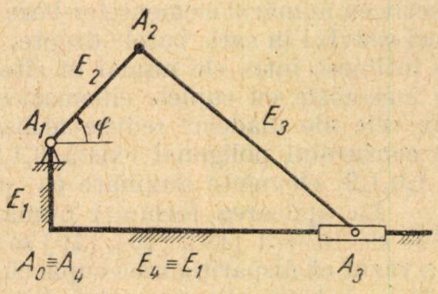


Fig. 3

b) În cazul lanţurilor cinematice complexe, care formează reţele poligonale, se cuprind corpuri ale căror scheme-bare se intersectează cu altele în mai multe vîrfuri-noduri simple. Aceste elemente complexe pot face parte din mai multe conture şi schematizarea lor se prezintă sub forma unor bare ramificate (fig. 4).

Elementul E_j conţine astfel nodurile-vîrfuri simple $A_{j1}, A_{j2}, \ldots, A_{jp}$ corespunzînd intersecţiilor celor p ramuri-bare cu cîte un alt element $E_1, E_2, \ldots, E_p$. Se obţine astfel un contur poligonal propriu elementului E_j, avînd p laturi $A_{j1}A_{j2}, A_{j2}A_{j3}, \ldots, A_{jp}A_{j1}$, care în cazurile practice poate fi descompus în $(p-2)$ conture triunghiulare.

Dacă se notează cu b_p numărul elementelor complexe de ordinul p, deci care au p vîrfuri-noduri simple, respectiv p bare ramificate, atunci :

— numărul de elemente-bare

$$b = b_2 + b_3 + \ldots + b_p, \qquad (5)$$

— numărul de vîrfuri-noduri simple (numărul de ramuri-bare drepte).

$$v = \frac{2b_2 + 3\,b_3 + \ldots + pb_p}{2}.$$

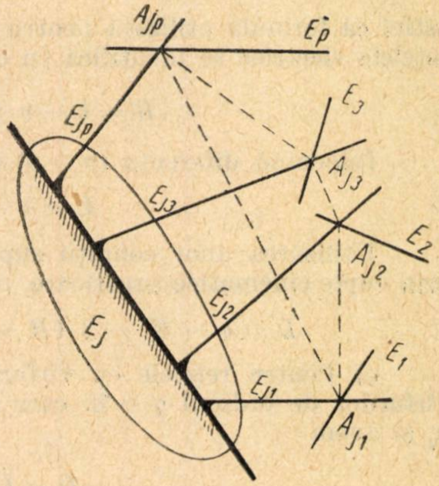


Fig. 4

Introducînd ca mai sus în fiecare nod-vîrf simplu o diadă redusă de aspectul patru, obţinem

— numărul elementelor $n = b + 2\,v$, (6)

— numărul cuplelor $c = 3\,v$,

astfel că gradul de libertate total rămîne $L = 3\,b$.

Dacă mai departe dispar unele din cuplele inferioare din vîrfurile simple ale reţelei poligonale, dispar în consecinţă şi un număr corespunzător de elemente constitutive ale diadelor şi deci

— numărul elementelor $n = b + 2\,v - K$,

— numărul cuplelor $c = 3\,v - K$, (7)

— gradul de libertate $L = 3\,b - K$,

sau dacă $K = 3\,v - c$ avem

$$n - b = c - v$$

şi

$$L = c - 3\,(v - b). \qquad (8)$$

Asemănător celor expuse la conturul poligonal simplu, în vîrfurile simple ale reţelei poligonale complexe pot exista deci 0,1,2 sau 3 cuple cinematice inferioare cu —1, 0,1 sau 2 corpuri componente rămase din diadele ajutătoare.

Formula conturelor-bucle independente conduce la

$$B = c - n + 1 = v - b + 1. \qquad (9)$$

Dacă se consideră numărul $(p-1)$ de laturi $A_{j1}\ A_{j2}, \ldots, A_{jp-1}\ A_{ip}$ cu care un element cu p vîrfuri simple ia parte la conturele poligonale propriu-zise, avem în total numărul de laturi

$$l = \Sigma\,(p-1)\,b_p = 2\,v - b, \tag{10}$$

astfel că formula utilizată pentru contururile poligonale independente în rețelele electrice se identifică cu cea de sus

$$B = l - v + 1 = v - b + 1. \tag{11}$$

Înlocuind diferența $(v - b)$ în formula gradului de libertate avem

$$L = c - 3\ (B - 1). \tag{12}$$

Utilizarea unor condiții suplimentare K', ca de exemplu legături prin cuple cinematice superioare, reduce gradul de libertate corespunzător

$$L = c - K' - 3\ (B-1) = c_5 - c_4 - 3\ (B - 1). \tag{13}$$

c) Pentru rețelele cu vîrfuri-noduri multiple considerăm numărul vîrfurilor de ordinul q — în care se întîlnesc q elemente-bare — egal cu v_q și avem

$$B = l - v_t + 1, \tag{14}$$

unde $v_t = \sum v_q$ este numărul total al nodurilor-vîrfuri, sau

$$B = v_s - b + 1, \tag{15}$$

unde $v_s = \Sigma q v_q = \dfrac{\Sigma p b_p}{2}$ este numărul total al nodurilor vîrfuri-simple echivalente. În adevăr,

$$l = \sum\ (q+1)\ v_q - b = v_s + v_t - b. \tag{16}$$

Desigur că formula gradului de mobilitate se menține luînd în considerare numărul total de cuple cinematice inferioare, care se găsesc în nodul de ordinul q — de la q la $3\,q$ — rămase din cele $3q$ cuple ale celor q diade ajutătoare utilizate. De altfel este comod să se interpreteze că elementele cu vîrfuri-noduri multiple corespund elementelor cu un număr echivalent de vîrfuri-noduri simple.

d) În prezentarea sistematică structurală a fermelor sau a mecanismelor obținute de grupele cinematice numai cu cuple inferioare se va considera că numărul elementelor corespunde cu al elementelor-bară (incluzîndu-se și cele reduse de lungime nulă și care altfel fac parte din diada redusă utilizată), respectiv

$$K = 2\ v,\ n = b,\ c = v \tag{17}$$

și

$$L = 3\,n - 2\ c = 3\ b - 2\,v,$$

în care

$$n = n_2 + n_3 + \ldots + n_p,$$

$$c = \frac{2n_2 + 3n_3 + \ldots + pn_p}{2} \tag{18}$$

şi $n_p = b_p$ este numărul elementelor cu p cuple.

Pentru ferme, impunîndu-se condiţia $L = 3$ se obţine

$$c = 3\,B \quad \text{şi} \quad n = 2\,B + 1 \tag{19}$$

în care numărul buclelor B corespunde cu clasa k după clasificarea lui G. G. Baranov [13]. Îndeplinirea relaţiilor de mai sus se face pentru

$$n_2 - 3 = n_4 + 2n_5 + \ldots + (p - 3)\,n_p \geqslant 0 \tag{20}$$

ce reprezintă relaţia după care s-au sistematizat lanţurile cinematice, transformate în ferme prin fixarea unui element sau în grupe cinematice prin eliminarea oricărui element. La o grupă cinematică de aceeaşi clasă k avem $c = 3k = 3B$ şi $n = 2k = 2B$, iar numărul buclelor formate cu cuplele interioare este $B' = B - r + 1$, în care r este ordinul grupei în clasificarea lui I. I. Artobolevski [7], [12], respectiv numărul cuplelor exterioare $2 \leqslant r \leqslant B + 1$. Suma dintre ordinul grupei şi numărul de bucle al grupei cinematice conduce la valoarea $B' + r = B + 1$.

Pentru mecanisme, se impune condiţia $L = 4$ şi se obţine

$$c = 3B + 1 \text{ şi } n = 2B + 2\,; \tag{21}$$

rezultă

$$n_2 - 4 = n_4 + 2n_5 + \ldots + (p - 3)\,n_p \geqslant 0, \tag{22}$$

relaţie după care Grübler [10], H. Alt [20] etc. au indicat diferite feluri de lanţuri cinematice care se transformă în mecanisme prin fixarea oricărui element. Diferenţa dintre un mecanism şi o fermă de aceeaşi clasă — cu acelaşi număr de contururi — constă în apariţia unei bare de ordinul doi şi a unei cuple inferioare. Se redă în continuare tabela (tabela 1) şi schemele structurale (fig. 5) ale lanţurilor cinematice corespunzătoare fermelor pentru primele trei clase. Prin z_f şi z_g s-a notat numărul schemelor caracteristice din categoria respectivă pentru ferme şi pentru grupele cinematice. Pentru indicarea grupelor cinematice cu scheme structurale diferite s-a utilizat notaţia cu cifre a elementelor ce trebuie eliminate, obţinîndu-se astfel atît numărul grupelor cinematice provenite dintr-o fermă, cît şi ordinul grupei care corespunde ordinului elementului eliminat [13]. Desigur că afară de grupele cinematice prezentate, caracteristice clasei respective, mai pot fi formate grupe cinematice de clase superioare prin combinarea celor de clase inferioare. Astfel, pentru o grupă de clasa a treia se mai pot obține grupe din amplificarea grupelor de clasa a doua cu prima clasă sau din trei grupe de clasa întîi.

Tabela 1

B	n	c	n_2	n_3	n_4	z_f	z_g	Figura
1	3	3	3	—	—	1	1	5*a*
2	5	6	3	2	—	1	2	5*b*
3	7	9	3	4	—	2	7	5*c*
			4	2	1	1	3	

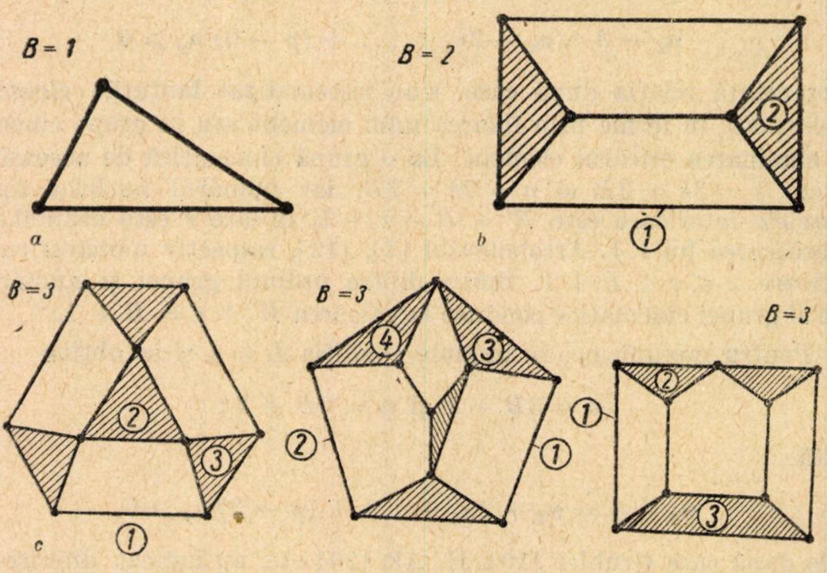


Fig. 5

Asemănător în tabela 2 și figura 6 sînt prezentate schemele structurale ale lanțurilor cinematice corespunzătoare mecanismelor cu un grad de mobilitate.

Tabela 2

B	n	c	n_2	n_3	n_4	z_m	Figura
1	4	4	4	—	—	1	6*a*
2	6	7	4	2	—	2	6*b*
3	8	10	4	4	—	9	
			5	2	1	5	6*c*
			6	0	2	2	

O tratare detaliată şi completă a schemelor grupelor cinematice şi mecanismelor a fost făcută recent de N. I. Manolescu, I. Erceanu şi P. Antonescu [15], urmărind atît sistematizarea după numărul contururilor independente, cît şi după complexitatea contururilor.

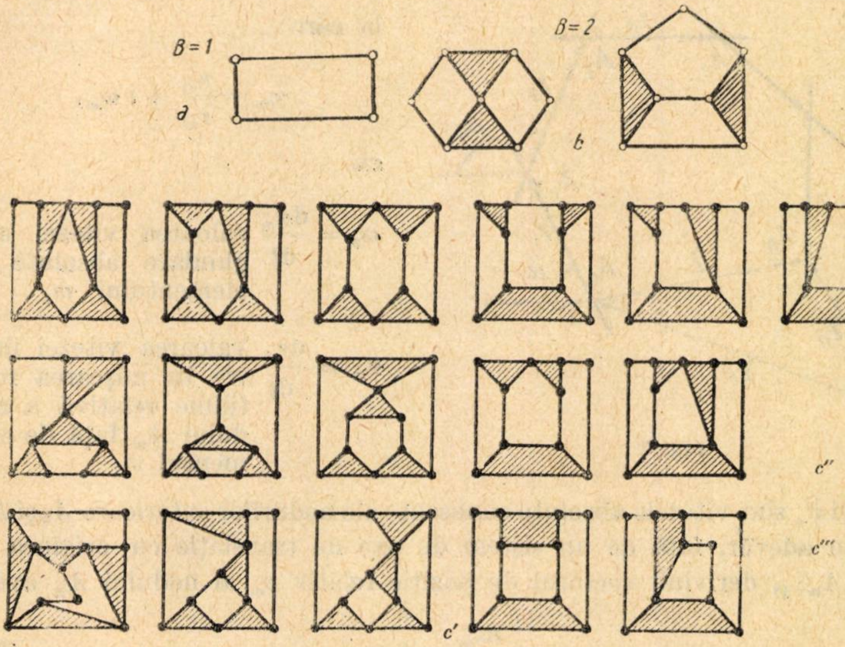


Fig. 6

STUDIUL CINEMATIC

a) Pentru un contur poligonal (fig. 7), format cu elemente-bară, se poate scrie relaţia vectorială

$$z_1 + z_2 + \ldots + z_n = \widetilde{z} = \widetilde{z}_n - \widetilde{z}_0, \tag{23}$$

în care

$z_m = r_m e^{i\alpha_m}$ este vectorul complex care poziţionează nodul A_m faţă de nodul anterior A_{m-1},

r_m este distanţa între nodurile A_{m-1} şi A_m,

α_m este unghiul făcut de segmentul $\overline{A_{m-1}A_m}$ cu sensul pozitiv al axei *ox*.

Vectorul $\widetilde{z} = \widetilde{z}_n - \widetilde{z}_0$, respectiv termenul liber al ecuaţiei, reprezintă segmentul care uneşte capetele conturului deschis $\overline{A_0 A_n}$. Acest vector este cunoscut deoarece capetele conturului coincid cu punctele de legătură ale grupei cinematice. Pentru contururi închise $\tilde{z} = 0$.

b) Pentru viteze, prin derivarea relației anterioare se obține

$$z_1 \eta_1 + z_2 \eta_2 + \dots + z_n \eta_n = \tilde{v} = \tilde{v}_n - \tilde{v}_0 \qquad (24)$$

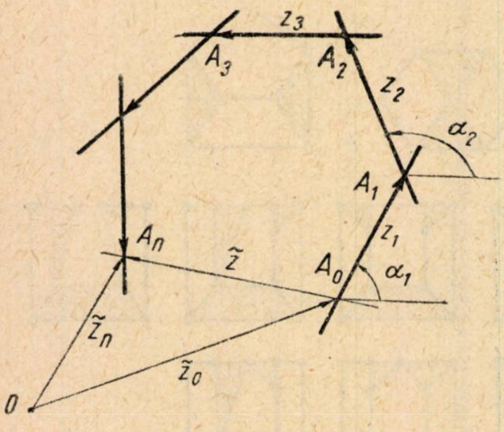


Fig. 7

în care

$$\eta_m = \frac{u_m}{r_m} + \mathrm{i}\,\omega_m,$$

cu

$\omega_m = \dfrac{\mathrm{d}\alpha_m}{\mathrm{d}t}$ valoarea vitezei unghiulare absolute a elementului m,

$u_m = \dfrac{\mathrm{d}r_m}{\mathrm{d}t}$ valoarea vitezei liniare în mișcarea rectilinie relativă a nodului A_m față de elementul m,

iar $\tilde{v}_0$ și $\tilde{v}_n$ sînt vitezele absolute cunoscute ale nodurilor exterioare A_0 și A_n.

În adevăr, față de un sistem de axe de translație cu originea în nodul A_{m-1}, derivînd vectorul de poziție relativ z_m al nodului A_m avem

$$v_m = \frac{\mathrm{d}z_m}{\mathrm{d}t} = z_m \eta_m, \qquad (25)$$

în care

$v_{rm} = u_m\, e^{\mathrm{i}\alpha_m} = \dfrac{u_m}{r_m} z_m$ — este viteza relativă a nodului A_m față de elementul m,

$v_{tm} = \mathrm{i}\,\omega_m z_m$ — este viteza de transport a nodului A_m o dată cu rotația elementului m,

$v_m = v_{rm} + v_{tm}$ — este viteza nodului A_m față de un sistem de axe în translație cu originea în nodul A_{m-1}.

c) Pentru accelerații se obține prin continuarea derivării relația

$$z_1\mu_1 + z_2\mu_2 + \dots + z_n \mu_n = \tilde{a} = \tilde{a}_n - \tilde{a}_0, \qquad (26)$$

în care

$$\mu_m = \left(\frac{w_m}{r_m} - \omega_m^2\right) + \left(\varepsilon_m + \frac{2\,\omega_m u_m}{r_m}\right),$$

cu $\varepsilon_m = \frac{d\omega_m}{dt}$ este valoarea accelerației unghiulare absolute a elementului m,

$w_m = \frac{du_m}{dt}$ este valoarea accelerației liniare în mișcarea rectilinie relativă a nodului A_m față de elementul m,

iar $\tilde{a}_0$ și $\tilde{a}_n$ sînt accelerațiile absolute, cunoscute ale nodurilor exterioare A_0 și A_n.

Se constată că

$$a_m = \frac{dv_m}{dt} = z_m \mu_m, \tag{27}$$

în care

$a_{rm} = w_m e^{i\alpha_m}$ este accelerația relativă a nodului A_m în mișcarea sa rectilinie față de elementul m,

$a_{tr\tau,m} = i\,\varepsilon_m z_m$ este accelerația de transport tangențială a nodului A_m din rotația elementului m,

$a_{tr\nu,m} = -\,\omega_m^2 z_m$ este accelerația de transport normală a nodului A_m din rotația elementului m,

$a_{cr,m} = 2\,i\omega_m u_m e^{i\alpha_m}$ este accelerația Coriolis complementară a nodului A_m în mișcare față de elementul m,

$a_m = a_{rm} + a_{tm} + a_{crm}$ este accelerația nodului A_m față de un sistem de axe în translație, cu originea în A_{m-1}.

În concluzie, pentru un contur poligonal al unui lanț cinematic, cele trei relații relative la poziții, viteze și accelerații se scriu sub o aceeași formă

$$z_1 \lambda_1 + z_2 \lambda_2 + \ldots + z_n \lambda_n = D, \tag{28}$$

în care

$$\begin{aligned} &\lambda_m = 1 \text{ și } D^0 = \tilde{z}_n - \tilde{z}_0 \text{ pentru poziții,} \\ &\lambda_m = \eta_m \text{ și } D^1 = \tilde{v}_n - \tilde{v}_0 \text{ pentru viteze,} \\ &\lambda_m = \mu_m \text{ și } D^2 = \tilde{a}_n - \tilde{a}_0 \text{ pentru accelerații.} \end{aligned} \tag{29}$$

ANALIZA CINEMATICĂ

Rezolvarea cinematică a lanțurilor se face cu ajutorul acestor trei relații complexe, fiecare din ele putînd da cîte o necunoscută complexă sau două necunoscute scalare. Pentru lanțurile cinematice complexe se pot scrie cîte B astfel de ecuații pentru fiecare gen de parametru cinematic. Se pot obține deci $2B$ necunoscute scalare pentru poziții, viteze sau accelerații. Prin B se înțelege ca mai sus numărul de contururi independente ale lanțului, respectiv clasa fermei din care provine grupa cinematică sau mecanismul, astfel că numărul necunoscutelor corespunde cu numărul n de elemente ale grupei cinematice.

În ecuațiile de poziții necunoscutele sînt mărimile complexe z, iar în celelalte de viteze sau de accelerații necunoscutele sînt mărimile complexe η și μ, coeficienții z fiind cunoscuți. Rezolvarea ecuațiilor se face din aproape în aproape, întîi pentru poziții, apoi pentru viteze și la urmă pentru accelerații. Dacă sînt de aflat B necunoscute complexe pentru fiecare gen de parametru, problema este mai simplă ecuațiile fiind liniare. În realitate, specificul mecanismelor cu cuple de rotație sau de translație impune aflarea unor părți reale sau imaginare, sau numai a modulelor sau numai a argumentelor, în număr de $2B$ de la diferite mărimi complexe și pentru rezolvare se indică descompunerea ecuațiilor complexe în ecuații scalare. Astfel, la grupele cinematice care au numai cuple de rotație, avem

$$z_1 + z_2 + \dots + z_n = \widetilde{z}_n - \widetilde{z}_0 \text{ și } |z_m| = \text{ct}_m, \tag{30}$$

$$z_1\eta_1 + z_2\eta_2 + \dots + z_n\eta_n = \widetilde{v}_n - \bar{v}_0 \text{ și } \eta_m = \text{i}\omega_m, \tag{31}$$

$$z_1\mu_1 + z_2\mu_2 + \dots + z_n\mu_n = \tilde{a}_n - \tilde{a}_0 \text{ și } \mu_m = -\omega_m^2 + \text{i}\,\varepsilon_m. \tag{32}$$

La grupele cinematice cu cuple de translație avem

$$z_1 + z_2 + \dots + z_n = \widetilde{z}_n - \widetilde{z}_0 \text{ și } \arg z_m = \text{ct}_m, \tag{33}$$

$$z_1\eta_1 + z_2\eta_2 + \dots + z_n\eta_n = \widetilde{v}_n - \widetilde{v}_0 \text{ și } \eta_m = \frac{u_m}{r_m}. \tag{34}$$

$$z_1\mu_1 + z_2\mu_2 + \dots + z_n\mu_n = \tilde{a}_n - \tilde{a}_0 \text{ și } \mu_m = \frac{w_m}{r_m}. \tag{35}$$

În realitate, în grupele cinematice plane, avînd și cuple de rotație și cuple de translație, problemele vor fi combinate, dar, abstracție făcînd de determinarea pozițiilor, descompunerea celorlalte ecuații complexe liniare, pentru viteze și accelerații, în ecuații scalare liniare conduce la rezolvare ușoară prin modelare electrică. Pentru rezolvarea pozițiilor, trebuie găsite dispozitive în modelarea electrică, pentru menținerea constantă a modulelor sau argumentelor vectorilor complecși.

Trebuie observat că în calculul practic este adecvat să se introducă în numărul conturelor și toate conturele triunghiulare, corespunzătoare elementelor complexe, astfel că numărul total al conturelor al unui lanț cinematic devine în această situație

$$\widetilde{B} = B + \Sigma\,(p - 2)\,n_p = 3\,B - 2$$

ceea ce face să fie posibilă determinarea a $2\widetilde{B} = 6B - 4$ mărimi scalare corespunzătoare elementelor-bare.

SINTEZA CINEMATICĂ

Pentru rezolvarea sintezei cinematice a mecanismelor se modifică scrierea ecuațiilor introducîndu-se referirea la poziția inițială care de altfel trebuie determinată [7], [9], [12]. Trecerea unui element din poziţia iniţială într-o altă poziție k corespunde înmulțirii cu vectorul complex

$$\mathfrak{z}_{mk} = \frac{z_{mk}}{z_m} = \rho_{mk}\, e^{i\varphi_{mk}}, \tag{36}$$

în care

$$\rho_{mk} = \frac{r_{mk}}{r_m}, \quad \varphi_{mk} = \alpha_{mk} - \alpha_m$$

astfel că ecuația pozițiilor devine

$$\Sigma\, z_{mk} = \Sigma\, z_m\, \mathfrak{z}_{mk} = D_k^0. \tag{37}$$

Ecuația vitezelor se transformă în

$$\Sigma\, z_{mk}\, \eta_{mk} = \Sigma\, z_m\, \mathfrak{z}_{mk}\, \eta_{mk} = D_k^1 \tag{38}$$

şi asemănător ecuația accelerațiilor va fi

$$\Sigma\, z_{mk}\, \mu_{mk} = \Sigma\, z_m\, \mathfrak{z}_{mk}\, \mu_{mk} = D_k^2. \tag{39}$$

Deci ecuațiile caracteristice unui contur poligonal în poziția k pentru cei trei parametri se scriu sub aceeași formă :

$$z_1\, \lambda_{1k}^{(p)} + z_2\, \lambda_{2k}^{(p)} + \ldots = D_k^{(p)}, \tag{40}$$

în care

$$\lambda_{mk}^0 = \mathfrak{z}_{mk} \quad \text{şi } D_k^0 = \widetilde{z}_k \text{ pentru poziții,} \tag{41}$$

$$\lambda_{mk}^1 = \mathfrak{z}_{mk}\, \eta_{mk} \quad \text{şi } D_k^1 = \widetilde{v}_k \text{ pentru viteze,} \tag{42}$$

$$\lambda_{mk}^2 = \mathfrak{z}_{mk}\, \mu_{mk} \quad \text{şi } D_k^2 = \tilde{a}_k \text{ pentru accelerații.} \tag{43}$$

Aceste ecuații sînt liniare în raport cu mărimile z_m care determină lanțul considerat în poziția sa inițială. Rezolvarea se face în ipoteza cunoaşterii coeficienților $\lambda_{mk}^{(p)}$, ceea ce corespunde sintezei relative la satisfacerea legilor de mişcare într-un anumit număr finit, eventual maxim, de situații. Astfel, dacă prescrierea mărimilor care intră în componența coeficienților ecuațiilor se face

$$\lambda_{mk}^0 = \mathfrak{z}_{mk}\,(\rho_{mk}, \varphi_{mk}) \tag{44}$$

în s_0 poziții ale lanțului,

$$\lambda_{mk}^1 = \mathfrak{z}_{mk}\, \eta_{mk}\,(\rho_{mk}, \varphi_{mk}, u_{mk}, \omega_{mk}) \tag{45}$$

în s_1 poziții din cele s_0 poziții anterioare,

$$\lambda_{mk}^2 = \mathfrak{z}_{mk}\, \mu_{mk}\, (\rho_{mk},\ \varphi_{mk},\ u_{mk},\ \omega_{mk},\ w_{mk},\ \varepsilon_{mk}) \tag{46}$$

în s_2 poziții din cele s_1 poziții anterioare ($s_0 > s_1 > s_2$) se obține pentru determinarea lanțului sB ecuații liniare, în care $s_0 + s_1 + s_2 = s$, care pot da sB necunoscute complexe.

ANALOGIA ELECTRICĂ ÎN CINEMATICA MECANISMELOR PLANE

Din prezentarea făcută se constată că o parte din problemele analizei sau sintezei cinematice se traduc matematic prin rezolvarea unor ecuații liniare algebrice. Numărul acestor ecuații crește cu complexitatea lanțurilor, atît în analiza, cît mai ales în sinteza cinematică. Obținerea rezultatelor numerice este împiedicată printr-un număr mare de operații matematice al căror număr crește mai mult pentru diverse valori ale coeficienților din ecuații. Utilizarea mașinilor analogice electrice reduce durata de calcul ca și posibilitățile de erori accidentale. Rezolvarea ecuațiilor algebrice liniare prin rețele electrice se face prin mai multe metode [21] — [26].

a) Analogia directă constă în utilizarea rețelelor electrice complexe ale căror ecuații obținute din aplicarea legilor Kirchhoff pentru circuitele separate în forma lui Maxwell seamănă cu ecuațiile obținute în rezolvarea cinematică a lanțurilor, adică

$$\sum_k R_{ik}\, I_k = E_i, \tag{47}$$

în care R_{ii} reprezintă rezistența totală a circuitului independent i (pozitivă),
R_{ik} reprezintă rezistența comună circuitelor i și k (pozitivă sau negativă după sensul curenților),
E_i reprezintă suma forțelor electromotoare conținute în bucla i.

Astfel, pentru rezolvarea sistemului de ecuații

$$\sum_k a_{ik}\, x_k = b_i \tag{48}$$

se măsoară curenții I_k, corespunzători necunoscutelor x_k, dacă rezistențele R_{ik} sînt egale sau proporționale cu a_{ik} iar E_i cu b_i.

Utilizarea rețelelor electrice cu elemente simple pasive conduce la anumite restricții :

$$R_{ii} > 0 \text{ și } R_{ik} = R_{ki}. \tag{49}$$

Dar, orice sistem de ecuații poate fi transformat într-unul care să aibă semnele dorite ale coeficienților. Astfel, pentru a obține numai coeficienți pozitivi, dacă se notează cu

$$e_i = \sum_k a_{ik}\, x_k - b_i \qquad (i = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots) \tag{50}$$

se poate înmulți ecuația cu ± 1, după care pentru coeficienții negativi a_{ik} se face schimbarea de variabilă

$$x_k = \frac{a_{ik}}{|a_{ik}|} x'_k \tag{51}$$

și în ecuația e'_i toți coeficienții devin pozitivi. Pentru restul ecuațiilor se fac combinațiile

$$e''_j = \nu_i e'_i + e'_j, \tag{52}$$

în care $\nu_i > 0$ este astfel ales ca să rezulte coeficienți pozitivi. Pentru obținerea matricei simetrice a coeficienților și totodată pozitiv definită, pornind de la aceeași notație, se formează sistemul transformat prin procedeul

$$e^*_j = \sum_i e_i a_{ij} \qquad (j = 1, 2, 3, \ldots). \tag{53}$$

Coeficientul lui x_k din ecuația e^*_j este $\sum\limits_i a_{ik} a_{ij}$ egal cu coeficientul lui x_j din ecuația e^*_k adică $\sum\limits_i a_{ij} a_{ik}$.

Rezolvarea ecuațiilor din cinematica mecanismelor plane prin această analogie directă întîmpină complicațiile semnalate mai sus. De asemenea, realizarea circuitelor electrice cu rezistențe date dinainte este greoaie, iar utilizarea elementelor active în circuite complică instalația de calcul.

b) În analogia indirectă utilizînd metoda iterației [21], [24], urmărind schema rețelei analoge (fig. 8), observăm că fiecare potențiometru P_{ik} poate fi branșat la una sau alta din barele de tensiuni V_k și $-V_k$ egale în modul și simultan reglabile.

Presupunînd că $|a_{ik}| \leqslant 1$ și $|b_i| \leqslant 1$ ceea ce este totdeauna posibil printr-o împărțire prealabilă, se fixează astfel potențiometrul P_{ik} ca să furnizeze o fracțiune a_{ik} din tensiunea aplicată la bornele sale, adică

$$v_{ik} = a_{ik} V_k. \tag{54}$$

Aplicarea acestor tensiuni pe rezistențe egale R legate la un punct comun conduce la condiția ca suma curenților respectivi să fie nulă

$$\sum_k \frac{a_{ik} V_k - u_i}{R} - \frac{b_i V + u_i}{R} = 0. \tag{55}$$

Deci

$$(n + 1) u_i = \sum_k a_{ik} V_k - b_i V \tag{56}$$

în care V (și $-V$) este tensiunea constantă care alimentează potențiometrul P_i iar u_i este tensiunea nodului-bară i. Dacă $u_i \simeq 0$ atunci rezolvarea sistemului de ecuații se face pentru

$$x_k = \frac{V_k}{V}. \tag{57}$$

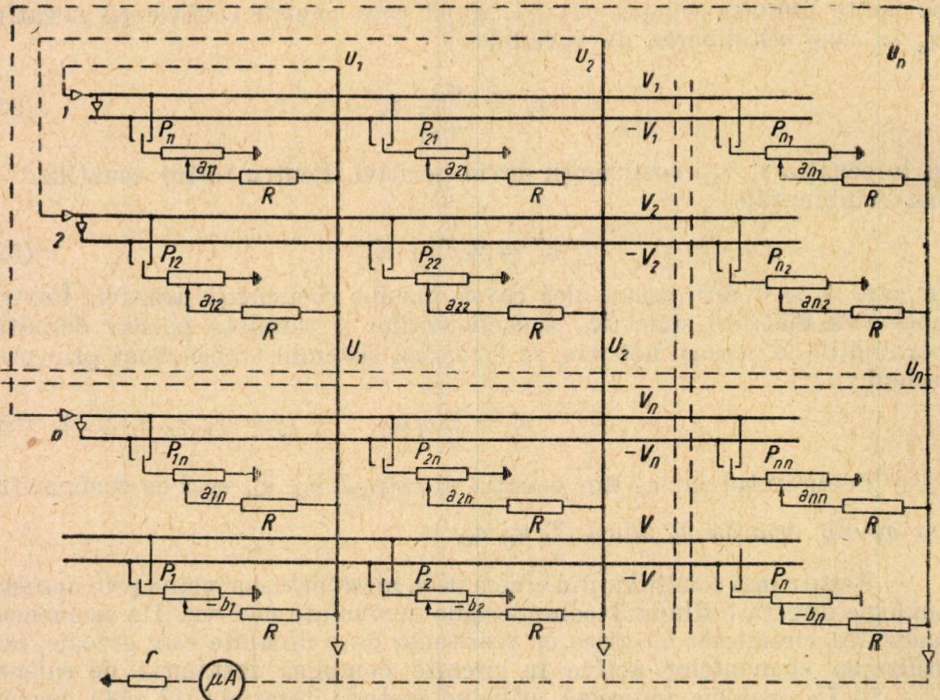


Fig. 8

În consecință, reglînd tensiunile V_k printr-un procedeu de iterație se poate obține $u_1 = 0$, $u_2 = 0, \ldots, u_n = 0$. Metoda lui Gauss, care constă în atribuirea de valori arbitrare necunoscutelor $x_2^0, x_3^0, \ldots, x_n^0$ în prima ecuație și determinarea valorii x_1^1, corespunde reglării tensiunii V_1, celelalte fiind date, pînă cînd u_1 devine zero. Substituirea valorilor $x_1^1, x_3^0, x_4^0, \ldots, x_n^0$ în ecuația a doua și determinarea valorii x_2^1 corespunde cu reglarea tensiunii V_2 pînă cînd u_2 devine zero. Un ciclu se termină cînd s-au determinat valorile $x_1', x_2', \ldots, x_n'$ din aproape în aproape, cu condițiile succesive $u_1 = 0$, $u_2 = 0, \ldots, u_n = 0$ dar care după o nouă reglare modifică valorile tensiunilor anterioare. Continuînd cu alte cicluri, procedeul de iterație se termina cînd se ajunge aproximativ ca simultan să avem $u_1 = u_2 = \ldots = u_n = 0$. Procedeul de iterație Gauss este sigur convergent dacă se îndeplinesc condițiile suficiente dar nu necesare : matricea sistemului să fie simetrică și pozitiv definită, condiții destul de restrictive.

Metoda celor mai mici pătrate constă, de asemenea, în atribuirea de valori arbitrare x_k' necunoscutelor care duc la erorile

$$\varepsilon_i = \sum_k a_{ik} x_k' - b_i \tag{58}$$

și care apoi, prin varierea consecutivă a lui $x_1', x_2', \ldots$ respectiv $V_1', V_2', \ldots$, să conducă la minimul expresiei $\sum \varepsilon_i^2$. Procedeul este totdeauna convergent. În acest sens, montîndu-se pe barele i aparate electronice-redresoare, funcționînd pe baza legii pătratice astfel că erorile ε_i reprezentate prin tensiunile u_i vor produce la ieșire curenți proporționali cu pătratul tensiunilor de intrare care, adunați într-un cordon comun și trecuți printr-un microampermetru, vor conduce la deviația acestuia proporțională cu $\Sigma\ \varepsilon_i^2$.

Automatizarea procesului de iterație cu ajutorul servomecanismelor este însă greu de realizat. Automatizarea cu ajutorul amplificatoarelor electronice este mai simplă. Astfel, se montează amplificatoare cu coeficienți de amplificare K mare cu intrarea pe barele i și deci influențați de tensiunile u_i și cu ieșirea pe barele V_i. Între barele V_k și $-V_k$ se montează amplificatoare inversoare cu $K = -1$. În aceste condiții $V_i = K u_i$ și ecuația (56) devine

$$(n + 1)\frac{V_i}{K} = \sum_k a_{ik} V_k - b_i V \tag{59}$$

iar dacă K (10^8) este foarte mare față de tensiunile V_i se poate considera

$$\sum_k a_{ik} V_k - b_i V \simeq 0. \tag{60}$$

Și în acest caz se întîmplă unele dificultăți în stabilitatea instalației, care cere din nou ca matricea sistemului de rezolvat să fie pozitiv definită. Unele tatonări în comutările amplificatorilor la barele V_k, precum și faptul că o matrice are mari șanse să fie pozitiv definită dacă se aleg coeficienții diagonalei pozitivi, cei mai mari în valoarea absolută, pot conduce la stabilitatea necesară.

Alte metode cu avantaje în realizarea stabilității prevăd rezolvarea cu ajutorul ecuațiilor diferențiale [25], [26]. De exemplu, se consideră

$$\dot{x}_i = \sum_k a_{ik} x_k - b_i \tag{61}$$

în care pentru regimul staționar $\dot{x}_i = 0$ se obține soluția sistemului de ecuații algebrice liniare. Utilizarea sistemului (61) cu matricea pozitiv definită sau transformarea sa cu ajutorul metodei dublării numărului de necunoscute sau a metodei gradiendului [26] conduce la o stabilitate bună a instalației de calcul.

Expunerea posibilităților de reprezentare prin analogie electrică a rezolvării problemelor cinematicii mecanismelor plane, pe baza metodei mărimilor complexe, arată că în afară de cazurile favorabile cînd unor scheme cinematice le corespund direct scheme electrice, în rest schemele electrice comportă anumite aranjamente și completări datorită faptului că mărimile complexe din cinematica mecanismelor au ca variabile, în general, numai una din caracteristicile respective, precum și faptului că ecuațiile rețelelor electrice prezintă anumite simetrii. Avantajele calculelor electrice analogice, ca rezolvarea ușoară a lanțurilor cinematice, cu rapiditate și exactitate mare, justifică utilizarea lor atît în problemele de analiză cît și de sinteză a mecanismelor plane complexe.

Primită la redacție la 24 iulie 1963

ELECTRICAL ANALOGY IN THE KINEMATICS OF PLANE MECHANISMS

ABSTRACT

This paper consists of three parts :

a) A structural systematization for schematizing the links by straight bars between which, for generality purposes, dyads of aspect 4 are attached.The kinematic chains, which may be trusses, kinematic groups or mechanisms, are then obtained through the elimination of certain links and pairs belonging to the dyads introduced, the character of the schemes with straight bars being thus retained, as it offers certain advantages for writing equations with complex quantities.

With the aid of the systematization introduced one may follow the values of the degree of freedom and of the number of independent loops.

b) A kinematic study wherein the equations under complex form of the closed or open loop kinematic chains are given adapted to problems of analysis or synthesis.

c) An electrical analogy which uses various direct or indirect methods on various simple schemes, or schemes including electrical amplifiers, with respect to the character of the equations obtained in the kinematics of plane mechanisms and the equations given by electric nets.

BIBLIOGRAFIE

1. R. C. Bogdan, Chr. Pelecudi, E. Bugaievski, L. Calmaciuc, *Über die experimentelle Bestimmung der Bewegungen in ebenen Getrieben*. Rev. méc. appl., Acad. R.P.R., *2* (1957).
2. R. C. Bogdan, Chr. Pelecudi, L. Calmaciuc, *Study on the mechanical transducers for the determination of paths in plane mechanisms in Cartesian or polar co-ordinate systems*. Buletinul Institutului politehnic din Iasi, *1—2* (1958).
3. R. C. Bogdan, Chr. Pelecudi, L. Calmaciuc, Gr. Antonescu, *Ein polarer Überträger zur Untersuchung von Getrieben*. Rev. méc. appl., Acad. R.P.R., *1* (1960).
4. — *Etude des vitesses dans les mécanismes plans par la méthode mécano-électronique*. Rev. méc. appl., Acad. R.P.R., *5* (1962).
5. H. Blumenthal, *Über eine Analogie des ebenen Schubkurbelgetriebes*. Maschinenbau Technik, *10* (1961).
6. — *Ein einfaches Verfahren zur Abbildung der Bewegungsgesetze und Koppelkurven ebener Gelenkgetriebe auf dem Bildschirm eines Elektronenstrahloszillographen*. Wissenschaftliche Zeitschrift der technischen Hochschule Otto von Gericke, Magdeburg, *2* (1962).
7. И. И. Артоболевский, *Теория механизмов и машин*. Гостехиздат, Москва, 1953.
8. D. Mangeron, A. Braier, *Reprezentarea cîmpurilor de accelerații prin numere complexe*. Gazeta Matematică, seria A, **VII** (**LXI**), *10* (1955).
9. Chr. Pelecudi, R. C. Bogdan, *Considerații asupra metodei analitice de cercetare a mecanismelor plane pe baza variabilelor complexe*. St. cerc. mec. apl., *2* (1959).
10. M. Grübler, *Getriebelehre Berlin 1917* (citat după K. Hain, „Die Analyse und Synthese der achtgliedrigen Gelenkgetriebe", V.D.I. Berichte, **5** (1955)).

11. L. P. Assur, *Cercetarea mecanismelor plane din bare articulate (cu cuple cinematice inferioare)*. Buletinul Institutului politehnic din Petrograd, **XX–XXVII** (1913–1918) (citat după L. B. Levensohn, „Teoria mecanismelor şi maşinilor'', Edit. tehnică, Bucureşti, 1951).
12. I. I. Artobolevski, *Teoria mecanismelor și mașinilor*. Edit. tehnică, Bucureşti, 1955.
13. Г. Г. Баранов, *Классификация, строение, кинематика и кинетостатика плоских механизмов с парами первого рода*. Труды семинара по ТММ, **XII**, *46* (1952).
14. K. Hain, *Die Analyse und Synthese der achtgliedrigen Gelenkgetriebe*. V.D.I. Berichte, **5** (1955).
15. N. I. Manolescu, I. Erceanu, P. Antonescu, *Domeniul de aplicabilitate a metodelor de cercetare cinematică a mecanismelor plane articulate*. St. cerc. mec. apl., *6* (1962).
16. E. Bugaievski, R. C. Bogdan, Chr. Pelecudi, *Zur Einteilung räumlicher Mechanismen*. Rev. méc. appl., Acad. R.P.R., *1* (1957).
17. В. Я. Анилович, Ю. В. Эпштеин, *Численный метод и ряды Фурье в задачах анализа цепей Ассура с вращательными парами*. ТММ, *92—93* (1962).
18. F. H. Raven, *Velocity and Acceleration. Analysis of Plane and Space Mechanisms by Means of Independent Position Equations*. Journal of Applied Mechanics, *1* (1958).
19. R. P. Voinea, M.C. Atanasiu, *Contribuţii la determinarea stării cinematice a unui mecanism prin metoda sistemelor conjugate*. St. cerc. mec. apl., *1* (1963).
20. H. Alt, *Nach bisher unveröffentlichten Untersuchungen* (citat după K. Hain, „Die Analyse und Synthese der achtgliedrigen Gelenkgetriebe'', V.D.I. Berichte, **5** (1955)).
21. Mitrovic Dusan, *Étude théorique d'un principe nouveau de construction des machines électriques servant à résoudre les systèmes d'équations algébriques linéaires*. Toulouse, 1953.
22. C. A. A. Wass, *Introduction to Electronic Analogue Computers*. London, 1956.
23. G. Korn, Th. Korn, *Electronic Analog Computers*. New York, 1956.
24. F. J. Murray, *The Theory of Mathematical Machines*. New York, 1948.
25. J. Tretz, *Fehler bei der Lösung linearer algebraischer Gleichungssysteme mit Analogrechnern*. Zeitschrift für Messen, Steuern, Regeln, Automatisierung, *4* (1962).
26. М. В. Рыбашов, *Некоторые методы решения систем линейных алгебраических уравнений на электронных моделях*. Автоматика и телемеханика, *2* (1962).

STUDII

MECANISME MATEMATICE REZULTATE DIN MECANISMUL LUI ISAAC NEWTON

DE

D. TUTUNARU și ELENA MURGULESCU

§ 1. CONSIDERAȚII GENERALE

Se știe că prin *curbe unicursale* se înțeleg curbele algebrice ale căror coordonate ale unui punct pot fi exprimate prin funcții raționale de același parametru t de forma

$$x = \frac{P(t)}{R(t)}, \qquad y = \frac{Q(t)}{R(t)}, \tag{1}$$

unde $P(t)$, $Q(t)$ și $R(t)$ sînt polinoame întregi în t. Prin eliminarea parametrului (t) se găsește că locul geometric al punctelor x și y este o curbă algebrică al cărei grad este cel mai mare dintre gradele polinoamelor $P(t)$, $Q(t)$ sau $R(t)$.

Dintre curbele unicursale, o deosebită importanță în tehnică o au cubicele numite *cisoide*.

Cisoidele formează o clasă de curbe generate toate în același fel, cu ajutorul unei curbe directoare, a unei drepte directoare și a unui pol luat pe curba directoare.

Astfel, dacă curba directoare (C) este o conică (fig. 1) polul A se ia pe această curbă, iar directoarea (Δ) intersectează conica în punctele B și C.

Prin polul A se duce o transversală (Δ_1) care face unghiul φ cu axa absciselor și intersectează conica (C) în punctul D, iar directoarea (Δ) în punctul E.

Începînd din polul A, se ia pe transversala (Δ_1) segmentele AM și DE, în condiția

$$\overline{AM} = \overline{DE}. \tag{2}$$

Locul geometric descris de punctul M, cînd transversala (Δ_1) se rotește în jurul polului A, este o cubică unicursală (C_1), numită cisoidă.

Dacă transversala (Δ_1) ocupă pozițiile AB și AC (trasate prin linii întrerupte) punctul M se confundă cu polul A, acesta devenind un punct dublu al cubicei, iar segmentele AB și AC devin tangente la curba (C_1) care are asimptotă directoarea (Δ).

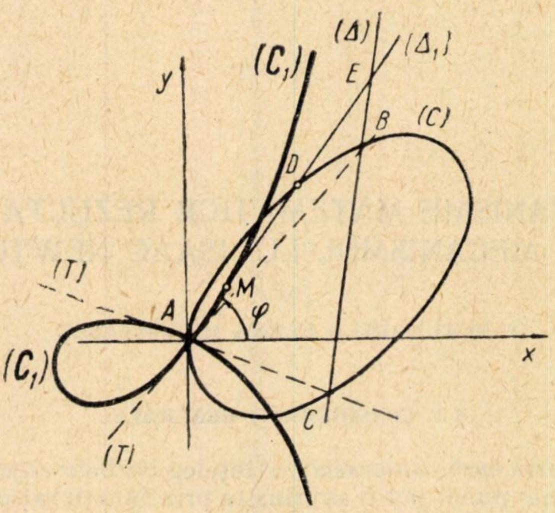


Fig. 1

Dacă directoarea (Δ) devine tangentă la conica (C) polul A va fi un punct de întoarcere al cubicei unicursale (C_1), iar în cazul că directoarea (Δ) nu mai întîlnește conica (C) polul A va fi un punct dublu izolat.

Cubica unicursală trecînd prin punctele ciclice de la infinit, este o cubică circulară unicursală care are două asimptote izotrope.

Printre curbele remarcabile cubice circulare unicursale, cisoidele și strofoidele au un rol important în construirea mașinilor mecanice de calculat și în proiectarea mecanismelor plane.

În domeniul acesta al curbelor clasice (cisoidele și strofoidele) denumite și curbe celebre, I. Newton a realizat un mecanism pentru construirea mecanică a cisoidei drepte sau cisoida lui Diocles (cisoidograful lui I. Newton).

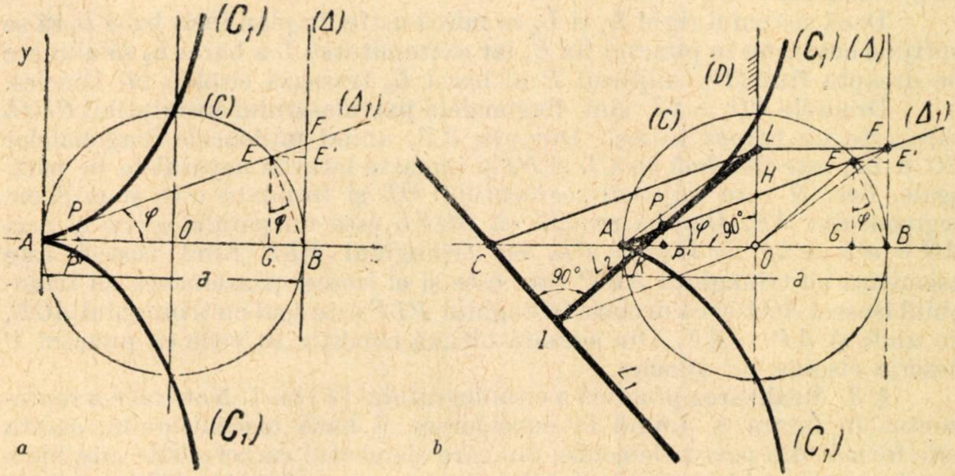
În studiul de față, se ia de bază mecanismul lui Newton și prin transformări structurale convenabile ale acestui mecanism se formează o serie de mecanisme noi utile în practică.

§ 2. MECANISMUL LUI I. NEWTON PENTRU CONSTRUIREA CISOIDEI LUI DIOCLES

Cisoida lui Diocles prezintă nu numai interes istoric în ceea ce privește problema dublării cubului, ci are și o serie de aplicații practice.

În mod normal, cisoida lui Diocles sau cisoida dreaptă (fig. 2, *a*) este generată ca o cubică dreaptă circulară unicursală care are la bază un cerc director (C) cu centrul în O şi o dreaptă directoare (Δ) tangentă în B la cerc.

Se duce prin A transversala (Δ_1) care intersectează conica (C) în punctul E şi directoarea (Δ) în F şi se ia $\overline{EF'} = \overline{AP}$. Locul geometric descris de punctul P cînd transversala (Δ_1) se roteşte în jurul punctului A cu unghiul φ faţă de axa absciselor, este cisoida dreaptă a lui Diocles.



a b

Fig. 2 (a şi b)

Polul A este un punct de întoarcere al cisoidei.

Ţinînd seama de figura 2, *a*, triunghiurile dreptunghice $E\,E'\,F$ şi $A\,P'\,P$ sînt egale şi deci

$$\overline{AP'} = \overline{EE'} = GB = BE \sin\varphi = a \sin^2\varphi. \tag{3}$$

Notînd raza vectoare a cisoidei $r_M = AP$, *ecuaţia polară* a curbei este

$$r_M = \frac{AP'}{\cos\varphi} = a\,\frac{\sin^2\varphi}{\cos\varphi}. \tag{4}$$

Pentru obţinerea ecuaţiei carteziene a cisoidei drepte, se scrie ecuaţia polară sub forma

$$r_M \cos\varphi\, r_M^2 = a \sin^2\varphi\, r_M^2,$$

în care $r_M^2 = x^2 + y^2$ şi $y = r_M \sin\varphi$, astfel încît

$$x\,(x^2 + y^2) = a\,y^2$$

şi deci

$$y^2 = \frac{x^3}{a - x} \tag{5}$$

sau

$$y = x\sqrt{\frac{x}{a - x}}.$$

Aceasta este *ecuația carteziană* a cisoidei lui Diocles și se vede că este o curbă de ordinul 3.

I. Newton a dat pentru trasarea cisoidei lui Diocles un procedeu mecanic [4]. Se iau două bare L_1 și L_2 (fig. 2, *b*) legate rigid în punctul I și formînd un unghi drept comun. Bara L_2 are lungimea constantă și egală cu distanța punctului C fix în plan față de centrul O al cercului (C), adică $IL = CO = a$.

Dacă sistemul rigid L_1 și L_2 se mișcă astfel în plan încît bara L_1 să se sprijine continuu în punctul fix C, iar extremitatea L a barei L_2 să alunece pe dreapta fixă (D), mijlocul P al barei L_2 trasează cisoida lui Diocles.

Dreptele $CO = LI$ sînt diagonalele patrulaterului inscriptibil $CIOL$ care este un trapez isoscel. Dreapta AP, unind mijloacele diagonalelor CO și LI, este paralelă cu CL și IO și împarte laturile neparalele în părți egale, deci H este mijlocul segmentului OL și totodată este și mijlocul segmentului AF. De aici rezultă că $AOFL$ este un paralelogram și deci $AO = a/2 = LF = IL/2 = PL$, iar triunghiul PLF fiind isoscel este asemenea cu triunghiul AKP care este și el isoscel și asemenea cu triunghiul isoscel AOE și ca urmare triunghiul PLF este egal cu triunghiul AOE, de unde și $AP = EF$. Din această ultimă condiție se vede că punctul P descrie cisoida lui Diocles.

§ 3. Realizarea practică a cisoidografului [1] lui I. Newton s-a reprezentat în figura 3. Luînd în considerare și baza mecanismului, acesta este format din patru elemente, din care elementul caracteristic este biela *3* sub forma unei bare rigide dreptunghiulare cu unghiul de 90° în punctul D. Acest element este legat de elementul *4* prin intermediul cuplei cinematice de rotație (articulație) din E.

Elementul *4* este o cuplă cinematică de translație (patină) care se deplasează perpendicular pe axa Ax, sprijinindu-se pe elementul (bara) fix (D) cu baza *1*.

Celălalt capăt al bielei *3* intră în patina *2* și poate translata în interiorul acesteia și simultan poate efectua o rotație în jurul axei articulației C care leagă elementul *2* de baza *1* fixă.

Se ia constructiv latura unghiului drept $DE = CO = a$ și pe această latură se mai ia un punct M situat la jumătatea ei, adică $DM = ME = a/2$. În timp ce elementul *3* se mișcă translatînd cu extremitatea de-a lungul direcției (D) și cu cealaltă extremitate translatează și în același timp se rotește față de punctul C, punctul M descrie cisoida (C_1) a lui Diocles.

Pentru a demonstra că punctul M descrie cisoida lui Diocles, se unește C cu E, D cu O și din A se duce transversala (Δ_1) care trece prin punctul M și face cu axa Ax unghiul φ.

Patrulaterul $CDOE$ care este inscriptibil în cercul cu diametrul GE și are diagonalele DE și CO egale cu a, este un trapez isoscel. Jumătățile acestor diagonale, adică punctele A și M, fiind unite prin (Δ_1) care devine paralelă cu CE și DO și împarte laturile neparalele în părți egale, determină punctul H ca mijlocul segmentului OE. Totodată, punctul H împarte și segmentul AF în părți egale, deoarece AF este ipotenuză în triunghiul dreptunghic ABF la care s-a dus prin O paralela OE la cateta BF.

În felul acesta, rezultă că $AEFO$ este un paralelogram şi deci unghiul FAO este egal cu AFE, ambele fiind egale cu unghiul φ.

Pe de altă parte, triunghiul MEF este isoscel deoarece prin construcţie s-au luat $ME = EF = a/2$.

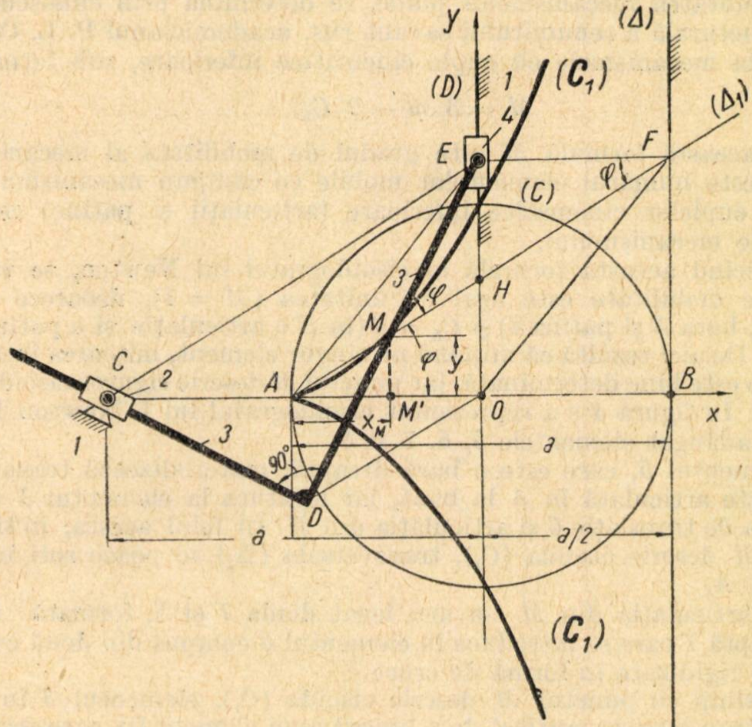


Fig. 3

Proiectînd cele două laturi egale ME şi EF pe baza MF a acestui triunghi isoscel, rezultă

$$MF = 2\,\frac{a}{2}\cos\varphi = a\cos\varphi. \tag{6}$$

Raza vectoare a cisoidei va fi

$$r_M = AM = AF - MF = \frac{a}{\cos\varphi} - a\cos\varphi = a\,\frac{\sin^2\varphi}{\cos\varphi}. \tag{7}$$

S-a regăsit astfel ecuaţia polară (4) a cisoidei lui Diocles şi deci punctul M trasează în mod mecanic cisoida (C_1).

Din triunghiul dreptunghic $AM'M$, rezultă coordonatele punctului M:

$$x = r_M \cos \varphi = a \sin^2\varphi,$$
$$y = r_M \sin \varphi = a \frac{\sin^3\varphi}{\cos \varphi}. \tag{8}$$

Mobilitatea mecanismelor plane, se determină prin cunoscuta formulă structurală a renumitului savant rus, academicianul P. L. Cebîşev, aplicată la mecanismele cu cuple cinematice inferioare, sub forma

$$M = 3\ m - 2\ C_5. \tag{9}$$

În această formulă M este gradul de mobilitate al mecanismului plan, m este numărul elementelor mobile ce compun mecanismul şi C_5 numărul cuplelor cinematice inferioare (articulaţii şi patine) ce leagă elementele mecanismului.

Aplicînd această formulă la cisoidograful lui Newton, se vede că gradul de mobilitate este egal cu unitatea ($M = 1$), deoarece $m = 3$ (patina *2*, bara *3* şi patina *4*) şi $C_5 = 4$ (în E o articulaţie şi o patină şi în C la fel). De aici rezultă că mişcînd un singur element, mişcarea întregului mecanism este bine determinată, iar punctul M descrie riguros cisoida (C_1).

§ 4. În figura 4 s-a reprezentat cisoidograful lui I. Newton la care s-au mai adăugat elementele *5*, *6*, *7* şi *8*.

Elementul *5*, care este o bară dreaptă, materializează transversala (Δ_1) şi este articulată în A la bază, iar legătura la elementul *3* se face prin cupla de translaţie *6* şi articulaţia din M. În felul acesta, în timp ce punctul M descrie cisoida (C_1), transversala (Δ_1) se poate roti în jurul punctului A.

De articulaţia din M s-a mai legat diada *7* şi *8*, formată dintr-o bară dreaptă *7* care se introduce în elementul *8* compus din două cuple de translaţie rigidizate în formă de cruce.

În timp ce punctul M descrie cisoida (C_1), elementul *8* în formă de cruce translatează vertical de-a lungul unui element fix care materializează directoarea (Δ), menţinînd perpendicularitatea elementului *7* cu (Δ) şi în felul acesta punctul M'' reprezintă în orice moment ordonata punctului M.

Cu aceeaşi diadă se poate determina şi abscisa punctului M, plasîndu-se în M' elementul *8*.

Punctul Q de pe abscisă este determinat de intersecţia elementului *3* cu axa absciselor, în timp ce punctul M descrie cisoida lui Diocles.

Mecanismul are un grad de mobilitate, deci $M = 1$ ($m = 7$ şi $C_5 = 10$).

Mecanismul format astfel permite efectuarea a o serie de operaţiuni matematice.

a) Elementul *5* care materializează transversala (Δ_1) determină pe (Δ) segmentul $BG = z$, astfel că

$$BG = z = a \operatorname{tg} \varphi = am, \tag{10}$$

unde $m = \operatorname{tg} \varphi$ este coeficientul unghiular al dreptei (Δ_1).

Dacă se ia la scară $a = 1$, atunci

$$BG = z = m = \operatorname{tg} \varphi. \tag{11}$$

În felul acesta, diviziunile de pe (Δ) dau valorile tangentei, fiind deci un mecanism de tangentă.

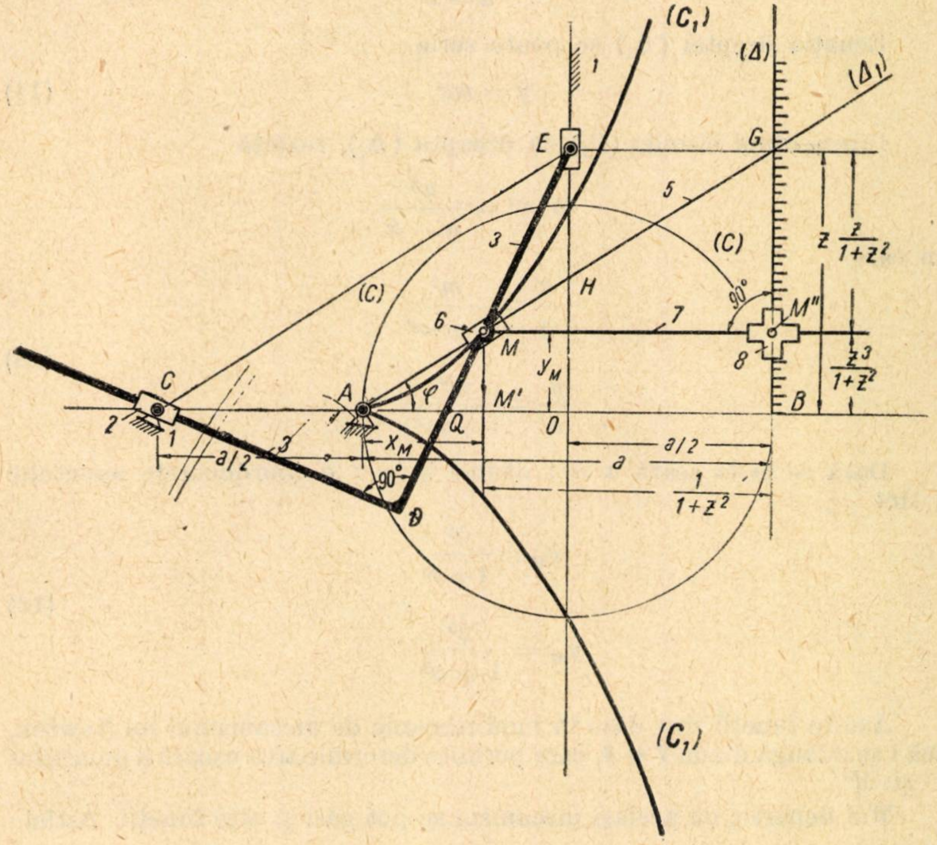

(C₁)
(Δ)
(Δ₁)
1
E
G
5
3
(C)
(C)
H
90°
7
6
M''
M
8
z
$\frac{z}{1+z^2}$
$\frac{z^3}{1+z^2}$
y_M
C
A
φ
M'
B
2
1
3
a/2
x_M
Q
0
a/2
a
$\frac{1}{1+z^2}$
90°
D
(C₁)

Fig. 4

În cazul că se ia la scară $a = 2, 3, 4, \ldots, n$, se rezolvă funcțiile trigonometrice de forma

$$z = (2, 3, 4, \ldots, n) \operatorname{tg} \varphi. \tag{12}$$

b) Abscisa și ordonata punctului M sînt date de formulele (8) iar dacă la scară se ia $a = 1$ funcțiile trigonometrice

$$x_M = \sin^2\varphi$$

și

$$y_M = \frac{\sin^3 \varphi}{\cos \varphi} \tag{13}$$

sînt reprezentate de punctele M' şi M'', determinate uşor de diada *7* şi *8*, aşa cum s-a arătat mai sus la descrierea mecanismului.

c) Ecuaţia carteziană a cisoidei drepte (C_1) după formula (5), este

$$y^2 = \frac{x^3}{a - x}.$$

Ecuaţia dreptei (Δ_1) se poate scrie

$$y = mx. \tag{14}$$

Intersectînd cisoida (C_1) cu dreapta (Δ_1), rezultă

$$m^2 x^2 = \frac{x^3}{a - x}$$

din care

$$\frac{x}{a} = \frac{m^2}{1 + m^2}$$

şi (15)

$$\frac{y}{a} = \frac{m^3}{1 + m^2}.$$

Dacă se ia la scară $a = 1$ atunci $m = z$ şi coordonatele punctului M sînt

$$x_M = \frac{z^2}{1 + z^2}$$

şi (16)

$$y_M = \frac{z^3}{1 + z^2}.$$

Aceste funcţii sînt date în mod mecanic de mecanismul lui Newton, dacă i se adaugă diada *7* şi *8*, care permite determinarea uşoară a punctelor M' şi M''.

Mai departe, cu acelaşi mecanism se pot găsi şi alte funcţii. Astfel :

$$M'B = AB - AM' = 1 - \frac{z^2}{1 + z^2} = \frac{1}{1 + z^2}$$

şi (17)

$$M'O = AO - AM' = \frac{1}{2} - \frac{z^2}{1 + z^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - z^2}{1 + z^2}.$$

De asemenea, acelaşi mecanism dă

$$AM = \sqrt{x_M^2 + y_M^2} = \frac{z^2 \sqrt{1 + z^2}}{1 + z^2} \tag{18}$$

şi

$$CE = AG = \sqrt{1 + z^2}. \tag{19}$$

Punctul Q este determinat în orice poziție de intersecția elementului 3 cu Ax, astfel că se poate scrie

$$AQ = AM' - QM' = x_M - QM'. \tag{20}$$

Segmentul QM' se determină din asemănarea triunghiurilor dreptunghice EOQ și $MM'Q$ astfel:

$$\frac{EO}{MM'} = \frac{QO}{QM'} = \frac{QM' + M'O}{QM'}.$$

Ținînd seama că $EO = GB = z$, $MM' = y_M$ dat de formula (16) iar $M'O$ este dat de formula (17), se poate scrie

$$\frac{z}{y_M} = \frac{QM' + \frac{1}{2} - \frac{1 - z^2}{1 + z^2}}{QM'}$$

din care

$$QM' = \frac{1}{2} \cdot \frac{z^2 (1 - z^2)}{1 + z^2}. \tag{21}$$

Ținînd seama de formula (16), rezultă

$$AQ = AM' - QM' = \frac{z^2}{1 + z^2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{z^2 (1 - z^2)}{1 + z^2}$$

deci

$$AQ = \frac{1}{2} z^2 \cdot \tag{22}$$

Cu același mecanism se mai poate rezolva și funcția

$$QO = AO - AQ = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} z^2 = \frac{1}{2} (1 - z^2) \cdot \tag{23}$$

De asemenea, se vede că

$$GM'' = z - y_M = \frac{z}{1 + z^2} \cdot \tag{24}$$

Aceste operații sînt foarte necesare la proiectarea mașinilor mecanice de calculat.

§ 5. În figura 5 s-a reprezentat cisoidograful lui I. Newton la care s-au mai adăugat elementele 5 și 6, iar mecanismul astfel format permite construirea parabolei (P) și efectuarea unor operații matematice, altele decît cele arătate anterior.

Elementele 5 și 6 sînt legate de elementul 3 printr-o articulație în M.

Bara dreaptă *5* materializează transversala (Δ_1) iar de-a lungul ei se mişcă o cuplă de translaţie *6* de care s-a sudat o bară care face un unghi de 90° cu (Δ_1).

Bara sudată şi cupla de translaţie formează un singur element *6* care se mişcă continuu perpendicular pe elementul *5* şi generează parabola

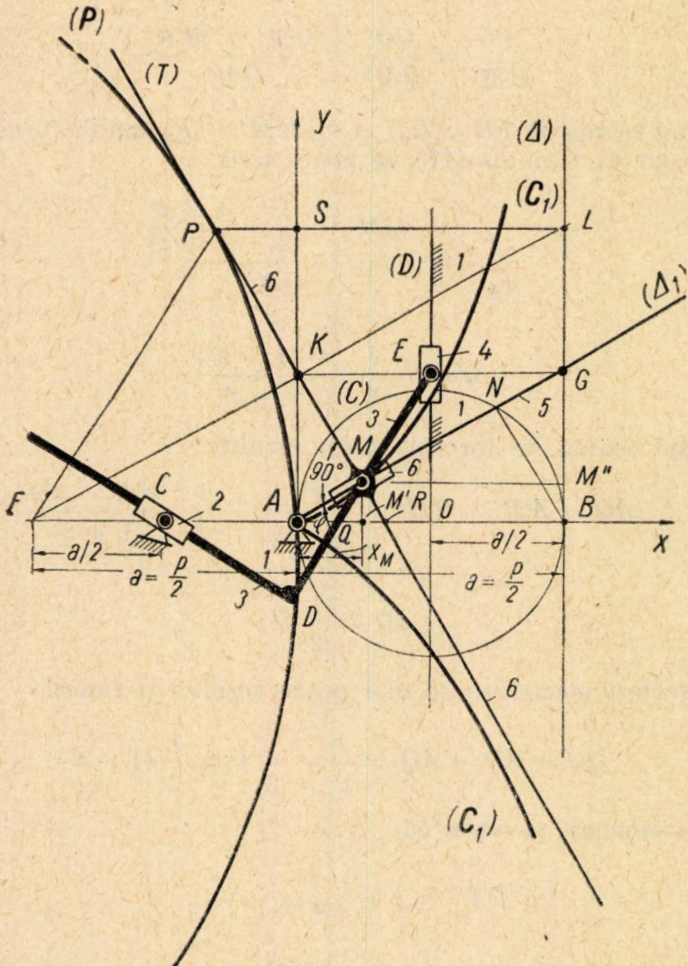

(P)
(T)
y
(Δ)
(C₁)
S
L
P
6
(D)
1
(Δ₁)
K
E
4
(C)
N
G
3
1
5
M
90°
6
M''
C
2
A
M'R
O
B
F
Q
x_M
a/2
a/2
X
a = p/2
a = p/2
1
3
D
6
(C₁)
(P)

Fig. 5

(P) cu o extremitate, iar cu cealaltă extremitate se intersectează cu axa Ax şi determină o serie de diviziuni R necesare în diverse operaţii matematice.

Mecanismul are un grad de mobilitate ($M = 1$) deoarece $m = 5$ şi $C_5 = 7$.

a) Construirea parabolei (P) necesită să se demonstreze, mai întîi, că mecanismul trasează această curbă în condiţia că *cisoida este podara parabolei* (P) *în raport cu vîrful acesteia şi în al doilea rînd, să se arate că directoarea parabolei* (P) *este asimptota* (Δ) *a cisoidei.*

Prima parte a demonstraţiei se bazează pe faptul că elementele *5* şi *6* se menţin mereu perpendiculare în punctul M ce aparţine cisoidei. În aceste condiţii şi ţinînd seama de figură, ecuaţia parabolei (P) este

$$y^2 = -2\,px \tag{25}$$

în care $p/2 = a$ este un parametru oarecare.

Ecuaţia tangentei (T) de o direcţie oarecare m este

$$y = mx - \frac{p}{m}\cdot \tag{26}$$

Ecuaţia dreptei (Δ_1) care trece prin A şi este perpendiculară pe tangenta (T) este

$$y = -\frac{1}{m}x \tag{27}$$

din care $m = -\dfrac{x}{y}\cdot$

Eliminînd parametrul m din ecuaţia (26), rezultă

$$y^2 = \frac{x^2}{\frac{p}{2} - x} = \frac{x^3}{a - x}\cdot \tag{28}$$

Aceasta este ecuaţia cisoidei şi ca urmare mecanismul descrie parabola (P) ca înfăşurătoare a poziţiilor succesive ale braţului elementului *6* care materializează tangenta (T) la parabolă.

În felul acesta, locul geometric al perpendicularelor duse la tangente din punctul A este cisoida (C_1), mecanismul rezolvînd în mod mecanic ceea ce este cunoscut de altfel, *că cisoida este podara parabolei* (P) *în raport cu vîrful A al acesteia.*

A doua parte a demonstraţiei, că asimptota (Δ) a cisoidei este directoarea parabolei, rezultă din consideraţii geometrice.

Astfel, din definiţia cisoidei, $AM = NG$ iar MK şi NB fiind perpendiculare pe (Δ_1), rezultă că triunghiurile dreptunghice AMK şi BNG sînt egale şi deci $BG = AK = OE = z$. În felul acesta KG este egal şi paralel cu AB, iar AG diagonală în dreptunghiul $ABGK$ este paralelă cu FL şi perpendiculară pe KM.

Deoarece FK este egal cu KL, iar KP este perpendicular pe FL, triunghiul FLP este isoscel şi deci FP este egal cu PL.

S-a demonstrat în felul acesta că punctul P de pe elementul *6* este egal depărtat de un punct fix F (focarul parabolei) și *o dreaptă fixă* (Δ) (*directoarea parabolei*) *care este și asimptota cisoidei.* Acest punct P aparține deci parabolei (P).

b) În afară de construirea parabolei (P) mecanismul dă posibilitatea să se rezolve în mod mecanic unele operații matematice.

Astfel, din asemănarea triunghiurilor dreptunghice AMR și ABG se poate scrie

$$\frac{AR}{AG} = \frac{AM}{AB} = \frac{r_M}{a}$$

din care, ținînd seama și de formula (7), rezultă

$$AR = AG\,\frac{r_M}{a} = \frac{a}{\cos\varphi}\cdot\frac{r_M}{a} = a\mathrm{tg}^2\,\varphi = am^2\,\cdot \tag{29}$$

Dacă se ia la scară $a = 1$ și se ține seama de formula (11),

$$AR = z^2. \tag{30}$$

Pe de altă parte, s-a găsit că $AQ = \frac{1}{2}z^2$ (22), astfel că se poate scrie

$$QR = AR - AQ = z^2 - \frac{1}{2}z^2 = \frac{1}{2}z^2\,\cdot \tag{31}$$

În felul acesta rezultă că $AQ = QR$.

Mai departe

$$RB = AB - AR = 1 - z^2 \tag{32}$$

și apoi, în mod similar

$$OR = \frac{1}{2} - z^2\,\cdot \tag{33}$$

§ 6. În figura 6a s-a reprezentat un mecanism cu ajutorul căruia se rezolvă problema dublării cubului, adică problema pentru care Diocles a creat cisoida sa.

Mecanismul este format cu ajutorul elementului caracteristic *3* al cisoidografului Newton, legat însă altfel și anume la o cuplă de rotație în C, în loc de cuplă de translație, cum de obicei era legată această extremitate în cele de mai sus.

Cealaltă extremitate a elementului *3* se introduce în cupla de translație *4* care la rîndul ei este legată printr-o articulație de patina *2* care translatează de-a lungul elementului fix (D) — baza *1*.

De patina *4* s-a sudat o bară $EM = a/2$ și care face 90° cu brațul elementului *3*, iar la cealaltă extremitate s-a legat, cu ajutorul unei articulații M, o cuplă de translație *5* prin care trece elementul *6* articulat și el în B.

Mecanismul are un grad de mobilitate ($M = 1$), deoarece $m = 5$ și $C_5 = 7$.

Mecanismul format din elementele mobile *2*, *3* și *4*, este un cisoidograf care descrie cu extremitatea *M* a elementului *4* cisoida (C_1).

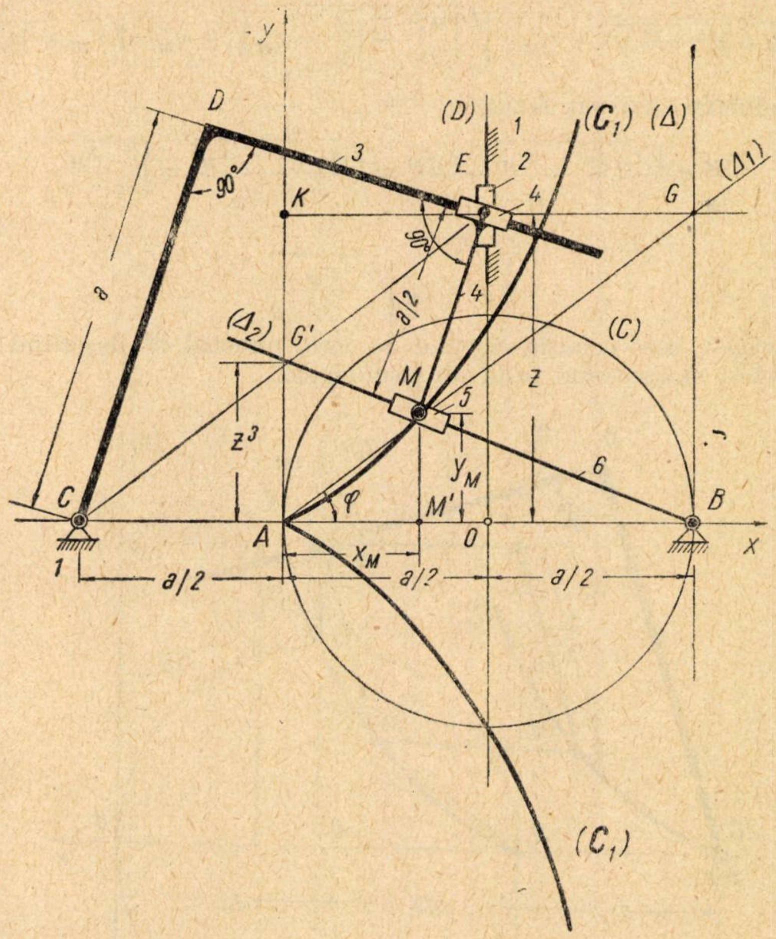

y
D
90°
90°
3
(D)
1
E
2
4
(C₁)
(Δ)
(Δ₁)
G
K
a
a/2
4
(Δ₂)
G'
(C)
M
5
z
z³
y_M
6
C
φ
M'
B
A
0
x
1
x_M
a/2
a/2
a/2
(C₁)

Fig. 6 a

Într-adevăr, unind *A* cu *M* și *C* cu *E*, figura *CEMA* este un trapez isoscel, deoarece $EM = AC = a/2$ (prin construcție), iar unghiurile $\widehat{ACE} = \widehat{CEM}$ ca fiind complementare cu unghiurile $\widehat{CEO} = \widehat{DEC}$ din triunghiurile dreptunghice egale *COE* și *CDE*. De aici rezultă că *CE* este paralel cu AM și triunghiurile dreptunghice COE și $AM'M$ sînt asemenea și se poate scrie

$$\frac{y_M}{x_M} = \frac{EO}{a}. \tag{34}$$

Dar

$$EO = \sqrt{\overline{EM}^2 - \overline{M'O}^2} + y_M = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2} - x_M\right)^2} + y_M = \sqrt{x_M(a - x_M)} + y_M.$$

și introducînd mai sus rezultă

$$\frac{y_M}{x_M} = \frac{\sqrt{x_M(a - x_M)} + y_M}{a} = \frac{\sqrt{x_M(a - x_M)}}{a - x_M} = \sqrt{\frac{x_M}{a - x_M}}$$

deci

$$y_M = x_M \sqrt{\frac{x_M}{a - x_M}}. \tag{35}$$

Aceasta este ecuația cisoidei de cerc, punctul M descriind cisoida lui Diocles, mecanismul fiind un cisoidograf.

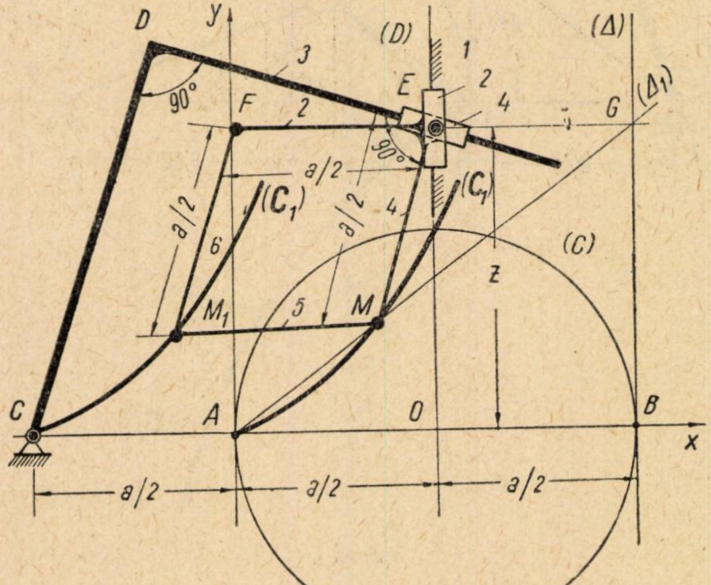


Fig. 6 b

Problema dublării cubului. Pentru rezolvarea acestei probleme, s-a legat la cisoidograf, în punctul M, cupla de translație 5 prin care trece elementul 6 articulat în B și care materializează transversala (Δ_2).

Ecuația dreptei (Δ_2) se scrie

$$\frac{y}{x-a}=\frac{y_M}{x_M-a}, \tag{36}$$

în care $\frac{y_M}{x_M-a}$ este panta în punctul M, și ținînd seama de formula (15) are valoarea

$$\frac{y_M}{x_M-a}=\frac{\frac{m^3}{m^2+1}a}{\frac{m^2}{m^2+1}a-a}=-m^3. \tag{37}$$

Cu această valoare ecuația dreptei (Δ_2) este

$$y=-m^3(x-a). \tag{38}$$

Ținînd seama de figura 6a se poate scrie

$$AG'=am^3. \tag{39}$$

Luînd la scară $a=1$ și avînd în vedere formula (11), rezultă

$$AG'=z^3. \tag{40}$$

Pe de altă parte, ținînd seama de trapezul isoscel $CEMA$, segmentele CE și AG sînt paralele, iar $BG=OE=z$.

În felul acesta, dacă se ține seama de scară și se divizează convenabil axa (D) și se ia valoarea $OE=z$, egală cu latura unui cub, mecanismul dă imediat pe axa Ay volumul cubului egal cu $AG'=z^3$, punctul G' găsindu-se la intersecția elementului *6* cu axa Ay.

Potrivit formulelor (10) și (39), $AG=am=OE$ și $AG'=am^3$, iar dacă se ia la scară $a=2$ și latura unui cub egală cu m, se vede că în timp ce pe axa (D) se iau valori duble ($OE=2m$) pentru latura unui cub, pe axa Ay se obțin valori duble ($AG'=2m^3$) pentru volumul cubului dat.

De asemenea, potrivit formulei (40), $z=\sqrt[3]{AG'}$, iar dacă se ia $AG'=$ $=2$, rezultă imediat latura z a unui cub al cărui volum este egal cu 2.

În concluzie, mecanismul astfel format, dă posibilitatea să se rezolve ușor, în mod mecanic, problema clasică a obținerii unui cub avînd volumul egal cu dublul cubului dat — problema dublării cubului.

În figura 6 b s-a adăugat cisoidografului diada *5* și *6*, după ce, în prealabil, s-a sudat la patina *2* o bară $EF=a/2$. Toate elementele au lungimea egală cu $a/2$, astfel că figura $MEFM_1$ este un romb articulat la care elementul MM_1 are o mișcare de translație curbilinie după o cisoidă, punctele acestui element descriind cisoide echidistante așa după cum se arată pentru punctele M și M_1.

§ 7. În figura 7 s-a reprezentat un alt mecanism pentru rezolvarea problemei dublării cubului, cel din figura 5 căruia i s-au adăugat elementele *7* și *8*.

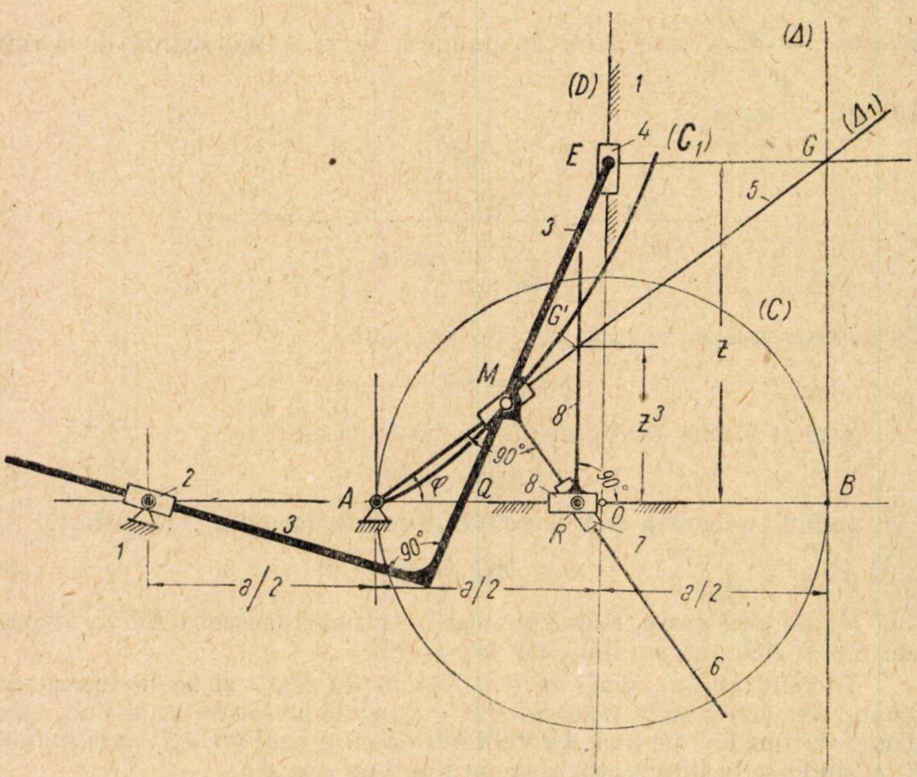


Fig. 7

Elementele *5* și *8* se intersectează în punctul G', astfel că se poate scrie

$$RG' = AR \operatorname{tg} \varphi = AR\, m.$$

Ținînd seama de formula (30) și introducînd valoarea lui AR în ecuația de mai sus, se găsește

$$RG' = z^3. \tag{41}$$

Considerațiile sînt aceleași ca și la formula (40).

§ 8. În figura 8 s-a reprezentat cisoidograful lui Newton de care s-a legat inversorul lui I. I. Artobolovеski [1] format din elementele *5*, *6*, *7*, *8*, *9* și *10*, deci din șase elemente mobile ($m = 6$), avînd două grade de mobilitate, ceea ce impune ca un punct al inversorului, fie aceasta M, să fie condus pe o curbă dată. Acest lucru se realizează legîndu-se inversorul I.I.Artobolevski la elementul *3* al cisoidografului lui Newton, în punctul M care descrie cisoida (C_1). În felul acesta, întreg mecanismul rămîne cu un singur grad de mobilitate ($M = 1$).

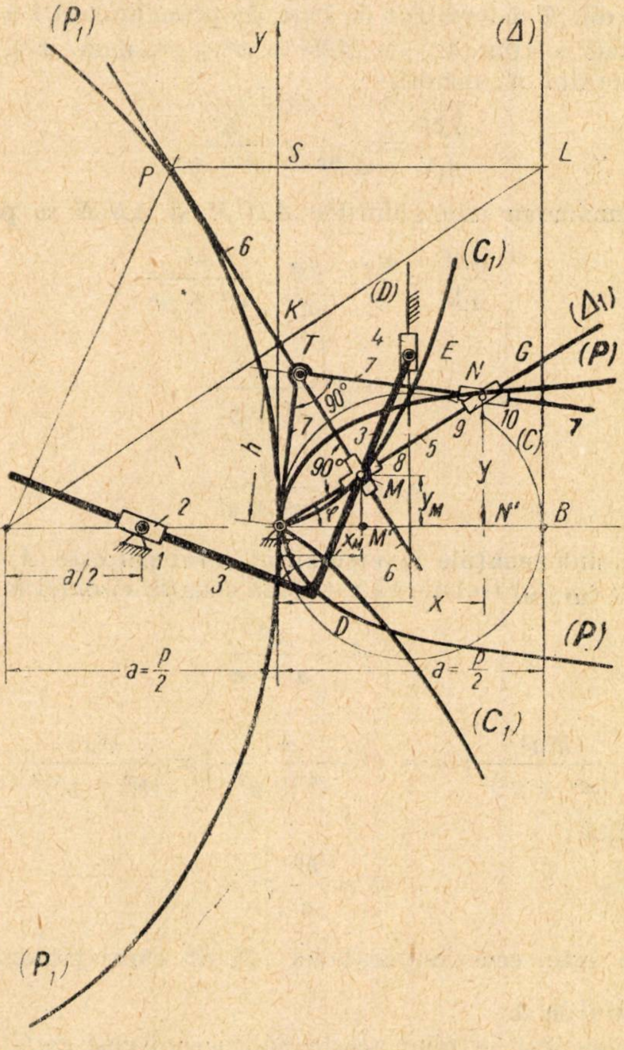

(P₁)
y
(Δ)
S
L
P
6
(C₁)
(D)
K
4
T
7
E
N
G
(Δ₁)
(P)
90°
9
10
7
(C)
3
5
8
h
90°
M
y
y_M
N'
B
2
φ
x_M
M'
F
1
6
a/2
3
x
D
(P)
a = p/2
a = p/2
(C₁)
(P₁)

Fig. 8

În timp ce punctul M al inversorului se mişcă pe cisoida (C_1), punctul N descrie parabola (P).

Cu alte cuvinte, ***inversa cisoidei lui Diocles*** (C_1) ***este o parabolă*** (P) ***al cărui vîrf A este punctul de întoarcere al cisoidei care este și polul de inversiune.***

Condiția fundamentală a inversiunii, al cărui pol este punctul A se scrie

$$AM \cdot AN = h^2. \tag{42}$$

În această formulă $h = AT$ reprezintă lungimea unei laturi a unghiului drept din T determinat de bara dreptunghiulară 7 a inversorului.

Împărțind relația (42) cu $AN^2 = x^2 + y^2$, unde x și y sînt coordonatele punctului N, rezultă

$$\frac{AM}{AN} = \frac{h^2}{AN^2} = \frac{h^2}{x^2 + y^2}. \tag{43}$$

Din asemănarea triunghiurilor $AM'M$ și $AN'N$ se poate scrie

$$\frac{AM}{AN} = \frac{x_M}{x} = \frac{y_M}{y} = \frac{h^2}{x^2 + y^2}, \tag{44}$$

din care

$$x_M = h^2 \frac{x}{x^2 + y^2}$$

și (45)

$$y_M = h^2 \frac{y}{x^2 + y^2}.$$

Acestea sînt ecuațiile inversiunii al cărui pol este A. Coordonatele punctului M (x_M, y_M) trebuie să satisfacă ecuația cisoidei lui Diocles

$$y^2 = \frac{x^3}{a - x}$$

deci

$$\frac{h^4 y^2}{(x^2 + y^2)^2} \left(a - h^2 \frac{x}{x^2 + y^2} \right) = \frac{h^6 x^3}{(x^2 + y^2)^3},$$

din care rezultă

$$y^2 = \frac{h^2}{a} x. \tag{46}$$

Aceasta este ecuația parabolei (P) al cărui parametru $p = \frac{h^2}{2a}$ și care are vîrful în A.

S-a demonstrat în felul acesta că mecanismul astfel format trasează parabola (P) ca inversa cisoidei (C_1).

Pentru $h = a$, $p = a/2$, ecuația parabolei fiind $y^2 = ax$. Față de acest caz, pentru $h < a$, $p < a/2$ și pentru $h > a, p > a/2$, se obțin parabole mai deschise sau mai turtite.

Elementul *6* articulat în T și perpendicular în M pe elementul *5*, trasează parabola (P_1) așa cum s-a arătat la paragraful 5.

§ 9. În figura 9 a s-a reprezentat o altă cubică circulară unicursală şi anume strofoida dreaptă. În mod normal, această curbă este generată luîndu-se de bază tot un cerc director (C) şi o dreaptă directoare (Δ) care însă, în cazul strofoidei, trece prin centrul O al cercului director, fiind un diametru al acesteia.

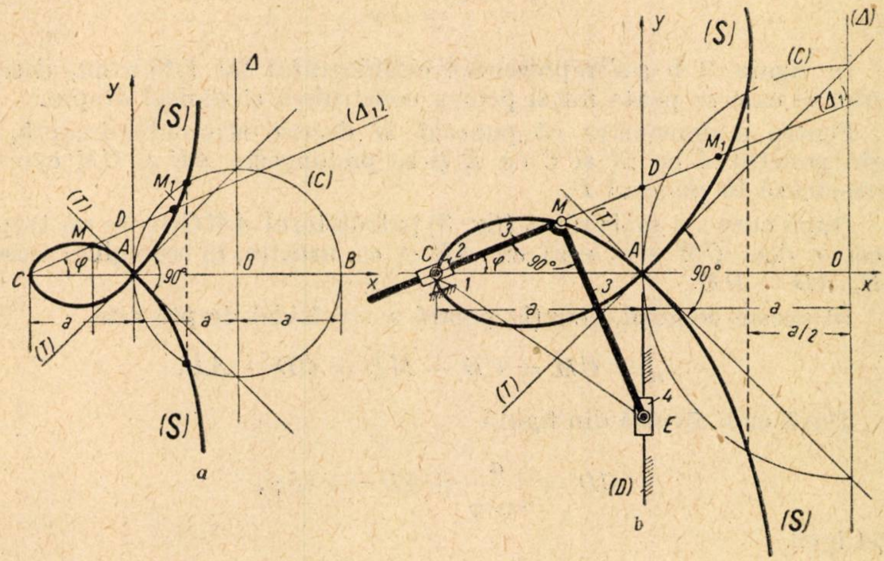


Fig. 9 (a şi b)

Dintr-un pol fix C al axei polare Cx se duce o transversală (Δ_1) care intersectează în D ordonata Ay şi se ia pe această transversală $DM = DM_1 = AD$. Locul geometric descris de punctele M sau M_1 cînd transversala (Δ_1) se roteşte cu unghiul φ faţă de axa absciselor, este o *strofoidă dreaptă* (S).

Originea axelor de coordonate este un punct dublu cu tangentele reale (T) perpendiculare în acest punct. Aceste tangente geometrice sînt determinate de punctul dublu şi de punctele de intersecţie ale dreptei directoare (Δ) cu cercul director (C).

Coordonatele polare ale punctelor M şi M_1 sînt

$$r = CD \pm MD = CD \pm AD.$$

Cum

$$CD = \frac{a}{\cos\varphi} \text{ şi } AD = a\,\mathrm{tg}\,\varphi,$$

ecuaţia polară a strofoidei drepte este

$$r = \frac{a}{\cos\varphi} \pm a\,\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{a(1 \pm \sin\varphi)}{\cos\varphi} \tag{47}$$

şi *ecuaţia carteziană* a strofoidei drepte, este

$$x(x^2 + y^2) = a\,(y^2 - x^2)$$

sau

$$y^2 = x^2 \frac{a + x}{a - x}. \tag{48}$$

În figura 9 b s-a reprezentat cisoidograful lui I.Newton, descris anterior şi care se poate folosi pentru construirea strofoidei drepte.

Pentru a demonstra că punctul M descrie strofoida dreaptă, se uneşte punctul A cu M şi C cu E şi se prelungeşte AE şi CM care se intersectează în punctul D.

După cum s-a mai arătat (fig. 3) patrulaterul $AMCE$ este un trapez isoscel şi deci CM este egal cu AE şi ca urmare, în triunghiul isoscel CDE, $AD = DM$.

În aceste condiţii, ecuaţia polară a strofoidei drepte este

$$r_M = CM = CD - MD = CD - AD.$$

După cum rezultă din figură

$$CD = \frac{a}{\cos\varphi} \text{ şi } AD = a\,\mathrm{tg}\varphi,$$

astfel încît

$$r_M = \frac{a\,(1 - \sin\varphi)}{\cos\varphi}. \tag{47'}$$

S-a regăsit astfel formula (47) a strofoidei drepte şi deci punctul M descrie această curbă.

În concluzie, cisoidograful lui Newton este în acelaşi timp şi strofoidograf.

§ 10. În figura 10 s-a reprezentat strofoidograful lui I. Newton la care s-a mai adăugat diada *4* şi *5*, iar elementului *3* i s-a dat forma de T. Diada *4* şi *5* legată de articulaţia din M permite să se menţină perpendicularitatea elementului *4* pe directoarea (Δ).

În felul acesta punctul M'' dă în orice moment ordonata punctului M. Aceeaşi diadă (desenată cu linii întrerupte) poate da abscisa M' a punctului M.

Elementul *3* în mişcare determină pe axa Ay segmentul $AD = z$, astfel că

$$AD = z = a\,\mathrm{tg}\varphi = am. \tag{49}$$

Dacă se ia la scară $a = 1$, atunci se obţine un mecanism de tangentă, deoarece

$$AD = z = m = \mathrm{tg}\varphi. \tag{50}$$

Ținînd seama de formula (47′), coordonatele punctului M sînt date cu ajutorul diadei *4* și *5* și au valorile

$$x_M = a(1 - \sin\varphi), \qquad (51)$$
$$y_M = a \operatorname{tg}\varphi (1 - \sin\varphi).$$

Dacă se ia la scară $a = 1$, punctele M' și M'' reprezintă funcțiile trigonometrice

$$x_M = 1 - \sin\varphi,$$
$$y_M = \operatorname{tg}\varphi (1 - \sin\varphi). \qquad (51')$$

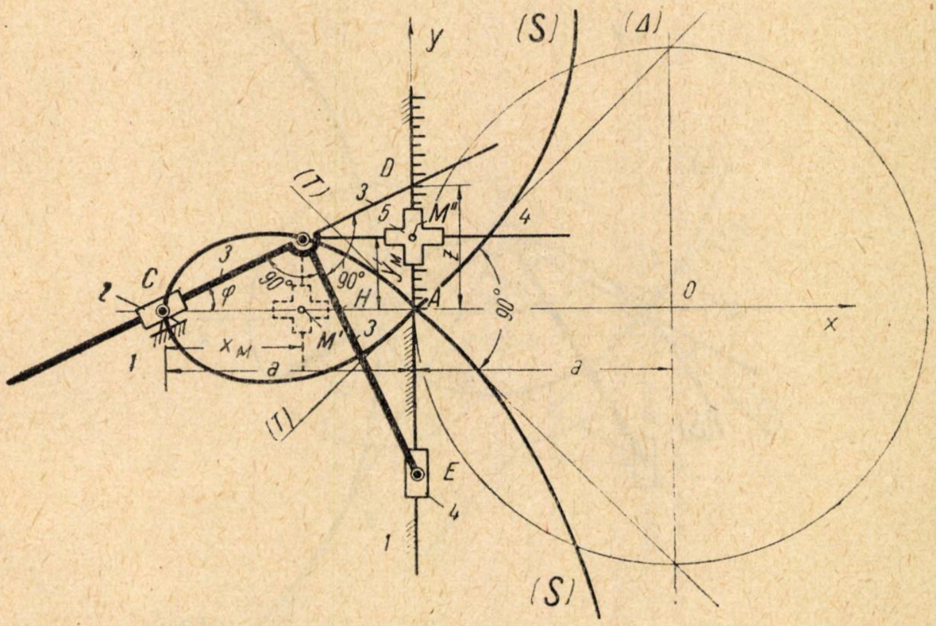


Fig. 10

Diviziunea H determinată de elementul *3* pe abscisă, are valoarea

$$CH = \frac{r_M}{\cos\varphi} = \frac{a(1 - \sin\varphi)}{\cos^2\varphi} \qquad (52)$$

care de asemenea pentru $a = 1$ devine funcția trigonometrică

$$CH = \frac{1 - \sin\varphi}{\cos^2\varphi}. \qquad (52')$$

§ 11. În figura 11 s-a reprezentat strofoidograful lui I. Newton, la care s-au legat elementele *5* și *6*. Elementul *6*, de formă dreptunghiulară, s-a legat de elementul *3* prin articulația din M.

Mecanismul are un singur grad de mobilitate ($M = 1$), deoarece $m = 5$ şi $C_5 = 7$.

S-a luat constructiv $AC = EM = a$.

Mecanismul astfel format, permite construirea parabolei (P) ca înfăşurătoare a poziţiilor succesive ale elementului ML (elementul *6*). Ţinînd seama de faptul că elementul *6* are formă dreptunghiulară, *strofoida* (S) *este podara parabolei* (P) *în raport cu* A (*originea axelor de coordonate*).

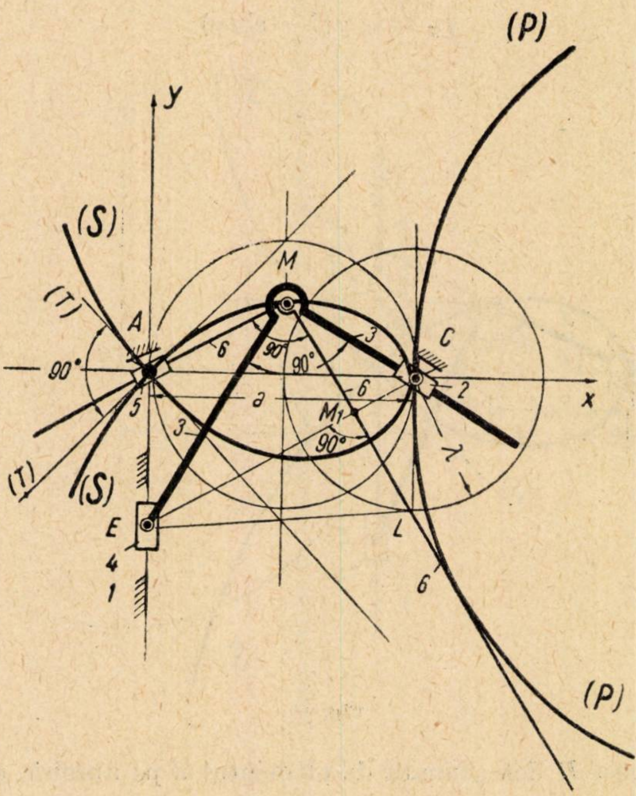


Fig. 11

După cum s-a mai arătat, patrulaterul $AMCE$ este un trapez isoscel la care $AE = MC$ şi deci se poate scrie

$$AE = MC = CL = \lambda. \tag{53}$$

La această relaţie, λ este un parametru variabil şi egal cu raza cercului cu centrul în C, avînd ecuaţia

$$(x - a)^2 + y^2 = \lambda^2. \tag{54}$$

Coordonatele punctului *M*, se obțin intersectînd acest cerc cu strofoida (*S*), de ecuație

$$y^2 = x^2 \frac{a - x}{a + x}.$$

Rezolvînd sistemul format din cele două ecuații precedente rezultă coordonatele punctului *M* :

$$\begin{aligned} x &= a \frac{a^2 - \lambda^2}{a^2 + \lambda^2}, \\ y &= \frac{a^2 - \lambda^2}{a^2 + \lambda^2}. \end{aligned} \tag{55}$$

În trapezul isoscel *AMCE* latura *AM* este paralelă cu latura *EC* şi cum *AM* s-a luat constructiv perpendiculară pe *ML*, atunci *ML* este perpendiculară mereu şi pe *EC*. Punctul M_1 este determinat de perpendicularitatea lui *ML* pe *EC*, punctul *L* fiind simetricul lui *M* față de *EC*, avînd coordonatele :

$$\begin{aligned} x &= a \\ y &= -\lambda. \end{aligned} \tag{56}$$

Punctele *M* şi *L* aparțin elementului *6* şi ținînd seama de formulele (55), (56), ecuația dreptei *ML*, se scrie

$$y + \lambda = \frac{\lambda\left(\frac{a^2 - \lambda^2}{a^2 + \lambda^2} + 1\right)}{a\left(\frac{a^2 - \lambda^2}{a^2 + \lambda^2} - 1\right)} (x - a) = -\frac{a}{\lambda}(x - a) \cdot$$

Ordonînd termenii în raport cu λ se obține

$$\lambda^2 + y\lambda + a(x - a) = 0. \tag{57}$$

Derivata acestei ecuații în raport cu parametrul variabil este

$$2\lambda + y = 0. \tag{58}$$

Înfăşurătoarea pozițiilor succesive ale dreptei *ML* şi deci ale elementului *6*, se obține prin eliminarea parametrului λ între ultimele ecuații şi rezultă

$$y^2 = 4a(x - a). \tag{59}$$

Aceasta este ecuația parabolei (*P*) descrisă ca înfăşurătoarea pozițiilor succesive ale brațului *ML* ce aparține elementului *6*. Totodată, brațul *ML* este perpendicular pe brațul *AM* ce aparține aceluiaşi element *6* şi *ca urmare strofoida* (*S*) *este podara parabolei* (*P*) *în raport cu punctul A*.

§ 12. În figura 12 s-a reprezentat strofoidograful lui I. Newton la care s-au mai adăugat elementele *5*, *6*, *7* și *8*.

Elementul *6* descrie parabola (P) care rezultă ca înfășurătoare a pozițiilor succesive ale acestui element, așa după cum s-a demonstrat la parabolograful precedent.

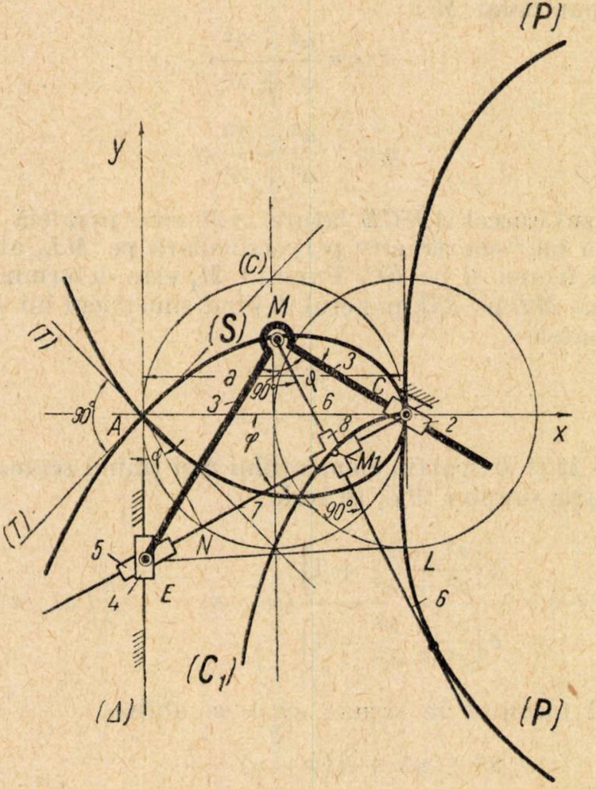


Fig. 12

Perpendicularitatea între elementele *6* și *7* este menținută de elementul *8*, iar punctul M_1 descrie cisoida (C_1) cu punctul de întoarcere în C și directoarea (Δ).

Într-adevăr, ținînd seama de figură, nu este greu de văzut că triunghiurile dreptunghice ANE și MM_1C sînt egale și deci

$$CM_1 = NE = AE \sin\varphi = a\,\frac{\sin^2\varphi}{\cos\varphi}\,.$$

S-a regăsit formula (4) a cisoidei, astfel că punctul M_1 descrie cisoida (C_1) avînd ca directoare axa Ay.

Mecanismul astfel format trasează simultan trei curbe : strofoida (S), cisoida (C_1) și parabola (P).

§ 13. În figura 13 s-a reprezentat de asemenea strofoidograful lui I. Newton la care s-a legat în punctul M inversorul lui I. I. Artobolevski.

Mecanismul astfel format are un grad de mobilitate ($M = 1$), deoarece $m = 9$ și $C_5 = 13$. În timp ce punctul M se deplasează pe strofoida (S), punctul N descrie hiperbola echilateră (H).

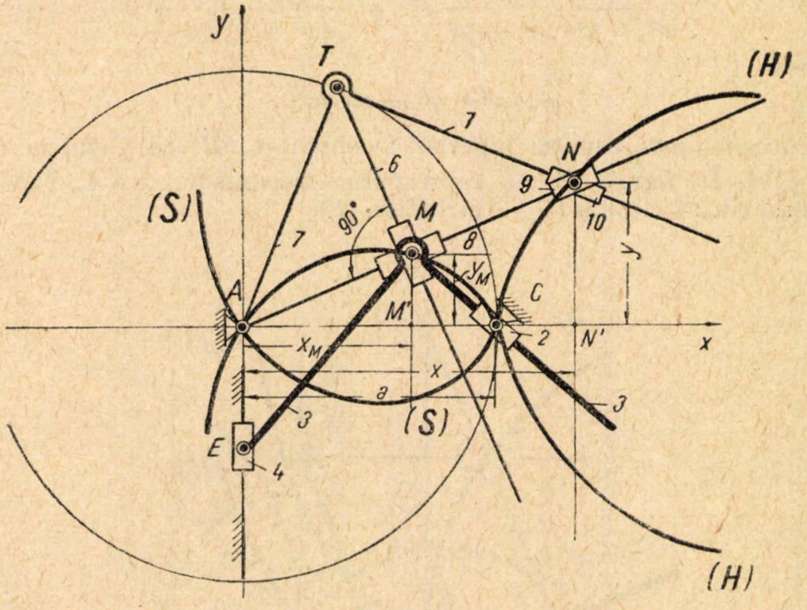


Fig. 13

În felul acesta, *inversa strofoidei* (S) *este o hiperbolă echilateră* (H), *polul de inversiune fiind punctul dublu* A. În aceste condiții, formula inversiunii se poate scrie

$$\overline{AM}\cdot\overline{AN} = a^2. \qquad (60)$$

În această formulă $a = AC = AT$ reprezintă latura triunghiului dreptunghic ATN a inversorului și $AN^2 = x^2 + y^2$, în care x și y sînt coordonatele punctului N.

Împărțind cu AN^2 și ținînd seama de triunghiurile dreptunghice asemenea $AM'M$ și $AN'n$, rezultă

$$\frac{AM}{AN} = \frac{x_M}{x} = \frac{y_M}{y} = \frac{a^2}{x^2 + y^2} \qquad (61)$$

din care se scriu imediat ecuațiile inversiunii :

$$x_m = a^2 \frac{x}{x^2 + y^2}$$

și (62)

$$y_m = a^2 \frac{y}{x^2 + y^2}.$$

Aceste coordonate trebuie să satisfacă ecuația strofoidei drepte $y^2 = x^2 \dfrac{a-x}{a+x}$ și prin înlocuire rezultă

$$\frac{a^2 x}{x^2+y^2} \cdot \frac{a^4}{x^2+y^2} - a \frac{a^4 (x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2} = 0$$

din care

$$x^2 - y^2 - ax = 0. \qquad (63)$$

Aceasta este ecuația hiperbolei echilatere (H) cu vîrful în C.

§ 14. În figura 14 s-a reprezentat mecanismul lui I. Newton cu care s-au trasat cisoida (C_1) și strofoida (S).

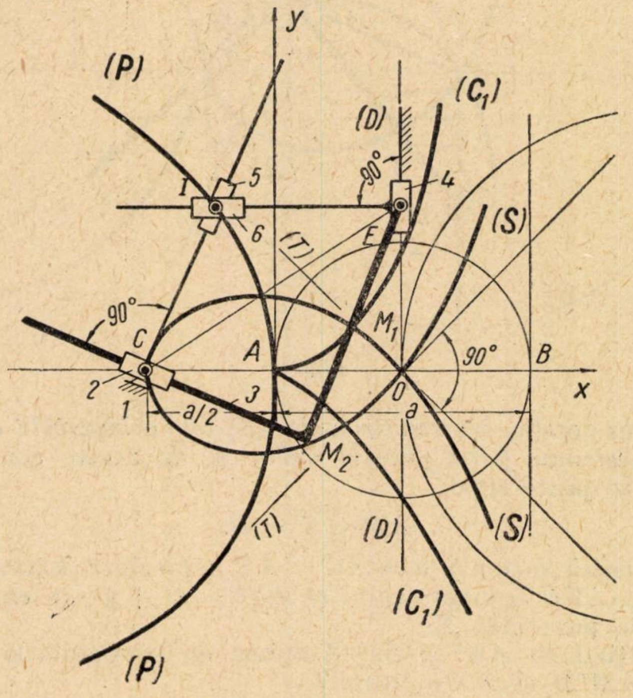


Fig. 14

Elementul *3* este o figură mobilă care se mișcă cu punctul E de-a lungul dreptei (D) împreună cu cupla de translație *4*, iar celălalt braț al figurii mobile translatează în cupla *2* și simultan se rotește o dată cu aceasta în articulația C.

Ducînd perpendiculara EI pe dreapta (D) și CI perpendiculară pe CM_2, intersecția I a acestor perpendiculare este centrul instantaneu de rotație în mișcarea plană a elementului mobil *3*.

Materializînd perpendicularele CI și EI prin elemente sudate de cuplele de translație *2* și *4*, apoi articulînd în I elementele *5* și *6*, punctul I va descrie în planul fix o parabolă (P) cu vîrful în A.

Într-adevăr, triunghiurile dreptunghice EOC și EM_2C sînt egale, iar CE este baza triunghiului isoscel CDI în care $CI = IE$. În felul acesta punctul I este egal depărtat de un punct (F) care este focarul parabolei și de o dreaptă (D) care este directoarea parabolei, de ecuație

$$y^2 = -2ax. \qquad (64)$$

Dacă se unesc punctele M_1 și M_2 cu I, aceste segmente sînt normalele la cisoida (C_1) și la strofoida (S), iar dacă se materializează aceste segmente prin bare prelungite, evolutele cisoidei (C_1) și strofoidei (S) rezultă ca înfășurătoarele diferitelor poziții succesive ale acestor bare (nefigurate pe desen).

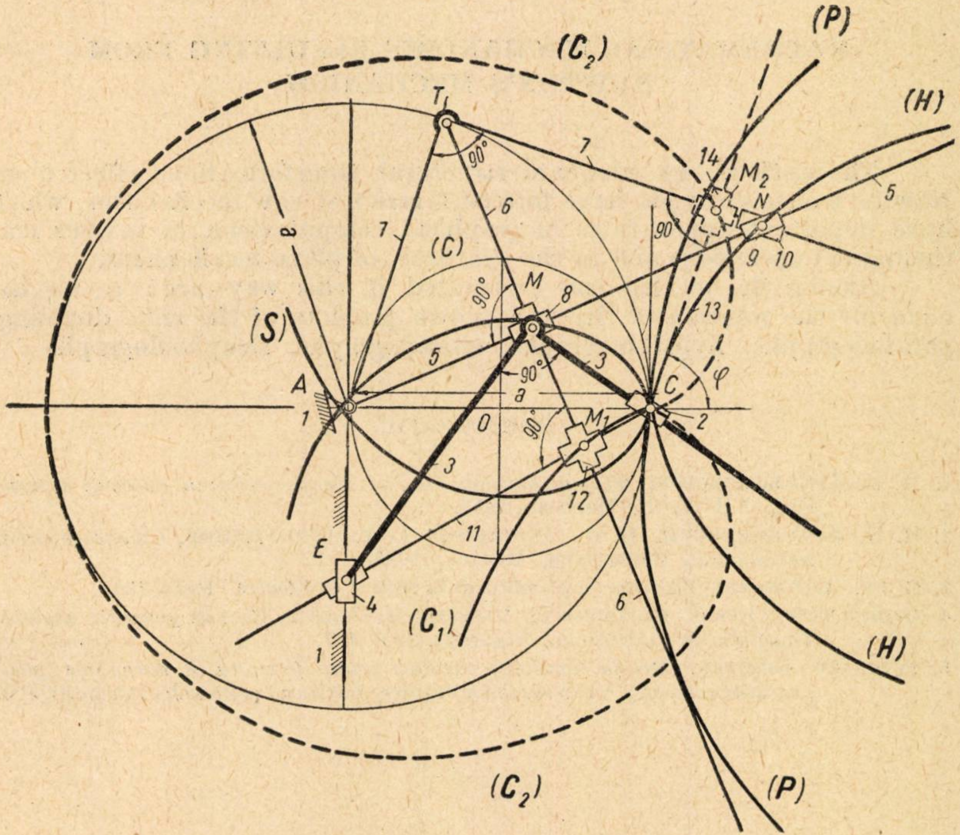


Fig. 15

§ 15. În figura 15 s-a reprezentat un mecanism universal avînd la bază un mecanism al lui I. Newton și un inversor al lui I. I. Artobolevski, descrise mai înainte.

Acest mecanism universal poate trasa simultan următoarele curbe :

— strofoida (S) determinată de punctul M (a se vedea şi fig. 9);

— parabola (P) descrisă ca înfăşurătoare a poziţiilor succesive ale elementului *6* (a se vedea şi fig. 11);

— cisoida (C_1) descrisă de punctul M_1 (a se vedea şi fig. 12);

— hiperbola echilateră (H) descrisă de punctul N (a se vedea şi fig. 13);

— cardioida (C_2) descrisă de punctul M_2 obţinut prin perpendicularitatea elementului *13* (desenat cu linii întrerupte) pe braţul *7*. Cardioida astfel obţinută, este podara în raport cu punctul C a cercului cu centrul în A şi rază egală cu a, avînd ecuaţia

$$r_{M_2} = CM_2 = a(1 - \cos\varphi). \tag{65}$$

MATHEMATICAL MECHANISMS RESULTING FROM NEWTON'S MECHANISM

The authors, by adequate structural transformations effected on Newton's cissoidograph, have formed a series of new mechanisms, which have important applications in graphical computations, in various mathematical operations and in the synthesis of plane mechanisms.

Among the mechanisms elaborated in this way are : a mechanism for the solution of the well-known problem of the cube doubling, parabolographs, hyperbolographs, cissoidographs, strophoidographs.

BIBLIOGRAFIE

1. И. И. Артоболевский, *Теория механизмов для воспроизведения плоских кривых.* Изд. АН СССР, Москва, 1959.
2. И. И. Артоболевсий, Н. И. Левицкий, С. А. Черкудинов, *Синтез плоских механизмов.* Физматгиз, Москва, 1959.
3. G. de, Lonchamps, *Essai sur la géométrie de la règle et de l'équère.* Paris, 1890.
4. Ovidiu Tino, Elena Murgulescu, Valeriu Bănărescu, *Curs de geometrie analitică·* Tipografia învăţămîntului, Bucureşti, 1957 487.
5. Tutunaru Dumitru, *Metoda translaţiei circulare pentru formarea de mecanisme plane.* Lucrările celei de-a VII-a sesiuni ştiinţifice, Institutul politehnic, Bucureşti, 1962.

STUDII

CONTRIBUȚII LA METODA PROIECȚIILOR FOLOSITĂ ÎN CINEMATICA MECANISMELOR PLANE

DE

CHR. PELECUDI și C. PARASCHIV

531.1

Determinarea distribuției de viteze la un corp în mișcare prin metoda proiecțiilor are la bază proprietatea că proiecțiile vitezelor a două puncte A și B ale unui rigid pe dreapta care unește cele două puncte sînt egale. Această proprietate [1] simplă și ușor de aplicat este totuși destul de puțin utilizată în cinematica mecanismelor. Din unele lucrări cercetate [2], [3], [6], [7], [10] se constată că această proprietate este aplicată parțial numai pentru cazuri izolate, concrete, ca de exemplu : mecanismul patrulater, mecanismul bielă-manivelă, diada de aspect 1 sau triada avînd numai cuple de rotație etc.

Utilizarea metodei proiecțiilor pentru determinarea distribuției de accelerații este mai redusă datorită apariției în calculele respective a accelerațiilor normale. Într-adevăr, [1], [2], în acest caz proiecțiile accelerațiilor a două puncte A și B pe direcția AB diferă cu termenul $-\omega^2 . AB$, ceea ce complică construcțiile, ducînd la slaba sa aplicabilitate.

Folosirea metodei proiecției la studiul cinematic al mai multor corpuri în mișcarea relativă este și mai redusă datorită tocmai faptului că această metodă nu a fost prezentată sub o formă unitară care să permită folosirea ei la studiul mecanismelor plane complexe.

Lucrarea de față are drept scop să prezinte sub o formă unitară generală această metodă, aplicabilă atît pentru grupe cinematice simple cît și pentru grupe cinematice complexe, ținînd seama fie de numărul de conture independente — după clasificarea lui G. G. Baranov [8] — fie de numărul de elemente în diferite conture — după clasificarea lui I. I. Artobolevski [9]. În acest scop utilizarea punctelor lui Assur și a metodei pozițiilor false conduce la extinderea domeniului de aplicabilitate al metodei, la constituirea ei ca un instrument comod și eficace în studiul cinematic al mecanismelor plane.

I. CONSIDERAŢII TEORETICE

1. STUDIUL CINEMATIC AL UNUI SOLID ÎN MIŞCAREA PLANĂ

1.1. DISTRIBUŢIA DE VITEZE

Dacă înmulţim relaţia lui Euler [1]

$$\bar{v}_B = \bar{v}_A + \overline{\varpi} \times \overline{AB} \tag{1}$$

scalar cu un versor $\bar{u}$ se obţine

$$\bar{v}_B \cdot \bar{u} = \bar{v}_A \cdot \bar{u} + (\overline{\varpi} \times \overline{AB}) \cdot \bar{u}. \tag{2}$$

Dacă versorul $\bar{u}$ are direcţia lui $\overline{AB}$ (fig. 1), atunci produsul mixt $(\overline{\varpi} \times \times \overline{AB}) \cdot \bar{u}$ este nul şi deci

$$\underset{AB}{\mathrm{pr}}\,\bar{v}_B = \underset{AB}{\mathrm{pr}}\,\bar{v}_A = Kk. \tag{3}$$

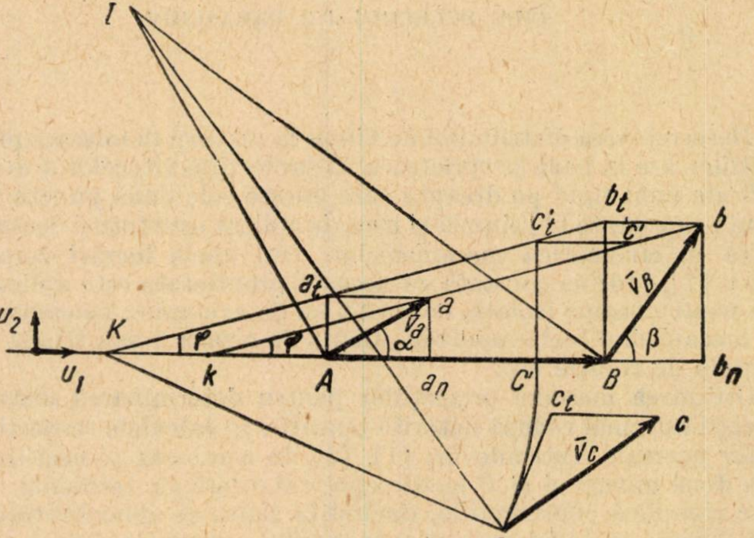


Fig. 1

Dacă versorul $\bar{u}$ are direcţia perpendiculară pe direcţia $\overline{AB}$ şi sensul obţinut prin rotaţia pozitivă a vectorului $\overline{AB}$ atunci

$$\underset{\perp AB}{\mathrm{pr}}\,\bar{v}_B = \underset{\perp AB}{\mathrm{pr}}\,\bar{v}_A + \omega \cdot AB. \tag{4}$$

Din (4) şi figura 1 rezultă

$$\omega = \frac{\underset{\perp AB}{\mathrm{pr}}\,\bar{v}_B - \underset{\perp AB}{\mathrm{pr}}\,\bar{v}_A}{AB} = \frac{\underset{\perp AB}{\mathrm{pr}}\,\bar{v}_B}{KB} = \frac{\underset{\perp AB}{\mathrm{pr}}\,\bar{v}_A}{KA} = \mathrm{tg}\,\varphi. \tag{5}$$

Dacă se introduc scările grafice atunci

$$\omega = \frac{k_v(Aa_t)}{k_l(KA)} = \frac{k_v(Bb_t)}{k_l(KB)} = k_\omega \operatorname{tg} \varphi_v, \tag{6}$$

unde

$$k_\omega = \frac{k_v}{k_l}.$$

Din figura 1 se vede că distribuția de viteze este asemănătoare cu aceea a unui corp rigid care s-ar roti în jurul punctului K, avînd și o mișcare de translație în lungul lui AB. Viteza unui punct oarecare C în acest caz se determină în felul următor :

— din C, cu raza egală cu KC se duce un arc de cerc pînă întîlnește dreapta AB în C',

— din C' se ridică o perpendiculară pe AB pînă întîlnește pe Kb_ta_t în c_t'. Segmentul $C'c_t'$ reprezintă componenta vitezei din mișcarea de rotație în jurul lui K,

— din C, perpendicular pe KC, se duce segmentul $Cc_t = C'c_t'$,

— din c_t, paralel cu AB, se duce segmentul $c_tc = c_t'c'$. Segmentul Cc reprezintă, la scara respectivă, viteza punctului C, adică

$$\bar{v}_c = k_v(Cc).$$

Din ecuația lui Euler se constată că se poate determina o mărime vectorială dacă se dau trei parametri scalari, $\overline{AB}$ și direcția lui ϖ fiind cunoscute. Cele mai dese cazuri întîlnite în practică sînt :

— se cunoaște vectorul viteză al unui punct A și direcția vitezei unui al doilea punct B;

— se cunoaște vectorul viteză al unui punct A și proiecția vitezei punctului B pe o direcție diferită de AB;

— se cunoaște vectorul viteză al unui punct A și viteza unghiulară a elementului AB.

Viteza punctului B se determină cu una din construcțiile cunoscute, corespunzătoare celor trei cazuri arătate mai sus [2], [3], [10].

1.2. DISTRIBUȚIA DE ACCELERAȚII

Înmulțind ecuația lui Euler pentru determinarea accelerației [1]

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A - \omega^2 \cdot \overline{AB} + \bar{\varepsilon} \times \overline{AB} \tag{7}$$

scalar cu un versor $\bar{u}$ se obține

$$\bar{a}_B \cdot \bar{u} = \bar{a}_A \cdot \bar{u} - \omega^2 \cdot \overline{AB} \cdot \bar{u} + (\bar{\varepsilon} \times \overline{AB}) \cdot \bar{u}. \tag{8}$$

Dacă versorul $\bar{u}$ are direcția lui $\overline{AB}$ atunci produsul mixt $(\bar{\varepsilon} \times \overline{AB}) \cdot \bar{u}$ este nul și deci

$$\underset{AB}{\operatorname{pr}} \bar{a}_B = \underset{AB}{\operatorname{pr}} \bar{a}_A - \omega^2 \cdot AB. \tag{9}$$

În cazul în care versorul $\bar{u}$ are direcţia perpendiculară pe $\overline{AB}$ şi sensul obţinut prin rotaţia pozitivă a vectorului $\overline{AB}$ atunci

$$\underset{\perp AB}{\mathrm{pr}}\,\bar{a}_B = \underset{\perp AB}{\mathrm{pr}}\,\bar{a}_A + \varepsilon \cdot AB. \tag{10}$$

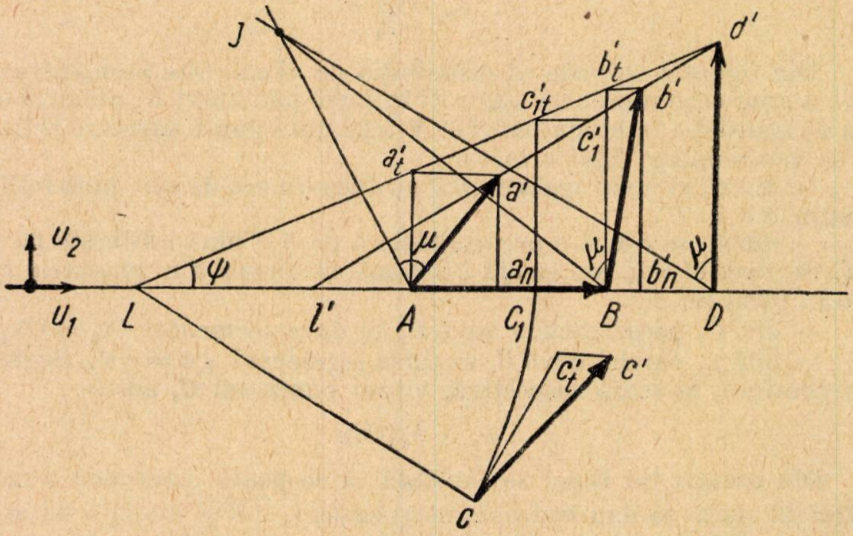


Fig. 2

Din (10) şi figura 2 se obţine

$$\varepsilon = \frac{\underset{\perp AB}{\mathrm{pr}}\,\bar{a}_B - \underset{\perp AB}{\mathrm{pr}}\,\bar{a}_A}{AB} = \frac{\underset{\perp AB}{\mathrm{pr}}\,\bar{a}_B}{LB} = \frac{\underset{\perp AB}{\mathrm{pr}}\,\bar{a}_A}{LA} = \mathrm{tg}\,\psi. \tag{11}$$

Introducîndu-se scările grafice atunci

$$\varepsilon = \frac{k_a (Aa'_t)}{k_l (LA)} = \frac{k_a (Bb'_t)}{k_l (LB)} = k_\varepsilon \,\mathrm{tg}\,\psi_g, \tag{12}$$

unde

$$k_\varepsilon = \frac{k_a}{k_l}.$$

Într-un mod asemănător cu cel de la determinarea vitezelor, din figura 2 se vede că distribuţia de acceleraţii este asemănătoare cu aceea a unui corp rigid care s-ar roti în jurul punctului L, avînd şi o mişcare de translaţie în lungul lui AB. Rezultă următoarea construcţie pentru determinarea acceleraţiei unui punct oarecare C cuprins în planul ce conţine dreapta AB:

— din punctul C, cu o rază LC, se duce un arc de cerc pînă întîlnește dreapta AB în punctul C_1,

— din punctul C_1 se ridică o perpendiculară pe AB pînă întîlnește dreapta Lb'_t în c'_{1t}. Segmentul $C_1c'_{1t}$ reprezintă componenta accelerației tangențiale în mișcarea de rotație în jurul lui L,

— din C, perpendicular pe LC, se duce segmentul $Cc'_t = C_1c'_{1t}$,

— din c'_t, paralel cu AB, se duce segmentul $c'_tc' = c'_{1t}c'_1$. Segmentul Cc' reprezintă accelerația punctului C. Deci

$$\bar{a}_c = k_a\,(Cc').$$

Se poate observa că dreptele Lb'_t și lb' nu mai sînt paralele ca în cazul vitezelor. Aceasta se datorește faptului că segmentele b'_tb' și a'_ta' nu mai sînt egale, ci diferă prin accelerația normală $-\ \omega^2 \cdot AB$.

Din ecuația lui Euler se constată că se poate determina o mărime vectorială dacă se dau trei parametri scalari, $\overline{AB}$, direcția lui $\bar{\varepsilon}$ și vectorul $\bar{\omega}$ fiind cunoscute. Ca și la viteze, cazurile cele mai frecvente [2], [10] sînt :

— se cunoaște vectorul accelerație al unui punct A și direcția accelerației unui alt punct B;

— se cunoaște vectorul accelerație al unui punct A și proiecția accelerației unui alt punct B pe o direcție diferită de AB;

— se cunoaște vectorul accelerație al unui punct A și accelerația unghiulară a elementului respectiv.

2. STUDIUL CINEMATIC A DOUĂ SOLIDE ÎN MIȘCAREA PLANĂ

2.1. DISTRIBUȚIA DE VITEZE

Se consideră două solide *1* și *2* cu polul relativ al vitezelor în P_{12} (fig. 3). Fie cunoscute vitezele punctelor A și B situate respectiv în solidele *1* și *2*.

Pentru punctul C în care sînt confundate punctele C_1 și C_2 aparținînd solidelor *1* și *2* se poate scrie

$$\bar{v}_{C_1} = \bar{v}_{A_1} + \bar{v}_{C_1A_1}, \tag{13}$$

$$\bar{v}_{C_2} = \bar{v}_{B_2} + \bar{v}_{C_2B_2} \tag{14}$$

și

$$\bar{v}_{C_2} = \bar{v}_{C_1} + \bar{v}_{C_2C_1}, \tag{15}$$

adică

$$\bar{v}_{C_2} = \underline{\underline{\bar{v}_{B_2}}} + \underset{\perp BC}{\underline{\bar{v}_{C_2B_2}}} = \underline{\underline{\bar{v}_{A_1}}} + \underset{\perp AC}{\underline{\bar{v}_{C_1A_1}}} + \underset{\perp P_{12}C}{\underline{\bar{v}_{C_2C_1}}}. \tag{16}$$

În (16) s-a subliniat cu două linii mărimile complexe cu ambele scalare cunoscute și cu o linie mărimile complexe la care se cunoaște numai o singură mărime scalară, respectiv direcția mărimii vectoriale, direcția care este indicată sub această linie. După cum se vede, cele trei necunoscute din (16) au trei direcții diferite. Pentru a putea aplica metoda proiecției este necesar ca aceste direcții să se reducă la două, adică două dintre ele să se confunde. Acest lucru se realizează atunci cînd C se află pe una din dreptele Δ_2 sau Δ_1, care se obțin prin unirea punctelor A_1 și B_2 cu $P_{12} = P_{21}$.

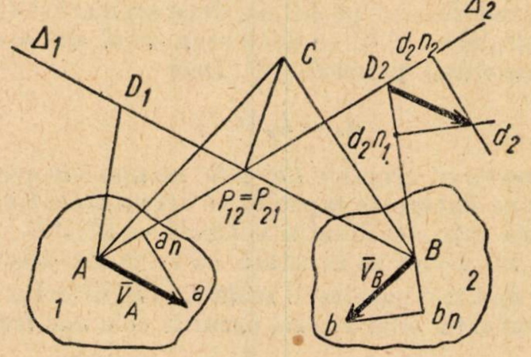


Fig. 3

Rezultă deci că problema este rezolvabilă pentru o dublă infinitate de puncte așezate pe dreptele Δ_1 și Δ_2. În acest caz (16) devine, pentru punctul D_2 de pe dreapta Δ_2,

$$\overline{v}_{D_2} = \underline{\underline{\overline{v}_{B_2}}} + \underset{\perp BD}{\underline{\overline{v}_{D_2B_2}}} = \underline{\underline{\overline{v}_{A_1}}} + \underset{\perp \Delta_2}{\underline{\overline{v}_{D_1A_1} + \overline{v}_{D_2D_1}}}. \tag{17}$$

Proiectînd prima din ecuațiile (17) pe direcția BD_2 iar pe a doua pe direcția AD_2 termenii care conțin necunoscutele dispar. Folosind o construcție grafică (fig. 3) se determină v_{D_2}. Ea se face în următoarea ordine :

— se unește A cu P_{12} obținîndu-se Δ_2 pe care se localizează D_2,

— se unește B cu D_2,

— se proiectează v_A pe Δ_2 și $\overline{v}_B$ pe BD_2 și se deplasează aceste proiecții pînă în D_2,

— din vîrful acestor proiecții se ridică perpendiculare pe direcțiile lor, iar intersecția celor două perpendiculare determină vîrful lui v_{D_2}.

Cunoscîndu-se vitezele a două puncte dintr-un solid se poate găsi viteza oricărui punct de pe acel solid folosind construcția din figura 1. Într-un mod asemănător se găsește v_{D_1} și deci viteza oricărui punct de pe solidul *1*.

Dacă D_1 și D_2 se aleg astfel încît $D_1 \equiv P_1$ și $D_2 \equiv P_2$ confundate în polul relativ $P_{12} = P_{21}$, atunci construcția se simplifică deoarece în acest caz se determină deodată vitezele egale ale celor două puncte.

Construcția se poate folosi atît pentru cazul cînd polul este permanent, adică cele două corpuri sînt legate prin cuple inferioare de rotație sau de translație, cît și pentru cazul cînd polurile nu sînt permanente, adică cele două corpuri nu sînt legate direct unul cu celălalt. Pentru cuplele de rotație polul corespunde cu poziția cuplei. Pentru cuple de translație polul se află la infinit, pe direcție perpendiculară la direcția de translație, adică dreptele Δ_1 și Δ_2 devin paralele și sînt perpendiculare pe direcția de translație (fig. 4).

Trebuie observat faptul că dacă se cunoaște numai viteza unuia din cele două puncte și proiecția vitezei celuilalt punct pe o direcție oarecare (diferită de paralelă la Δ_2) se poate determina viteza unui punct cuprins în planul corpului la care se cunoaște această proiecție (fig. 5).

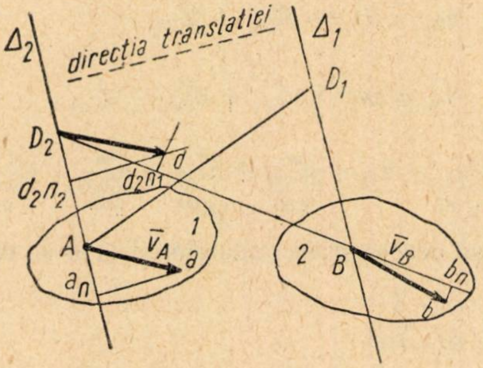


Fig. 4

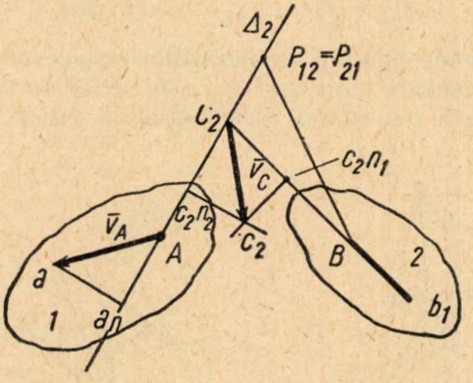


Fig. 5

Construcția grafică se face în felul următor :

— se prelungește proiecția lui v_B pînă întîlnește pe Δ_2 în C_2,

— se construiește v_{C_2}.

După cum se vede problema este rezolvabilă numai pentru un singur punct, și anume acela rezultat din intersecția direcției proiecției cunoscute cu Δ_2. Această construcție va fi folosită la determinarea distribuției de viteze la grupele cinematice formate din șase elemente avînd două conture deformabile.

2.2. DISTRIBUŢIA DE ACCELERAŢII

Dacă considerăm Q_{12} polul relativ al acceleraţiilor, pentru acceleraţiile punctului C în care se confundă C_1 şi C_2 aflate respectiv în solidul *1* şi *2* (fig. 6) se poate scrie :

$$\overline{a}_{C_1} = \overline{a}_{A_1} + \overline{a}^{n}_{C_1A_1} + \overline{a}^{t}_{C_1A_1}, \tag{18}$$

$$\overline{a}_{C_2} = \overline{a}_{B_2} + \overline{a}^{n}_{C_2B_2} + \overline{a}^{t}_{C_2B_2} \tag{19}$$

şi

$$\overline{a}_{C_1} = \overline{a}_{C_2} + \overline{a}^{rn}_{C_1C_2} + \overline{a}^{rt}_{C_1C_2} + \overline{a}^{c}_{C_1C_2}, \tag{20}$$

adică

$$\overline{a}_{C_1} = \underline{\underline{\overline{a}_{A_1}}} + \underset{\parallel AC}{\underline{\underline{\overline{a}^{n}_{C_1A_1}}}} + \underset{\perp AC}{\underline{\overline{a}^{t}_{C_1A_1}}} = \underline{\underline{\overline{a}_{B_2}}} + \underset{\parallel BC}{\underline{\underline{\overline{a}^{n}_{C_2B_2}}}} + \underset{\perp BC}{\underline{\overline{a}^{t}_{C_2B_2}}} + \underset{\parallel QC}{\underline{\underline{\overline{a}^{rn}_{C_1C_2}}}} + \underset{\perp QC}{\underline{\overline{a}^{rt}_{C_1C_2}}} + \underset{\parallel PC}{\underline{\underline{a^{c}_{C_1C_2}}}}. \tag{21}$$

În (21) pe lîngă acceleraţiile punctelor A şi B se mai cunosc :

$$\overline{a}^{n}_{C_1A_1} = -\,\omega_1^2 \cdot \overline{AC}$$

$$\overline{a}^{n}_{C_2B_2} = -\,\omega_2^2 \cdot \overline{BC}$$

$$\overline{a}^{rn}_{C_1C_2} = -(\omega_1 - \omega_2)^2 \cdot \overline{QC}$$

$$\overline{a}^{c}_{C_1C_2} = 2\varpi_2 \times [(\varpi_1 - \varpi_2) \times \overline{PC}] = 2\,(\omega_2^2 - \omega_1\omega_2) \cdot \overline{PC}$$

iar

$$\overline{a}^{rn}_{C_1C_2} + \overline{a}^{c}_{C_1C_2} = -(\omega_1 - \omega_2)^2 \cdot \overline{QC} + 2\,(\omega_2^2 - \omega_1\omega_2) \cdot \overline{PC} =$$

$$= -\,(\omega_1 - \omega_2)^2 \cdot \overline{QP} + (\omega_2^2 - \omega_1^2) \cdot \overline{PC}.$$

După cum se vede calculul acceleraţiilor este ceva mai dificil datorită acceleraţiilor suplimentare cunoscute,care de altfel nu se pot calcula decît dacă în prealabil este cunoscută distribuţia de viteze.

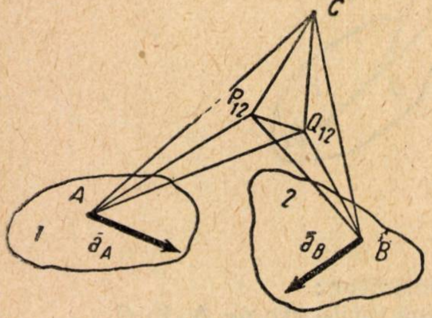


Fig. 6

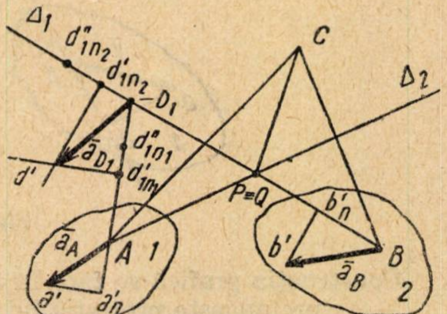


Fig. 7

O simplificare se obţine atunci cînd polurile sînt permanente, în care caz $Q \equiv P$, corespunzînd cuplelor inferioare de rotaţie sau de translaţie (fig. 7).

În acest caz, (21) devine

$$\bar{a}_{C_1} = \underline{\underline{\bar{a}_{A_1}}} + \underset{\parallel AC}{\underline{\underline{\bar{a}^{n}_{C_1A_1}}}} + \underset{\perp AC}{\underline{\bar{a}^{t}_{C_1A_1}}} = \underline{\underline{\bar{a}_{B_2}}} + \underset{\parallel BC}{\underline{\underline{\bar{a}^{n}_{C_2B_2}}}} + \underset{\perp BC}{\underline{\bar{a}^{t}_{C_2B_2}}} + \underset{\parallel P_{12}C}{\underline{\underline{\bar{a}^{rn}_{C_1C_2}}}} + \underset{\perp P_{12}C}{\underline{\bar{a}^{rt}_{C_1C_2}}} + \underset{\parallel P_{12}C}{\underline{\underline{\bar{a}^{c}_{C_1C_2}}}}. \tag{22}$$

Urmînd același raționament ca la viteze, va trebui ca cele trei direcții ale necunoscutelor să se reducă la două, adică două din ele să se confunde. Acest lucru se întîmplă pentru dreptele Δ_2 și Δ_1 determinate prin unirea punctelor A_1 și B_2 cu $P \equiv Q$. Pentru punctele de pe dreapta Δ_1 avem

$$\bar{a}_{D_1} = \underline{\underline{\bar{a}_{A_1}}} + \underset{\parallel AD}{\underline{\underline{\bar{a}^{n}_{D_1A_1}}}} + \underset{\perp AD}{\underline{\bar{a}^{t}_{D_1A_1}}} = \underline{\underline{\bar{a}_{B_2}}} + \underset{\parallel \Delta_1}{\underline{\underline{\bar{a}^{n}_{D_2B_2} + \bar{a}^{rn}_{D_1D_2} + \bar{a}^{c}_{D_1D_2}}}} + \underset{\perp \Delta_1}{\underline{\bar{a}^{t}_{D_2B_2} + \bar{a}^{rt}_{D_1D_2}}} \tag{23}$$

în care

$$\bar{a}_{D_1A_1} = -\ \omega_1^2 \cdot \overline{AD}_1,$$

$$\bar{a}^{n}_{D_2B_2} + \bar{a}^{rn}_{D_1D_2} + \bar{a}^{c}_{D_1D_2} = -\left[\nu_2\omega_1^2 + (1-\nu_2)\,\omega_2^2\right]\overline{BD}_1,$$

unde

$$\nu_2 = \frac{P_{12}D_1}{BD_1}.$$

Proiectînd prima din ecuațiile (23) pe direcția AD_1, iar pe a doua pe direcția BD_1 termenii conținînd necunoscutele dispar și se poate folosi o construcție grafică care să determine pe $\bar{a}_{D_1}$. Această construcție se face în următoarea ordine (fig. 7):

— se unește B cu polul $P \equiv Q$ obținîndu-se dreapta Δ_1 pe care se localizează punctul D_1,

— se unesc punctele A și D_1,

— se proiectează $\bar{a}_A$ pe AD și $\bar{a}_B$ pe Δ_1 și se deplasează aceste proiecții pe direcțiile lor pînă în D_1,

— din aceste proiecții se scad termenii accelerațiilor cunoscute respectiv egali cu $-\ \omega_1^2\overline{AD}_1$ și $-\left[\nu_2\omega_1^2 + (1-\nu_2)\,\omega_2^2\right]\cdot\overline{BD}_1$,

— din punctele obținute se ridică perpendiculare pe proiecțiile respective găsindu-se astfel vîrful accelerației $\bar{a}_{D_1}$.

Dacă se aleg punctele $D_1 \equiv P_1$ și $D_2 \equiv P_2$ confundate în polul $P \equiv Q$ atunci $\nu_2 = 0$ și deci din proiecțiile accelerațiilor punctelor A și B se scad numai cantitățile $-\ \omega_1^2 \cdot \overline{AP}_{12}$ și respectiv $-\ \omega_2^2 \cdot \overline{BP}_{12}$. Pe de altă parte, în acest caz se obține printr-o singură construcție accelerațiile egale a două puncte situate pe corpurile *1* și *2*, respectiv P_1 și P_2.

Dacă se alege pe dreapta Δ_1 punctul D_1 astfel încît

$$\nu_2 = \frac{\omega_2^2}{\omega_2^2 - \omega_1^2} = \frac{P_{12}D_1}{BD_1}, \tag{24}$$

atunci se va scădea numai de la prima proiecție cantitatea $-\ \omega_1^2 \cdot \overline{AD}_1$ pe cînd cea de-a doua va rămîne cu aceeași valoare.

Atunci cînd cele două solide sînt legate printr-o cuplă de translație polul relativ se află la infinit, deci cele două drepte Δ_1 și Δ_2 devin paralele și sînt perpendiculare pe direcția de translație. În acest caz, $\omega_1 = \omega_2 = \omega$. Construcția grafică este arătată în figura 8. Din cele două proiecții se scad cantitățile respectiv egale cu $-\omega^2 \cdot AD_1$ și $-\omega^2 \cdot BD_1$

La fel ca la viteze, se poate determina accelerația unui punct cînd se cunoaște proiecția accelerației unui punct din acest corp și accelerația unui punct situat pe un al doilea corp. Construcția grafică este arătată în figura 9.

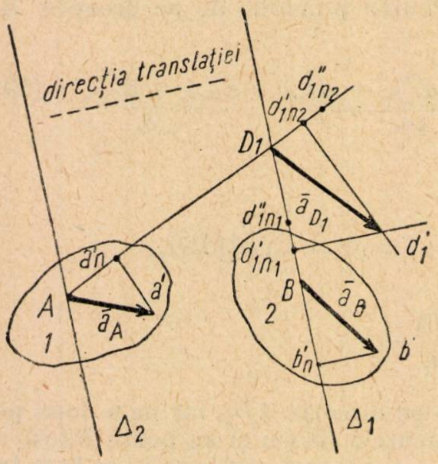


Fig. 8

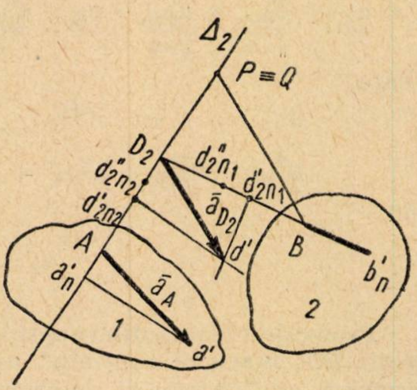


Fig. 9

Și în acest caz problema este rezolvabilă numai pentru un singur punct.

3. STUDIUL CINEMATIC A TREI SOLIDE ÎN MIȘCAREA PLANĂ

3.1. DISTRIBUȚIA DE VITEZE

Se consideră trei solide *1*, *2* și *3* în mișcarea plană la care se cunosc polurile relative ale vitezelor P_{13} și P_{23} precum și vitezele a două puncte A și B aflate respectiv în corpurile *1* și *2*.

Pentru un punct C în care sînt confundate punctele C_1, C_2 și C_3 fiecare legat respectiv de corpurile *1*, *2* și *3*, se poate scrie

$$\bar{v}_{C_1} = \bar{v}_{A_1} + \bar{v}_{C_1A_1}, \tag{25}$$

$$\bar{v}_{C_2} = \bar{v}_{B_2} + \bar{v}_{C_2B_2}, \tag{26}$$

$$\bar{v}_{C_3} = \bar{v}_{C_1} + \bar{v}_{C_3C_1} = \bar{v}_{C_2} + \bar{v}_{C_3C_2}, \tag{27}$$

adică

$$\bar{v}_{C_3} = \underline{\underline{\bar{v}_{A_1}}} + \underset{\perp AC}{\underline{\bar{v}_{C_1A_1}}} + \underset{\perp P_{13}C}{\underline{\bar{v}_{C_3C_1}}} = \underline{\underline{\bar{v}_{B_2}}} + \underset{\perp BC}{\underline{\bar{v}_{C_2B_2}}} + \underset{\perp P_{23}C}{\underline{\bar{v}_{C_3C_2}}}. \tag{28}$$

Se pune condiția ca cele patru direcții ale necunoscutelor din (28) să se reducă la două, adică să se confunde două cîte două. Aceasta se întîmplă atunci cînd dreptele AC și BC trec respectiv prin P_{13} și P_{23} (fig. 10). În acest caz, (28) devine

$$\overline{v}_{D_3} = \underline{\underline{\overline{v}_{A_1}}} + \underbrace{\overline{v}_{D_1A_1} + \overline{v}_{D_3D_1}}_{\perp \Delta_{13}} = \underline{\underline{\overline{v}_{B_2}}} + \underbrace{\overline{v}_{D_2B_2} + \overline{v}_{D_3D_2}}_{\perp \Delta_{23}}. \tag{29}$$

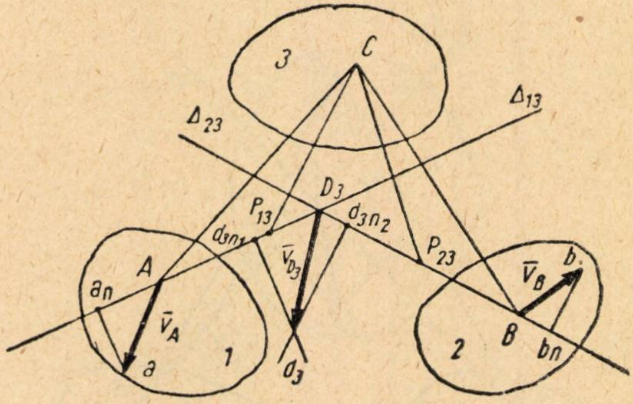


Fig. 10

După cum se vede, problema este rezolvabilă pentru un singur punct D_3 aflat pe corpul *3*, la intersecția dreptelor $\Delta_{13} = A_1P_{13}$ și $\Delta_{23} = B_2P_{23}$. Construcția grafică este următoarea :

— se unește A cu P_{13} și B cu P_{23}, intersecția lor determinînd D_3,

— se proiectează v_A pe AD_3 și v_B pe BD_3 și se deplasează aceste proiecții pe direcțiile lor pînă în D_3,

— din punctele obținute se ridică perpendiculare a căror intersecție determină vîrful lui v_{D_3}.

Punctul D_3 astfel determinat corespunde cu punctul lui Assur.

Dacă se cunoaște și polul relativ P_{12}, aflat bineînțeles pe dreapta $P_{13}P_{23}$, atunci se pot afla direct distribuțiile de viteze pe acele corpuri.

3.2. DISTRIBUȚIA DE ACCELERAȚII

Considerînd numai cazul polurilor permanente cînd polul vitezelor corespunde cu polul accelerației, adică $P \equiv Q$, (fig. 11) putem scrie

$$\overline{a}_{C_1} = \overline{a}_{A_1} + \overline{a}^{n}_{C_1A_1} + \overline{a}^{t}_{C_1A_1}, \tag{30}$$

$$\overline{a}_{C_2} = \overline{a}_{B_2} + \overline{a}^{n}_{C_2B_2} + \overline{a}^{t}_{C_2B_2} \tag{31}$$

și

$$\overline{a}_{C_3} = \overline{a}_{C_2} + \overline{a}^{rn}_{C_3C_2} + \overline{a}^{rt}_{C_3C_2} + \overline{a}^{c}_{C_3C_2} = \overline{a}_{C_1} + \overline{a}^{rn}_{C_3C_1} + \overline{a}^{rt}_{C_3C_1} + \overline{a}^{c}_{C_3C_1}. \tag{32}$$

Înlocuind se obţine

$$\bar{a}_{C_3} = \underline{\underline{\bar{a}_{B_2}}} + \underset{\parallel BC}{\underline{\underline{\bar{a}^{n}_{C_2B_2}}}} + \underset{\perp BC}{\underline{\bar{a}^{t}_{C_2B_2}}} + \underset{\parallel P_{23}C}{\underline{\underline{\bar{a}^{rn}_{C_3C_2}}}} + \underset{\perp P_{23}C}{\underline{\bar{a}^{rt}_{C_3C_2}}} + \underset{\parallel P_{23}C}{\underline{\underline{\bar{\sigma}^{c}_{C_3C_2}}}} =$$

$$= \underline{\underline{\bar{a}_{A_1}}} + \underset{\parallel AC}{\underline{\underline{\bar{a}^{n}_{C_1A_1}}}} + \underset{\perp AC}{\underline{\bar{a}^{t}_{C_1A_1}}} + \underset{\parallel P_{13}C}{\underline{\underline{\bar{a}^{rn}_{C_3C_1}}}} + \underset{\perp P_{13}C}{\underline{\bar{a}^{rt}_{C_3C_1}}} + \underset{\parallel P_{13}C}{\underline{\underline{\bar{a}^{c}_{C_3C_1}}}}. \tag{33}$$

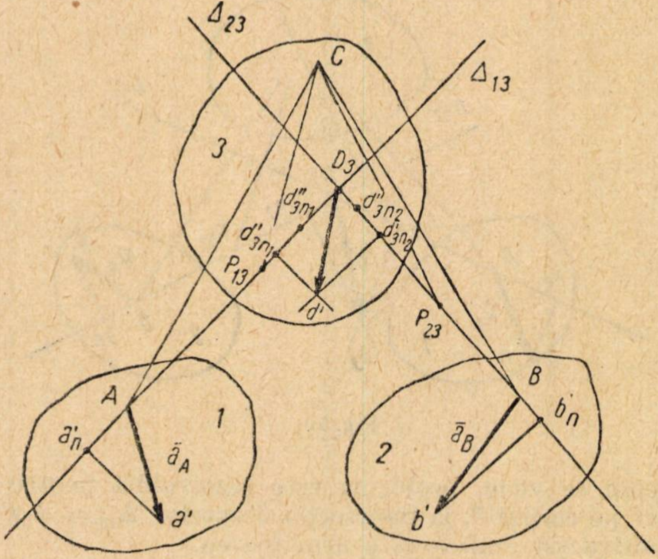


Fig. 11

Pentru ca cele 4 direcţii după care acţionează necunoscutele din (33) să se reducă la 2 este necesar ca dreptele AC şi BC să treacă respectiv prin P_{13} şi P_{23}. În acest caz, (33) devine

$$\bar{a}_{D_3} = \underline{\underline{\bar{a}_{B_2}}} + \underset{\parallel \Delta_{23}}{\underline{\underline{\bar{a}^{n}_{D_2B_2} + \bar{a}^{rn}_{D_3D_2} + \bar{a}^{c}_{D_3D_2}}}} + \underset{\perp \Delta_{23}}{\underline{\bar{a}^{t}_{D_2B_2} + \bar{a}^{rt}_{D_3D_2}}} =$$

$$= \underline{\underline{\bar{a}_{A_1}}} + \underset{\parallel \Delta_{13}}{\underline{\underline{\bar{a}^{n}_{D_1A_1} + \bar{a}^{rn}_{D_3D_1} + \bar{a}^{c}_{D_3D_1}}}} + \underset{\perp \Delta_{13}}{\underline{\bar{a}^{t}_{D_1A_1} + \bar{a}^{rt}_{D_3D_1}}},$$

unde

$$\bar{a}^{n}_{D_2B_2} + \bar{a}^{rn}_{D_3D_2} + \bar{a}^{c}_{D_3D_2} = -\left[\nu_2\omega_3^2 + (1-\nu_2)\,\omega_2^2\right]\cdot\overline{BD}_3,$$

$$\bar{a}^{n}_{D_1A_1} + \bar{a}^{rn}_{D_3D_1} + \bar{a}^{c}_{D_3D_1} = -\left[\nu_1\omega_3^2 + (1-\nu_1)\,\omega_1^2\right]\cdot\overline{AD}_3,$$

în care

$$\nu_1 = \frac{P_{13}D_3}{AD_3}, \qquad \nu_2 = \frac{P_{23}D_3}{BD_3}.$$

Rezultă următoarea construcție grafică:

— se unește A_1 cu P_{13} și B_2 cu P_{23} iar la intersecția celor două drepte se găsește punctul D_3,

— se proiectează $\bar{a}_A$ pe AD_3 și $\bar{a}_B$ pe BD_3 și se deplasează aceste proiecții pe direcțiile lor pînă în D_3,

— din mărimile acestor proiecții se scad termenii $-[\nu_1\omega_3^2 + (1 - \nu_1)\omega_1^2]\,\overline{AD_3}$ și respectiv $-[\nu_2\omega_3^2 + (1 - \omega_2)\omega_2^2]\cdot\overline{BD_3}$ iar prin punctele obținute se ridică perpendiculare pe AD_3 și BD_3. Intersecția celor două perpendiculare determină vîrful lui $\bar{a}_{D_3}$.

Dacă se cunoaște și polul relativ P_{12} atunci distribuția de accelerații se află direct determinînd mai întîi distribuția de accelerații de pe corpurile *1* și *2* utilizînd construcția din figura 7, apoi se determină distribuția de accelerații de pe corpul *3*.

4. STUDIUL CINEMATIC A PATRU SOLIDE ÎN MIȘCAREA PLANĂ

4.1. DISTRIBUȚIA DE VITEZE

Se consideră 4 solide în mișcarea plană la care se cunosc polurile relative ale vitezelor P_{14}, P_{23}, P_{34}, precum și vitezele a două puncte A și B situate în corpurile *1* și *2* (fig. 12).

Pentru punctul C în care se confundă C_1, C_2, C_3 și C_4 se poate scrie

$$\bar{v}_{C_2} = \underline{\underline{\bar{v}_{A_1}}} + \underset{\perp AC}{\underline{\bar{v}_{C_1A_1}}} + \underset{\perp P_{12}C}{\underline{\bar{v}_{C_2C_1}}} = \underline{\underline{\bar{v}_{B_4}}} + \underset{\perp BC}{\underline{\bar{v}_{C_4B_4}}} + \underset{\perp P_{34}C}{\underline{\bar{v}_{C_3C_4}}} + \underset{\perp P_{23}C}{\underline{\bar{v}_{C_2C_3}}} \tag{34}$$

sau

$$\bar{v}_{C_3} = \bar{v}_{A_1} + \bar{v}_{C_1A_1} + \bar{v}_{C_2C_1} + \bar{v}_{C_3C_2} = \bar{v}_{B_4} + \bar{v}_{C_4B_4} + \bar{v}_{C_3C_2}. \tag{35}$$

După cum se vede din (34) și (35) și figura 12, necunoscutele sînt dirijate după cinci direcții AC, $P_{12}C$, $P_{23}C$, $P_{34}C$, BC, care pentru rezolvare trebuie să se reducă la două. Acest lucru se poate realiza pentru punctul D_2 aflat la intersecția dreptelor $\Delta_{12} = A_1P_{12}$ și $\Delta_{234} = P_{23}P_{34}\,(B_4')$ sau pentru punctul D_3 aflat la intersecția dreptelor $\Delta_{123} = P_{12}P_{23}\,(A_1')$ și $\Delta_{34} = B_4P_{34}$:

$$\bar{v}_{D_2} = \underline{\underline{\bar{v}_{A_1}}} + \underset{\perp \Delta_{12}}{\underline{\bar{v}_{D_1A_1} + \bar{v}_{D_2D_1}}} = \underline{\underline{\bar{v}_{B_4}}} + \underset{\perp \Delta_{234}}{\underline{\bar{v}_{D_4B_4} + \bar{v}_{D_3D_4} + \bar{v}_{D_2D_3}}} \tag{36}$$

sau

$$v_{D_3} = \underline{\underline{\bar{v}_{A_1}}} + \underset{\perp \Delta_{123}}{\underline{v_{D_1A_1} + \bar{v}_{D_2D_1} + \bar{v}_{D_3D_2}}} = \underline{\underline{\bar{v}_{B_4}}} + \underset{\perp \Delta_{34}}{\underline{v_{D_4B_4} + v_{D_3D_2}}}. \tag{37}$$

În afară de situațiile de mai sus, trebuie să se mai cunoască viteza punctului B_4' din corpul *4* aflat pe dreapta Δ_{234}, sau pentru al doilea caz viteza punctului A_1' din corpul *1* aflat pe dreapta Δ_{123}. Acest lucru este totdeauna posibil dacă se cunoaște distribuția de viteze în corpul *4* pentru primul caz, sau distribuția de viteze pentru corpul *1* în al doilea caz. De altfel problema se reduce la calculul distribuției de viteze pentru trei corpuri, întrucît dacă se cunoaște distribuția de viteze într-unul din corpuri (fie *1*, fie *4*), se pot afla vitezele punctelor P_1 și P_2 confundate în P_{12}, sau vitezele punctelor P_3 și P_4 confundate în P_{34}.

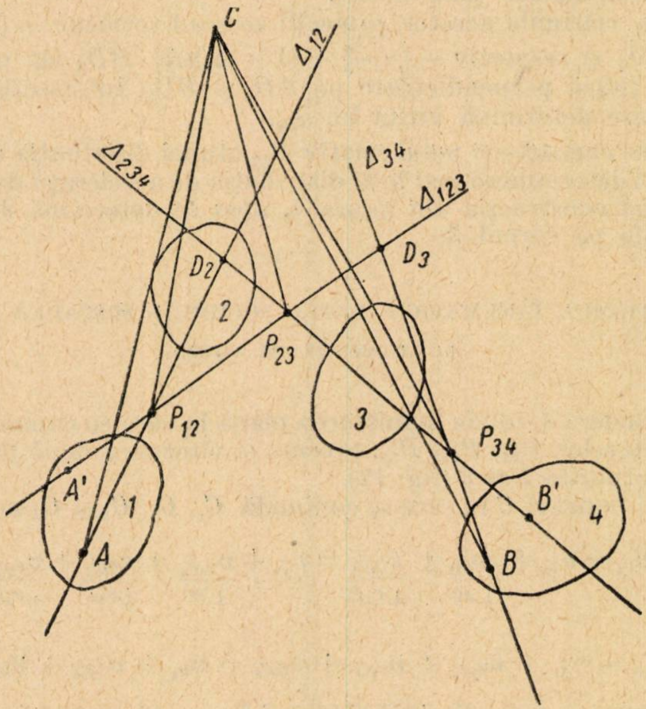


Fig. 12

Trebuie observat că toate punctele de pe dreapta Δ_{12} (sau Δ_{234}, Δ_{123}, Δ_{34}), aparținînd elementelor *1* sau *2*, au aceeași proiecție a vitezelor pe dreapta respectivă Δ_{12}.

4.2. DISTRIBUȚIA DE ACCELERAȚII

Considerînd numai polurile permanente, pentru un punct C se poate scrie asemănător

$$\begin{aligned}\bar{a}_{C_2} &= \bar{a}_{A_1} + \bar{a}^{n}_{C_1A_1} + \bar{a}^{t}_{C_1A_1} + \bar{a}^{rn}_{C_2C_1} + \bar{a}^{rt}_{C_2C_1} + \bar{a}^{c}_{C_2C_1} = \\ &= \bar{a}_{B_4} + \bar{a}^{n}_{C_4B_4} + \bar{a}^{t}_{C_4B_4} + \bar{a}^{rn}_{C_3C_4} + a^{rt}_{C_3C_4} + \bar{a}^{c}_{C_3C_4} + \bar{a}^{rn}_{C_2C_3} + \bar{a}^{rt}_{C_2C_3} + \bar{a}^{c}_{C_2C_3}, \qquad (38)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{a}_{C_3} &= \bar{a}_{A_1} + \bar{a}^{n}_{C_1A_1} + \bar{a}^{t}_{C_1A_1} + \bar{a}^{rn}_{C_2C_1} + \bar{a}^{rt}_{C_2C_1} + \bar{a}^{c}_{C_2C_1} + \bar{a}^{rn}_{C_3C_2} + \bar{a}^{rt}_{C_3C_2} + \bar{a}^{c}_{C_3C_2} = \\ &= \bar{a}_{B_4} + \bar{a}^{n}_{C_4B_4} + \bar{a}_{C_4B_4} + \bar{a}^{rn}_{C_3C_4} + \bar{a}^{rt}_{C_3C_4} + \bar{a}^{c}_{C_3C_4}. \qquad (39)\end{aligned}$$

Problema accelerațiilor se poate rezolva în aceleași condiții ca la viteze, cu deosebirea modificării proiecțiilor din cauza termenilor cunoscuți suplimentari, distribuția de viteze fiind dată. Într-adevăr,

$$\bar{a}_{D_3} = \underline{\underline{\bar{a}_{A_1}}} + \underbrace{\underline{\underline{\bar{a}^{n}_{D_1A_1} + \bar{a}^{rn}_{D_2D_1} + \bar{a}^{c}_{D_2D_1}}}}_{\parallel \Delta_{12}} + \underbrace{\bar{a}^{t}_{D_1A_1} + \bar{a}^{rt}_{D_2D_1}}_{\perp \Delta_{12}} =$$

$$= \underline{\underline{\bar{a}_{B_4}}} + \underbrace{\underline{\underline{\bar{a}^{n}_{D_4B_4} + \bar{a}^{rn}_{D_3D_4} + \bar{a}^{c}_{D_3D_4} + \bar{a}^{rn}_{D_2D_3} + \bar{a}^{c}_{D_2D_3}}}}_{\parallel \Delta_{234}} + \underbrace{\bar{a}^{t}_{D_4B_4} + \bar{a}^{rt}_{D_3D_4} + \bar{a}^{rt}_{D_2D_3}}_{\perp \Delta_{234}}, \tag{40}$$

$$\bar{a}_{D_3} = \underline{\underline{\bar{a}_{A_1}}} + \underbrace{\underline{\underline{\bar{a}^{n}_{D_1A_1} + \bar{a}^{rn}_{D_2D_1} + \bar{a}^{c}_{D_2D_1} + \bar{a}^{rn}_{D_3D_2} + \bar{a}^{c}_{D_3D_2}}}}_{\parallel \Delta_{123}} + \underbrace{\bar{a}^{t}_{D_1A_1} + \bar{a}^{rt}_{D_2D_1} + \bar{a}^{rt}_{D_3D_2}}_{\perp \Delta_{123}} =$$

$$= \underline{\underline{\bar{a}_{B_4}}} + \underbrace{\underline{\underline{\bar{a}^{n}_{D_4B_4} + \bar{a}^{rn}_{D_3D_4} + \bar{a}^{c}_{D_3D_4}}}}_{\parallel \Delta_{34}} + \underbrace{\bar{a}^{t}_{D_4B_4} + \bar{a}^{rt}_{D_3D_4}}_{\perp \Delta_{34}}. \tag{41}$$

Pe dreapta Δ_{12} termenul cunoscut suplimentar este

$$\bar{a}^{n}_{D_1A_1} + \bar{a}^{rn}_{D_2D_1} + \bar{a}^{c}_{D_2D_1} = -\,\omega_1^2\overline{AD} - (\omega_2^2 - \omega_1^2)\overline{P_{12}D} = -\,\omega_1^2\overline{AP_{12}} - \omega_2^2\overline{P_{12}D}.$$

Pe dreapta Δ_{234} termenul cunoscut suplimentar este

$$\bar{a}^{n}_{D_4B_4} + \bar{a}^{rn}_{D_3D_4} + \bar{a}^{c}_{D_3D_4} + \bar{a}^{rn}_{D_2D_3} + \bar{a}^{c}_{D_2D_3} = -\,\omega_4^2\overline{BD} - (\omega_3^2 - \omega_4^2)\overline{P_{34}D} -$$

$$-(\omega_2^2 - \omega_3^2)\overline{P_{23}D} = -\,\omega_4^2\overline{P_{34}B} - \omega_3^2\overline{P_{34}P_{23}} - \omega_2^2\overline{P_{23}D}.$$

Asemănător se găsesc termenii suplimentari cunoscuți pentru dreptele Δ_{123} sau Δ_{34}.

5. STUDIUL CINEMATIC A CINCI SOLIDE ÎN MIȘCAREA PLANĂ

5.1. DISTRIBUȚIA DE VITEZE

Considerînd cinci solide în mișcarea plană la care se cunosc polurile relative P_{12}, P_{23}, P_{34}, P_{35}, problema vitezelor este rezolvabilă pentru punctul D_3 situat la intersecția dreptelor $\Delta_{123} = P_{12}P_{23}(A)$ și $\Delta_{345} = P_{34}P_{45}(B)$, cu condiția ca punctele A_1 și B_5 situate în corpurile *1* și *5* ale căror viteze sînt cunoscute, să se afle pe aceste drepte (Δ_{123}, Δ_{345}).

Desigur acest lucru este posibil totdeauna cînd se cunoaște distribuția de viteze pe corpurile *1* și *5*, în care caz problema se poate reduce la cazul mișcării a trei corpuri, deoarece se pot cunoaște vitezele punctelor P_1 și P_2 confundate în P_{12} și ale punctelor P_4 și P_5 confundate în P_{45}. Toate punctele de pe dreapta Δ_{123} (sau Δ_{345}) aparținînd corpurilor *1*, *2* sau *3*, au aceleași proiecții ale vitezelor pe dreapta respectivă, ceea ce conduce la construcția grafică asemănătoare cazurilor anterioare.

5.2. DISTRIBUŢIA DE ACCELERAŢII

Pentru polurile permanente P_{12}, P_{23}, P_{34}, P_{45} problema acceleraţiilor se poate rezolva în aceleaşi condiţii ca la viteze, cu observaţia menţionată anterior, a modificării proiecţiilor pe dreptele Δ_{123} şi Δ_{234} din cauza termenilor cunoscuţi suplimentari, adică

pe dreapta Δ_{123}

$$\Delta_{123} = - \omega_1^2 \overline{AP_{12}} - \omega_2^2 \overline{P_{12}P_{23}} - \omega_2^2 \overline{P_{23}D};$$

pe dreapta Δ_{345}

$$\Delta_{345} = - \omega_5^2 \overline{BP_{15}} - \omega_4^2 \overline{P_{45}P_{34}} - \omega_3^2 \overline{P_{34}D}.$$

II. STUDIUL GRUPELOR CINEMATICE PRIN METODA PROIECŢIILOR

În cele ce urmează este prezentat modul cum sînt aplicate consideraţiile teoretice expuse mai sus la determinarea distribuţiei de viteze şi de acceleraţii la grupele cinematice. Calculul este făcut pentru grupe începînd cu cele mai simple, formate din două elemente, pînă la grupe cinematice formate din şase elemente avînd atît cuple de rotaţie cît şi cuple de translaţie. Au fost luate în considerare numai grupele care nu se descompun din punct de vedere cinematic.

6. DETERMINAREA DISTRIBUŢIEI DE VITEZE

6.1. GRUPE CINEMATICE FORMATE DIN DOUĂ ELEMENTE ŞI TREI CUPLE

La aceste grupe cinematice se cunosc, în general, fie viteza unui punct din planele care compun grupa, fie distribuţia de viteze a ghidajelor pe care se mişcă cuplele de translaţie. Pentru a găsi distribuţia de viteze a grupei este necesară cunoaşterea încă a unui parametru scalar din cei arătaţi la 1.1 (atunci cînd se cunoaşte viteza unui punct) sau cunoaşterea vitezei unui punct (cînd se cunoaşte numai distribuţia de viteze a ghidajului). În cazurile practice, aşa cum se va vedea şi în construcţiile grafice de mai jos, se determină viteza unui alt punct cu una din construcţiile arătate mai sus, apoi se determină distribuţia de viteze folosind figura 1.

1°. Grupa de clasa a II-a, aspect 1 (fig. 13). Se cunosc $\bar{v}_A$, $\bar{v}_B$.

Construcţia grafică se face în următoarea ordine :

— se uneşte A şi B cu $P_{12} = P_{21}$ obţinîndu-se dreptele Δ_2 şi Δ_1,

— folosind construcţia din figura 3 se găsesc $\bar{v}_{C_1} = \bar{v}_{C_2} = \bar{v}_C$.

2°. Grupa de clasa a II-a, aspect 2 (fig. 14). Se cunosc $\bar{v}_A$ şi distribuţia de viteze din planul *3*.

— se uneşte A cu $P_{12} = P_{21}$ rezultînd dreapta Δ_2,

— prin C se duce o perpendiculară la direcţia $x - x$ obţinîndu-se dreapta Δ_3. Pe această dreaptă se consideră punctul D_3 a cărui viteză $\bar{v}_{D_3}$ se cunoaşte,

— se construiesc $\bar{v}_{C_1} = \bar{v}_{C_2} = \bar{v}_C$.

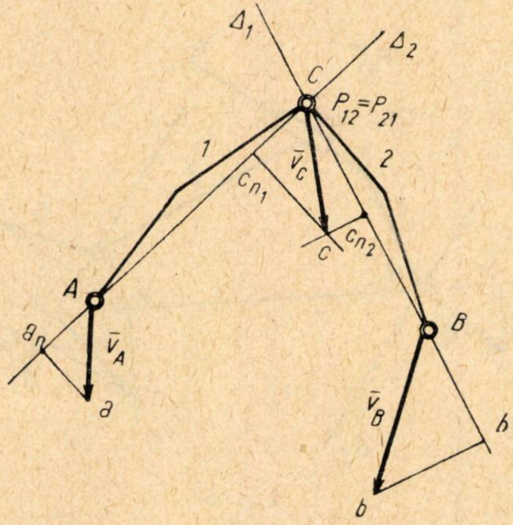

Δ1
Δ2
C
P12=P21
1
2
v̄C
cn1
cn2
c
A
B
an
v̄A
a
v̄B
b
b

Fig. 13

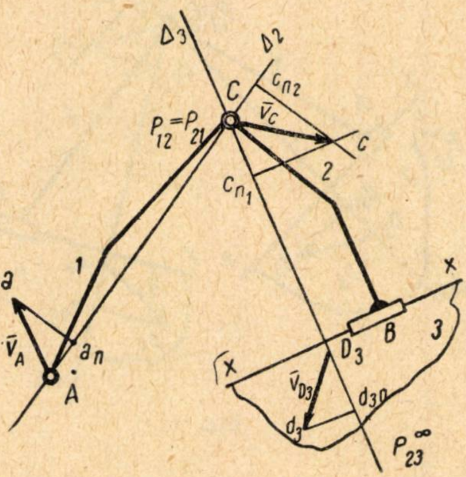

Δ3
Δ2
C
cn2
P12=P21
v̄C
c
2
cn1
1
a
x
v̄A
an
A
B
3
D3
x
v̄D3
d3n
d3
P23∞

Fig. 14

Un caz particular este atunci cînd D_3 coincide cu C. Atunci, din vîrful vitezei $\bar{v}_{C_3}$ se duce o paralelă la direcţia $x - x$ care intersectîndu-se cu dreapta $c_{n_2}c$ determină vîrful vitezei $\bar{v}_C$.

3°. Grupa de clasa a II-a, aspect 3 (fig. 15). Se cunosc $\bar{v}_A$, $\bar{v}_B$.

— prin A și B se duc dreptele Δ_2 și Δ_1 perpendiculare pe direcția $x-x$,

— se unește A cu un punct oarecare D_1 de pe dreapta Δ_1,

— se construiește v_{D_1} folosind construcția din figura 4.

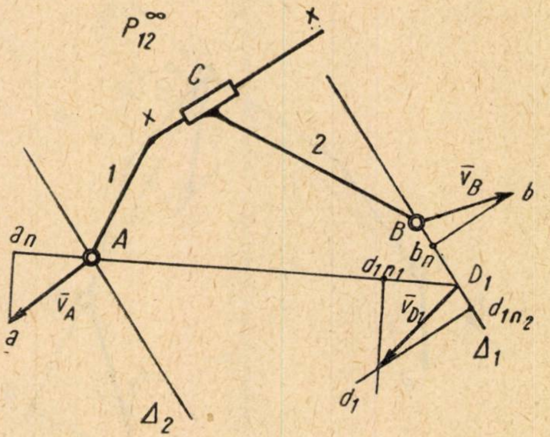

P_{12}^{∞}
x
C
x
2
1
$\bar{v}_B$
b
B
a_n
A
b_n
d_{1n_1}
D_1
$\bar{v}_{D_1}$
d_{1n_2}
$\bar{v}_A$
a
Δ_1
d_1
Δ_2

Fig. 15

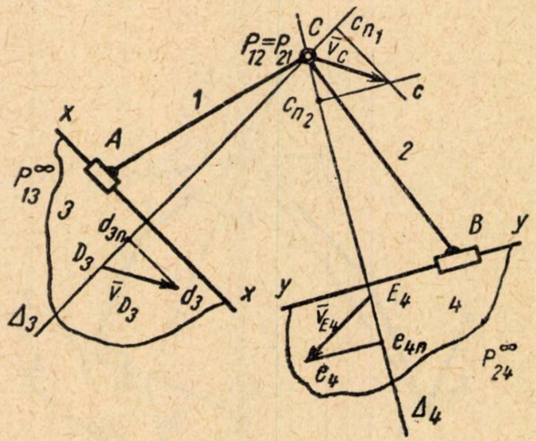

C
c_{n_1}
$P_{12}=P_{21}$
$\bar{v}_C$
c
1
c_{n_2}
x
A
2
P_{13}^{∞}
3
d_{3n}
D_3
B
y
$\bar{v}_{D_3}$
d_3
x
y
E_4
4
$\bar{v}_{E_4}$
e_{4n}
P_{24}^{∞}
e_4
Δ_3
Δ_4

Fig. 16

Caz particular : D_1 și B coincid. Atunci, din vîrful vitezei v_B se duce o paralelă la direcția $x-x$ pînă intersectează dreapta $d_{1n_1}d_1$ obținîndu-se vîrful vitezei v_{B_1}.

4°. Grupa de clasa a II-a, aspect 4 (fig. 16). Se cunosc distribuțiile de viteze din planele *3* și *4*.

— Din punctul C se duc dreptele Δ_3 şi Δ_4 perpendiculare pe direcţiile $x-x$ şi respectiv $y-y$, iar pe aceste drepte se localizează punctele D_3 şi E_4 ale căror viteze $\bar{v}_{D_3}$ şi $\bar{v}_{E_4}$ se cunosc,

— se construiesc $\bar{v}_{C_1} = \bar{v}_{C_2} = \bar{v}_C$.

Caz particular : punctele D_3 şi E_4 coincid cu C. În acest caz, din vîrful vitezelor $\bar{v}_{C_3}$ şi $\bar{v}_{C_4}$ care se cunosc se duc paralele respectiv la direcţiile $x-x$ şi $y-y$, intersecţia lor determinînd vîrful vitezei $\bar{v}_C$.

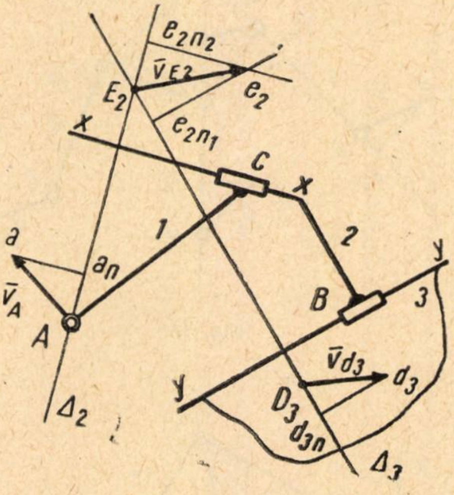


Fig. 17

5°. Grupa de clasa a II-a, aspect 5 (fig. 17). Se cunosc $\bar{v}_A$ şi distribuţia de viteze din planul *3*.

— Din A se duce dreapta Δ_2 perpendiculară pe $x-x$,

— prin D_3 a cărui viteză se cunoaşte se duce Δ_3 perpendiculară pe $y-y$. La intersecţia lor se află E_2,

— se construieşte $\bar{v}_{E_2}$.

Caz particular : Δ_3 trece prin A şi deci E_2, D_3 şi A se confundă. În acest caz, din vîrfurile vitezelor $\bar{v}_{A_3}$ şi $\bar{v}_{A_1}$ se duc paralele respectiv la $y-y$ şi $x-x$ care intersectîndu-se determină vîrful vitezei $\bar{v}_{A_2}$.

6.2. GRUPE CINEMATICE FORMATE DIN PATRU ELEMENTE ŞI ŞASE CUPLE

1°. Grupa cinematică de clasa a III-a, ordinul 3, avînd numai cuple de rotaţie (fig. 18). Se cunosc $\bar{v}_A$, $\bar{v}_B$, $\bar{v}_C$.

— Se uneşte A cu P_{14} şi B cu P_{24}, intersecţia celor două drepte determinînd punctul S_4,

— se determină viteza $\bar{v}_{S_4}$ folosind construcţia din figura 7,

— cu ajutorul lui $\bar{v}_{S_4}$ şi $\bar{v}_C$ se găseşte $\bar{v}_F$.

2°. Grupa cinematică de clasa a III-a, ordinul 3, avînd cuple de rotaţie şi de translaţie (fig. 19). Se cunosc $\bar{v}_A$, $\bar{v}_C$ şi distribuţia de viteze din planul *5*.

— Din A se duce o perpendiculară pe $x-x$,

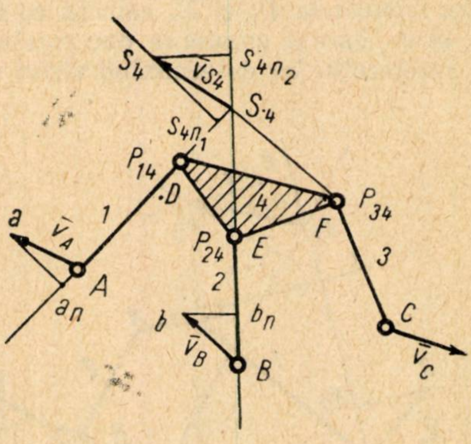

S4
v̄S4
S4n2
S·4
S4n1
P14
·D
1
a
v̄A
A
an
4
P24
E
F
P34
3
2
b
bn
v̄B
B
C
v̄C

Fig. 18

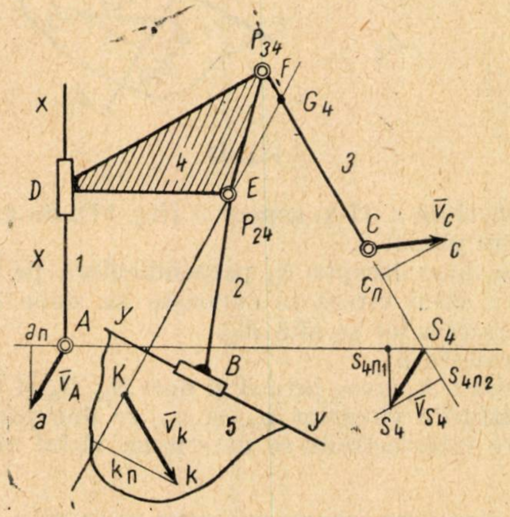

P34
F
G4
x
D
4
E
3
P24
C
v̄C
c
x
1
2
cn
an
A
y
S4
K
B
S4n1
S4n2
v̄A
a
v̄K
5
y
S4
v̄S4
kn
k

Fig. 19

— se uneşte C cu P_{34}, iar intersecţia acestei drepte cu perpendiculara din A determină punctul S_4,

— se uneşte S_4 cu P_{34},

— prin E se duce o perpendiculară pe $y-y$. Intersecţia ei cu S_4P_{34} determină punctul G_4,

— se construiesc $\bar{v}_{S_4}$ şi $\bar{v}_{G_4}$.

3°. Grupa cinematică de clasa a IV-a, ordinul 2 (fig. 20). Se cunosc $\bar{v}_A$, $\bar{v}_D$.

— Se găsește P_{13} la intersecția dreptelor $P_{14}P_{34}$ și $P_{21}P_{23}$,

— se unește A și B cu P_{13},

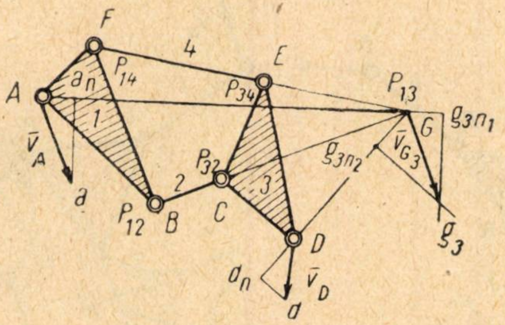


Fig. 20

— se construiește $v_{G_3} = v_{G_1}$.

După cum se vede, construcția nu mai este posibilă dacă polul P_{13} se află în afara epurei. În acest caz se poate aplica cu succes metoda pozițiilor false. Într-adevăr, aplicînd metoda proiecției pentru punctele F, B, C și E se vor găsi patru drepte Δ_F, Δ_B, Δ_C, Δ_E pe care se vor găsi vîrfurile vitezelor $\bar{v}_F$, $\bar{v}_B$, $\bar{v}_C$, $\bar{v}_E$. Problema se reduce astfel la a construi un poligon asemenea cu conturul $FBCE$ care să aibă vîrfurile pe dreptele Δ_F, Δ_B, Δ_C, Δ_E și este redată în lucrările [2], [4], [5].

6.3. GRUPE CINEMATICE FORMATE DIN ȘASE ELEMENTE ȘI NOUĂ CUPLE

6.3.1. *Grupe cinematice fără contur poligonal deformabil*

1°. Grupă cinematică de clasa a III-a, ordinul 4, avînd numai cuple de rotație (fig. 21). Se cunosc $\bar{v}_A$, $\bar{v}_B$, $\bar{v}_C$, $\bar{v}_D$.

— Se unește A cu P_{15} și B cu P_{25} obținîndu-se S_5,

— se unește C cu P_{36} și D cu P_{46} obținîndu-se S_6,

— se unesc S_5 și S_6 cu G,

— se construiesc v_{S_5}, v_{S_6}, v_G.

2°. Grupa cinematică de clasa a III-a, ordinul 4, avînd cuple de rotație și cuple de translație (fig. 22). Se cunosc $\bar{v}_A$, $\bar{v}_C$, $\bar{v}_D$ și distribuția de viteze din planul 7 deci și $\bar{v}_L$.

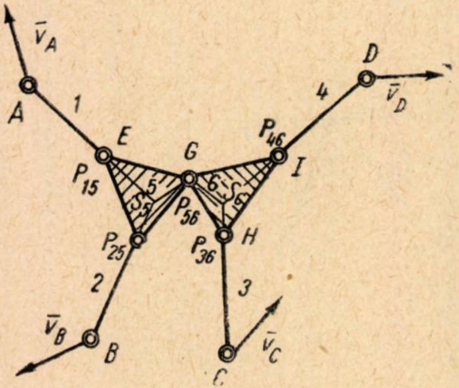
— Se unește A cu P_{15},

— prin F se duce o perpendiculară la direcția $x-x$ pînă întîlnește AP_{15}. Intersecția lor stabilește S_5,

— se uneşte D cu P_{46},

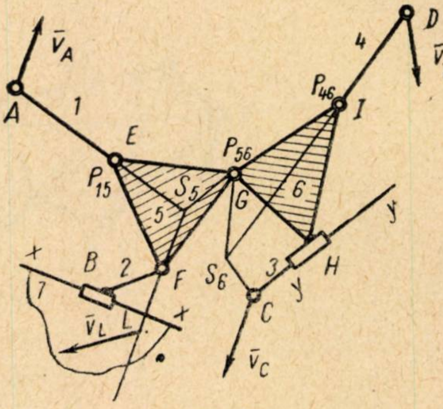
— din C se duce o perpendiculară la direcţia $y-y$ pînă întîlneşte DP_{46}. Intersecţia lor determină S_6,

— se construiesc $\bar{v}_{S_5}$, $\bar{v}_{S_6}$, $\bar{v}_G$.



$\bar{v}_A$
A
1
E
P_{15}
G
5
S_5
P_{25}
2
$\bar{v}_B$
B
P_{56}
6
S_6
P_{46}
I
4
D
$\bar{v}_D$
H
P_{36}
3
C
$\bar{v}_C$

Fig. 21

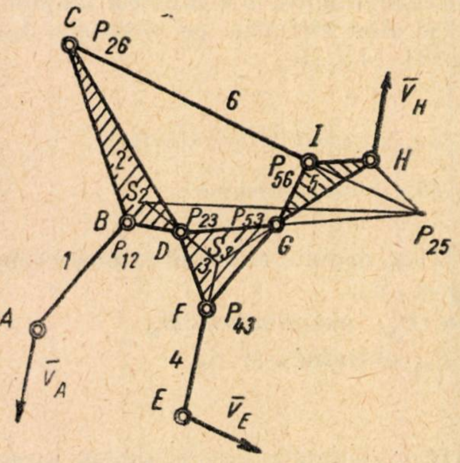


$\bar{v}_A$
A
1
E
P_{15}
5
S_5
x
B
2
7
$\bar{v}_L$
L
x
F
P_{56}
G
S_6
6
P_{46}
I
4
D
$\bar{v}_D$
y
3
H
y
C
$\bar{v}_C$

Fig. 22

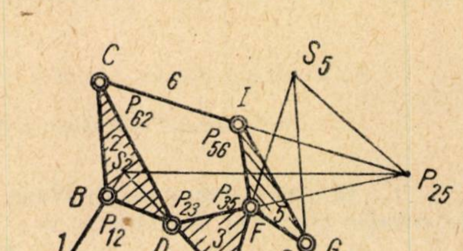
6.3.2. *Grupe cinematice avînd un contur deformabil*

1°. Grupa cinematică de clasa a IV-a, ordinul 3. Aceste grupe cinematice se găsesc sub forma a trei variante în funcţie de poziţia celor doi antrenori, deci vor fi şi trei construcţii grafice. Se cunosc $\bar{v}_A$, $\bar{v}_E$, $\bar{v}_H$.



C
P_{26}
6
$\bar{v}_H$
I
P_{56}
5
H
2
S_2
B
P_{23}
P_{53}
P_{25}
1
P_{12}
D
S_3
3
G
A
F
P_{43}
$\bar{v}_A$
4
E
$\bar{v}_E$

Fig. 23



C
6
S_5
I
P_{62}
P_{56}
2
S_2
P_{25}
B
P_{23}
P_{35}
5
P_{12}
D
3
F
G
1
P_{45}
A
E
4
$\bar{v}_A$
$\bar{v}_E$
H
$\bar{v}_H$

Fig. 24

Aspect 1 (fig. 23):

— se uneşte H cu P_{53} şi E cu P_{43}. La intersecţia lor se găseşte S_3,

— se uneşte S_3 cu P_{23} şi se prelungeşte pînă întîlneşte dreapta AP_{12}. La intersecţia lor se află S_2,

— se determină P_{25} la intersecția dreptelor $P_{26}P_{56}$ și $P_{23}P_{53}$,
— se construiesc $\bar{v}_{S_3}$, $\bar{v}_{S_2}$.
În continuare problema este asemănătoare cu aceea din figura 20.
Aspect 2 (fig. 24):
— se unește A cu P_{12} și E cu P_{23}. La intersecția lor se află S_2,

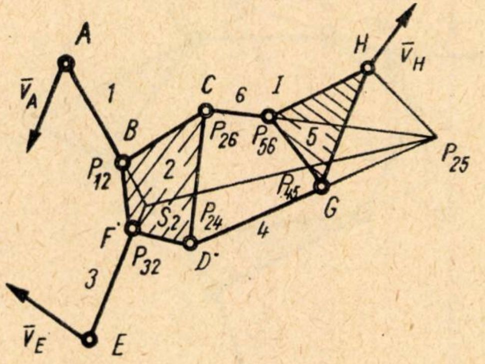

A
$\bar{v}_A$
1
B
P_{12}
C
6
I
P_{26}
P_{56}
5
H
$\bar{v}_H$
P_{25}
2
S_2
P_{24}
P_{45}
G
F
P_{32}
D
4
3
$\bar{v}_E$
E

Fig. 25

— se unește H cu P_{45} și E cu P_{35}. La intersecția lor se găsește S_5,
— se determină P_{25},
— se construiesc $\bar{v}_{S_2}$, $\bar{v}_{S_5}$.
În continuare problema se rezolvă ca aceea din figura 20.
Aspect 3 (fig. 25):
— se unește A cu P_{12} și E cu P_{32}. Intersecția lor determină punctul S_2,
— se determină P_{25} la intersecția dreptelor $P_{26}P_{56}$ și $P_{24}P_{45}$,
— se construiește $\bar{v}_{S_2}$.

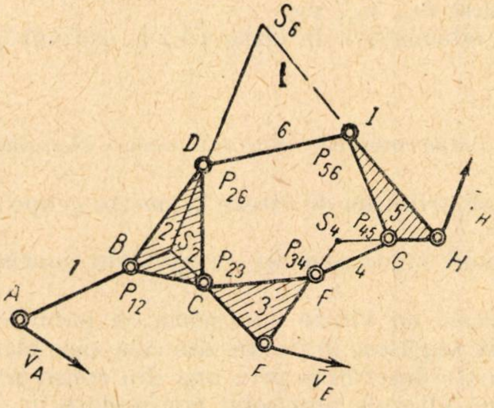

S_6
I
6
D
P_{56}
P_{26}
5
H
S_4
P_{45}
2
S_2
B
P_{23}
P_{34}
G
H
1
4
A
P_{12}
C
F
3
$\bar{v}_A$
F
$\bar{v}_E$

Fig. 26

Construcția continuă apoi ca în figura 20.

2°. Grupa cinematică de clasa V-a, ordinul 3 (fig. 26), și grupa cinematică de clasa a VI-a, ordinul 3 (fig. 27). La aceste grupe care au un singur contur deformabil distribuţia de viteze nu mai poate fi determinată folosind numai construcţiile grafice ale metodei proiecţiilor. Folosind aceste construcţii se poate determina numai viteza unui singur punct din fiecare din cele şase plane. Pentru a găsi distribuţia de viteze ar mai trebui cunoscut încă un parametru scalar din cei trei arătaţi la 1.1. Acest lucru nu este posibil prin această metodă şi de aceea la aceste grupe distribuţia de viteze se poate calcula prin metoda poziţiilor false.

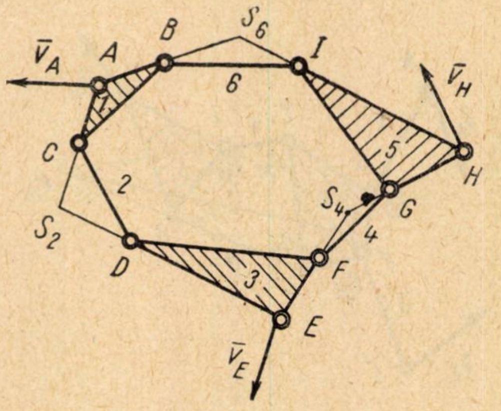


Fig. 27

Determinarea vitezelor $\bar{v}_{S_2}$, $\bar{v}_{S_4}$, $\bar{v}_{S_6}$ se face în următoarea ordine :

— se uneşte A cu P_{12} şi E cu P_{23}. La intersecţia lor se găseşte S_2,

— unind E cu P_{34} şi H cu P_{45} se găseşte S_4 ,

— se uneşte H cu P_{56} şi S_2 cu P_{26} determinîndu-se S_6,

— se construiesc $\bar{v}_{S_2}$, $\bar{v}_{S_4}$, $\bar{v}_{S_6}$.

Pentru grupa cinematică de clasa a VI-a, ordinul 3, construcţia este asemănătoare.

6.3.3. *Grupe cinematice avînd două conture deformabile*

Determinarea distribuţiei de viteze la aceste grupe se face în următoarea ordine :

— se găsesc polii nepermanenţi cu ajutorul conturelor patrulatere deformabile,

— unind punctele cu viteze cunoscute cu polurile permanente ale elementului respectiv se găsesc în fiecare din cele şase plane cîte un punct a cărui viteză se poate determina prin una din construcţiile de mai sus,

— se determină vitezele punctelor confundate în pol,

— folosind construcţia din figura 3 se determină vitezele a cîte două puncte din fiecare plan,

— se determină distribuţia de viteze cu ajutorul construcţiei din figura 1.

1°. Grupa cinematică de clasa a IV-a, ordinul 2. Aceste grupe se găsesc sub forma a două variante. Se cunosc $\bar{v}_A$, $\bar{v}_E$.

Aspect 1 (fig. 28):

— se determină polurile nepermanente P_{46} şi P_{26},

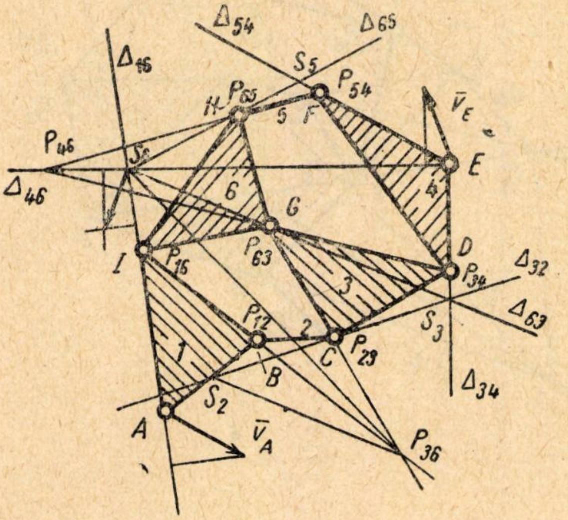

Δ_{54}
Δ_{65}
Δ_{16}
S_5
P_{54}
H
P_{65}
5
F
$\bar{v}_E$
P_{46}
S_6
E
Δ_{46}
6
4
G
D
I
P_{16}
P_{63}
Δ_{32}
P_{34}
3
P_{12}
2
S_3
Δ_{63}
1
C
P_{23}
B
Δ_{34}
S_2
A
$\bar{v}_A$
P_{36}

Fig. 28

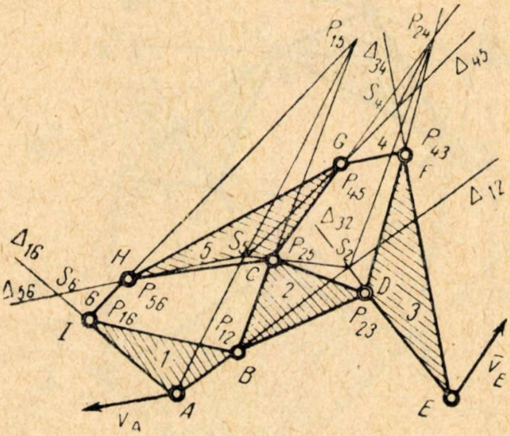

P_{15}
P_{24}
Δ_{34}
Δ_{45}
S_4
G
4
P_{43}
F
P_{45}
Δ_{12}
Δ_{32}
Δ_{16}
H
5
S_5
P_{25}
S_2
C
Δ_{56}
S_6
6
P_{56}
2
D
P_{16}
I
P_{12}
P_{23}
3
1
B
$\bar{v}_E$
v_A
A
E

Fig. 29

— se unesc punctele A şi E, ale căror viteze sînt cunoscute, respectiv cu polii P_{16} şi P_{46} obţinîndu-se dreptele Δ_{16} şi Δ_{46}. La intersecţia lor se află S_6,

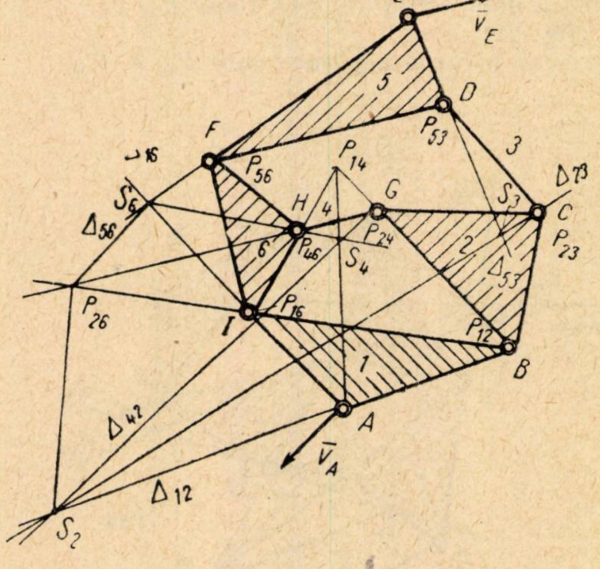

E
$\bar{V}_E$
5
D
P_{53}
3
F
Δ_{16}
P_{56}
P_{14}
G
Δ_{23}
S_3
C
P_{23}
S_6
H
4
Δ_{56}
P_{24}
2
6
P_{46}
S_4
Δ_{53}
P_{26}
P_{16}
I
P_{12}
1
B
Δ_{42}
A
$\bar{V}_A$
Δ_{12}
S_2

Fig. 30

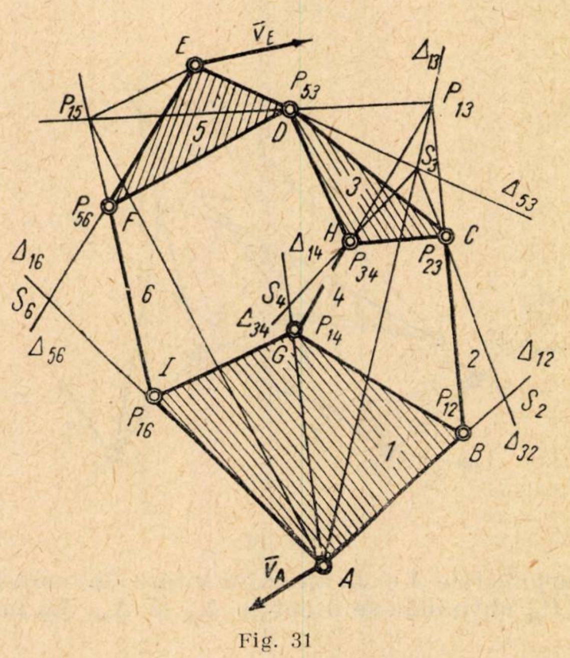

$\bar{V}_E$
E
Δ_{13}
P_{53}
P_{13}
P_{15}
5
D
S_3
Δ_{53}
3
P_{56}
F
H
C
Δ_{14}
P_{34}
P_{23}
Δ_{16}
S_6
6
S_4
4
Δ_{34}
P_{14}
G
Δ_{56}
I
2
Δ_{12}
P_{12}
S_2
P_{16}
1
B
Δ_{32}
$\bar{V}_A$
A

Fig. 31

— se construiește $\bar{v}_{S_6}$,

— folosind același procedeu se determină în ordine S_5, S_3, S_2,

— se construiesc vitezele v_{S_5}, v_{S_3}, v_{S_2} și $v_{P_{26}}$.

Aspect 2 (fig. 29):

— se găsesc P_{15} și P_{24},

— se determină în ordine S_2, S_5, S_6, S_4,

— se construiesc în ordine v_{S_2}, v_{S_5}, v_{S_6}, v_{S_4} și $\bar{v}_{P_{24}}$.

2°. Grupa cinematică de clasa a V-a, ordinul 2 (fig. 30).

— Se găsesc P_{14} și P_{26},

— se determină S_6, S_4, S_2, S_3,

— se construiesc v_{S_6}, v_{S_4}, v_{S_2}, v_{S_3} și $\bar{v}_{P_{26}}$.

Pentru grupa din figura 31 construcția este:

— se găsesc P_{13} și P_{15},

— se determină S_6, S_3, S_4, S_2,

— se construiesc v_{S_6}, v_{S_3}, v_{S_4}, $\bar{v}_{S_2}$ și $\bar{v}_{P_{15}}$.

7. DETERMINAREA DISTRIBUŢIEI DE ACCELERAŢII

Deoarece găsirea polului instantaneu al accelerațiilor este dificilă, aplicabilitatea metodei proiecțiilor la calculul accelerațiilor este mai redusă. Altfel, accelerațiile s-ar determina prin construcții grafice asemănătoare cu cele de la viteze, la care s-ar ține seama de considerațiunile teoretice prezentate în prima parte a lucrării.

Pentru grupele cinematice la care pentru calculul distribuției accelerației se întrebuințează numai polurile permanente, așa cum s-a expus în fundamentarea teoretică a problemei, construcțiile și condițiile de îndeplinit pentru rezolvare sînt aceleași ca la viteze, fapt pentru care nu mai este cazul să se repete figurile.

Deosebirea de bază între calculul accelerațiilor și al vitezelor constă, așa cum am mai observat mai înainte, în modificarea valorii proiecțiilor din cauza apariției termenilor suplimentari cunoscuți, presupunîndu-se date vitezele unghiulare ale corpurilor.

Ca elemente principale ale metodei proiecțiilor, utilizată la determinarea distribuției de viteze și de accelerații în mișcarea relativă plană a mai multor corpuri, trebuie subliniate următoarele:

— punctele aparținînd la două elemente *1* și *2* de pe o dreaptă Δ_{12}, care trece prin polul relativ P_{12} al mișcării, au proiecțiile vitezelor pe direcția dreptei Δ_{12} egale. În cazul accelerațiilor diferă cu termenii cunoscuți suplimentari $-\omega_1^2 A P_{12}$ și $-\omega_2^2 P_{12} C$, pentru polul P_{12} permanent;

— punctele aparținînd la trei elemente *1*, *2* și *3* de pe dreapta Δ_{123}, care trece prin polurile relative P_{12} și P_{23}, au de asemenea proiecțiile vitezelor pe direcția dreptei Δ_{123} egale. Pentru accelerații, dacă polurile sînt permanente, diferența proiecțiilor este datorată termenilor cunoscuți $-\omega_1^2 A P_{12}$, $-\omega_2^2 P_{12} P_{23}$ și $-\omega_3^2 P_{23} C$.

Dacă în studiul lanțurilor cinematice, grupe cinematice sau mecanisme, se întîlnesc perechi de astfel de drepte pe care se găsesc cîte un punct cu viteze sau accelerații cunoscute, atunci determinarea vitezei sau accelerației punctului de intersecție al lor este rezolvabilă prin metoda proiecției. De asemenea, în cursul lucrării s-au arătat și diferite cazuri mai avantajoase sau cu specific propriu în rezolvarea diverselor grupe cinematice.

Din cele expuse mai sus rezultă că metoda proiecției poate fi folosită cu succes la studiul cinematic al mecanismelor complexe. Metoda este ușor de aplicat și în același timp suficient de precisă în cazurile practice. Contribuțiile aduse la prezentarea sa sub o formă unitară generală dezvoltă domeniul său de aplicabilitate.

Primită la redacție la 29 iulie 1963

К МЕТОДУ ПРОЕКЦИЙ, ИСПОЛЬЗОВАННОМУ В КИНЕМАТИКЕ ПЛОСКИХ МЕХАНИЗМОВ

РЕЗЮМЕ

Взяв за основу то свойство, что у некоторого движущегося жесткого тела проекции скоростей двух точек A и B в направлении, их объединяющем, равны между собой, были выведены соотношения, определяющие распределение скоростей и ускорений для одного, двух, трех, четырех и пяти тел в плоском движении. Эти соотношения применялись для нахождения распределений скоростей и ускорений в кинематических группах с 2—6 звеньями, с поступательными и вращательными парами. Таким образом, достигнуто распространение метода проекций от нескольких частных случаев на исследование сложных шестизвенных групп с одним или двумя деформируемыми контурами.

BIBLIOGRAFIE

1. V. VÂLCOVICI, ȘT. BĂLAN, R. VOINEA, *Mecanică teoretică*. Edit. tehnică, București, 1959.
2. * * * *Structura și cinematica mecanismelor*. Edit. tehnică, București, 1959.
3. V. M. FAIRES, *Kinematics*. McGraw-Hill Book Company, New York, 1959.
4. I. I. ARTOBOLEVSKI, *Issledovania slojnih kinematiceskih țepei*. Bul. Inst. politehnic Iași, **VI (X)**, *1–2* (1960).
5. N. I. MANOLESCU, I. ERCEANU, P. ANTONESCU, *Domeniul de aplicabilitate a metodelor de cercetare cinematică a mecanismelor plane articulate*. St. cerc. mec. apl., **XIII**, *6* (1962).
6. HAROLD B. KEPLER, *Basic Graphical Kinematics*. McGraw-Hill Book Company, New York, 1960.
7. N. ROSENAUER, *Kinematics of Mechanisms*. Associated General Publications, Australia, 1953.
8. Г. Г. БАРАНОВ, *Классификация, строение, кинематика и кинетостатика плоских механизмов с парами первого рода*. Труды семинара по теории машин и механизмов, **XII**, *46* (1952).
9. I. I. ARTOBOLEVSKI, *Teoria mecanismelor și a mașinilor*. Edit. tehnică, București, 1955.
10. D. TUTUNARU, GH. LAZARIDE, N. DEMIAN, *Teoria mecanismelor și organe de mașini*. Edit. de Stat didactică și pedagogică, București, 1962, **I**.

STUDII

DETERMINAREA APROXIMATIVĂ A DISTRIBUȚIEI PRESIUNILOR ÎN LAGĂRELE LUBRIFICATE CU GAZE ÎN REGIM TURBULENT

DE

V. N. CONSTANTINESCU

533 : 621.89 : 621.82

În unele lucrări anterioare [1], [2] s-a arătat că ecuația presiunilor pentru lubrificația cu gaze în regim turbulent staționar este

$$\frac{\partial}{\partial \bar{x}}\left(\frac{12\bar{h}^3}{k_x}\bar{p}^{\frac{1}{\varkappa}}\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}}\right)+\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\left(\frac{12\bar{h}^3}{k_z}\bar{p}^{\frac{1}{\varkappa}}\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}}\right)=6H\frac{\partial\left(\bar{p}^{\frac{1}{\varkappa}}\bar{h}\right)}{\partial \bar{x}}, \tag{1}$$

unde p este presiunea, h grosimea stratului de lubrifiant, iar

$$\bar{p}=\frac{p}{p_0}, \qquad \bar{h}=\frac{h}{h_m}, \qquad \bar{x}=\frac{x}{l}, \qquad \bar{z}=\frac{z}{l} \tag{2}$$

mărimile adimensionale corespunzătoare, iar p_0 — presiunea mediului înconjurător și $\varkappa$ — exponentul politropic al evoluției gazului lubrifiant. De asemenea

$$H=\frac{\mu V l}{p_0 h_m^2} \tag{3}$$

unde V este viteza suprafeței mobile, iar

$$\begin{aligned} k_x &= 12+0{,}53R^{\star 0{,}725}\left(\bar{p}^{\frac{1}{\ }}\quad\right)^{0{,}725},\\ k_z &= 12+0{,}296R^{\star 0{,}65}\left(\bar{p}^{\frac{1}{\varkappa}}\bar{h}\right)^{0{,}65}, \end{aligned} \tag{4}$$

în care

$$R^{\star}=k^{\star 2}\mathcal{R}_e^{\star}, \qquad \mathcal{R}_e^{\star}=\frac{\rho_0 V h_m}{\mu}, \tag{5}$$

unde k^* este o constantă care depinde de valoarea absolută a grosimii h ($k^* \cong 0{,}3$).

De asemenea, în lucrările menționate s-a arătat că, întocmai ca și în regim laminar, cînd $H \rightarrow \infty$

$$\frac{\partial\left(\overline{p}^{\frac{1}{\varkappa}}\,\overline{h}\right)}{\partial\overline{x}} \rightarrow 0, \qquad \overline{p}^{\frac{1}{\varkappa}}\overline{h} = k_1 = \text{const.} \tag{6}$$

Din aceste motive, la numere H mari parametrii k_x, k_z (4) devin aproximativ constanți și de aceea, cu ajutorul transformărilor

$$\widetilde{H} = \frac{k_x}{12}H, \qquad \frac{\widetilde{z}}{z} = \frac{\widetilde{\lambda}}{\lambda} = \sqrt{\frac{k_z}{k_x}} \tag{7}$$

ecuația presiunilor se scrie exact sub aceeași formă ca și în regim laminar :

$$\frac{\partial}{\partial\overline{x}}\left(\overline{h}^3\overline{p}^{\frac{1}{\varkappa}}\frac{\partial\overline{p}}{\partial\overline{x}}\right) + \frac{\partial}{\partial\widetilde{\overline{z}}}\left(\overline{h}^3\overline{p}^{\frac{1}{\varkappa}}\frac{\partial\overline{p}}{\partial\widetilde{\overline{z}}}\right) = 6\widetilde{H}\,\frac{\partial\left(\overline{p}^{\frac{1}{\varkappa}}\overline{h}\right)}{\partial\overline{x}}. \tag{8}$$

În consecință, la viteze mari influența turbulenței se manifestă prin modificarea numărului H și alungirii λ în rapoartele (7). Mai mult, avînd în vedere existența relației (6) influența turbulenței asupra presiunilor se anulează cînd $H \rightarrow \infty$.

Rezultatele de mai sus, și în special transformările (7) care rezolvă problema determinării presiunilor, sînt valabile numai pentru numere H mari. În cele ce urmează ne propunem să arătăm că, cu anumite corecții, relațiile (7) sînt valabile pentru orice numere H. În acest scop vom utiliza unele metode de liniarizare a ecuației presiunilor folosite pentru regimul laminar.

PERTURBAŢII MICI

Fie astfel mai întîi cazul cînd presiunea poate fi dezvoltată în serie în raport cu un parametru mic

$$\overline{p} = 1 + \alpha\overline{p}_{(1)} + \alpha^2\overline{p}_{(2)} + \ldots, \tag{9}$$

unde α poate fi excentricitatea relativă ε în cazul lagărelor circulare [3], sau înclinarea suprafețelor în cazul lagărelor axiale. Să considerăm de asemenea că grosimea $\overline{h}$ poate fi pusă sub forma

$$\overline{h} = 1 + \alpha\overline{h}_{(1)}. \tag{10}$$

De exemplu, pentru lagăre circulare

$$\alpha = \varepsilon, \qquad \overline{h} = 1 + \varepsilon\cos\theta, \qquad \overline{h}_{(1)} = \cos\theta. \tag{11}$$

Analog pentru suprafețe plane înclinate

$$h = h_1 - (h_1 - h_2)\overline{x} \tag{12}$$

sau notînd cu

$$h_m = \frac{h_1 - h_2}{2}, \qquad \varepsilon = \frac{h_1 - h_2}{h_1 + h_2}, \qquad \overline{X} = 1 - 2\overline{x}, \tag{13}$$

se deduce

$$\alpha = \varepsilon, \qquad \overline{h} = 1 + \varepsilon\overline{X}, \qquad \overline{h}_{(1)} = \overline{X}. \tag{14}$$

Introducînd relațiile (9), (10) în ecuația (1), dezvoltînd în serie în raport cu α și limitîndu-se la o primă aproximație se deduce

$$\frac{12}{k_{x_0}} \frac{\partial^2 \overline{p}_{(1)}}{\partial \overline{x}^2} + \frac{12}{k_{z_0}} \frac{\partial^2 \overline{p}_{(1)}}{\partial \overline{z}^2} - \frac{6H}{\varkappa} \frac{\partial \overline{p}_{(1)}}{\partial \overline{x}} = 6H \frac{\partial \overline{h}_{(1)}}{\partial \overline{x}}, \tag{15}$$

în care

$$k_{x_0} = 12 + 0{,}53 R^{*0{,}725}, \qquad k_{z_0} = 12 + 0{,}296 R^{*0{,}65}. \tag{16}$$

Uțilizînd apoi transformări absolut analoge cu (7)

$$\widetilde{H} = \frac{k_{x_0}}{12} H, \qquad \frac{\widetilde{z}}{z} = \sqrt{\frac{k_{z_0}}{k_{x_0}}}, \tag{17}$$

rezultă ecuația presiunilor sub o formă identică cu aceea obținută în regim laminar [3]

$$\frac{\partial^2 \overline{p}_{(1)}}{\partial \overline{x}^2} + \frac{\partial^2 \overline{p}_{(1)}}{\partial \widetilde{\overline{z}}^2} - \frac{6H}{\varkappa} \frac{\partial \overline{p}_{(1)}}{\partial \overline{x}} = 6H \frac{\partial \overline{h}_{(1)}}{\partial \overline{x}}. \tag{18}$$

În consecință, rezultatele menționate [1], [2] respectiv transformările (7) deduse inițial numai pentru cazul numerelor H mari, sînt valabile pentru orice numere H dacă variația grosimii este redusă. Într-adevăr

$$K_1 = 1 + \alpha^2 K_{1\,(1)} + \ldots \tag{19}$$

astfel încît $K_1 = 1$ în condițiile de mai sus, iar $k_x \cong k_{x_0}$, $k_z \cong k_{z_0}$.

De exemplu, pentru lagărele circulare de alungire infinită se deduce

$$\overline{p} = 1 + \frac{6\varepsilon\varkappa\widetilde{H}}{\varkappa^2 + 36\widetilde{H}^2} \left(\varkappa \sin\theta - \frac{6\widetilde{H}}{\varkappa} \cos\theta\right) \tag{20}$$

iar pentru suprafețe plane dreptunghiulare, cu notațiile (13), se obține

$$\overline{p} = 1 + 2\varkappa\varepsilon \left[\overline{x} - \frac{e^{\frac{6H\overline{x}}{\varkappa}} - 1}{e^{\frac{6H}{\varkappa}} - 1}\right]. \tag{21}$$

Pentru lagăre de dimensiuni finite, rezultă pentru presiuni aceleași expresii analitice ca și în regim laminar [3] dar avînd $\widetilde{H}$, $\widetilde{\lambda}$ în loc de H, λ.

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM KÖZPONTI KÖNYVTÁRA 1848

UTILIZAREA METODEI „PH“ [4]

Fie $\varkappa = 1$ (evoluție izotermă a gazului lubrifiant) și

$$\overline{\Pi} = \overline{p}\overline{h}. \tag{22}$$

În funcție de această nouă variabilă, ecuația presiunilor (1) se scrie

$$\begin{aligned}
&\overline{h}\overline{\Pi}\left(\frac{12}{k_x}\frac{\partial^2\overline{\Pi}}{\partial\overline{x}^2}+\frac{12}{k_z}\frac{\partial^2\overline{\Pi}}{\partial\overline{z}^2}\right)-\overline{\Pi}^2\left(\frac{12}{k_x}\frac{\partial^2\overline{h}}{\partial\overline{x}^2}+\frac{12}{k_z}\frac{\partial^2\overline{h}}{\partial\overline{z}^2}\right)-6H\frac{\partial\overline{\Pi}}{\partial\overline{x}}=\\
&=\overline{\Pi}\left(\frac{12}{k_x}\frac{\partial\overline{h}}{\partial\overline{x}}\frac{\partial\overline{\Pi}}{\partial\overline{x}}+\frac{12}{k_z}\frac{\partial\overline{h}}{\partial\overline{z}}\frac{\partial\overline{\Pi}}{\partial\overline{z}}\right)-\overline{h}\left[\frac{12}{k_x}\left(\frac{\partial\overline{\Pi}}{\partial\overline{x}}\right)^2+\frac{12}{k_z}\left(\frac{\partial\overline{\Pi}}{\partial\overline{z}}\right)^2\right]+\\
&+\overline{h}\overline{\Pi}\left[\frac{0{,}53R^{*0{,}725}\cdot 0{,}725\overline{\Pi}^{0{,}275}}{k_x^2}\left(\frac{\partial\overline{\Pi}}{\partial\overline{x}}\right)^2+\frac{0{,}296R^{*0{,}65}\cdot 0{,}65\overline{\Pi}^{0{,}35}}{k_z^2}\left(\frac{\partial\overline{\Pi}}{\partial\overline{z}}\right)^2\right]-\\
&-\overline{\Pi}^2\left[\frac{0{,}53R^{*0{,}725}\cdot 0{,}725\overline{\Pi}^{0{,}275}}{k_x^2}\frac{\partial\overline{h}}{\partial\overline{x}}\frac{\partial\overline{\Pi}}{\partial\overline{x}}+\frac{0{,}296R^{*0{,}65}\cdot 0{,}65\overline{\Pi}^{0{,}35}}{k_z^2}\frac{\partial\overline{h}}{\partial\overline{z}}\frac{\partial\overline{\Pi}}{\partial\overline{z}}\right].
\end{aligned}\tag{23}$$

Față de regimul laminar, apar în plus coeficienții variabili $\frac{12}{k_x}$, $\frac{12}{k_z}$ și ultimele două paranteze din membrul secund. Într-adevăr, în regim laminar ecuația în $\overline{\Pi}$ se scrie [4]

$$\begin{aligned}
&\overline{h}\overline{\Pi}\left(\frac{\partial^2\overline{\Pi}}{\partial\overline{x}^2}+\frac{\partial^2\overline{\Pi}}{\partial\overline{z}^2}\right)-\overline{\Pi}^2\left(\frac{\partial^2\overline{h}}{\partial\overline{x}^2}+\frac{\partial^2\overline{h}}{\partial\overline{z}^2}\right)-6H\frac{\partial\overline{\Pi}}{\partial\overline{x}}=\\
&=\overline{\Pi}\left(\frac{\partial\overline{h}}{\partial\overline{x}}\frac{\partial\overline{\Pi}}{\partial\overline{x}}+\frac{\partial\overline{h}}{\partial\overline{z}}\frac{\partial\overline{\Pi}}{\partial\overline{z}}\right)-\overline{h}\left[\left(\frac{\partial\overline{\Pi}}{\partial\overline{x}}\right)^2+\left(\frac{\partial\overline{\Pi}}{\partial\overline{z}}\right)^2\right]
\end{aligned}\tag{24}$$

care de altfel se deduce și direct din (23) dacă se pune $R^* = 0$, $k_x = k_z = 12$.

Urmînd aceleași raționamente ca și în lucrarea [4] să observăm că indiferent dacă regimul de scurgere este laminar sau turbulent, există soluțiile

$$\left.\begin{array}{lll}
\text{pentru } H\rightarrow 0, & \overline{p}\rightarrow 1, & \overline{\Pi}\rightarrow\overline{h}\\
\text{pentru } H\rightarrow\infty, & \overline{p}\rightarrow\dfrac{K_1}{\overline{h}}, & \overline{\Pi}\rightarrow K_1=\text{const.}
\end{array}\right\}\tag{25}$$

Cazul $H\rightarrow 0$ este evident, deoarece atunci $p\rightarrow p_0$. Cazul $H\rightarrow\infty$ rezultă direct din (6).

Se verifică ușor că membrul secund al ecuațiilor (23), (24) este nul pentru situațiile extreme $H\rightarrow 0$, $H\rightarrow\infty$ fapt care permite să se presupună, întocmai ca și în regim laminar, că această proprietate are loc aproximativ pentru orice H. În consecință, ecuația (23) se va scrie aproximativ

$$\overline{h}\overline{\Pi}\left(\frac{12}{k_x}\frac{\partial^2\overline{\Pi}}{\partial\overline{x}^2}+\frac{12}{k_z}\frac{\partial^2\overline{\Pi}}{\partial\overline{z}^2}\right)-\overline{\Pi}^2\left(\frac{12}{k_x}\frac{\partial^2\overline{h}}{\partial\overline{x}^2}+\frac{12}{k_z}\frac{\partial^2\overline{h}}{\partial\overline{z}^2}\right)-6H\frac{\partial\overline{\Pi}}{\partial\overline{x}}=0 \tag{26}$$

sau, înmulțind cu $\frac{k_x}{12}$,

$$\overline{h}\,\overline{\Pi}\left(\frac{\partial^2\overline{\Pi}}{\partial\overline{x}^2}+\frac{k_x}{k_z}\,\frac{\partial^2\overline{\Pi}}{\partial\overline{z}^2}\right)-\overline{\Pi}^2\left(\frac{\partial^2\overline{h}}{\partial\overline{x}^2}+\frac{k_x}{k_z}\,\frac{\partial^2\overline{h}}{\partial\overline{z}^2}\right)-6H\frac{k_x}{12}\,\frac{\partial\overline{\Pi}}{\partial\overline{x}}=0. \quad (27)$$

Mai departe, pentru liniarizarea ecuației de mai sus se presupune aproximativ că [4]

$$\overline{\Pi}\cong\overline{h} \quad (28)$$

în coeficienții care afectează derivatele. Deci ecuația (27) ia forma

$$\frac{\partial^2\overline{\Pi}}{\partial\overline{x}^2}+\frac{k_x}{k_z}\,\frac{\partial^2\overline{\Pi}}{\partial\overline{z}^2}-\frac{6H}{\overline{h}^2}\,\frac{k_x}{12}\,\frac{\partial\overline{\Pi}}{\partial\overline{x}}=\frac{\partial^2\overline{h}}{\partial\overline{x}^2}+\frac{k_z}{k_x}\,\frac{\partial^2\overline{h}}{\partial\overline{z}^2}. \quad (29)$$

În sfîrșit, J.S. Ausman [4] consideră apoi că se poate pune aproximativ

$$\frac{6H}{\overline{h}^2}\cong 6H. \quad (30)$$

Or, în aceste condiții se constată că, fără a introduce erori suplimentare de alt ordin de mărime față de regimul laminar, se poate presupune în plus că

$$\begin{aligned} k_x &\cong k_{x_0}=12+0{,}53R^{*0{,}725}K_1^{0{,}725},\\ k_z &\cong k_{z_0}=12+0{,}296R^{*0{,}65}K_1^{0{,}65}, \end{aligned} \quad (31)$$

unde K_1 reprezintă o medie pentru funcția $\overline{\Pi}$, care poate fi luată egală cu [5]

$$K_1=\overline{p}_{\max}\overline{h}_0, \quad (32)$$

unde $\overline{p}_{\max}$ este presiunea maximă $\left(\frac{\partial p}{\partial x}=0\right)$ care se produce iar $\overline{h}_0$ grosimea $\overline{h}$ corespunzătoare.

Utilizînd apoi în continuare substituțiile (7) sau (17) ecuația (29) se va scrie exact sub aceeași formă ca și în regim laminar

$$\frac{\partial^2\overline{\Pi}}{\partial\overline{x}^2}+\frac{\partial^2\overline{\Pi}}{\partial\widetilde{\overline{z}}^2}-6\widetilde{H}\,\frac{\partial\overline{\Pi}}{\partial\overline{x}}=\frac{\partial^2\overline{h}}{\partial\overline{x}^2}+\frac{\partial^2\overline{h}}{\partial\widetilde{\overline{z}}^2}. \quad (33)$$

În consecință, s-a obținut rezultatul propus și anume că substituțiile (7) deduse inițial numai pentru cazul numerelor H mari, sînt aproximativ valabile pentru orice H, cu condiția că se aproximează în mod judicios parametrii k_x, k_z cu valori medii k_{x_0}, k_{z_0} (16), (31).

În cazul perturbațiilor mici $K_1\cong 1$ (16). În rest, K_1 are valori supraunitare care depind de H și ε. Astfel pentru lagăre circulare

$$\begin{aligned} K_1 &= 1 && \text{pentru } H\to 0,\\ K_1 &= \sqrt{1+\frac{3}{2}\varepsilon^2} && \text{pentru } H\to\infty. \end{aligned} \quad (34)$$

Analog pentru lagăre axiale

$$\begin{aligned} K_1 &= 1 && \text{pentru } \boldsymbol{H} \to 0, \\ K_1 &= \bar{h}_1 = \frac{h_1}{h_m} && \text{pentru } \boldsymbol{H} \to \infty. \end{aligned} \tag{35}$$

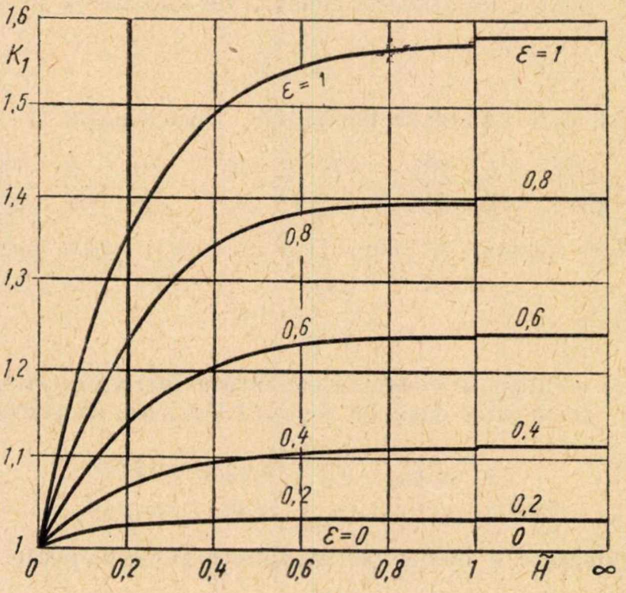


Fig. 1

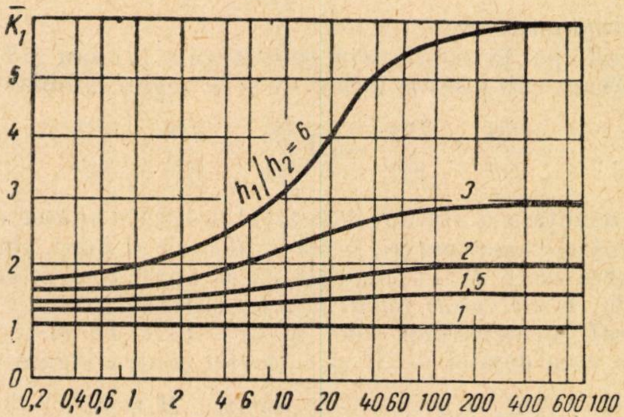


Fig. 2

Pentru un număr $\bar{H}$ oarecare, valoarea K_1 poate fi luată aproximativ neglijînd în calculul ei efectul lăţimii finite a lagărului. Astfel, pentru lagăre circulare [6]

$$K_1 = -\frac{\varepsilon^2}{2(1+36\bar{H}^2)} + \left[\frac{\varepsilon^4}{4(1+36\bar{H}^2)^2} - \frac{\varepsilon^2}{2(1+36\bar{H}^2)} + 1 + \frac{3}{2}\varepsilon^2\right]^{1/2} \tag{36}$$

a cărui variaţie în funcţie de ε şi $\bar{H}$ este reprezentată în diagrama din figura 1. Se constată că variaţia corespunzătoare se situează între limitele (34) iar pentru excentricităţi reduse $K_1 \cong 1$.

Pentru lagăre axiale, compuse din două suprafeţe dreptunghiulare, grosimea h variază liniar cu x iar variaţia constantei K_1 dedusă numeric [7] este reprezentată în diagrama din figura 2.

În sfîrşit, pentru lagăre axiale este uneori mai comodă raportarea caracteristicilor de funcţionare la grosimea minimă h_2 în locul grosimii medii, aşa cum s-a procedat mai sus.

Este uşor de văzut că în aceste condiţii, notînd cu

$$\bar{H} = \frac{\mu V l}{p_0 h_2^2}, \tag{37}$$

în locul transformărilor (7) sau (17) vor trebui considerate relaţii analoge

$$\tilde{\bar{H}} = \frac{\bar{k}_{x_0}}{12}\bar{H}, \qquad \frac{\tilde{z}}{z} = \frac{\tilde{\lambda}}{\lambda} = \sqrt{\frac{\bar{k}_{z_0}}{\bar{k}_{x_0}}}, \tag{38}$$

unde

$$\begin{aligned} \bar{k}_{x_0} &= 12 + 0{,}53\bar{R}^{\star 0{,}725}\bar{K}_1^{0{,}725}, \qquad \bar{K}_1 = \bar{p}_{\max}\frac{h_0}{h_2}, \\ \bar{k}_{z_0} &= 12 + 0{,}296\bar{R}^{\star 0{,}65}\bar{K}_1^{0{,}65}, \qquad \bar{R}^\star = k^{\star 2}\,\overline{\mathcal{R}_e}^{\,\star} = k^{\star 2}\frac{\rho V h_2}{\mu}. \end{aligned} \tag{39}$$

Din cele de mai sus se constată că variaţia constantei K_1 cu numărul $\bar{H}$ este destul de redusă, în special în cazul lagărelor circulare (34). De aceea este de aşteptat ca influenţa numărului $\bar{H}$ asupra rapoartelor $\tilde{H}/H$ şi $\tilde{\lambda}/\lambda$ (7) să fie redusă. Astfel, în figurile 3 şi 4 s-a reprezentat în cazul lagărelor circulare variaţia rapoartelor $\tilde{H}/H$ şi $\tilde{\lambda}/\lambda$ cu numărul Reynolds, pentru diferite valori ε şi pentru $\bar{H} \to \infty$ [1], [2], $\bar{H} \to 0$ şi $\bar{H} = 0{,}5$. Se constată că pentru $\bar{H} > 0{,}5$, influenţa numărului $\bar{H}$ asupra raportului $\tilde{H}/H$ este cu totul neglijabilă, iar influenţa numărului $\bar{H}$ asupra raportului $\tilde{\lambda}/\lambda$ este şi mai redusă.

Cu ajutorul rezultatelor de mai sus şi a rezultatelor date în lucrările [1], [2] se pot determina caracteristicile de funcţionare ale lagărelor lubrificate cu gaze. Astfel, plecînd de la rezultatele numerice obţinute de A.A. Raimondi [8] în regim laminar, în figurile 5, 6 şi 7 s-au completat diagramele care dau variaţia coeficientului de încărcare

$$\zeta = \frac{P}{2p_0 r_1 b} \tag{40}$$

obţinute pentru numere $\bar{H}$ mari [1], [2], pentru întreg domeniul $0 < \bar{H} < \infty$.

De asemenea, în figurile 8,9 s-au reprezentat rapoartele $\tilde{\bar{H}}/\bar{H}$ şi $\tilde{\lambda}/\lambda$ în cazul lagărelor axiale, pentru diferite numere $\bar{R}^*$, rapoarte h_1/h_2 şi numere $\bar{H}$. Cu ajutorul acestor date şi pe baza rezultatelor din lucrările

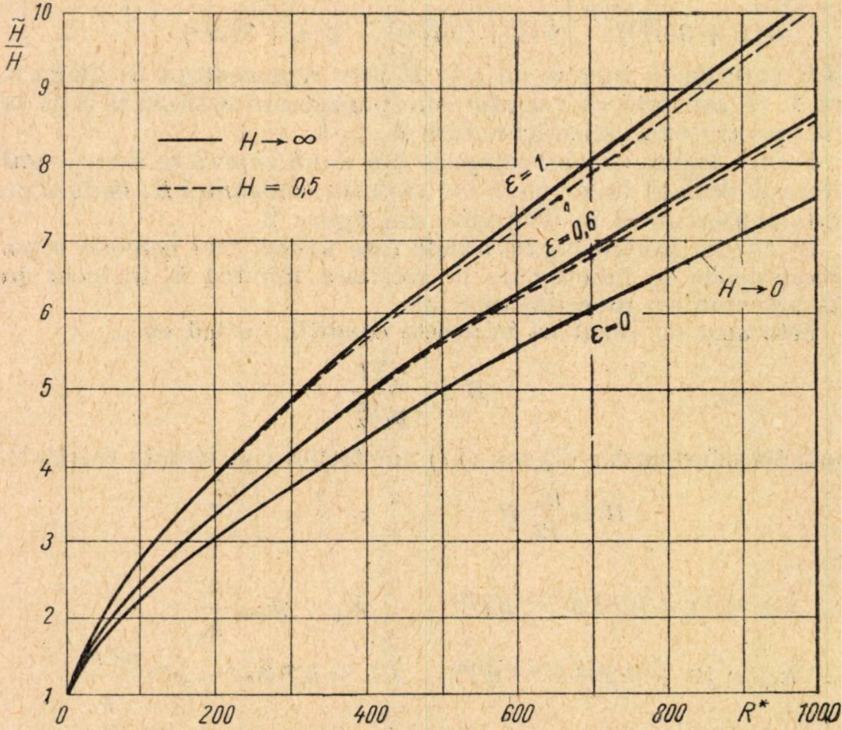


Fig. 3

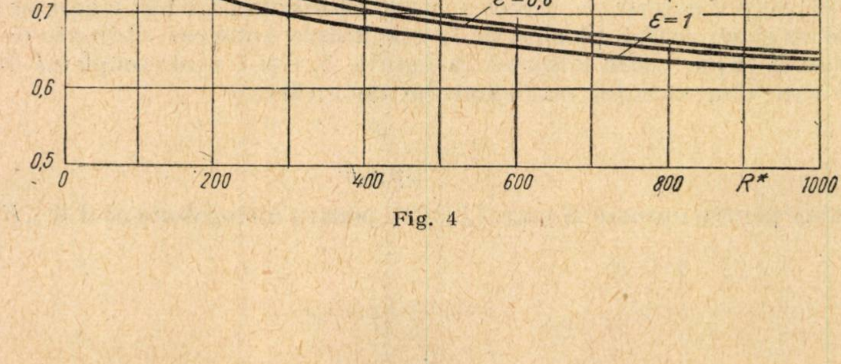


Fig. 4

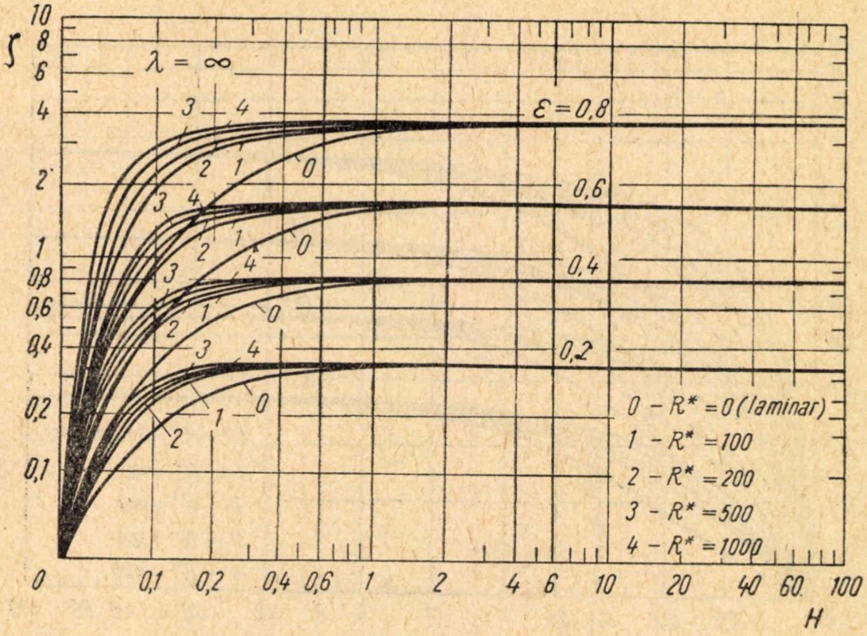

ζ
λ = ∞
ε = 0,8
0,6
0,4
0,2
0 – R* = 0 (laminar)
1 – R* = 100
2 – R* = 200
3 – R* = 500
4 – R* = 1000
10
8
6
4
2
1
0,8
0,6
0,4
0,2
0,1
0
0,1
0,2
0,4
0,6
1
2
4
6
10
20
40
60
100
H

Fig. 5

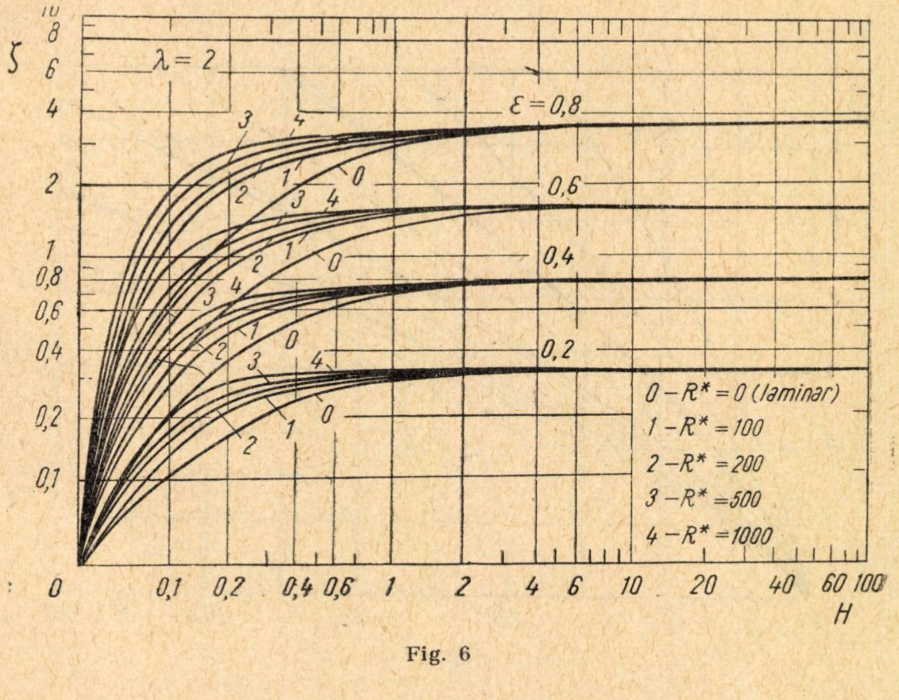

ζ
λ = 2
ε = 0,8
0,6
0,4
0,2
0 – R* = 0 (laminar)
1 – R* = 100
2 – R* = 200
3 – R* = 500
4 – R* = 1000
10
8
6
4
2
1
0,8
0,6
0,4
0,2
0,1
0
0,1
0,2
0,4
0,6
1
2
4
6
10
20
40
60
100
H

Fig. 6

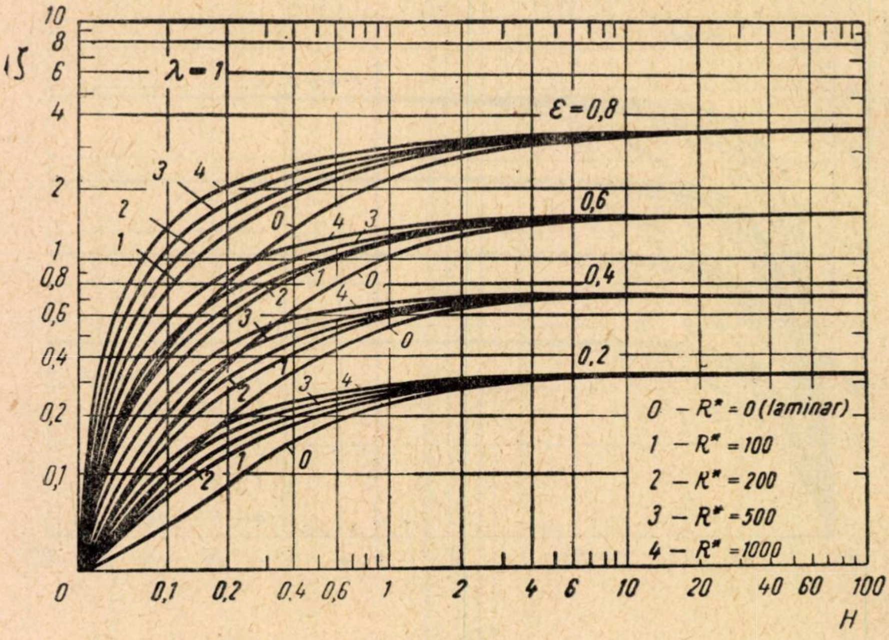

15
λ = 1
ε = 0,8
0,6
0,4
0,2
0 – R* = 0 (laminar)
1 – R* = 100
2 – R* = 200
3 – R* = 500
4 – R* = 1000
10
8
6
4
2
1
0,8
0,6
0,4
0,2
0,1
0
0,1
0,2
0,4
0,6
1
2
4
6
10
20
40
60
100
H

Fig. 7

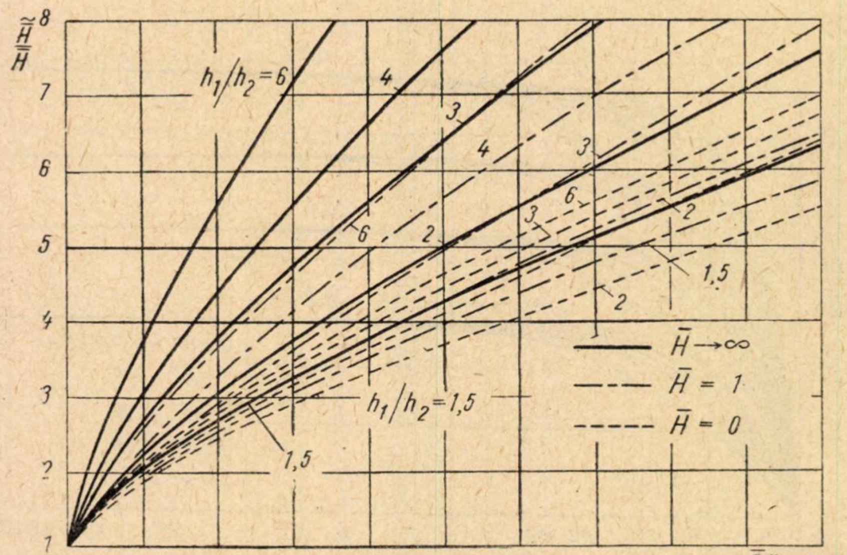

$\tilde{\bar{H}}/\bar{H}$
$h_1/h_2 = 6$
4
3
4
3
6
2
6
3
2
1,5
2
$h_1/h_2 = 1,5$
1,5
$\bar{H} \to \infty$
$\bar{H} = 1$
$\bar{H} = 0$
8
7
6
5
4
3
2
1
0
100
200
300
400
$\bar{R}^*$
500

Fig. 8

[7], [9], în figura 10 s-a reprezentat variația coeficientului de încărcare

$$\zeta = \frac{P}{p_0 l b} \tag{41}$$

pentru diferite valori $\bar{R}^*$ și H în cazul $\lambda = 1$, $h_1/h_2 = 2$.

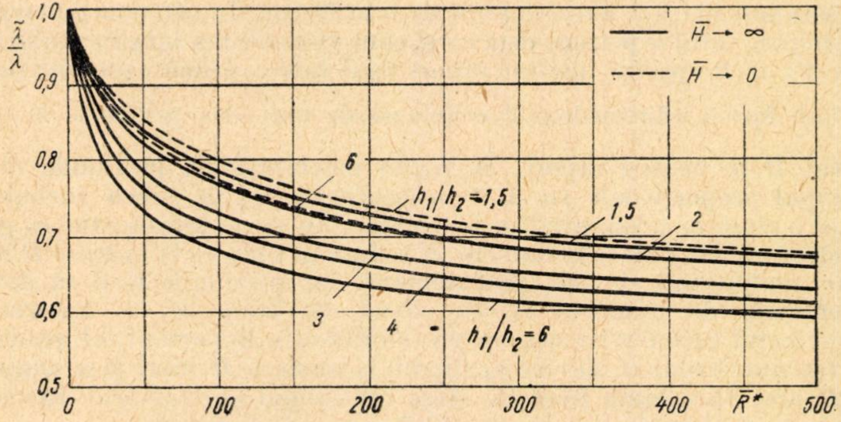


Fig. 9

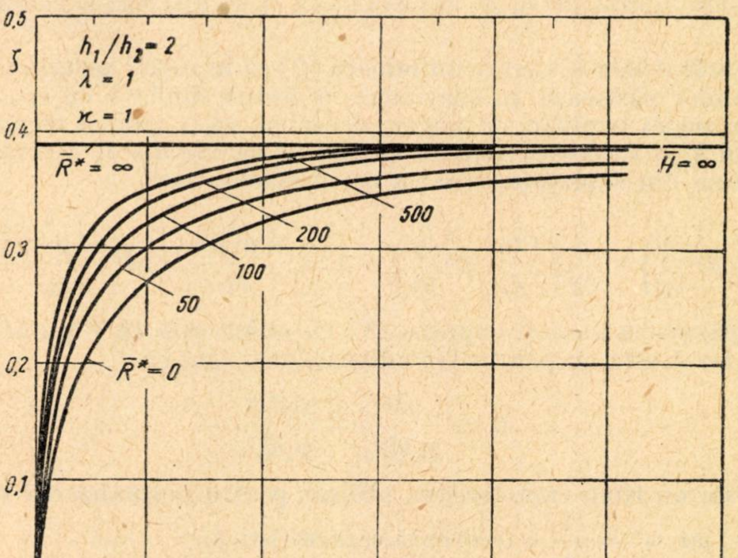


Fig. 10

Rezultă deci că, cu ajutorul transformărilor (7) sau (17) se pot deduce caracteristicile de funcționare în regim turbulent în funcție de caracteristicile corespunzătoare din regim laminar.

Față de lubrificația cu lichide [10] rezultă unele deosebiri importante datorită efectului compresibilității lubrifiantului. Astfel s-a arătat mai sus că efectul turbulenței asupra presiunilor se manifestă prin mărirea tensiunilor de frecare, care la rîndul lor conduc la producerea presiunilor prin așa-numitul efect hidrodinamic de lubrificație. În comparație cu regimul laminar, totul se petrece deci ca și cum viscozitatea lubrifiantului (sau viteza V) ar fi sporită într-un raport egal într-o primă aproximație cu $\frac{k_{x_0}}{12}$. Sub formă adimensională concluzia de mai sus revine la a spori numărul H în același raport. În regim incompresibil, presiunile rămîn tot timpul proporționale cu μ, V respectiv cu H; de aceea turbulența produce o creștere substanțială a presiunilor. În cazul lubrificației cu gaze, acest efect are loc numai la numere H reduse în timp ce la numere H mari efectul compresibil devine predominant, iar presiunile tind să devină independente de numărul H. De aceea, în timp ce la numere H reduse efectul turbulenței asupra presiunilor este important, el scade cu creșterea numărului H, devine neglijabil la numere H mari și se anulează cînd $H \to \infty$. În schimb frecările cresc tot timpul cu numărul Reynolds exact în același mod ca și în cazul lubrificației cu lichide.

LUBRIFICAŢIA CU GAZE TURBULENTĂ ÎN REGIM NESTAŢIONAR

S-a arătat într-o lucrare anterioară [2] că în regim nestaționar ecuația presiunilor păstrează în continuare o formă similară cu ecuația presiunilor în regim laminar, cu singura deosebire că în primul membru apar coeficienții k_x și k_z. Astfel, față de un sistem de axe mobil, sau mai precis legat de una din suprafețe, ecuația presiunilor se scrie

$$\frac{\partial}{\partial \bar{x}}\left(\frac{12\bar{h}^3}{k_x}\,\bar{p}^{\frac{1}{\varkappa}}\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}}\right)+\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\left(\frac{12\bar{h}^3}{k_z}\,\bar{p}^{\frac{1}{\varkappa}}\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}}\right)=12L\,\frac{\partial\left(\bar{p}^{\frac{1}{\varkappa}}\bar{h}\right)}{\partial \bar{t}}+6H\,\frac{\partial\left(\bar{p}^{\frac{1}{\varkappa}}\bar{h}\right)}{\partial \bar{x}}, \qquad (42)$$

unde H păstrează aceeași expresie (3), cu observația că V poate depinde de timp, iar L este un parametru adimensional egal cu

$$L=\frac{\mu l^2}{p_0 h_m^2 t_0}=\frac{\mu\omega^{\star} l^2}{p_0 h_m^2}, \qquad (43)$$

unde t_0 este un timp caracteristic, utilizat pentru normalizarea variabilei $t\left(\bar{t}=\frac{t}{t_0}\right)$ iar $\omega^{\star}=\frac{1}{t_0}$ o frecvență caracteristică.

De exemplu, pentru lagăre axiale, $V = V_{1x} - V_{2x}$ este viteza relativă dintre suprafețe, dacă se consideră că ambele suprafețe sînt animate de vitezele tangențiale V_{1x} respectiv V_{2x}. În cazul lagărelor circulare, față de un sistem de referință solidar cu linia centrelor, $V = r_1 \Omega$, unde $\Omega = \Omega_1 + \Omega_2 - 2\varphi$, în care Ω_1, Ω_2 sînt vitezele unghiulare de rotație ale fusului și respectiv cuzinetului, iar φ este viteza de rotație a liniei centrelor.

Se constată că față de regimul laminar membrul secund al ecuației presiunilor rămîne în continuare nealterat de apariția turbulenței. În consecință ca și pentru regimurile staționare examinate în considerațiile precedente, soluțiile asimptotice deduse în regim laminar în cazurile $L \to \infty$ sau $H \to \infty$ se mențin și pentru regimul de funcționare turbulent. Cu alte cuvinte, la viteze tangențiale mari ($H \to \infty$) sau pentru mișcări normale pe suprafețe cu frecvențe mari ($L \to \infty$) efectul compresibilității este predominant

$$p = \left(\frac{C_1}{h}\right)^{\varkappa}. \tag{44}$$

În aceste condiții, presiunea depinde exclusiv de poziția momentană a celor două suprafețe, respectiv de grosimea h, și nu de valoarea parametrilor L, H. Prin urmare, efectul mișcărilor de apropiere sau depărtare a suprafețelor (dependența presiunilor de viteza normală a acestora) scade de exemplu cînd crește numărul H și se anulează cînd $H \to \infty$.

Reluînd metodele aproximative folosite în considerațiile precedente, de exemplu în ipoteza perturbațiilor mici (9), (10), ecuația (42) se scrie

$$\frac{\partial^2 \bar{p}_{(1)}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{k_{x_0}}{k_{z_0}} \frac{\partial^2 \bar{p}_{(1)}}{\partial \bar{z}^2} = 12L \frac{k_{x_0}}{12}\left(\frac{1}{\varkappa} \frac{\partial \bar{p}_{(1)}}{\partial \bar{t}} + \frac{\partial \bar{h}_{(1)}}{\partial \bar{t}}\right) + \\ + 6H \frac{k_{x_0}}{12}\left(\frac{1}{\varkappa} \frac{\partial \bar{p}_{(1)}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{h}_{(1)}}{\partial \bar{x}}\right). \tag{45}$$

Deși ecuația de mai sus este liniară, efectul apropierii sau depărtării suprafețelor nu poate fi separat de cel hidrodinamic decît cu prețul unor aproximații suplimentare. Într-adevăr, considerînd ca și pentru lubrificația cu lichide că soluția se poate pune sub forma

$$\bar{p}_{(1)} = \overline{(\bar{p}_{(1)})} + \overline{\overline{(\bar{p}_{(1)})}}, \tag{46}$$

rezultă din (45) ecuațiile diferențiale

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \overline{(\bar{p}_{(1)})}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{k_{x_0}}{k_{z_0}} \frac{\partial^2 \overline{(\bar{p}_{(1)})}}{\partial \bar{z}^2} &= 6H \frac{k_{x_0}}{12}\left[\frac{1}{\varkappa} \frac{\partial \overline{(\bar{p}_{(1)})}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{h}_{(1)}}{\partial \bar{x}}\right], \\ \frac{\partial^2 \overline{\overline{(\bar{p}_{(1)})}}}{\partial \bar{z}^2} + \frac{k_{x_0}}{k_{z_0}} \frac{\partial^2 \overline{\overline{(\bar{p}_{(1)})}}}{\partial \bar{z}^2} &= 12L \frac{k_{x_0}}{12}\left[\frac{1}{\varkappa} \frac{\partial \overline{\overline{(\bar{p}_{(1)})}}}{\partial \bar{t}} + \frac{\partial \bar{h}_{(1)}}{\partial \bar{t}}\right], \end{aligned} \tag{47}$$

numai dacă termenii

$$\frac{1}{\varkappa} \frac{k_{x_0}}{12}\left[12L \frac{\partial \overline{(\bar{p}_{(1)})}}{\partial \bar{t}} + 6H \frac{\partial \overline{\overline{(\bar{p}_{(1)})}}}{\partial \bar{x}}\right] \tag{48}$$

pot fi neglijați în raport cu ceilalți termeni ai ecuației (47); altfel, în prima ecuație (47) trebuie introdus termenul (48) proporțional cu $6H$, iar în cea de-a doua termenul proporțional cu $12\,L$.

Din punctul de vedere al soluției $\overline{\overline{(\bar{p}_{(1)})}}$ aproximația de mai sus este oarecum justificată de faptul că $\overline{(\bar{p}_{(1)})}$ variază cu timpul ca H, a cărui variație cu timpul este relativ mai lentă. De aceea, efectele se pot separa numai în cazul $H \cong$ constant (suprapunerea unei mișcări vibratorii normale de amplitudine redusă peste o mișcare tangențială staționară).

Mai departe modul de soluționare al ecuației (45) este simplu, dacă se cunoaște soluția corespunzătoare în regim laminar, deoarece substituțiile (17) sînt în continuare valabile, asociate cu

$$\widetilde{L} = \frac{k_{x_0}}{12}\,L. \tag{49}$$

Într-adevăr, în aceste condiții ecuația (45) se scrie

$$\frac{\partial^2 \bar{p}_{(1)}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{p}_{(1)}}{\partial \widetilde{z}^2} = 12\widetilde{L}\left(\frac{1}{\varkappa}\,\frac{\partial \bar{p}_{(1)}}{\partial \bar{t}} + \frac{\partial \bar{h}_{(1)}}{\partial \bar{t}}\right) + 6\widetilde{H}\left(\frac{1}{\varkappa}\,\frac{\partial \bar{p}_{(1)}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{h}_{(1)}}{\partial \bar{x}}\right), \tag{50}$$

respectiv exact aceeași formă ca și în regim laminar. Mai mult, considerînd substituțiile mai corecte, ținînd seama de (31), ecuația (42) se scrie de asemenea sub aceeași formă ca și în regim laminar. În consecință problema se reduce la cazul regimului laminar, dacă se consideră $\widetilde{L}$, $\widetilde{H}$ în loc de L, H și $\widetilde{\lambda}$ în loc de λ.

Primită la redacție la 2 iulie 1963

APPROXIMATE DETERMINATION OF PRESSURE DISTRIBUTION IN TURBULENT GAS LUBRICATED BEARINGS

ABSTRACT

A simple, general, approximate method is given for the determination of the operating characteristics of gas lubricated bearings in turbulent regime, as a function of the operating characteristics in the corresponding laminar flow. The method is rigorous for high velocities [1], [2] but may be extended with sufficient accuracy to any velocity V, i.e. any number H, both for steady and unsteady operating conditions.

BIBLIOGRAFIE

1. V. N. Constantinescu, *Asupra lubrificației cu gaze în regim turbulent.* St. cerc. mec. apl., **XIII**, *5*, 1157–1175 (1962).
2. — *On Gas Lubrication in Turbulent Regime.* ASME Transactions, Series D, Journal of Basic Engineering, **85** (1963).

3. J. S. Ausman, *Finite Gas Lubricated Journal Bearings*. Institution of Mechanical Engineers, Conference on Lubrication and Wear, London, 1957, *22*.
4. — *An Improved Analytical Solution for Self-Acting Gas-Lubricated Journal Bearings of Finite Length*. ASME Transactions, Series D, Journal of Basic Engineering, **83**, *2*, 188—194 (1961).
5. V. N. Constantinescu, *Asupra scurgerii gazelor cu viteze mari în straturi subţiri*. St. cerc. mec. apl. **XIII**, *2*, 383—400 (1962); *O tecenii gazov s bolşoi skorostiu v tonkih sloiah*. Rev. méc. appl., Acad. R.P.R., **VII**, *6*, 1081—1097 (1962).
6. — *Asupra unor metode aproximative de calcul ale lagărelor circulare lubrificate cu gaze*. St. cerc. mec. apl., **XIII**, *4*, 935—955 (1962).
7. W. A. Gross, *Gas Film Lubrication*. John Wiley & Sons, New York, 1962.
8. A. A. Raimondi, *A Numerical Solution for the Gas Lubricated Journal Bearings of Finite Length*. ASLE Transactions, **4**, 131—135 (1961).
9. O. Pinkus, B. Sternlicht, *Theory of Hydrodynamic Lubrication*. McGraw-Hill Book Co., New York, 1961.
10. V. N. Constantinescu, *Analysis of Bearings Operating in Turbulent Regime*. ASME Transactions, Series D, Journal of Basic Engineering, **84**, *1*, 139—151 (1962).

UNELE ASPECTE ALE INFLUENȚEI TIPULUI DE STRUCTURĂ ASUPRA COMPORTĂRII LA ALUNECARE ȘI UZURĂ LA DOUĂ ALIAJE DE ALUMINIU

DE

GH. VASILCA, AL. NICA, O. BIȚĂ și I. DINCĂ

539.6 : 621.82

Aliajele antifricțiune pe bază de aluminiu, cu cele mai numeroase aplicatii, sînt caracterizate în general prin trei tipuri principale de structură. Una din aceste structuri constă dintr-o matrice semidură de aluminiu cu incluziuni dure, formate din constituentul dat de principalul element de aliere. A doua grupă de aliaje o formează acelea la care, într-o matrice de aluminiu de asemenea semidură, elementul principal de aliere se prezintă sub formă de incluziuni moi. Al treilea tip principal de structură este cel omogen, eutectic.

Tipul de structură cu incluziuni dure poate fi considerat ca un corespondent, la aliajele de aluminiu, a structurii Charpy de la aliajele antifricțiune pe bază de staniu sau plumb. La toate aceste tipuri de structură constituentul dur este în general un compus definit al elementului de bază cu elementul principal de aliere. Într-o astfel de structură, constituentul dur mărește rezistența mecanică a aliajului, iar din punct de vedere funcțional i se pot atribui în general două efecte pozitive. Unul este acela că luînd o poziție de proeminență în suprafața activă și fiind mai dur, uzura aliajului se micșorează deoarece procesul de uzură este mai intens la nivelul vîrfurilor asperităților suprafețelor cu mișcare relativă. Matricea, cu duritate mai redusă și deci mai sensibilă la uzură, este astfel ținută mai departe de frontul principal al acestui proces. Prin cel de-al doilea efect se obțin avantaje de lubrificație în sensul că datorită denivelărilor din suprafața activă, această suprafață se mărește, adsorbția lubrifiantului este mai bună, iar pungile de lubrifiant din suprafața denivelată constituie rezerve de ulei pentru filmul portant. În comparație cu aliajele albe cu structură Charpy, la aliajele cu bază de aluminiu și cu astfel de structură, matricea este relativ mult mai dură. În cazul aliajelor de aluminiu mărimea și repartiția incluziunilor dure în matrice are cam aceeași importanță ca și la aliajele din categoria Babbitt, forma acestor incluziuni, mai ales muchiile colțuroase, apreciindu-se că au efecte mai puțin dăunătoare, dată fiind rezistența la oboseală superioară a aliajelor respective de aluminiu.

Structura cu incluziuni moi la aliajele de aluminiu își are corespondență în structura bronzurilor de plumb pentru lagăre. Fazei moi din astfel de structuri i se atribuie în general un rol antigripant. În porțiunile din suprafața activă cu concentrații termice mari și de scurtă durată, faza moale cu temperatura de topire scăzută se plastifiază și sub acțiunea presiunilor din filmul de lubrifiant este scoasă din cavitatea respectivă și întinsă peste faza semidură înconjurătoare. Stratul subțire de fază moale plastifiată separă astfel local suprafața fusului de faza semidură a cuzinetului și înlătură pe această cale contactul direct dintre acestea și deci cauza generatoare a concentrației termice inițiale. Cauza dezvoltării anormale de căldură neputîndu-se menține și nici progresa, procesul instabil de uzură, adică gripajul, este evitat.

Structura eutectică la aliajele de aluminiu este la scară microscopică o structură de tip Charpy, în care faza moale este aluminiu, iar cea dură elementul de aliere principal respectiv. Funcțiunea constituenților în structură poate fi deci considerată analogă cu aceea a fazelor din structura Charpy, la scara dimensională a constituenților din fazele eutectice. Deoarece sub aspectul funcțiunii constituenților nu prezintă ceva complet deosebit, structura eutectică nu va fi examinată mai departe.

Incluziunile dure, respectiv cele moi, din aliajele antifricțiune de aluminiu fiind prin natura și funcțiunea lor complet diferite, iar matricea aproape aceeași, cunoașterea eventualei lor influențe asupra comportării acestor aliaje la alunecare și la uzură poate prezenta interes. Aceste aspecte de studiu formează obiectul lucrării de față.

Aliajul de aluminiu cu incluziuni dure încercat în acest scop a avut compoziția chimică : 3,5% Sb, 0,5% Mg, rest Al, denumit în cele ce urmează prescurtat Al—Sb, în care impuritățile din aluminiu și anume Si, Fe, Mn, Cu etc., nu au depășit la un loc 1%. Celălalt aliaj de aluminiu încercat și denumit prescurtat Al—Sn, cu incluziuni moi în structură, este de tipul cu conținut redus de Sn, avînd compoziția chimică : 5,6% Sn, 1,75% Cu, 0,63% Si, 0,50% Ni, 0,39% Mg, 0,31% Sb, 0,2% Fe și Al rest. Ambele aliaje au fost turnate static în conchilă metalică obișnuită, sub formă de lingouri cilindrice pline cu ∅ = 50 mm, materialul topit folosit fiind prelevat din șarjele de topitură respective de serie, deci nu au fost elaborate ca șarje experimentale aparte.

1. ASPECTE DE STRUCTURĂ ÎN MASA ALIAJELOR

Structura metalografică a celor două aliaje încercate a fost studiată în limitele considerate necesare obiectului urmărit în această lucrare. Nu se va insista deci asupra punerii în evidență a tuturor constituenților din structură, deoarece fazele secundare Si, Al_3Fe, Al_2Cu, Mg_2Si, Al_4Mn etc., în general mai dure decît matricea, pot fi prezente în ambele tipuri de aliaje datorită elementelor respective conținute în aluminiu sub formă de impurități, sau introduse în aliaj în cantități mici de ordinul de mărime al impurităților aluminiului tehnic.

În aliajul Al—Sb, conform diagramei binare de echilibru Al—Mg (fig. 1) [1], elementul de aliere Mg în proporție de 0,5% este complet solubil în aluminiu. Unul din efectele acestuia, care interesează în cazul de față, este acela că imprimă aluminiului, sub formă de soluție solidă, o duritate mai mare.

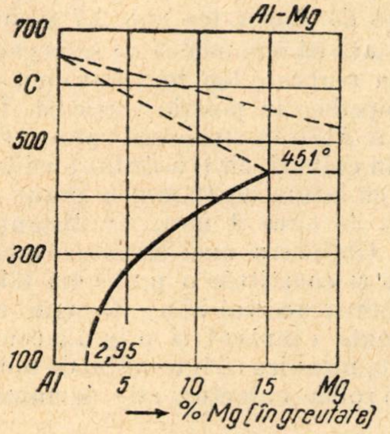


Fig. 1. – Diagrama de echilibru Al–Mg.

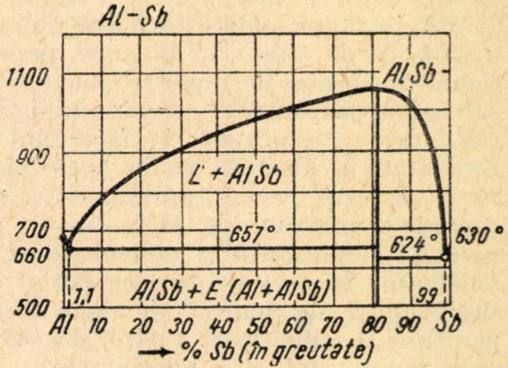


Fig. 2. — Diagrama de echilibru Al—Sb.

Din diagrama binară de echilibru Al—Sb (fig. 2) [2], rezultă că în aliajul Al—Sb, stibiul formează cu aluminiul compusul definit AlSb ca fază primară de cristalizare, precum și o fază eutectică Al + AlSb, care se solidifică la 657°C. Compusul definit AlSb este constituentul dur al acestui aliaj. Eutecticul solidificat, cu un mare exces de aluminiu (98,9% Al), nu este omogen sub raportul fazelor care îl compun, compusul definit AlSb separîndu-se la limitele grăunților de Al, în cazul de față a soluției solide Al—Mg.

Stibiul și AlSb nefiind solubil în aluminiu, rezultă că la acest aliaj matricea este formată numai din soluția solidă binară Al—Mg.

În figura 4, compusul definit AlSb din aliajul Al—Sb se poate vedea sub formă de cristalite, rezultate din cristalizarea primară (incluziuni dure), iar în figura 3 apare și sub formă de filoane subțiri rezultate la solidificarea eutecticului. Prin atac cu o soluție apoasă de 1% NaOH, constituentul AlSb înnegrindu-se el poate fi deosebit vizual, în filoane, destul de bine de alte faze din aliaj care rezultă din impurități și care se separă de asemenea la marginea grăunților de aluminiu.

Repartiția uniformă în structură a constituentului dur AlSb este de mare importanță pentru comportarea aliajului ca material antifricțiune. Dacă lipsa de omogenitate în această direcție este de natură tehnologică, ea se datorește de obicei existenței unei diferențe de densitate a constituenților. În cazul de față, între matricea cu bază de aluminiu și compusul definit AlSb există o astfel de diferență. AlSb cristalizează în sistemul cubic cu fețe centrate, muchiile și centrele fețelor cubului fiind ocupate de atomi de aluminiu. Atomii de stibiu se plasează în interiorul acestui cub, ocupînd vîrfurile unui tetraedru cubic, unei celule elementare de AlSb revenindu-i astfel 4 atomi de Al și 4 atomi de Sb, iar parametrul rețelei fiind de 6,10 Å. Densitatea acestui constituent, calculată în condițiile menționate [3], este 4,35 g/cm^3. Față de densitatea sub 2,7 g/cm^3 pe care o are soluția solidă Al—Mg, se constată că fenomenul de segregare a AlSb în timpul solidificării aliajului are în realitate loc, mai ales cînd se toarnă, ca de obicei, în lingouri, paralelipipedice în poziție verticală. În figura 5 aspectul de repartiție neuniformă a AlSb în structură apare atît sub forma concentrării compusului definit în cuiburi, cît și a distanței diferite între aceste grupări. Pe fața unui cub cu latura de 12 mm a putut fi constatată o distanță medie între cuiburi de circa 1 mm, iar distanța maximă între ele de aproximativ 2 mm. Obținerea unei structuri cu o repartiție uniformă de AlSb este de dorit și constituie o problemă tehnologică importantă la elaborarea și turnarea acestui aliaj. Desigur că ameliorări în această direcție pot fi obținute eventual și prin adaosuri suplimentare de elemente de aliere adecvate, mai ales că intervalul de temperatură la solidificare a AlSb și a soluției solide eutectice este de numai aproximativ 40°C, deci relativ mic.

La aliajul tehnic încercat neomogenitatea se mai prezintă și sub forma segregării de impurități, așa cum se poate vedea în figura 6, care pot influența proprietățile aliajului. Identificarea acestora depășește însă cadrul acestei lucrări.

După diagrama de echilibru binară Al—Sn (fig. 7) [2] se vede că aluminiul și staniul sînt total insolubile în stare solidă și nu formează nici compuși definiți. Aliajul solidificat este deci un amestec eterogen de aluminiu și staniu. Pentru toată gama de aliaje din această categorie, solidificarea începe cu cristalizarea primară a aluminiului sub linia lichidus, proces care continuă pînă se atinge linia solidus la 229°C, cînd restul de lichid se solidifică la această temperatură constantă. La linia solidus topitura conține încă 0,5% Al, care la solidificare se separă însă și el, astfel că staniul solidificat este pur. Din mecanismul solidificării rezultă că, la aliajele cu conținut redus de staniu cum este cazul de față cu 5,6% Sn, această fază trebuie să apară în structură la marginea grăunților de aluminiu. Intervalul de solidificare a aluminiului fiind relativ mare, peste 400°C, la o răcire necorespunzătoare după turnare grăunții pot deveni mari,urmarea fiind că staniul rezultă sub formă de aglomerări prea mari în același loc. Aluminiul sub formă de grăunți mai mici, și ca urmare o dispersare mai fină a staniului în structură, pot fi obținute și prin adaos de titan [4].

Faza de bază a aliajului, adică matricea, este în cazul de față o soluție solidă complexă de aluminiu. Dintre elementele care intră în compoziția chimică a aliajului, numai magneziul este dizolvat complet de aluminiu

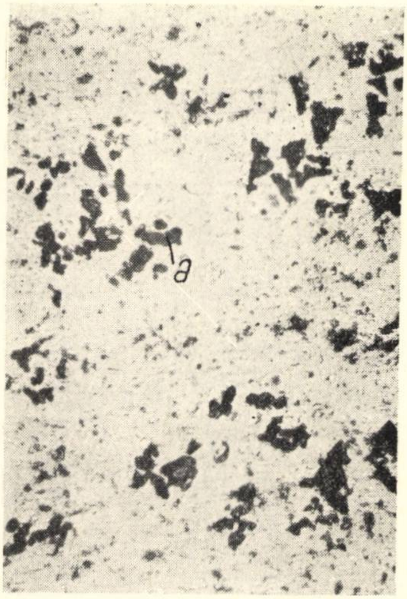


Fig. 3. — Al—Sb fără atac (100 : 1). *a* — incluziuni dure de AlSb.

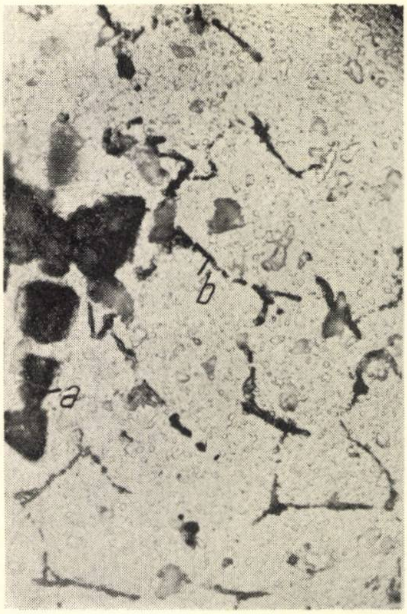


Fig. 4. — Al—Sb cu atac (600 : 1). *a* — incluziuni dure de AlSb; *b* — filoane de AlSb de la eutectic.

Fig. 5. — Al—Sb, repartiția în cuiburi a AlSb (10 : 1).

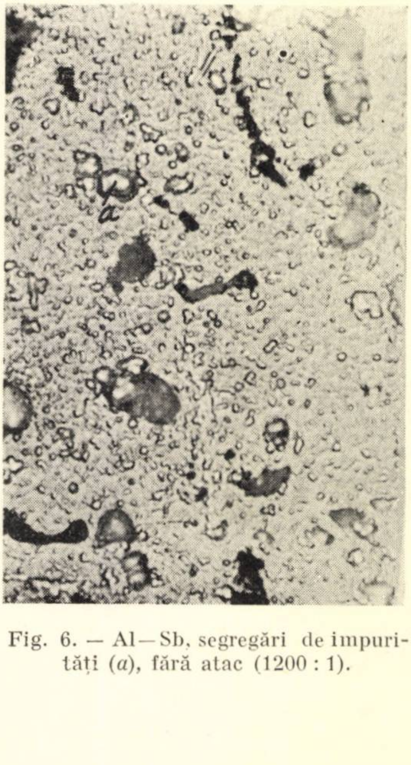


Fig. 6. — Al—Sb, segregări de impurități (*a*), fără atac (1200 : 1).

Fig. 8. — Al — Sn fără atac (100 : 1).

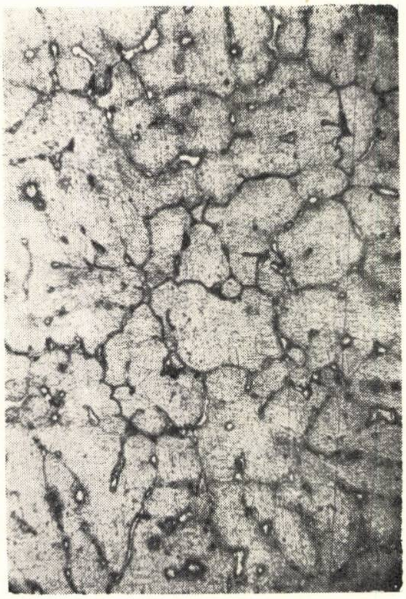


Fig. 9. — Al — Sn cu atac (100 : 1).

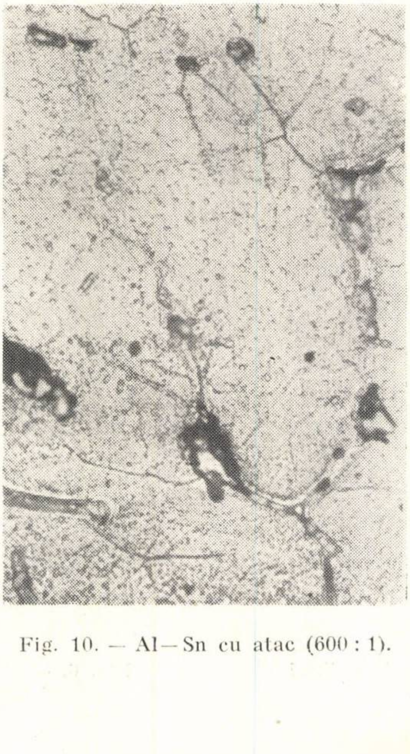


Fig. 10. — Al—Sn cu atac (600 : 1).

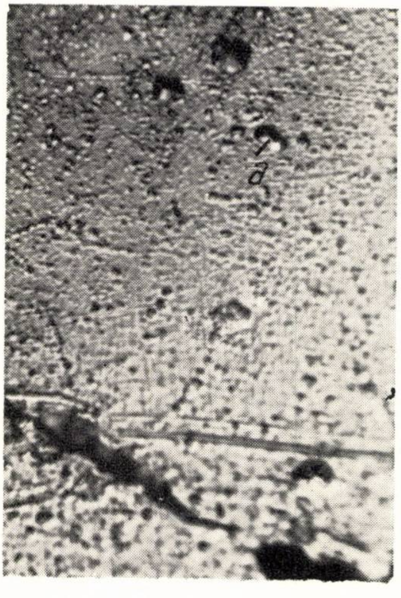


Fig. 11. — Al—Sn, impurităţi (*a*), cu atac (1200 : 1).

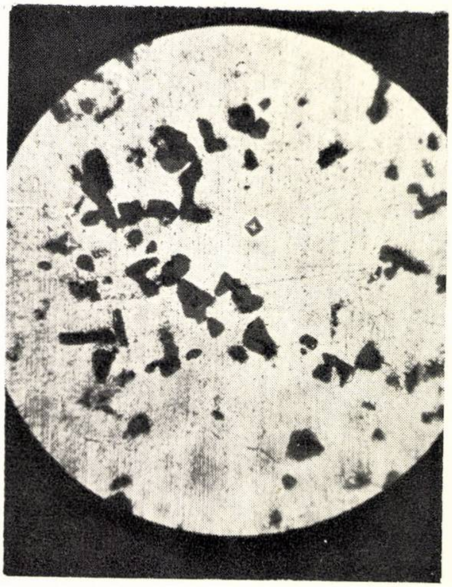


Fig. 12. — Al—Sb. amprentă în AlSb (487 : 1).

(fig. 2), în timp ce cuprul, siliciul, nichelul, stibiul și fierul sînt practic insolubile după diagramele binare respective de echilibru [5]. În acest tip de aliaj, care corespunde lui Alcoa 750 [6], după [7], mai intră în soluție solidă de aluminiu de asemenea o parte din cupru și din siliciu. Rezultă astfel că matricea aliajului este o soluție solidă cel puțin ternară de aluminiu, elementele de aliere dizolvate contribuind la mărirea durității acestei faze.

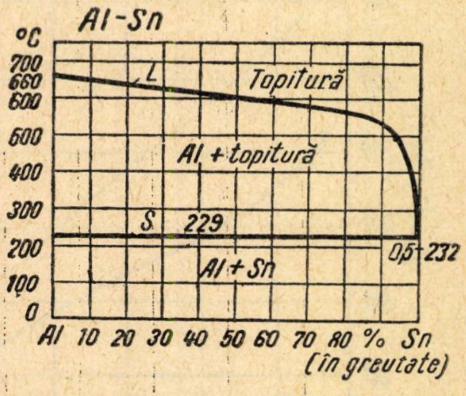


Fig. 7. — Diagrama de echilibru Al—Sn.

În figurile 8 și 9 se poate vedea staniul (culoare închisă) dispersat la marginile grăunților soluției solide de aluminiu. După figura 9 pare că staniul formează o rețea închisă în jurul grăunților de matrice. La mărirea mai mare (fig. 10) se vede însă că rețeaua de staniu nu este închisă, confirmîndu-se astfel că la aliajele de acest tip, cu conținut de staniu sub 10%, dispersia satisfăcătoare a staniului în structură rezultă în general chiar de la turnare. Trebuie menționat că distribuția staniului în structură sub formă de rețea închisă în jurul grăunților de soluție solidă se repercutează în mod negativ mai ales asupra rezistenței la oboseală și a durității la cald a aliajului, impunîndu-se ca astfel de rețele să fie sfărîmate prin diverse tratamente. Din aceste figuri mai apare de asemenea forma mai mult rotunjită, fără colțuri, a soluției solide și a staniului, forme dendritice caracteristice pentru constituenții tenace și mai moi.

În figura 10 se vede de asemenea că filoanele de la marginea grăunților matricei conțin nu numai staniu ci și fazele date de celelalte elemente de aliere. Prin atacarea probei în mod suplimentar cu 10% NO_3H, staniul se colorează în negru și poate fi mai ușor identificat dintre ceilalți constituenți.

În figura 11 se prezintă și unele impurități din structură la acest aliaj. Ele sînt însă rare. În majoritate se găsesc la marginile grăunților, împinse către aceste zone în general prin mecanismul creșterii grăuntelui de soluție solidă în timpul solidificării.

2. DURITATEA ȘI MICRODURITATEA MATERIALELOR

La aliajul Al—Sb, duritatea Brinell, măsurată în condițiile 10/187,5/ /15, s-a constatat a fi în medie $H_B = 25$, iar la aliajul Al—Sn, în aceleași condiții, $H_B = 44-48$.

Pentru microduritate în matricea aliajului Al—Sb, obținută sub o sarcină de 3 g, cu durata de menținere de 5″, diagonalele amprentei fiind măsurate la mărirea 487 : 1, s-a găsit o valoare medie de 50 kgf/mm².

Microduritatea compusului definit AlSb, măsurată în condițiile de mai sus cu excepția sarcinii care a fost de 5 g, a fost în medie 286 kgf/mm². Măsurarea acestui parametru nu s-a făcut fără dificultăți, deoarece mărimea cristalelor este foarte mică și nu au putut fi respectate întocmai condițiile de distanță a amprentei de la margini (fig. 12).

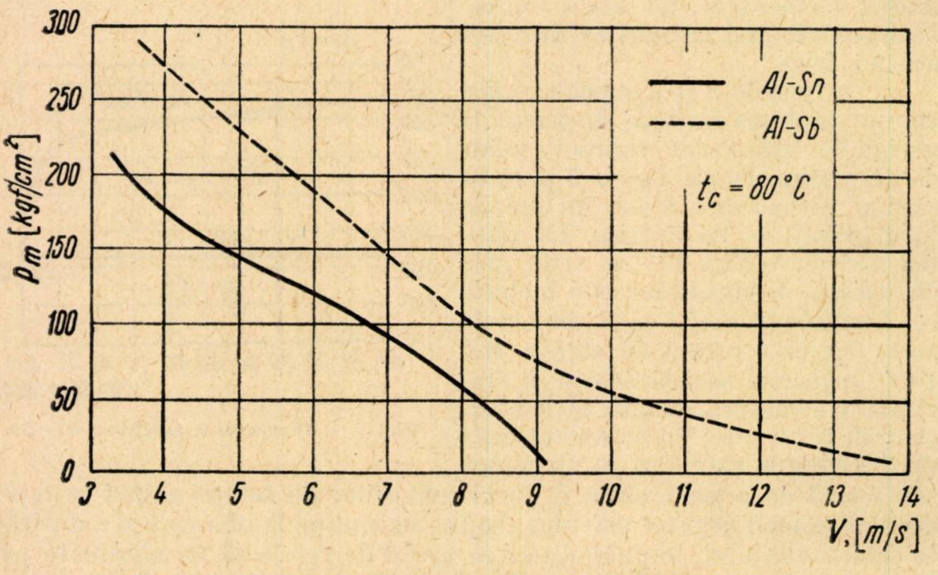


Fig. 13. — Caracteristicile de sarcină pentru Al—Sn și Al—Sb.

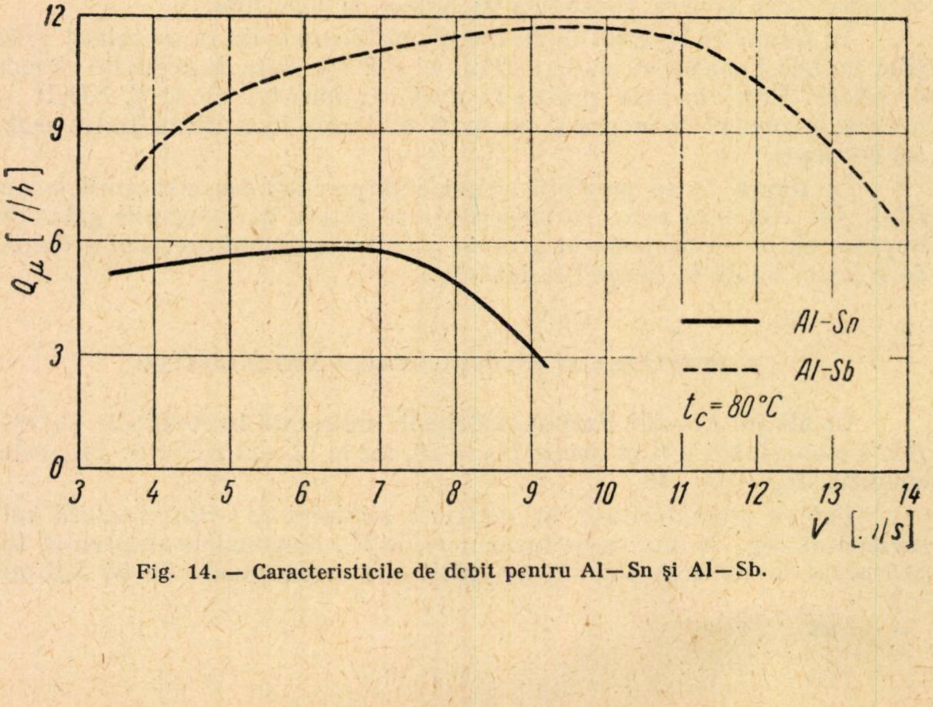


Fig. 14. — Caracteristicile de debit pentru Al—Sn și Al—Sb.

În matricea aliajului Al—Sn, microduritatea constatată a fost în medie de 67 kgf/mm^2, măsurată în aceleași condiții ca și la aliajul Al—Sb. Nu s-au obținut rezultate concludente la măsurarea microdurității în incluziunile moi de staniu, cauza constatată fiind că prin operația de preparare a probei metalografice (polizare mecanică) această fază este smulsă în parte din cavitățile respective distrugîndu-se astfel planeitatea suprafeței care trebuie să conțină conturul amprentei penetratorului. La o probă de staniu metalurgic turnat, microduritatea măsurată sub sarcina de 2g, restul condițiilor fiind acelea arătate mai sus, a fost în medie de 11 kgf/mm^2. În lanțul de constituenți de la marginea grăunților de soluție solidă de aluminiu s-au obținut valori pentru microduritate de circa 93 kgf/mm^2, în condiții de măsurare identice cu cele pentru matrice. Această valoare trebuie însă considerată numai orientativă, deoarece este funcție de natura grupului de aluminide prinse în acel caz sub penetrator, fiecare dintre acestea fiind prea mici, ca dimensiuni, pentru a permite măsurarea microdurității la fiecare în parte.

Diferența de microduritate la matrice între cele două aliaje este apreciabilă, deși conținutul de magneziu este aproape același. Aceasta confirmă ipoteza că la aliajul Al—Sn matricea este o soluție solidă mai complexă, cel puțin ternară.

Duritatea Brinell aproape dublă la aliajul Al—Sn față de aliajul Al—Sb poate fi atribuită în cea mai mare parte durității sporite a matricei, dar și prezenței în structură a multor compuși chimici definiți duri, proveniți de la elementele de aliere mai numeroase. Deși faza AlSb are o microduritate apreciabilă, ea nu contribuie în mod mai substanțial la mărirea durității de ansamblu a aliajului Al—Sb din cauză că este în cantitate relativ mică.

3. COMPORTAREA LA ALUNECARE

În regim hidrodinamic de funcționare a lagărului se presupune că alunecarea și deci frecarea are loc în filmul de lubrifiant, parametrii funcționali, ca de exemplu capacitatea portantă, momentul de frecare, debitul de lubrifiant etc., fiind în consecință funcție de viscozitatea lubrifiantului pe lîngă celelalte elemente geometrice. Realizarea constructivă a lagărului, precum și condițiile de exploatare, fac uneori ca în lagărul real condițiile la limită, ipotezele de geometrie și microgeometrie a suprafețelor active, regimul de disipare și de evacuare a căldurii etc., să se reproducă mai mult sau mai puțin conform cu ipotezele admise în calcul. Procesul de frecare real se produce astfel într-un mod mai complex, atrăgînd în această acțiune și alți parametri în afară de viscozitatea lubrifiantului, printre care pot fi menționate interacțiunile la scară fizică a materialelor fus-lubrifiant-cuzinet-mediu ambiant și altele. Ca urmare, în această direcție, practica face uz de anumite preferințe în alcătuirea cuplurilor de frecare, dar deocamdată lipsește o bază de calcul pentru caracterizarea cantitativă suficient de concludentă a acestor interacțiuni. Pe linie experimentală pot fi obținute anumite caracterizări ale împerecherilor de materiale. Acestea depinzînd însă în mare măsură de condițiile în care se fac încercările nu pot furniza în general rezultate de profunzime mai mare. De obicei se obțin rezultate la nivelul diferențierii unui material de altul și se cunosc numai rare cazuri în care s-a putut urmări din acest punct de vedere influența variației cantitative a unei faze a structurii asupra proprietăților aliajului.

Parametrii funcționali experimentali cu ajutorul cărora se caracterizează în general materialele de lagăre în procesul de alunecare la funcționarea în regim termic stabil sînt capacitatea portantă sub forma unei curbe $p_m = \varphi(V)$, coeficientul de frecare $f = \varphi(V)$ și debitul de lubrifiant $Q_u = \varphi(V)$. Reprezentînd acești parametri în funcție de viteza relativă de alunecare V, curba $p_m = \varphi(V)$ este chiar curba lui Stribeck, reprezentarea mai generală a lui f și Q_u putîndu-se face în funcție de numărul lui Sommerfeld. Pentru analize comparative în scopuri practice sînt mai reprezentative caracteristicile p_m și f.

Privite din punctele de vedere de mai sus, cele două structuri studiate în cazul de față se caracterizează prin aceea că faza matcă este aceeași la ambele aliaje și anume soluția solidă de aluminiu. Totodată această fază este cantitativ mult predominantă în structură, peste 95% în volum. În aceste condiții, influența restului de constituenți din structură asupra proprietăților la alunecare ale celor două tipuri de structuri s-ar putea să fie mai mică decît erorile de determinare a caracteristicilor și deci această influență să nu poată fi pusă în evidență în mod suficient de concludent

Pentru verificarea concluziei de mai sus, cei doi parametri funcționali p_m și f au fost determinați experimental în cazul ambelor tipuri de structuri, în condiții cît mai comparabile. Aceste condiții au fost :

1. Fusul. — material : oțel Cr Ni, suprafața activă carbonitrurată cu duritate $R_C = 60-62$, — diametrul nominal $d = 36$ mm ;
2. Cuzinetul. — forma : bucșă cilindrică cu pereți groși (6 mm), diametrul interior nominal $D = 36$ mm ;
3. Jocul relativ : $\psi = 1{,}5\,‰$;
4. Alungirea relativă : $\lambda = 0{,}7$;
5. Măsurarea temperaturii cuzinetului : pe direcția sarcinii, la mijlocul cuzinetului, în zona încarcată, la 1,5 mm distanță de suprafața activă ;
6. Lubrifiantul : ulei tip 408 STAS ;
7. Alimentarea cu lubrifiant : în circuit închis, sub o presiune de 1,5 at, intrarea uleiului în suprafața activă făcîndu-se printr-un orificiu cu $\varnothing = 4$ mm, situat la mijlocul cuzinetului, pe direcția sarcinii în zona descărcată, temperatura în baia de ulei $t_1 = 25°\mathrm{C}$ constantă ;
8. Felul încărcării : sarcina statică.

După efectuarea unui rodaj de 12 ore, în aceleași condiții de viteză și sarcină, au fost ridicate caracteristicile de sarcină $p_m = \varphi(V)$ și a coeficientului de frecare $f = \varphi(V)$, la aceeași temperatură constantă a cuzinetului $t_c = 80°\mathrm{C}$ pentru a elimina influența variației viscozității lubrifiantului cu temperatura asupra acestor caracteristici. Mai trebuie menționat că la determinarea caracteristicii coeficientului de frecare s-a folosit metoda măsurării acestui parametru într-un singur punct – în care instalația experimentală folosită dă erorile cele mai mici — restul punctelor fiind calculate cu ajutorul relației de echilibru termic [8]

$$f p_m V = K Q_u + K_0 Q_0,$$

în care $f p_m V$ se referă la căldura produsă în lagăr prin frecare, KQ_u la căldura evacuată prin lubrifiant, iar $K_0 Q_0$ la căldura evacuată prin elementele de construcție. În acest scop s-a determinat și caracteristica debitului de lubrifiant $Q_u = \varphi(V)$.

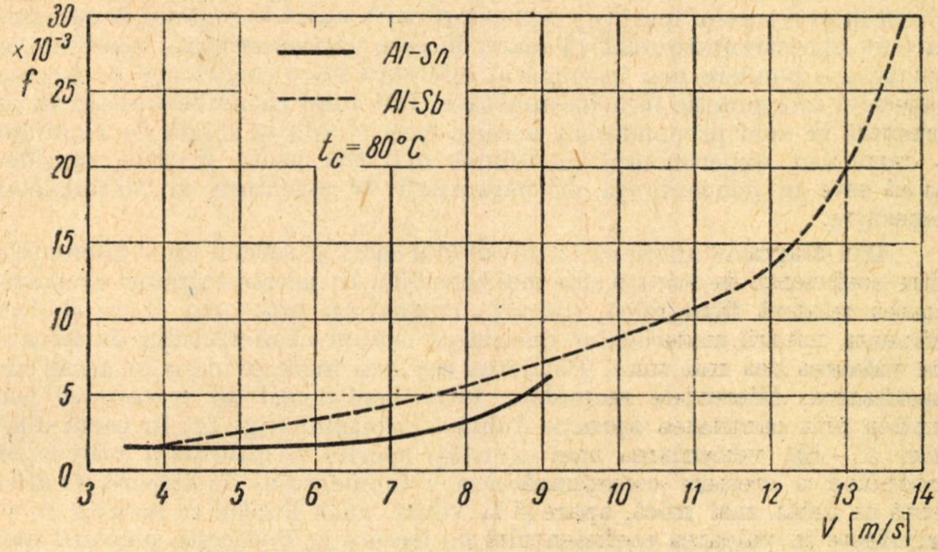


Fig. 15. — Coeficientul de frecare pentru Al—Sn și Al—Sb.

În figurile 13, 14 și 15 sînt arătate aceste caracteristici pentru ambele aliaje.

Caracteristica de sarcină la temperatura de regim constantă se determină variind de exemplu sarcina pentru o anumită viteză pînă ce temperatura cuzinetului se stabilizează la acea temperatură de regim. Caracteristica de sarcină se prezintă deci ca o funcție indirectă și de forța de frecare și deci, din punct de vedere fizic, nu i se poate atribui decît caracterul de funcție dependentă. Din punct de vedere practic ea este totuși utilă pentru că redă sarcina care este un parametru de calcul.

Caracteristica coeficientului de frecare poate fi considerată mai reprezentativă pentru punerea în evidență a particularităților specifice ale unui cuplu de frecare, deoarece redă sub formă globală toate procesele de frecare, care au loc în timpul mișcării relative a suprafețelor respective. Aceasta este de asemenea dependentă de exemplu de sarcină și de viteză, dar numai în măsura în care aceeași parametri fizici care îi stau la bază (ca de exemplu viscozitatea lubrifiantului, mărimea forțelor de interacțiune moleculară etc.) variază în funcție de sarcină și de viteză. Dacă caracteristica coeficientului de frecare se determină, în plus, și la temperatura de funcționare în regim constantă, studiul particularităților cuplului de frecare respectiv va fi considerabil ușurat, deoarece s-a eliminat variația cea mai grosieră a unui parametru fizic cu aport important în procesul de frecare și anume variația cu temperatura a viscozității lubrifiantului.

Examinînd curbele coeficientului de frecare (fig. 15) pentru cele două materiale cu structuri diferite studiate, se poate constata că, în domeniul experimental comun pentru ambele, adică pentru viteze între 4 și 9 m/s, diferența între ele nu este importantă. În regiunea cu viteze mici ($V < 4$ m/s) și sarcini mari ($p_m > 200$ kgf/cm^2), adică în regimul de funcționare cu excentricitate relativă mare, în care particularitățile materialelor pot avea o pondere mai însemnată, diferența între coeficienții de frecare respectivi este practic fără însemnătate. Dat fiind că ambele aliaje au în structură în mod preponderent aceeași fază — soluția solidă de aluminiu — rezultatul experimental menționat mai sus poate fi deci considerat că este în concordanță cu parametrii de structură ai materialelor respective.

Din diagrame apare că la viteze mai mari și sarcini mici diferențele între coeficienții de frecare sînt mai sensibile. În aceste regimuri excentricitatea relativă fiind mică, distanța cuzinet-fus este mai mare și deci influența naturii materialelor respective asupra coeficientului de frecare are valoarea cea mai mică. Ponderea cea mai mare avînd-o în acest caz lubrifiantul, diferențele semnalate între coeficienții de frecare se pot explica prin cantitatea aproape dublă a debitului (fig. 14) în cazul aliajului Al—Sb, vehicularea unei cantități sporite de lubrifiant prin lagăr producînd o creștere corespunzătoare a momentului de frecare. O diferență de debit, mai mică, apare și la viteze mici. Faptul că aceasta nu se oglindește în valoarea coeficientului de frecare se datorește ponderii mai mici a influenței lubrifiantului asupra coeficientului de frecare în astfel de regimuri de funcționare.

4. COMPORTAREA LA UZURĂ

Prin natura lui, procesul de uzură desfășurîndu-se la nivelul grăunților de material din suprafața de frecare, felul constituenților și dispoziția lor în structură trebuie să se reflecte fidel în acest proces, redînd aspectul specific al aliajului. În fiecare din cele trei feluri principale de uzură, și anume de contact, abrazivă și corosivă, constituenții de structură intervin cu particularitățile lor specifice atunci cînd sînt antrenați în proces în mod izolat, sau intervin în mod grupat reflectînd dispoziția lor în textura structurii. Particularitățile mai importante ale fazelor și ale texturilor de structuri care intervin în procesul de uzură pot fi considerate : duritatea, forma colțuroasă sau nu a cristalitelor, omogenitatea distribuirii lor în textură, sudabilitatea între ele sau cu alte faze, temperaturile lor de topire sau de înmuiere, rezistența lor la acțiunea corosivă a compușilor acizi din lubrifianți etc.

La uzura de contact [9] se produce o sudare a particulelor de material de la extremitățile asperităților conjugate, datorită temperaturilor locale ridicate ce iau naștere cînd filmul de lubrifiant a fost străpuns. Cînd punțile de sudură formate astfel se rup, ele se pot transforma în particule abrazive. Rezistența termică a constituenților de structură joacă în acest caz un rol important. La un lagăr de mașină, uzura de contact este în mod obișnuit redusă.

În procesul de uzură abrazivă, particulele abrazive putînd circula în general liber o dată cu lubrifiantul între suprafețele în frecare, provoacă uzura particulelor de material cu duritate inferioară sau se pot încrusta în fazele moi ale structurii, acționînd abraziv asupra materialului piesei conjugate a cuplului. Acțiunea abrazivului este de scurtă durată datorită, pe de o parte, fărîmițării lui în particule mai mici decît grosimea filmului de lubrifiant, iar pe de altă parte uzării muchiilor active proprii. Particulele abrazive pot fi de proveniență străină, pot fi constituenți duri proprii smulși din poziția de asperități de pe suprafața activă, sau pot fi rezultați de la procesul de uzură de contact.

Uzura corosivă se produce de obicei sub acțiunea acizilor organici prezenți în mediul lubrifiant și provenind din alterarea acestuia. Dintre cele două feluri de acizi rezultați pe această cale, cei cu greutate moleculară mică sînt ușor volatili și dau în consecință efecte corosive reduse, în timp ce categoria cu greutate moleculară mare produce cea mai mare parte din uzura corosivă a lagărelor. Acțiuni corosive pot exercita de asemenea acizii anorganici, atunci cînd astfel de acizi ajung în lubrifiant datorită proceselor conexe din agregat, ca de exemplu combustia la motoarele cu ardere internă. O acțiune corosivă indirectă pot produce și unii aditivi din uleiuri, în special cei detergenți, deoarece menținînd suprafețele metalice de frecare curate, se facilitează acțiunea diferiților agenți corosivi cu care acestea vin în contact. De asemenea, aditivii folosiți pentru îmbunătățirea calităților onctuoase și antigripante ale lubrifiantului, pot avea în anumite condiții o acțiune corosivă specifică față de unele metale din compoziția aliajelor.

Ținînd seama de mecanismul specific al fiecărui tip de uzură în parte, se poate prevedea că, în cazul celor două structuri studiate, uzura soluției solide de aluminiu, ca fază preponderentă, va interveni de asemenea cu pondere mai mare în uzura aliajului respectiv. Diferența de microduritate constatată poate duce la o rezistență mai mare la uzură a acestei faze la aliajul Al—Sn în cazul uzurii abrazive. Componența ei cel puțin ternară poate avea efecte de uzură corosivă de asemenea diferite. Incluziunile dure de AlSb din aliajul Al—Sb pot duce la o uzură abrazivă mai pronunțată a fusului lagărului, dar pot în același timp să constituie, cînd sînt smulse din suprafață, particule abrazive proprii și pot în sfîrșit să sufere ele însele o uzură corosivă. Staniul, ca incluziuni moi din aliajul Al-Sn, posedă o anumită rezistență la uzura corosivă, ca fază moale nu produce uzura abrazivă în mod direct, dar putînd îngloba particule abrazive poate contribui la uzura abrazivă a fusului.

Procesul de uzură la nivelul constituenților din structură este deci foarte complex și s-ar putea ca aspectul cantitativ al relației între un anumit tip de uzură și un anumit constituent să fie greu de determinat în toate cazurile în mod suficient de concludent. Indicații calitative în această direcție, completate cu rezultate de uzură globală, pot constitui totuși elemente de apreciere satisfăcătoare și în cazul analizelor de uzură în funcție de structura materialului.

În cazul de față s-au făcut cu aliajele model încercări la uzură globală pe un model experimental gen lagăr cilindric în regim de funcționare hidrodinamic, iar pentru fiecare tip de uzură separat s-au făcut încercări pe modele schematice constînd din sabot și tambur.

Încercările schematice la uzură s-au efectuat cu saboții confecționați din aliajul antifricțiune respectiv, iar tamburii corespunzători din oțelul arătat la punctul 3. Saboții au suprafața activă în formă de calotă cilindrică, $\varnothing = 23$ mm, coarda 16,8 mm, lățimea 15 mm, corespunzînd unei arii de lucru de 2,8 cm^2. Tamburii sînt cilindrici, $\varnothing = 23 \times 15$ mm, cu suprafața activă totală de 10,8 cm^2. Pentru încercări s-a folosit o instalație specială la care tamburul execută o mișcare de rotație prin intermediul unui ax cu cuplaj de resort etalonat, care permite măsurarea forței de frecare. Sabotul este imobil și poate fi apăsat pe tambur cu forța dorită. În timpul încercărilor cuplul sabot-tambur stă complet cufundat într-o baie, în care se introduce mediul lubrifiant dorit, în funcție de tipul de uzură ce se studiază. Uzura atît la fus cît și la sabot se determină prin cîntărire la balanța analitică, cu precizia de 0,0005 g.

În cazul de față, condițiile de încercări schematice la uzură pentru ambele cupluri de frecare au fost următoarele :

— viteza relativă la alunecare = 1,6 m/s = const.,

— sarcina de apăsare a sabotului pe tambur = 160 kgf = const.,

— durata de încercare = 30 minute,

— ulei 408 STAS, curat pentru uzura obișnuită,

— ulei 408 STAS + 1% acid oleic pentru uzura corosivă,

— ulei 408 STAS + 1% impurități de ulei uzat pentru uzura abrazivă.

Lucrările pentru determinarea uzurii au fost precedate de un rodaj, efectuat în condiții identice pentru fiecare cuplu de frecare.

Rezultatele încercărilor, în ceea ce privește temperaturile, coeficientul de frecare, uzura sabotului și a tamburului, în cele trei medii de ungere sînt arătate în tabelă.

Tabelă

Uzura în funcţie de mediul lubrifiant

Aliajul	Mediul de ungere	Temperatura băii [°C]		Coeficient de frecare [× 10 $^{-3}$]		Uzura [g × 10^{-3}]	
		iniţială	finală	iniţial	final	sabot	tambur
Al—Sb	Ulei 408 curat	30	46	7,05	7,05	imperceptibil	0,05
	Ulei 408+1% acid oleic	29	45	8,15	7,05	imperceptibil	0,2
	Ulei 408+1% impurităţi	30	60	18,8	18,8	0,2	3
Al—Sn	Ulei 408 curat	31	67	27,2	19,8	0,1	0,25
	Ulei 408+1% acid oleic	29	65	25,3	18,8	0,15	0,3
	Ulei 408 + 1% impurităţi	31	98	53	76	3,95	1,8

În ceea ce priveşte uzura corosivă a sabotului, din această tabelă reiese că, sub acţiunea acidului oleic, nu se produce în mod practic o asemenea uzură nici la Al—Sb nici la Al—Sn. Această proprietate poate fi atribuită rezistenţei bune la coroziunea acidă a aluminiului, datele de faţă arătînd în plus că ea nu scade în mod practic nici la aluminiul sub forma soluţiilor solide de acest fel. Ceilalţi constituenţi de structură reprezentînd mai puţin de 10% din aliaj, comportarea lor la acest fel de uzură nu poate prezenta din punct de vedere cantitativ un interes practic deosebit.

Rezultatele privind uzura abrazivă arată că ambele aliaje sînt sensibile la acţiunea impurităţilor dure din lubrifiant. Aliajul Al—Sn prezintă uzuri mai mari, aceasta putîndu-se datora durităţii sporite a matricei, particulele smulse din aceasta de către abrazivul extern avînd ele însele o acţiune abrazivă.

Trebuie menţionat că valorilor pentru uzura saboţilor şi a tamburilor din tabelă li se poate atribui numai o semnificaţie ca sens de variaţie a acesteia, deoarece mărimea măsurată este uneori prea aproape de eroarea de măsură a balanţei utilizate la cîntărire pentru a fi valabilă şi ca valoare absolută.

Coeficientul de frecare prezintă valori mai mari la aliajul Al—Sn decît la Al—Sb, ceea ce poate fi pus pe seama procesului de uzură mai energic în matricea dură, precum şi pe seama prezenţei în structură a fazei moi de Sn [10].

Pentru încercarea la uzură globală s-au utilizat modele experimentale gen lagăre, avînd caracteristicile arătate la punctul 3, încercarea făcîndu-se însă la sarcină constantă $p_m = 22$ kgf/cm^2 şi viteza constantă $V = 2{,}6$ m/s. Înainte de începerea experimentărilor, cuplurile de frecare au fost rodate timp de 12 ore într-un regim identic de variaţie a vitezei şi a sarcinii. Fiecare material a lucrat cu ulei tip 408 STAS curat timp de aproximativ 80 ore, cu întreruperi după fiecare 20 de ore pentru măsurători.

Uzura cuzineților a fost determinată prin pierdere de greutate după un anumit timp de funcționare, exprimîndu-se și volumetric. Caracterul ei este deci de uzură globală în regimul de funcționare hidrodinamic respectiv.

La fus uzura nu a putut fi urmărită cantitativ, din cauza greutății prea mari a piesei față de precizia de cîntărire cerută. Aspectul calitativ al acesteia se arată la punctul 5.

În aceste condiții, după 84 ore de funcționare, aliajul Al—Sb a prezentat o uzură medie orară de $0{,}163.10^{-3}$ g, iar Al—Sn, după 70 ore de funcționare, o uzură orară medie de $0{,}06.10^{-3}$ g. Ca sens de variație, aceste cifre arată că Al—Sn prezintă o rezistență la uzură hidrodinamică mai mare decît Al—Sb. Aceasta își găsește justificarea în duritatea mai mare a fazei matrice la Al—Sn. Dacă local tensiunea de forfecare în stratul de adsorbție crește, datorită sarcinii sporite momentan pe fus, depășind astfel forța de coeziune din metal, vîrful de asperitate solicitat în felul acesta se poate detașa împreună cu molecula de lubrifiant adsorbită pe el [11]. Potrivit acestei ipoteze, microduritatea mai mică a soluției solide de aluminiu la Al—Sb și prezența ei în structură în proporție de peste 90%, poate justifica rezistența mai scăzută la uzura globală constatată la aliajul Al—Sb față de Al—Sn. Se vede că faza moale de Sn, cu microduritatea mult mai mică decît a matricei din Al—Sb, nu poate influența cu toate acestea, în mod negativ și în măsură mai hotărîtoare, rezistența la tipul acesta de uzură a aliajului Al—Sn, explicația trebuind căutată în conținutul redus, sub 6%, a acestei faze în structură.

O concluzie practică care poate fi desprinsă în cazul de față, din studiul comportării constituenților de structură la diferitele tipuri de uzură, este că pînă la un anumit grad de puritate a lubrifiantului—privind conținutul de impurități abrazive — aliajul Al—Sn este mai rezistent la uzura globală în regim hidrodinamic, decît aliajul Al—Sb. Dacă condițiile de exploatare nu permit însă menținerea acestui grad de puritate a lubrifiantului, aliajul Al—Sb devine mai avantajos din punctul de vedere al uzurii, deoarece prezintă o uzură abrazivă, deci și globală, mai scăzută. Pentru aprecierea globală a cuplului de frecare este evident că trebuie avută în vedere și uzura la fus. Aceasta nu depinde însă numai de constituenții de structură din masa materialului antifricțiune prezenți în suprafața activă a cuzinetului, ci și de compușii chimici noi, ca de exemplu Al_2O_3 în cazul de față, care se pot produce în straturile de frecare ale ansamblului, motiv pentru care nu se tratează în această lucrare aspectul uzurii la fus.

5. ASPECTE DE MICROGEOMETRIE ȘI STRUCTURĂ ÎN SUPRAFAȚA ACTIVĂ

Datorită procesului de frecare și uzură, cuplurile de frecare formează de obicei o suprafață activă specifică, a cărei microgeometrie și structură depind desigur de structura din masa materialului. În suprafața activă

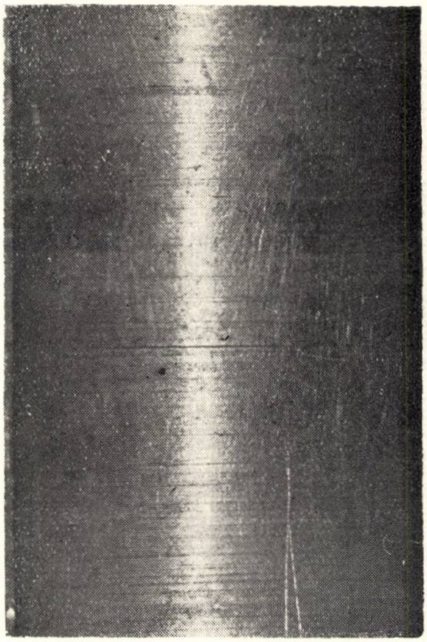


Fig. 16. — Al—Sb, suprafață activă (3 : 1).

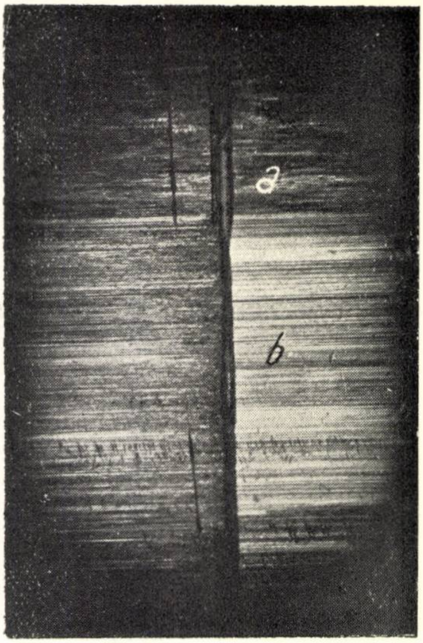


Fig. 17. — Al—Sb, suprafață activă a fusului (25 : 1). *a* — microgeometria de prelucrare ; *b* — microgeometria de lucru.

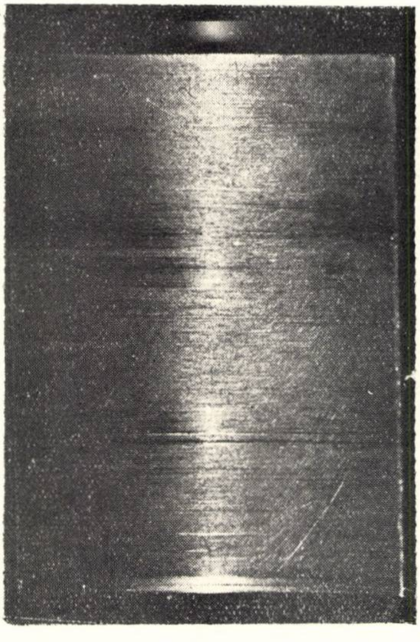


Fig. 18. — Al—Sn, suprafață activă (3,3 : 1).

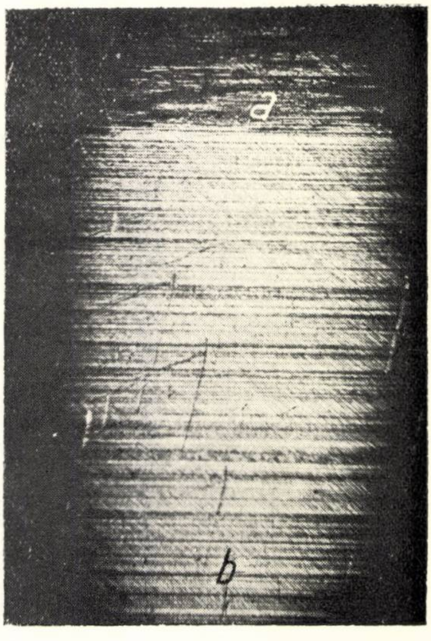


Fig. 19. — Al—Sn, suprafață activă a fusului (25 : 1). *a* — microgeometria de prelucrare : *b* — microgeometria de lucru.

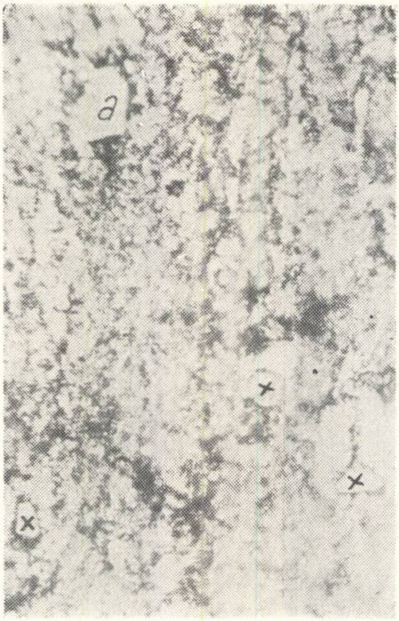


Fig. 20. — Al—Sn, particule abrazive (*a*, *x*) în suprafața activă (300 : 1).

Fig. 21. — Al—Sn, particulă abrazivă încrustată într-un gol din suprafața activă (1260 : 1).

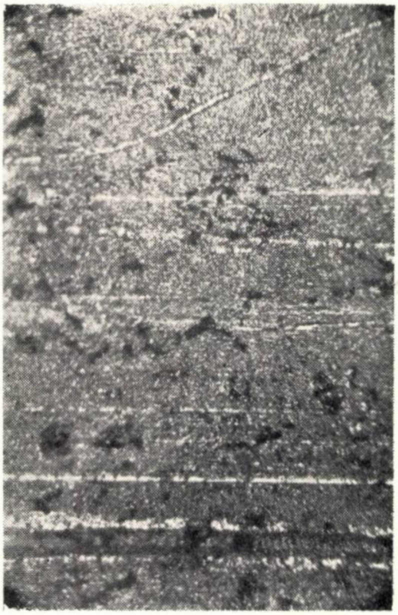


Fig. 22. — Al—Sb, suprafață activă, cu atac (100 : 1).

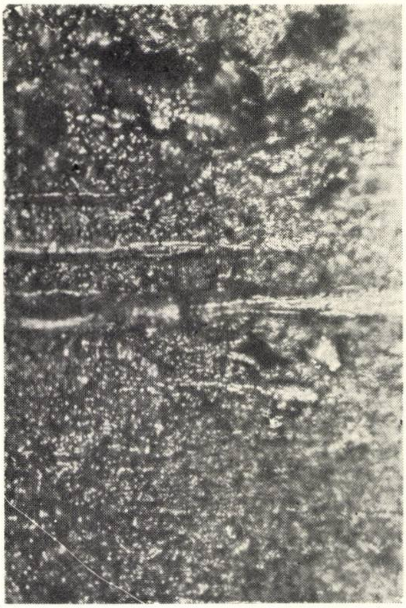


Fig. 23. — Al—Sb, suprafață activă, cu atac (600 :1).

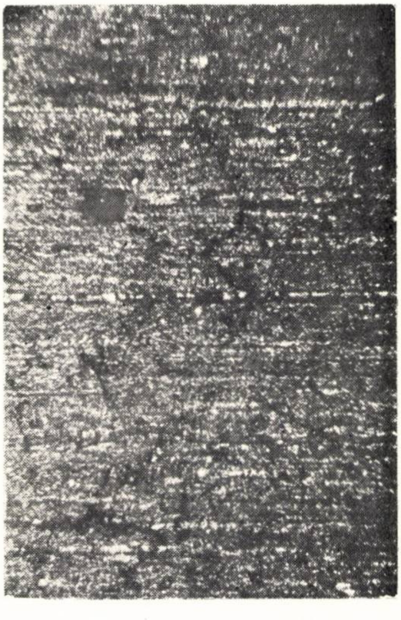


Fig. 24. — Al—Sn, suprafață activă, cu atac (100 : 1).

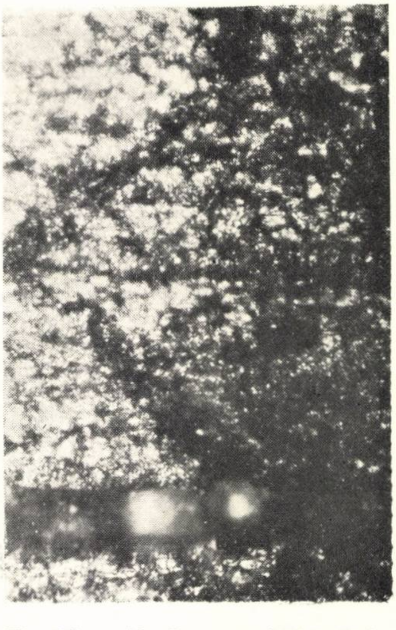


Fig. 25. — Al—Sn, suprafață activă, cu atac (600 : 1).

pot fi prezenţi toţi constituenţii de structură ai materialului sau numai o parte dintre ei. Pot apare însă şi compuşi noi rezultaţi din procesele fizico-chimice care însoţesc fenomenul frecării, studierea acestora depăşind însă cadrul acestei lucrări.

Pentru examinarea particularităţilor suprafeţei active în cazul celor două tipuri de structură, s-au luat suprafeţe active de cuzineţi din fiecare material, care au lucrat peste 40 de ore în regim hidrodinamic normal. În cazul aliajului Al--Sb, valoarea maximă a parametrilor de funcţionare a fost: $p_m = 280$ kgf/cm^2, $V = 13{,}8$ m/s, iar la aliajul Al—Sn: $p_m = 200$ kgf/cm^2 şi $V = 8{,}1$ m/s. Fusul a fost în ambele cazuri din oţel CrNi cu suprafaţa activă carbonitrurată avînd duritatea $R_c = 60-62$. Lubrifiantul folosit a fost un ulei mineral tip 408 STAS. Pentru cercetare s-a luat din cuzinet o porţiune, pe toată lăţimea suprafeţei, din zona de presiuni maxime.

În figura 16 se prezintă această porţiune de suprafaţă activă de la aliajul Al—Sb, iar în figura 17 suprafaţa corespunzătoare a fusului, dunga neagră la aceasta din urmă fiind o amprentă pentru urmărirea cantitativă a uzurii. Suprafeţele corespunzătoare pentru aliajul Al—Sn, respectiv pentru fusul conjugat, sînt arătate în figurile 18 şi 19.

Din punctul de vedere al aspectului general, microgeometria suprafeţelor active în cazul ambelor structuri se prezintă în mod sensibil asemănător, dacă se face bineînţeles abstracţie de rizurile mai pronunţate care se datoresc particulelor abrazive străine. Preponderenţa covîrşitoare în structură, la ambele aliaje, a aceluiaşi tip de fază şi anume soluţia solidă de aluminiu, era de aşteptat să dea acest aspect general foarte apropiat al microgeometriei. În ceea ce priveşte microgeometria suprafeţei active a fusurilor respective, aspectul general al acesteia ar putea fi considerat de asemenea acelaşi în cazul ambelor tipuri de structură. Rizuri puţin mai pronunţate par să se fi produs pe suprafaţa fusului care a lucrat cu Al—Sn (fig. 19). Neregularitatea lor ca mărime şi distribuţie pe suprafaţă pe de o parte, şi direcţia lor circulară pe fus pe de altă parte, pot fi considerate indicii că ele se datoresc particulelor abrazive străine întîmplătoare, încrustate în suprafaţa conjugată. În suprafaţa activă a aliajului Al—Sn au putut fi identificate într-adevăr asemenea particule străine (fig 20), poziţia de încrustare în golurile din suprafaţă fiind vizibilă clar în cazul figurii 21. În cazul aliajului Al—Sb, asemenea particule încrustate în suprafaţa activă nu au putut fi constatate, aspect asupra căruia se va reveni. Rizurile neregulate şi cu aspect circular de pe fus pot fi atribuite în acest caz în cea mai mare parte fazei dure AlSb din aliaj, care de asemenea nu are cristalitele regulate ca mărime şi formă (fig. 3).

Pentru cercetarea aspectelor de structură în suprafaţa activă a celor două cupluri de frecare, au fost examinate porţiuni de suprafaţă de la probele arătate în figura 16, respectiv 18, adică din zona de suprapresiuni maxime ale cuzinetului. În figurile 22 şi 23 se prezintă aspectele de structură în suprafaţa activă pentru aliajul Al—Sb, iar în figurile 24 şi 25 pentru aliajul Al—Sn.

Din examinarea figurilor rezultă că prin formarea suprafeței active specifice, ca efect al proceselor de frecare și uzură, particularitatea structurii din masa aliajului se păstrează în cazul ambelor aliaje studiate. Examinată la microscop, cu lumină oblică, faza dură de AlSb se prezintă ușor în relief, ceea ce confirmă rolul portant al acesteia și de protejare a fazei matrice mai moi împotriva unei uzuri excesive. Examinînd în aceleași condiții faza moale de staniu în cazul aliajului Al—Sn, această fază apare sub nivelul matricei, ceea ce arată că soluția solidă participă în mod direct în măsură mai mare la procesul de frecare și uzură. După cum s-a arătat la punctul 3, rolul mai activ al acestei faze, în procesul de uzură, a fost confirmat prin aceea că rezistența la uzură abrazivă la Al—Sn este mai mare, în timp ce uzura globală hidrodinamică este mai mică decît la Al—Sb, tocmai datorită durității mai mari a matricei. Posibilitatea de închistare a particulelor abrazive în faza moale de Sn este de asemenea confirmată pe această cale, atît prin prezența de astfel de particule în suprafața activă a aliajului (fig. 20), cît și prin aspectul de microgeometrie a fusului (fig. 19).

Particularitățile de structură în suprafața activă la aceste aliaje, sub raportul constituenților și a poziției lor în textură, nu au putut fi puse în evidență în mod la fel de detaliat ca în masa aliajelor (fig. 4 și 10). Nu apar de exemplu în figura 23 filoanele de compus definit AlSb rezultat din eutectic la marginea grăunților de soluție solidă (fig. 4). De asemenea, în figura 25 nu se pot observa aluminidele din structură alături de faza moale de Sn (fig. 10). O piedică într-un astfel de studiu de detaliu pare a nu putea fi înlăturată, și anume faptul că probele nu pot fi lustruite, deoarece s-ar pierde specificul suprafeței. Prin polizarea electrolitică diferențiată, precum și cu mijloace de investigație perfecționate în direcția punerii în evidență a parametrilor de structură, se vor putea lămuri multe din aspectele complexe ale proceselor de frecare și uzură pe calea cercetării suprafețelor active.

Primită la redacție la 22 august 1963.

SOME ASPECTS OF THE EFFECTS OF THE STRUCTURAL TYPE OF TWO ALUMINIUM ALLOYS ON THEIR SLIDING AND WEAR RESISTING PERFORMANCE

ABSTRACT

The most usual antifriction alloys have either a structure of the Charpy type with hard inclusions in a soft matrix or a semi-hard matrix with soft inclusions. In the present case the effect of the structural type on the sliding and wear resisting performance of two aluminium based alloys is studied, namely an Al—Sb alloy with hard inclusions of AlSb in a semi-hard matrix of aluminium solid solution, and

an Al—Sn alloy with a semi-hard matrix of aluminium solid solution and soft inclusions consisting of tin.

Microphotographs showing the structure of these alloys, the aspect and distribution of the basic phases are presented. The Brinell hardness and the microhardness of the main structural constituents are given. The load characteristics, the friction coefficient and the lubricant rate of flow are determined for both alloys and the relationship between these characteristics and the corresponding structures affecting the sliding and friction processes are investigated. Data pertaining to the corrosion, abrasion and total wear resistance of these alloys and their dependence upon the structural phases are also given.

The active surface of these alloys is studied from a physical viewpoint and micrographs of the structural constituents having a determinant ponder in the friction and wear processes and of the phases which play a still indetermined part are shown. The Al—Sb alloy with a hard matrix presents a smaller degree of total wear when operating under a hydrodynamic regime, provided the lubricant does not contain abrasive impurities. When such impurities cannot be avoided, the solid solution with the more reduced microhardness causes the Al—Sb alloy to be more wear resistant. The solid solution of both alloys is resistant to the corrosive action of the oleic acid showing thus that aluminium preserves its corrosion resistance in the solid solution state.

BIBLIOGRAFIE

1. G. SACHS, *Praktische Metallkunde*. J. Springer, Berlin. 1935, 123.
2. H. SCHUMANN, *Metalurgia fizică*. Edit. tehnică, București, 1962, 159, 184.
3. C. E. BEYNON, *La structure physique des alliages*. Dunod, Paris, 1947, 27.
4. GH. GUINARD, *Les alliages antifriction à base d'aluminium et d'étain*. Métaux-Corrosion-Industries, *409*, 319 (1959).
5. M. HANSEN, *Constitution of Binary Alloys*. McGraw-Hill, New York, 1958, 133, 118, 106, 153, 130, 91.
6. GH. VASILCA, *Economisirea materialelor deficitare în construcția lagărelor cu alunecare*. IDT, București, 1956, 85.
7. R. CAZAUD, *Le frottement et l'usure des métaux des antifrictions*. Dunod, Paris, 1955. 153.
8. GH. VASILCA, *Betrachtungen über isothermische Variation der Reibungszahl in Gleitlagern*. Rev. méc. appl., Acad. R.P.R., **III**, *3*, 323 (1958).
9. N. TIPEI, V. N. CONSTANTINESCU, AL. NICA, O. BIȚĂ, *Lagăre cu alunecare*. Edit. Acad. R.P.R., București, 1961, cap. XI.
10. F. P. BOWDEN, D. TABOR, *The Friction and Lubrication of Solids*. Oxford, 1954, 142.
11. E. SCHMID, R. WEBER, *Gleitlager*. Springer-Verlag, Göttingen, 1953, 54.

JETURI PLANE COMPRESIBILE MĂRGINITE DE PÎNZE DE JET SUBȚIRI

DE

CONSTANTIN SABIN IOAN

1. INTRODUCERE

Problema interacțiunii dintre două sau mai multe jeturi de gaze prezintă un interes crescînd datorită aplicațiilor sale, din ce în ce mai numeroase, în diferite domenii ale tehnicii.

Pînă în prezent au fost studiate și rezolvate numai cîteva aspecte ale problemei. Dintre acestea, deosebit de interesantă și actuală s-a dovedit cercetarea influenței jeturilor marginale asupra mișcării jeturilor fluide plane.

În lucrările [1] — [6] influența jeturilor marginale a fost studiată în anumite ipoteze simplificatoare și cazuri particulare iar, uneori, numai prin metode experimentale [7], [8].

Mai generală este metoda dată în [5] care permite calculul scurgerii unui jet plan incompresibil, mărginit de pînze de jet subțiri.

În această lucrare vom căuta să stabilim cît de mare este influența compresibilității asupra contracției unui jet plan (de gaze) mărginit de pînze de jet subțiri, extinzînd unele ipoteze admise în [5].

2. STABILIREA CONDIȚIILOR LA LIMITĂ

Să considerăm jetul de gaze irotațional care se scurge cu viteză subsonică prin ajutajul bidimensional ai cărui pereți (simetrici față de axa Ox) sînt reprezentați în figura 1 prin curbele MP și M_1P_1.

Cele două pînze de jet subțiri, care mărginesc jetul principal, țîșnesc din fantele P și P_1. În figura 1 ele sînt reprezentate prin curbele PN

şi P_1N_1. Aceste pînze de jet marginale (presupuse, din punct de vedere matematic, *infinit de subţiri*) au o formă oarecare, necunoscută apriori.

În legătură cu suprafeţele de discontinuitate — care iau naştere datorită pînzelor de jet — admitem ipoteza că ele se menţin pînă la infinit aval, unde scurgerea devine asimptotic rectilinie iar viteza jetului principal (V_∞) constantă în secţiune.

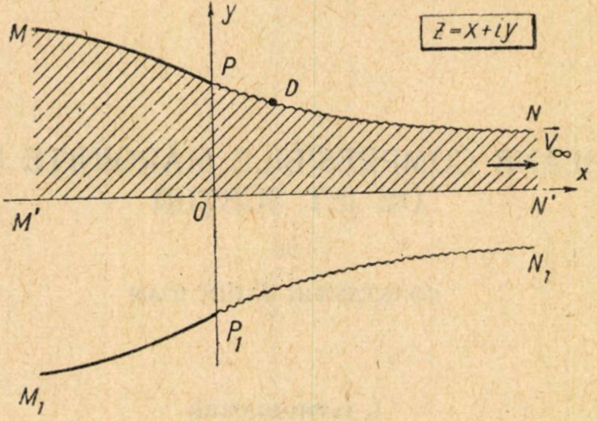


Fig. 1

Totodată vom presupune [12], [13], [5] că în lungul fiecărei pînze de jet se menţine constantă mărimea

$$j = \rho v q, \tag{1}$$

în care:

ρ — densitatea gazului,
v — viteza gazului în pînza de jet,
q — debitul specific al pînzei de jet.

Pentru jetul plan incompresibil, mărginit de pînze de jet subţiri, condiţia la limită pe curbele PN şi P_1N_1 (care reprezintă, în plan, pînzele de jet subţiri) a fost dedusă în [12], [13] şi are forma

$$\delta p = \frac{j}{r}, \tag{2}$$

în care:

$\delta p = p - p_\infty$ — reprezintă diferenţa dintre presiunea p din jetul principal şi presiunea p_∞ din mediul ambiant, presupus în repaus,
$j = \rho v q$ — mărimea (1), ce caracterizează intensitatea pînzei de jet,
r — raza de curbură a liniei de jet (PN sau P_1N_1 din figura 1) în punctul considerat.

Notînd cu $\mathrm{d}s_0$ elementul de arc (al pînzei de jet), cu θ_0 unghiul de înclinare al vectorului viteză $\vec{V}_0$ (dintr-un punct oarecare al jetului) față de axa Ox_0, iar viteza jetului la infinit aval cu $V_{\infty(0)}$, prin aplicarea formulei lui Bernoulli condiția (2) devine

$$\delta p = j\frac{\mathrm{d}\theta_0}{\mathrm{d}s_0} = \frac{1}{2}\rho_\infty V_{\infty(0)}\left(1 - \frac{V_0^2}{V_{\infty(0)}^2}\right)$$

sau

$$1 - \frac{V_0^2}{V_{\infty(0)}^2} = \frac{j}{\frac{\rho_\infty}{2}V_{\infty(0)}^2}\cdot\frac{\mathrm{d}\theta_0}{\mathrm{d}s_0} = K\frac{\mathrm{d}\theta_0}{\mathrm{d}s_0}. \tag{2'}$$

În cazul jetului de gaze mărginit de pînze de jet subțiri, condiția la limită (2) va trebui transformată folosind formula lui Bernoulli pentru fluide compresibile,

$$\delta p = p - p_\infty = p_\infty\left[\left(\frac{a^2}{a_\infty^2}\right)^{\frac{\varkappa}{\varkappa-1}} - 1\right]. \tag{3}$$

Dezvoltînd în serie raportul $\left(\frac{a^2}{a_\infty^2}\right)^{\frac{\varkappa}{\varkappa-1}}$ după puterile crescătoare ale numărului Mach $\left(M_\infty = \frac{V_\infty}{a_\infty}\right)$, se obține

$$\left(\frac{a^2}{a_\infty^2}\right)^{\frac{\varkappa}{\varkappa-1}} = 1 + \frac{\varkappa}{2}M_\infty^2\left(1 - \frac{V^2}{V_\infty^2}\right) + M_\infty^4(\ldots) + \ldots \tag{4}$$

Reținînd numai primii doi termeni ai dezvoltării, iar apoi introducînd expresia (4) în formula Bernoulli (3), rezultă

$$\delta p = p - p_\infty = \frac{\varkappa}{2}p_\infty M_\infty^2\left(1 - \frac{V^2}{V_\infty^2}\right). \tag{5}$$

Adoptînd pentru jetul compresibil notațiile $\mathrm{d}s$, θ, V și V_∞, dacă se ține seama de (5), condiția la limită (2) ia forma

$$\delta p = j\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s} = \frac{\varkappa}{2}p_\infty M_\infty^2\left(1 - \frac{V^2}{V_\infty^2}\right) \tag{6}$$

sau

$$1 - \frac{V^2}{V_\infty^2} = \frac{j}{\frac{\varkappa}{2}p_\infty M_\infty^2}\cdot\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s} = K\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}, \tag{6'}$$

în care

$$\frac{\varkappa}{2}p_\infty M_\infty^2 = \frac{\rho_\infty}{2}V_\infty^2. \tag{7}$$

Comparînd expresiile (2′) şi (6′) se constată că, *într-o primă aproximaţie, condiţia la limită pe suprafeţele laterale ale jetului plan compresibil are aceeaşi formă ca şi cea stabilită în* [5] *pentru jetul de fluid incompresibil, mărginit de pînze de jet subţiri.*

Avînd în vedere această observaţie, pentru stabilirea noilor condiţii la limită şi rezolvarea problemei propuse vom extinde *metoda hodografică prin aproximări succesive*, dată în [9] şi [10].

Ecuaţia fundamentală a metodei hodografice este [11]

$$\left(\frac{\rho_\infty}{\rho}+1\right)\frac{\partial\omega}{\partial\bar{f}}+\left(\frac{\rho_\infty}{\rho}-1\right)\frac{\partial\omega}{\partial f}=\frac{1}{2}\frac{\rho_\infty}{\rho}\frac{V^2}{a^2}\left(\frac{\partial\omega}{\partial f}+\frac{\partial\omega}{\partial\bar{f}}-\frac{\partial\bar{\omega}}{\partial f}-\frac{\partial\bar{\omega}}{\partial\bar{f}}\right), \tag{8}$$

în care :

$f=\varphi+\mathrm{i}\psi$ şi $\bar{f}=\varphi-\mathrm{i}\psi$ sînt noile variabile,

$\omega(f,\bar{f})=\theta+\mathrm{i}\tau$ şi $\bar{\omega}(f,\bar{f})=\theta-\mathrm{i}\tau$,

a — viteza sunetului,

ρ_∞ — densitatea fluidului într-un punct situat la mari distanţe.

În funcţia $\omega(f,\bar{f})=\theta+\mathrm{i}\tau$ de variabile f şi $\bar{f}$, ca şi în conjugata sa $\bar{\omega}(f,\bar{f})=\theta-\mathrm{i}\tau$, θ reprezintă unghiul dintre viteza $\vec{V}$ şi axa Ox, iar $\tau=\ln\frac{V}{V_\infty}\cdot$ În vederea simplificării calculelor, considerînd V_∞ drept unitate pentru viteze (deci $V_\infty=1$ m/s), vom scrie $\tau=\ln V$.

Dacă dezvoltăm aceste funcţii în serii de puteri,

$$\begin{aligned}\omega(f,\bar{f})&=\omega_0(f,\bar{f})+M_\infty^2\omega_1(f,\bar{f})+\ldots+M_\infty^{2n}\omega_n(f,\bar{f})+\ldots,\\ \bar{\omega}(f,\bar{f})&=\bar{\omega}_0(f,\bar{f})+M_\infty^2\bar{\omega}_1(f,\bar{f})+\ldots+M_\infty^{2n}\bar{\omega}_n(f,\bar{f})+\ldots,\end{aligned} \tag{9}$$

notînd

$$M_\infty=\frac{V_\infty}{a_\infty},\ \omega_n(f,\bar{f})=\theta_n+\mathrm{i}\tau_n\ \text{iar}\ \bar{\omega}_n(f,\bar{f})=\theta_n-\mathrm{i}\tau_n,$$

se va putea scrie

$$V^2=\mathrm{e}^{2\tau}=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega-\bar{\omega})}=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega_0-\bar{\omega}_0)}\left[1-\mathrm{i}M_\infty^2(\omega_1-\bar{\omega}_1)+M_\infty^4(\ldots)\right] \tag{10}$$

şi

$$\frac{\rho_\infty}{\rho}=1+\frac{1}{2}M_\infty^2\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega_0-\bar{\omega}_0)}+M_\infty^4(\ldots)+\ldots \tag{11}$$

Introducînd dezvoltările (10) și (11) în ecuația (8), iar apoi identificînd coeficienții termenilor care conțin numărul M^2_∞ la diferite puteri, se deduce succesiv:

$$\frac{\partial \omega_0}{\partial \bar{f}} = 0 \text{ și corespunzător } \frac{\partial \bar{\omega}_0}{\partial f} = 0,$$

$$\frac{\partial \omega_1}{\partial \bar{f}} = -\frac{e^{2\tau_0}}{4} \cdot \frac{\partial \bar{\omega}_0}{\partial \bar{f}} \text{ etc.,} \tag{12}$$

în care $2\tau_0 = -i(\omega_0 - \bar{\omega}_0)$.

Din prima ecuație (12) rezultă

$$\omega_0 = \omega_0(f), \tag{13}$$

relație caracteristică mișcării incompresibile.

În cele ce urmează, *vom considera* $\omega_0(f)$ *drept funcția lui Levi-Cività pentru așa-numita „mișcare de bază"*, prima aproximație a mișcării compresibile.

Integrînd a doua dintre ecuațiile (12) se obține

$$\omega_1(f, \bar{f}) = \frac{i}{4} e^{-i(\omega_0 - \bar{\omega}_0)} + g(f), \tag{14}$$

$g(f)$ fiind o funcție analitică de f.

Așadar, pentru a trece la a doua aproximație în studiul mișcării jetului compresibil, mărginit de pînze de jet subțiri, va trebui să determinăm funcția $g(f)$.

În calcule vom folosi notațiile:

a) *pentru mișcarea de bază* (jetul incompresibil),

$$\omega_0(f) = \omega_0^{(0)}(f) + \omega_0^{(1)}(f), \tag{15}$$

în care:

$\omega_0(f) = \theta_0 + i\tau_0$ — reprezintă funcția lui Levi-Cività pentru jetul plan *incompresibil*, mărginit de două pînze de jet subțiri,

$\omega_0^{(0)}(f) = \theta_0^{(0)} + i\tau_0^{(0)}$ — soluția problemei Kirchhoff pentru jetul principal, în absența pînzelor de jet marginale,

$\omega_0^{(1)}(f) = \theta_0^{(1)} + i\tau_0^{(1)}$ — funcția corespunzătoare influenței jeturilor marginale;

b) *pentru mișcarea jetului compresibil*,

$$\omega(f, \bar{f}) = \omega_0(f) + M^2_\infty\, \omega_1(f, \bar{f}), \tag{16}$$

în care:

$\omega(f, \bar{f}) = \theta + i\tau$ — reprezintă funcția ce caracterizează mișcarea în jetul plan compresibil, mărginit de pînze de jet subțiri,

$\omega_0(f) = \theta_0 + i\tau_0$ — funcția definită prin expresia (15),

$\omega_1(f, \bar{f}) = \theta_1 + i\tau_1$ — funcția (14), pe care va trebui să o determinăm.

În lipsa jeturilor marginale, condițiile la limită pentru scurgerea unui jet gazos au o formă simplă :

— de-a lungul pereților solizi

$$\theta = \theta_0 \text{ deci } \theta_1 = 0, \tag{17}$$

— pe suprafețele libere

$$\tau = \tau_0 \text{ deci } \tau_1 = 0. \tag{18}$$

Urmînd raționamentul din [11], pe pereții solizi ai ajutajului vom putea impune condiția (17) și în prezența pînzelor de jet marginale. Însă de-a lungul acestora, condiția la limită are o formă mult mai complicată decît (18).

Pentru a o deduce, observăm că în planul (z_0) configurația mișcării se construiește cu ajutorul formulei

$$\mathrm{d}z_0 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0(f)}\mathrm{d}f, \tag{19}$$

iar pentru a trece în planul (z) trebuie să pornim de la dezvoltarea

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0}\,[1 + \mathrm{i}\, M_\infty^2\, \omega_1(f, \bar{f})] \tag{20}$$

care, ținînd seama de (14), devine

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0}\left[1 + \mathrm{i}M_\infty^2\left(\frac{\mathrm{i}}{4}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega_0-\bar{\omega}_0)} + g\,(f)\right)\right]. \tag{20'}$$

Cu aceste observații, din formula [11]

$$\mathrm{d}z = \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega}\left(2 + \frac{M_\infty^2}{2}\,\mathrm{e}^{2\tau_0}\right)\mathrm{d}f - \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega}\left(\frac{M_\infty^2}{2}\,\mathrm{e}^{2\tau_0}\right)\mathrm{d}\bar{f}$$

se deduce relația

$$\mathrm{d}z = [1 + \mathrm{i}\, M_\infty^2\, g\,(f)]\,\mathrm{d}z_0 - \frac{M_\infty^2}{4}\,\overline{\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z_0}\right)^2 \mathrm{d}z_0}, \tag{21}$$

care stabilește corespondența dintre planele (z_0) și (z). Trebuie menționat că în calcule s-au neglijat termenii de ordin superior τ_0^2, M_∞^4 și produsele $M_\infty^2\,\tau_0$, considerînd că τ_0 și M_∞^2 sînt de același ordin de mărime.

Notînd $g\,(f) = A + \mathrm{i}B$, din (21) se poate deduce (neglijînd termenii de ordin superior) relația de corespondență valabilă pe liniile care reprezintă în plan jeturile marginale,

$$\mathrm{d}s = \left[1 - M_\infty^2\left(B + \frac{1}{4}\right)\right]\mathrm{d}s_0. \tag{22}$$

Introducînd relația (22) în condiția la limită

$$1 - \frac{V^2}{V_\infty^2} = 1 - \mathrm{e}^{2\tau} = K\,\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s},$$

după simplificări se obține

$$-2B = \frac{1}{2} + K\frac{dA}{ds_0} + \tau_0^{(1)}. \tag{23}$$

Așadar, (23) reprezintă condiția la limită pe care funcția $g(f)$ trebuie să o satisfacă pe liniile de jet.

Pentru a determina funcția $g(f)$, o vom scrie în forma

$$g(f) = -\frac{i}{4} + g_1(f) = A + iB = -\frac{i}{4} + A_1 + iB_1,$$

din care rezultă

$$A = A_1 \quad \text{și} \quad B = B_1 - \frac{1}{4}. \tag{24}$$

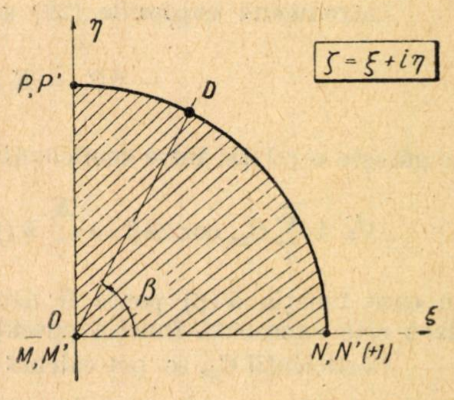


Fig. 2

Introducînd în (23) expresiile corespunzătoare pentru A și B (24), se obține condiția la limită

$$-2B_1 = K\frac{dA_1}{ds_0} + \tau_0^{(1)} \tag{25}$$

pe care funcția $g_1(f)$ trebuie să o satisfacă în lungul liniilor de jet.

În vederea determinării funcției $g_1(f)$, scurgerea fiind simetrică față de axa Ox, vom recurge la reprezentarea conformă a domeniului $MM'N'NPM$ ocupat de fluid (hașurat în figura 1) pe sfertul de cerc (de rază unitatea) din primul cadran al planului auxiliar (ζ), cu corespondența frontierelor indicată pe figura 2.

Condițiile la limită pentru funcția $g_1(f)$ în planul (ζ) sînt :

$$\begin{aligned} &\text{pe } \overline{MN}: A_1 = 0,\\ &\text{pe } \overline{MP}: A_1 = 0, \\ &\text{pe } \widehat{NP}: -2B_1 = K\,h(\beta)\frac{dA_1}{d\beta} + \tau_0^{(1)}. \end{aligned} \tag{26}$$

Deoarece $A_1 = 0$ pe frontierele $\overline{PM}$ și $\overline{MN}$, funcția $g_1(\zeta)$ poate fi prelungită analitic în tot cercul unitar conform principiului lui Schwarz și, de aceea, admite o dezvoltare în serie Taylor de forma

$$g_1(\zeta) = i\sum_0^\infty C_{2n}\zeta^{2n}, \tag{27}$$

în care coeficienții C_{2n} sînt reali.

Separînd partea reală de cea imaginară, din (27) se deduce

$$A_1 = -\sum_0^\infty C_{2n} \sin 2n\,\beta, \tag{28}$$

$$B_1 = \sum_0^\infty C_{2n} \cos 2n\beta \tag{29}$$

şi

$$\frac{\mathrm{d}A_1}{\mathrm{d}\beta} = \sum_0^\infty 2n\, C_{2n} \cos 2n\,\beta. \tag{30}$$

Introducînd expresiile (29) şi (30) în condiţia la limită

$$-2B_1 = K\,h(\beta)\frac{\mathrm{d}A_1}{\mathrm{d}\beta} + \tau_0^{(1)} \tag{31}$$

se găseşte o relatie între coeficienţii dezvoltării Taylor, de forma

$$C_0 + \sum_1^\infty C_{2n} \cos 2n\beta = \frac{K}{2}\,h(\beta)\sum_0^\infty 2n\, C_{2n} \cos 2n\,\beta - \frac{\tau_0^{(1)}}{2}, \tag{32}$$

în care funcţia $h(\beta)$ poate fi determinată pentru fiecare caz concret, dacă este cunoscută funcţia potenţial complex $f(\zeta)$ a mişcării de bază.

Coeficienţii C_{2n} se pot calcula alegînd n puncte $(\beta_0, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ convenabil dispuse pe arcul de cerc $\overset{\frown}{PN}$ şi scriind că relaţia (32) este satisfăcută în aceste puncte. Astfel se formează un sistem de n ecuaţii liniare, necunoscutele fiind primii n coeficienţi ai dezvoltării.

Cunoscînd valoarea coeficienţilor $C_0, C_2, C_4, C_6, \ldots, C_{2n}$, funcţiile $g_1(\zeta)$ şi $g(\zeta)$ sînt determinate iar configuraţia mişcării poate fi stabilită cu ajutorul relaţiei (21).

3. CALCULUL COEFICIENTULUI DE CONTRACŢIE

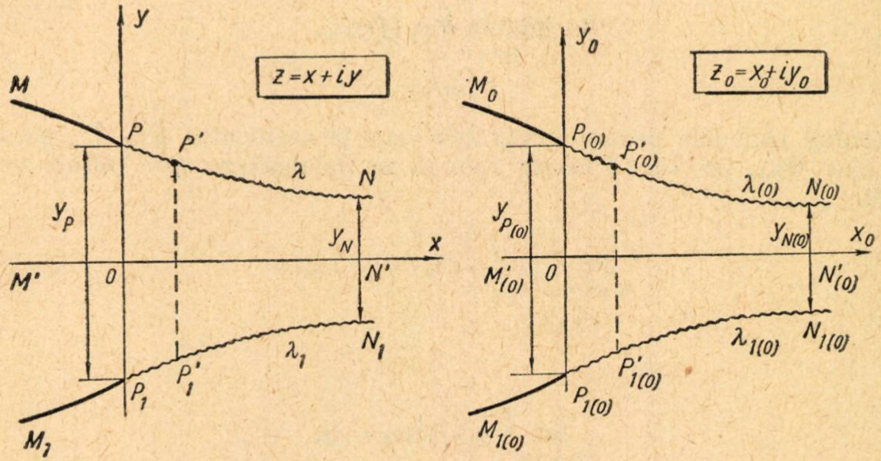
Vom căuta să exprimăm coeficientul de contracţie pentru jetul plan, compresibil, mărginit de pînze de jet subţiri $\left(\sigma = \frac{y_N}{y_P}\right)$ în funcţie de coeficientul mişcării de bază corespunzătoare $\left(\sigma_0 = \frac{y_{N(0)}}{y_{P(0)}}\right)$.

Să ne referim la un ajutaj simetric, bidimensional, ai cărui pereţi MP şi M_1P_1, sînt reprezentaţi în figura 3.

Pentru jetul incompresibil (mişcarea de bază), pereţii ajutajului îi reprezentăm prin curbele $M_{(0)}P_{(0)}$ şi $M_{1(0)}P_{1(0)}$, iar pînzele de jet marginale prin curbele $P_{(0)}N_{(0)}$ şi $P_{1(0)}N_{1(0)}$.

De la configurația din planul (z_0) vom trece la aceea din planul (z) cu ajutorul formulei (21), curbele MP, M_1P_1, PN și P_1N_1, construindu-se aposteriori.

Să calculăm mai întîi secțiunea (lărgimea) jetului compresibil la infinit aval (y_N).


y
$z=x+iy$
M
P
P'
λ
N
y_P
y_N
x
M'
0
N'
N_1
λ_1
P_1'
P_1
M_1
y_0
$z_0=x_0+iy_0$
M_0
$P_{(0)}$
$P'_{(0)}$
$\lambda_{(0)}$
$N_{(0)}$
$y_{P(0)}$
$y_{N(0)}$
x_0
$M'_{(0)}$
0
$N'_{(0)}$
$\lambda_{1(0)}$
$N_{1(0)}$
$P'_{1(0)}$
$P_{1(0)}$
$M_{1(0)}$

Jetul compresibil

Jetul incompresibil (mișcarea de bază)

Fig. 3

Introducînd în (21) funcția $g(f)$ scrisă în forma $g(f) = \frac{i}{4} + g_1(f)$, obținem

$$dz = \left(1 + \frac{M_\infty^2}{4}\right)dz_0 - \frac{M_\infty^2}{4}\overline{\left(\frac{df}{dz_0}\right)^2}dz_0 + i\, M_\infty^2\, g_1(f)\, dz_0. \qquad (33)$$

Observînd că pentru $V_\infty = 1\text{m/s}$

$$\frac{df}{dz_0} = e^{-i\omega_0} = Ve^{-i\theta_0} = V\cos\theta_0 - i\,V\sin\theta_0\,,$$

deci

$$dz_0 = e^{\,i\omega_0}\,df = \frac{e^{i\theta_0}}{V}\,df = \frac{1}{V}(\cos\theta_0 + i\sin\theta_0)\,df,$$

rezultă că

$$\left(\frac{df}{dz_0}\right)^2 dz_0 = V(\cos 2\theta_0 - i\sin 2\theta_0)(\cos\theta_0 + i\sin\theta_0)(d\varphi + i d\psi).$$

Astfel, din (33) vom obține

$$y_N = \left(1 + \frac{M_\infty^2}{4}\right) y_{N(0)} + \mathrm{i}\,\frac{M_\infty^2}{4} \lim_{x_0 \to +\infty} \overline{\int_{P'_{1(0)}}^{P'_{(0)}} \left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z_0}\right)^2 \mathrm{d}z_0} + \tag{34}$$

$$+ M_\infty^2 \lim_{x_0 \to +\infty} \int_{P'_{1(0)}}^{P'_{(0)}} g_1(f)\, \mathrm{d}z_0 .$$

Efectuînd calculele pentru integralele luate pe segmentul $P'_{1(0)}\, P'_{(0)}$ paralel cu axa Oy_0, pe care-l facem apoi să se îndepărteze spre infinit aval, găsim

$$\lim_{x_0 \to +\infty} \overline{\int_{P'_{1(0)}}^{P'_{(0)}} \left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z_0}\right)^2 \mathrm{d}z_0} = -\,\mathrm{i}\, y_{N(0)}$$

și

$$\lim_{x_0 \to +\infty} \int_{P'_{1(0)}}^{P'_{(0)}} g_1(f)\, \mathrm{d}z_0 = 0.$$

Prin urmare,

$$y_N = \left(1 + \frac{M_\infty^2}{2}\right) y_{N(0)} \tag{35}$$

formulă identică cu cea dată în [11] (p. 710).

Lărgimea (y_P) a orificiului ajutajului (PP_1) o vom calcula în funcție de lărgimea $(y_{P(0)})$ a orificiului $(P_{(0)}\, P_{1(0)})$. Din (21) se deduce imediat

$$y_P = \left(1 + \frac{M_\infty^2}{4}\right) y_{P(0)} + \frac{M_\infty^2}{4}\,\mathrm{i}\, \overline{\int_{P_{1(0)}}^{P_{(0)}} \left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z_0}\right)^2 \mathrm{d}z_0} + M_\infty^2 \int_{P_{1(0)}}^{P_{(0)}} g_1(f)\, \mathrm{d}z_0 . \tag{36}$$

Alegem ca drum de integrare între $P_{1(0)}$ și $P_{(0)}$ un contur alcătuit din porțiunea liniei de jet $\lambda_{1(0)}$ între $P_{1(0)}$ și $P'_{1(0)}$, segmentul $P'_{1(0)} P'_{(0)}$ și porțiunea liniei $\lambda_{(0)}$ între $P'_{(0)}$ și $P_{(0)}$.

Pentru prima integrală, contribuția segmentului $P'_{1(0)}P'_{(0)}$ este egală la limită $(x_0 \to +\infty)$ cu $-\,\mathrm{i}\, y_{N(0)}$, iar în virtutea simetriei vom putea scrie

$$\overline{\int_{P_{1(0)}}^{P_{(0)}} \left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z_0}\right)^2 \mathrm{d}z_0} = \int \overline{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_0}\, \mathrm{d}f} = \int \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\bar{\omega}}\, \mathrm{d}f = 2\mathrm{i} \int_{\lambda_{1(0)}} \mathrm{e}^{\tau_0} \sin\, \theta_0\, \mathrm{d}\varphi - \mathrm{i}\, y_{N(0)} .$$

Pentru a doua integrală, remarcăm că

$$\lim_{x\to\infty}\int_{P_{1(0)}P_{(0)}} g_1(f)\,\mathrm{d}z_0 = \mathcal{R}e\int_{P_{1(0)}P_{(0)}} g_1(f)\,\mathrm{d}z_0.$$

Cu aceste observații, (36) devine

$$y_P = \left(1+\frac{M_\infty^2}{4}\right)y_{P(0)} + \frac{M_\infty^2}{4}\left(y_{N(0)} - 2\int_{\lambda_{1(0)}} e^{\tau_0}\sin\theta_0\,\mathrm{d}\varphi\right) + M_\infty^2\,\mathcal{R}e\int_{P_{1(0)}P_{(0)}} g_1(f)\,\mathrm{d}z_0. \tag{36'}$$

Împărțind (35) la (36′) obținem formula coeficientului de contracție

$$\sigma = \frac{y_N}{y_P} = \frac{\left(1+\dfrac{M_\infty^2}{2}\right)y_{N(0)}}{\left(1+\dfrac{M_\infty^2}{2}\right)y_{P(0)} + \dfrac{M_\infty^2}{4}y_{N(0)} - \dfrac{M_\infty^2}{2}\displaystyle\int_{\lambda_{1(0)}} e^{\tau_0}\sin\theta_0\,\mathrm{d}\varphi + M_\infty^2\,\mathcal{R}e\int_{P_{1(0)}P_{(0)}} g_1(f)\,\mathrm{d}z_0}. \tag{37}$$

În această formulă generală se pot face unele simplificări. Deoarece $\mathrm{d}z_0 = e^{i\omega_0}\,\mathrm{d}f$, rezultă că

$$y_{P(0)} = 2\int_{\lambda_{1(0)}} e^{-\tau_0}\sin\theta_0\,\mathrm{d}\varphi + y_{N(0)}.$$

Dacă în integralele $\displaystyle\int_{\lambda_{1(0)}} e^{-\tau_0}\sin\theta_0\,\mathrm{d}\varphi$ și $\displaystyle\int_{\lambda_{1(0)}} e^{\tau_0}\sin\theta_0\,\mathrm{d}\varphi$ facem $e^{\tau_0}\approx e^{-\tau_0}\approx 1$ (aproximație justificată de valoarea foarte mică a funcției τ_0 de-a lungul jeturilor marginale), se deduce egalitatea

$$I = \int_{\lambda_{1(0)}} e^{-\tau_0}\sin\theta_0\,\mathrm{d}\varphi = \int_{\lambda_{1(0)}} e^{\tau_0}\sin\theta_0\,\mathrm{d}\varphi.$$

Astfel $y_{P(0)} - y_{N(0)} = 2I$, iar din (36′) reiese că

$$y_P = y_{P(0)} + \frac{M_\infty^2}{2}y_{N(0)} + M_\infty^2\,\mathcal{R}e\int_{P_{1(0)}P_{(0)}} g_1(f)\,\mathrm{d}z_0. \tag{38}$$

Formula aproximativă a coeficientului de contracție va fi

$$\sigma = \frac{\left(1+\dfrac{M_\infty^2}{2}\right)y_{N(0)}}{y_{P(0)} + \dfrac{M_\infty^2}{2}\left(y_{N(0)} + 2\,\mathcal{R}e\displaystyle\int_{P_{1(0)}P_{(0)}} g_1(f)\,\mathrm{d}z_0\right)}. \tag{39}$$

Punînd în evidență coeficientul de contracție σ_0 (al mişcării de bază corespunzătoare), se obține

$$\sigma = \sigma_0 \left\{1 + \frac{M_\infty^2}{2}\left[1 - \sigma_0 \left(1 + \frac{2}{y_{N(0)}} \mathcal{R}e \int\limits_{P_{1(0)}\,P_{(0)}} g_1(f)\,\mathrm{d}z_0\right)\right]\right\}. \tag{40}$$

În formula (40), σ_0 reprezintă coeficientul de contracție al jetului incompresibil relativ la pereții $M_{(0)}P_{(0)}$ şi $M_{1(0)}\,P_{1(0)}$. Pentru ajutajul plan cu pereți rectilinii, care fac unghiurile $-\alpha$ şi $+\alpha$ $(0 < \alpha < \pi)$ cu axa Ox_0, coeficientul σ_0 nu depinde decît de unghiul α.

4. APLICAȚIE ÎN CAZUL UNUI AJUTAJ CONVERGENT SIMETRIC, CU PEREȚI RECTILINII

Să particularizăm formulele stabilite pentru jetul plan compresibil care se scurge printr-un ajutaj simetric, cu pereți rectilinii (fig. 4).

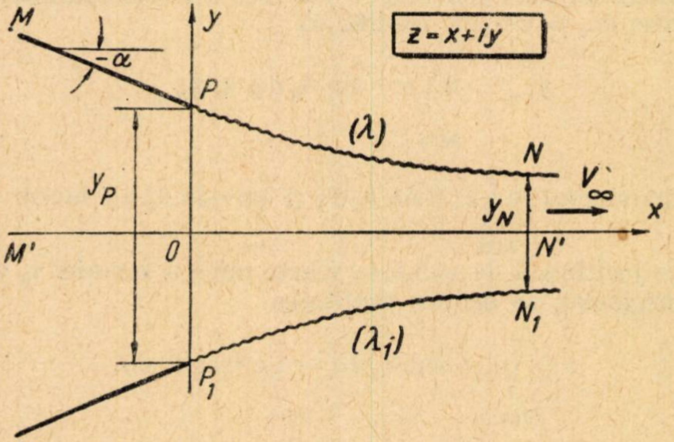


Fig. 4

Vom efectua calculele considerînd că debitele pînzelor de jet marginale (λ) şi (λ_1) sînt suficient de mici față de debitul jetului principal $(2Q)$, astfel încît condiția la limită (31) să fie satisfăcută.

Funcția potențial complex pentru mişcarea de bază fiind cunoscută [5]

$$f(\zeta) = \frac{2Q}{\pi} \ln \frac{2\zeta}{\zeta^2 - 1} + 2\mathrm{i}\,Q,$$

şi observînd că debitul $2Q = y_{N(0)}$ (pentru $V_\infty = 1$ m/s), condiţia la limită (31) se va scrie

$$2B_1 = \frac{\pi K}{y_{N(0)}}\,[1 + \tau_0^{(1)}(\beta)]\,\mathrm{tg}\,\beta\,\frac{\mathrm{d}A_1}{\mathrm{d}\beta} - \tau_0^{(1)}\,.$$

Corespunzător, relaţia (32) dintre coeficienţii seriei Taylor devine

$$C_0 + \sum_{1}^{\infty} C_{2n}\cos 2n\beta = -\frac{\pi K}{y_{N(0)}}\,(1 + \tau_0^{(1)})\,\mathrm{tg}\,\beta \sum_{0}^{\infty} n\,C_{2n}\cos 2n\,\beta - \frac{\tau_0^{(1)}}{2}\,.$$

Din calculele numerice s-a constatat că se obţin rezultate satisfăcătoare rezolvînd sistemul de patru ecuaţii liniare cu patru necunoscute (C_0, C_2, C_4 şi C_6), format din relaţia precedentă pentru $\beta_0 = 0°$, $\beta_1 = 30°$, $\beta_2 = 60°$ şi $\beta_3 = 85°$.

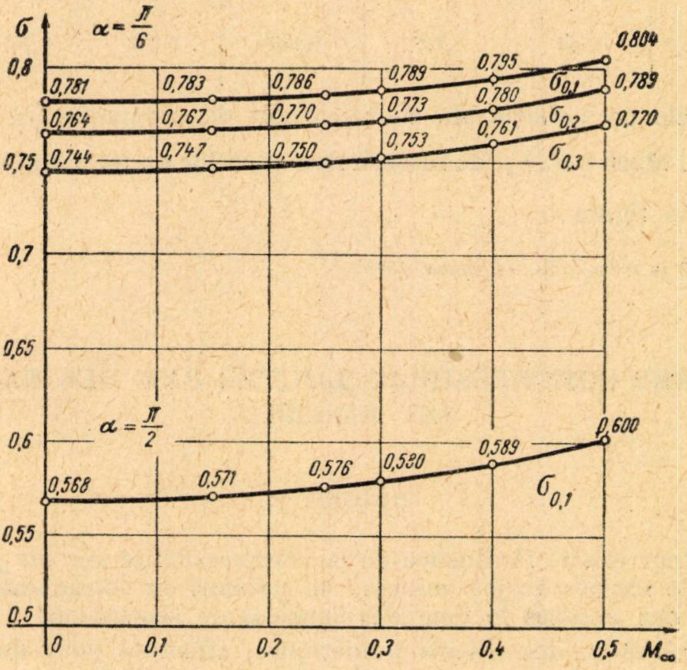


Fig. 5

Considerînd scurgerea aerului printr-o fantă practicată într-un perete plan $\left(\alpha = \dfrac{\pi}{2}\right)$ şi luînd $\dfrac{K}{y_{N(0)}} = 0{,}1$ pentru jeturile marginale, din (40) au rezultat următoarele valori ale coeficientului de contracţie:

M_∞	0	0,15	0,25	0,3	0,4	0,5
σ	0,568	0,571	0,576	0,580	0,589	0,600

În cazul ajutajului convergent cu $\alpha = \frac{\pi}{6}$, s-au găsit valorile :

	M_∞	0	0,15	0,25	0,3	0,4	0,5
σ	$\frac{K}{y_{N(0)}} = 0{,}1$	0,781	0,783	0,786	0,789	0,795	0,804
	$\frac{K}{y_{N(0)}} = 0{,}2$	0,764	0,767	0,770	0,773	0,780	0,789
	$\frac{K}{y_{N(0)}} = 0{,}3$	0,744	0,747	0,750	0,753	0,761	0,770

Curbele de variație ale coeficientului de contracție (σ) în funcție de numărul Mach (M_∞) și de intensitatea pînzelor de jet marginale $\left(\frac{K}{y_{N(0)}}\right)$ sînt date în figura 5.

Primită la redacție la 14 august 1963

JETS PLANS COMPRESSIBLES LIMITÉS PAR DES NAPPES DE JET MINCES

RÉSUMÉ

L'auteur étudie l'influence de la compressibilité sur un jet plan limité par de nappes de jet minces, en prenant en considération la discontinuité des vitesses le long des surfaces de séparation.

Les résultats des calculs numériques, effectués pour des ajutages convergents à parois planes, mettent en évidence l'influence de la compressibilité sur le coefficient de contraction du jet principal.

BIBLIOGRAFIE

1. Erich F. Fredrich, *Penetration and Deflection of Jets oblique to a General Stream.* Journal of the Royal Aeronautical Sciences, *2*, 99—104 (1953).
2. M. Kadosch, *Mécanisme de la déviation des jets propulsifs.* Publications scientifiques et techniques du Ministère de l'air, *124* (1959).
3. Т. С. Соломахова, *Соударение двух газовых струй, движущихся навстречу одна другой.* Вестник Московского университета, **1**, *1*, 50 (1961).
4. — *Вытекание газовой струи из щели в поток газа.* ЦАГИ, Промышленная аэродинамика, **23**, 215 (1962).

5. D. PANTAZOPOL, C. S. IOAN, *O metodă pentru studiul jeturilor plane incompresibile mărginite de pînze de jet subţiri.* St. cerc. mec. apl., **XIV**, *4* (1963).
6. D. PANTAZOPOL, T. COMĂNESCU, *Influenţa unei pînze de jet asupra devierii unui jet plan.* St. cerc. mec. apl., **XIV**, *5* (1963).
7. F. MAUNOURY, M. KADOSCH, *Contrôle par jet transversal de la section d'éjection des tuyère à réaction.* C. R. Acad. Sci. Paris, *241*, 623–624 (1956).
8. G. DUPUICHS, *Mécanisme de la déviation d'un écoulement supersonique par un jet transversal.* Technique et science aéronautiques et spatiales, *2* (1962).
9. CAIUS IACOB, Mathematica, Cluj, **XXII**, 170–181 (1946).
10. — C. R. Acad. Sci. Paris, *222*, 1329 (1946).
11. — *Introducere matematică în mecanica fluidelor.* Edit. Acad. R.P.R., Bucureşti, 1952, 693–699, 710–712.
12. L. MALAVARD, *Sur une théorie linéaire du soufflage au bord de fuite d'un profil d'aile.* C.R. Acad. Sci. Paris, *242* (1956).
13. N. N. PATRAULEA, *Contributions théoriques à l'étude des profils à volet fluide (Jet—Flap).* IX-e Congrès International de Mécanique Appliquée, Actes, Bruxelles, 1957, I. 457.

STUDII

ASUPRA PROBLEMEI URCĂRII ÎN TIMP MINIM A RACHETELOR

DE

AL. MARINESCU

531 : 629.136.3

NOTAŢII

V — viteza de zbor a rachetei,
w — viteza ascensională,
c — viteza efectivă de ejecţie,
θ — unghiul tangentei la traiectorie cu orizontala,
α — unghiul de incidenţă,
z — altitudinea,
G — greutatea rachetei,
P — portanţa,
R — rezistenţa la înaintare,
T — tracţiunea,
M — masa rachetei variabilă cu timpul,
g — acceleraţia gravitaţiei,
t — timpul,
ρ — densitatea aerului.

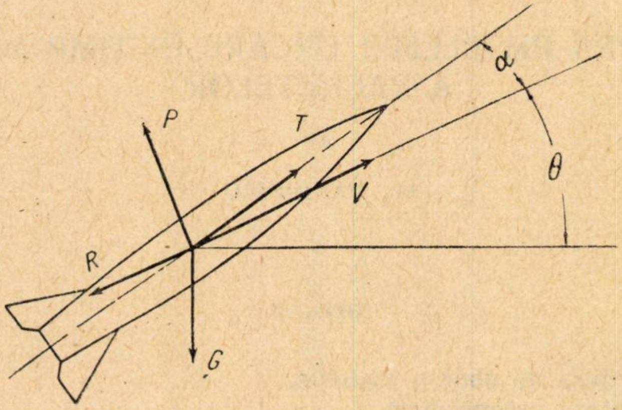
Problema urcării optime din punct de vedere al timpului de urcare a început să facă în ultima vreme obiectul multor cercetări atît pentru avioanele cu reacţie de mare viteză, considerate ca corpuri de masă invariabilă, cît şi pentru rachete considerate ca corpuri de masă variabilă [1]–[4].

În lucrarea de faţă, urmărind îndeaproape lucrarea [4], vom examina într-o formă completă problema urcării în timp minim a rachetei considerată ca un corp cu masă variabilă, adoptînd ca variabilă independentă altitudinea z.

Să considerăm, în ipoteza că traiectoria este plană, racheta în urcare (figura). Ecuațiile de mișcare în direcția tangentei la traiectorie, respectiv pe normală, sînt

$$M \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = T \cos \alpha - R - Mg \sin \theta, \tag{1}$$

$$MV \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = P - Mg \cos \theta + T \sin \alpha. \tag{2}$$



Deoarece viteza ascensională este

$$w = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = V \sin \theta \tag{3}$$

iar tracțiunea poate fi pusă sub forma

$$T = -\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} c, \tag{4}$$

ținînd seama că

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}z}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}z} w, \\ \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}z}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}z} w, \\ \frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}z}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}z} w, \end{aligned} \tag{5}$$

ecuațiile (1) și (2) devin făcînd $\cos\alpha \approx 1$

$$\Phi_1 = M\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}z}w + c\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}z}w + R + Mg\sin\theta = 0, \tag{6}$$

$$\Phi_2 = MV\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}z}w - P + Mg\cos\theta + c\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}z}w\sin\alpha = 0. \tag{7}$$

Din relația (3) a vitezei ascensionale scoatem

$$\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}z}{V\sin\theta} \tag{8}$$

și timpul de urcare de la altitudinea z_0 la z_1 este

$$t = \int_{z_0}^{z_1}\frac{\mathrm{d}z}{V\sin\ \theta} = \int_{z_0}^{z_1} f\mathrm{d}z, \tag{9}$$

unde

$$f = \frac{1}{V\sin 0}.$$

Problema care se pune deci este de a găsi minimul integralei (9) cu condițiile (6) și (7), o problemă de extremum condiționat, pe care o vom aduce la o problemă de extremum necondiționat. Pentru aceasta, introducem multiplicatorii lui Lagrange $\lambda_1(z)$ și $\lambda_2(z)$ cu care alcătuim funcția

$$F = f + \lambda_1\Phi_1 + \lambda_2\Phi_2 \tag{10}$$

și problema care se pune este de a găsi minimul necondiționat al integralei

$$J = \int_{z_0}^{z_1}(f + \lambda_1\Phi_1 + \lambda_2\Phi_2)\,\mathrm{d}z. \tag{9'}$$

Să verificăm dacă de-a lungul extremalei funcționala noastră (9') este într-adevăr minimă.

În general, dacă în clasa curbelor admisibile din spațiul cu $(n+1)$ dimensiuni $(z, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ considerăm două curbe apropiate ε și $\bar{\varepsilon}$, de ecuații $y_i = y_i(z)$ și $\bar{y}_i = \bar{y}_i(z)$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$, și funcționala

$$J(\varepsilon) = \int_{z_0}^{z_1} F(z, y_1, \ldots, y_n, y_1', \ldots, y_n')\,\mathrm{d}z,$$

atunci

$$J(\bar{\varepsilon}) - J(\varepsilon) = \delta J + \delta^2 J.$$

Pe o extremală variaţia întîi $\delta J = 0$ iar condiţia ca aceeaşi extremală să realizeze un minimum al funcţionalei date este ca variaţia a doua $\delta^2 J$ să fie nenegativă.

În conformitate cu condiţia lui Legendre, acest lucru este îndeplinit dacă

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y_1'^2} \geqslant 0, \quad \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 F}{\partial y_1'^2} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial y_1' \, \partial y_2'} \\ \dfrac{\partial^2 F}{\partial y_2' \, \partial y_1'} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial y_2'^2} \end{vmatrix} \geqslant 0 \text{ etc.}$$

Revenind la funcţionala noastră (9′) este de observat că funcţia F nu depinde decît liniar de derivatele de ordinul întîi ale mărimilor V, θ, M etc. şi, ca urmare, derivatele intrînd în condiţiile sus-menţionate sînt nule.

Condiţia de minimum a funcţionalei noastre este deci îndeplinită.

Cu funcţia (10) ecuaţiile lui Euler

$$\begin{aligned} &\frac{\partial F}{\partial V} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \frac{\partial F}{\partial \dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}z}} = 0, \\ &\frac{\partial F}{\partial \theta} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \frac{\partial F}{\partial \dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}z}} = 0, \\ &\frac{\partial F}{\partial M} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \frac{\partial F}{\partial \dfrac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}z}} = 0, \\ &\frac{\partial F}{\partial \alpha} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \frac{\partial F}{\partial \dfrac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}z}} = 0 \end{aligned} \tag{11}$$

şi relaţiile

$$\Phi_1\left(z, V, \theta, M, \alpha, \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}z}, \frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}z}\right) = 0,$$

$$\Phi_2\left(z, V, \theta, M, \alpha, \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}z}, \frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}z}\right) = 0,$$

ne conduc la sistemul de ecuaţii diferenţiale care integrat ne va da funcţiile căutate V, θ, M, α, λ_1, λ_2, ce caracterizează traiectoria timpului minim de urcare.

Pentru a da sub forma explicită ecuațiile (11) ale lui Euler, trebuie observat că

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial V} &= \frac{\partial f}{\partial V} + \lambda_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial V} + \lambda_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial V}, \\
\frac{\partial F}{\partial \theta} &= \frac{\partial f}{\partial \theta} + \lambda_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial \theta} + \lambda_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial \theta}, \\
\frac{\partial F}{\partial M} &= \lambda_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial M} + \lambda_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial M}, \\
\frac{\partial F}{\partial \alpha} &= \lambda_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial \alpha} + \lambda_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial \alpha}
\end{aligned} \tag{12}$$

și

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \frac{\partial F}{\partial \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}z}} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\lambda_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}z}}\right), \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \frac{\partial F}{\partial \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}z}} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\lambda_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}z}}\right), \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \frac{\partial F}{\partial \frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}z}} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\lambda_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial \frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}z}} + \lambda_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial \frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}z}}\right), \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \frac{\partial F}{\partial \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}z}} &= 0,
\end{aligned} \tag{13}$$

deoarece

$$\frac{\partial f}{\partial M} = \frac{\partial f}{\partial \alpha} = \frac{\partial f}{\partial \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}z}} = \frac{\partial f}{\partial \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}z}} = \frac{\partial f}{\partial \frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}z}} = 0$$

și în plus

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}z}} = \frac{\partial \Phi_2}{\partial \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}z}} = \frac{\partial F}{\partial \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}z}} = 0.$$

Efectuînd calculele de mai sus, unde am ținut seama că $w = V \sin\theta$, și introducînd în ecuațiile lui Euler obținem, deoarece $R = R\,(z,\ V,\ P)$ și $\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}z} \approx 0$,

$$
\begin{aligned}
& -\frac{1}{V^2 \sin\theta} + \lambda_1\left(M\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}z}\sin\theta + c\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}z}\sin\theta + \frac{\partial R}{\partial V}\right) + \\
& + \lambda_2\left(2M\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}z}V\sin\theta - \frac{\partial P}{\partial V} + c\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}z}\sin\theta\sin\alpha\right) - \\
& - \frac{\mathrm{d}\lambda_1}{\mathrm{d}z}MV\sin\theta - \lambda_1\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}z}V\sin\theta - \lambda_1 M\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}z}\sin\theta - \\
& - \lambda_1 MV\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}z}\cos\theta = 0, \\
& -\frac{1}{w}\operatorname{ctg}\theta + \lambda_1\left(M\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}z}V\cos\theta + c\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}z}V\cos\theta + Mg\cos\theta\right) + \\
& + \lambda_2\left(c\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}z}V\cos\theta\sin\alpha - Mg\sin\theta\right) - \\
& - \frac{\mathrm{d}\lambda_2}{\mathrm{d}z}MV^2\sin\theta - \lambda_2\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}z}V^2\sin\theta - 2\lambda_2 MV\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}z}\sin\theta = 0, \\
& \lambda_1\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}z}V\sin\theta + g\sin\theta\right) + \lambda_2\left(V^2\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}z}\sin\theta + g\cos\theta\right) - \\
& - \frac{\mathrm{d}\lambda_1}{\mathrm{d}z}cV\sin\theta - \lambda_1\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}z}V\sin\theta - \lambda_1 c\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}z}\sin\theta - \\
& - \lambda_1 cV\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}z}\cos\theta - \frac{\mathrm{d}\lambda_2}{\mathrm{d}z}cV\sin\theta\sin\alpha - \lambda_2\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}z}V\sin\theta\sin\alpha - \\
& - \lambda_2 c\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}z}\sin\theta\sin\alpha - \lambda_2 c\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}z}V\cos\theta\sin\alpha = 0, \\
& \lambda_1\frac{\partial R}{\partial P}\frac{\partial P}{\partial\alpha} - \lambda_2\frac{\partial P}{\partial\alpha} + \lambda_2 c\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}z}V\sin\theta\cos\alpha = 0.
\end{aligned}
\tag{14}
$$

Asociem acestor ecuații condițiile (6) și (7) pe care le scriem, ținînd seama ca și mai sus că $w = V\sin\theta$, sub forma

$$
\begin{aligned}
& M\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}z}V\sin\theta + c\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}z}V\sin\theta + R + Mg\sin\theta = 0, \\
& MV^2\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}z}\sin\theta - P + Mg\cos\theta + cV\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}z}\sin\theta\sin\alpha = 0.
\end{aligned}
\tag{15}
$$

Menținem aproximația $\cos\alpha \approx 1$, introducînd și aproximația $\sin\alpha \approx \alpha$ iar portanța o admitem de forma

$$P = P_a(z,\ V)\sin\alpha \approx P_a(z,\ V)\,\alpha.$$

Apoi, întrucît $\dfrac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}z}$ este mic, iar $\dfrac{\partial P}{\partial\alpha} = P_a$ foarte mare, ultima relație (14) o putem scrie aproximativ

$$\frac{\partial R}{\partial P} - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \approx 0,$$

din care scoatem $\alpha = \alpha\left(V,\ \dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)$ și astfel sistemul de 6 ecuații diferențiale îl reducem la 5, urmînd după aceea pentru calcule mai riguroase să introducem și valoarea lui $\dfrac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}z}$ menținînd termenul neglijat.

Cu observațiile de mai sus din ecuațiile (14) și (15) scoatem

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}z} &= \frac{Z_1}{Z_2},\\
\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}z} &= U_1 + U_2\frac{Z_1}{Z_2},\\
\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}z} &= Q_1 + Q_2\frac{Z_1}{Z_2},\\
\frac{\mathrm{d}\lambda_1}{\mathrm{d}z} &= Y_1 + Y_2\frac{Z_1}{Z_2},\\
\frac{\mathrm{d}\lambda_2}{\mathrm{d}z} &= \frac{W}{MV^2\sin\theta},
\end{aligned} \tag{16}$$

unde

$$Q_1 = -\frac{R}{c\,V\sin\theta} - \frac{Mg}{cV},$$

$$Q_2 = -\frac{M}{c},$$

$$U_1 = -\frac{g}{V^2}\operatorname{ctg}\theta + \frac{P}{MV^2\sin\theta} + \frac{\alpha R}{MV^2\sin\theta} + \frac{\alpha g}{V^2},$$

$$U_2 = \frac{\alpha}{V},$$

$$Y_1 = \frac{\lambda_1 g}{cV} + \frac{\lambda_2 g}{cV}\operatorname{ctg}\theta + \lambda_2 \frac{V}{c} U_1 - \frac{\lambda_1}{c}\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}z} - \lambda_1 U_1 \operatorname{ctg}\theta +$$

$$+ \frac{\alpha}{MV^3 \sin^2\theta}\operatorname{ctg}\theta - \frac{\lambda_1 \alpha c}{MV}\operatorname{ctg}\theta\, Q_1 - \frac{\lambda_1 \alpha g}{V^2}\operatorname{ctg}\theta + \frac{\lambda_2 \alpha g}{V^2} -$$

$$- \frac{\lambda_2 \alpha^2 c}{MV}\operatorname{ctg}\theta\, Q_1 + \frac{\lambda_2 \alpha}{M} Q_1 - \frac{\lambda_2}{c}\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}z}\alpha - \lambda_2 \alpha U_1 \operatorname{ctg}\theta,$$

$$Y_2 = \frac{\lambda_1}{c} + \frac{\lambda_2 V}{c} U_2 - \frac{\lambda_1}{V} - \lambda_1 U_2 \operatorname{ctg}\theta - \frac{\lambda_1 \alpha}{V} - \frac{\lambda_1 c \alpha}{MV}\operatorname{ctg}\theta\, Q_2 -$$

$$- \frac{\lambda_2 \alpha^2 c}{MV}\operatorname{ctg}\theta\, Q_2 + \frac{\lambda_2 \alpha}{M} Q_2 + \frac{\lambda_2 \alpha}{V} - \lambda_2 \alpha \operatorname{ctg}\theta\, U_2,$$

$$Z_1 = \frac{1}{V^2 \sin\theta} - \lambda_1 c \sin\theta\, Q_1 - \lambda_1 \frac{\partial R}{\partial V} - 2\lambda_2 M V \sin\theta\, U_1 + \lambda_2 \frac{\partial P}{\partial V} -$$

$$- \lambda_2 c \sin\theta\, \alpha Q_1 + M V \sin\theta\, Y_1 + \lambda_1 V \sin\theta\, Q_1 + \lambda_1 M V \cos\theta\, U_1,$$

$$Z_2 = \lambda_1 M \sin\theta + \lambda_1 c \sin\theta\, Q_2 + 2\lambda_2 M V \sin\theta\, U_2 +$$

$$+ \lambda_2 c \sin 0\, \alpha Q_2 - M V \sin\theta\, Y_2 - \lambda_1 V \sin\theta\, Q_2 -$$

$$- \lambda_1 M \sin\theta - \lambda_1 M V \cos\theta\, U_2,$$

$$W = - \frac{1}{V \sin\theta}\operatorname{ctg}\theta + \lambda_1 M V \frac{Z_1}{Z_2}\cos\theta +$$

$$+ \lambda_1 c V \cos\theta \left(Q_1 + Q_2 \frac{Z_1}{Z_2}\right) + \lambda_1 M g \cos\theta +$$

$$+ \lambda_2 c V \cos\theta\, \alpha \left(Q_1 + Q_2 \frac{Z_1}{Z_2}\right) - \lambda_2 M g \sin\theta -$$

$$- \lambda_2 V^2 \sin\theta \left(Q_1 + Q_2 \frac{Z_1}{Z_2}\right) - 2\lambda_2 M V \sin\theta \frac{Z_1}{Z_2}\,.$$

Observînd că sistemul (16) este de forma

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}z} = \psi_1(z,\ V,\ \theta,\ M, \lambda_1, \lambda_2),$$

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}z} = \psi_2(z,\ V,\ \theta,\ M, \lambda_1, \lambda_2),$$

$$\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}z} = \psi_3(z,\ V,\ \theta,\ M,\ \lambda_1, \lambda_2), \tag{17}$$

$$\frac{d\lambda_1}{dz} = \psi_4(z,\ V,\ \theta,\ M,\ \lambda_1,\ \lambda_2),$$

$$\frac{d\lambda_2}{dz} = \psi_5(z,\ V,\ \theta,\ M,\ \lambda_1,\ \lambda_2)$$

și pornind dela datele inițiale $V(z_0)=V_0$, $\theta(z_0)=\theta_0$, $M(z_0)=M_0$, $\lambda_1(z_0)=\lambda_{10}$, $\lambda_2(z_0)=\lambda_{20}$($\lambda_1$ și λ_2 nu pot fi simultan nuli), sistemul (17) poate fi soluționat prin aproximații succesive dacă funcțiile ψ_i ($i=1, 2, \ldots, 5$) sînt continue pentru $|z-z_0|<\tilde{z}$, $|V-V_0|<\tilde{V}$, $|\theta-\theta_0|<\tilde{\theta}, \ldots, |\lambda_2-\lambda_{20}|<$ $<\tilde{\lambda}_2$ și în plus îndeplinesc și condițiile lui Lipschitz.

Deoarece toți termenii care alcătuiesc mărimile Q_1, Q_2, U_1, U_2, Y_1, Y_2, W intrînd în expresiile funcțiilor ψ_i sînt funcții continue în intervalele de variație sus-menționate, funcțiile ψ_i sînt continue.

În ceea ce privește condițiile lui Lipschitz, este suficient să arătăm că $\frac{\partial\psi_i}{\partial V}$, $\frac{\partial\psi_i}{\partial\theta}$, $\frac{\partial\psi_i}{\partial M}$, $\frac{\partial\psi_i}{\partial\lambda_1}$, $\frac{\partial\psi_i}{\partial\lambda_2}$ sînt continue în intervalele închise $|z-z_0|\leqslant\tilde{z}$, $|V-V_0|\leqslant\tilde{V}$, $|\theta-\theta_0|\leqslant\tilde{\theta}, \ldots, |\lambda_2-\lambda_{20}|\leqslant\tilde{\lambda}_2$ sau și această condiție este îndeplinită.

Calculul poate fi deci condus prin aproximații succesive și pentru prima aproximație putem scrie

$$\frac{dV^{(1)}}{dz} = \psi_1(z,\ V_0,\ \theta_0,\ M_0,\ \lambda_{10},\ \lambda_{20}),$$

$$\frac{d\theta^{(1)}}{dz} = \psi_2(z,\ V_0,\ \theta_0,\ M_0,\ \lambda_{10},\ \lambda_{20}); \tag{18}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{d\lambda_2^{(1)}}{dz} = \psi_5(z,\ V_0,\ \theta_0,\ M_0,\ \lambda_{10},\ \lambda_{20}),$$

de unde

$$V^{(1)} = V_0 + \int_{z_0}^{z} \psi_1(z,\ V_0,\ \theta_0,\ M_0,\ \lambda_{10},\ \lambda_{20})\,dz,$$

$$\theta^{(1)} = \theta_0 + \int_{z_0}^{z} \psi_2(z,\ V_0,\ \theta_0,\ M_0,\ \lambda_{10},\ \lambda_{20})\,dz, \tag{19}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\lambda_2^{(1)} = \lambda_{20} + \int_{z_0}^{z} \psi_5(z,\ V_0,\ \theta_0,\ M_0,\ \lambda_{10},\ \lambda_{20})\,dz,$$

pentru a doua aproximație

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}V^{(2)}}{\mathrm{d}z} &= \psi_1(z, V^{(1)}, \theta^{(1)}, M^{(1)}, \lambda_1^{(1)}, \lambda_2^{(1)}), \\ \frac{\mathrm{d}\theta^{(2)}}{\mathrm{d}z} &= \psi_2(z, V^{(1)}, \theta^{(1)}, M^{(1)}, \lambda_1^{(1)}, \lambda_2^{(1)}), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{\mathrm{d}\lambda_2^{(2)}}{\mathrm{d}z} &= \psi_5(z, V^{(1)}, \theta^{(1)}, M^{(1)}, \lambda_1^{(1)}, \lambda_2^{(1)}), \end{aligned} \tag{20}$$

de unde

$$\begin{aligned} V^{(2)} &= V_0 + \int_{z_0}^{z} \psi_1(z, V^{(1)}, \theta^{(1)}, M^{(1)}, \lambda_1^{(1)}, \lambda_2^{(1)})\,\mathrm{d}z, \\ \theta^{(2)} &= \theta_0 + \int_{z_0}^{z} \psi_2(z, V^{(1)}, \theta^{(1)}, M^{(1)}, \lambda_1^{(1)}, \lambda_2^{(1)})\,\mathrm{d}z, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \lambda_2^{(2)} &= \lambda_{20} + \int_{z_0}^{z} \psi_5(z, V^{(1)}, \theta^{(1)}, M^{(1)}, \lambda_1^{(1)}, \lambda_2^{(1)})\,\mathrm{d}z, \end{aligned} \tag{21}$$

și în acest fel, după gradul de precizie dorit, calculul se poate continua pînă la orice ordin de aproximație.

Ca o aplicație, să vedem care sînt în primă aproximație expresiile funcțiilor căutate V, θ, M, λ_1, λ_2. Considerăm pentru simplificare că $c(z) = c_0 = \text{const.}$ aproximație deseori utilizată.

Ținînd seamă de datele inițiale și observînd că

$$R = \rho(z)\,\overline{R}_0, \quad P = \rho(z)\,\overline{P}_0,$$

$$\left(\frac{\partial R}{\partial V}\right)_{V=V_0} = \rho(z)\,\overline{R}_{V_0}, \quad \left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_{V=V_0} = \rho(z)\,\overline{P}_{V_0}\,.$$

vom avea

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}V^{(1)}}{\mathrm{d}z} &= \alpha_1 + \alpha_2\,\rho(z), \\ \frac{\mathrm{d}\theta^{(1)}}{\mathrm{d}z} &= \beta_1 + \beta_2\,\rho(z), \\ \frac{\mathrm{d}M^{(1)}}{\mathrm{d}z} &= \gamma_1 + \gamma_2\,\rho(z), \end{aligned} \tag{22}$$

$$\frac{\mathrm{d}\lambda_1^{(1)}}{\mathrm{d}z} = \delta_1 + \delta_2\,\rho(z),$$

$$\frac{\mathrm{d}\lambda_2^{(1)}}{\mathrm{d}z} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2\,\rho(z),$$

unde

$$\alpha_1 = \frac{L_1}{\overline{Z}_2},$$

$$\alpha_2 = \frac{L_2}{\overline{Z}_2},$$

$$\begin{aligned}
L_1 = {} & \frac{1}{V_0^2 \sin\theta_0} + \frac{\lambda_{10}}{V_0} M_0\, g \sin\theta_0 + \frac{2\lambda_{20} M_0\, g}{V_0} \cos\theta_0 + \\
& + \frac{\lambda_{20} M_0\, \alpha\, g}{c_0} \sin\theta_0 + \frac{M_0 g}{V_0} \cos\theta_0 \operatorname{ctg}\theta_0 - \frac{M_0\, \alpha\, g}{V_0} \cos\theta_0 + \\
& + \frac{\alpha \operatorname{ctg}\theta_0}{V_0^2 \sin^2\theta_0} - M_0\, \lambda_{10}\, \alpha \cos\theta_0 + \frac{\lambda_{20} M_0\, g\, \alpha}{V_0} - \frac{\lambda_{20}\, \alpha\, M_0\, g}{c_0} - \\
& - M_0\, \lambda_{20}\, \alpha \sin\theta_0 + \frac{\lambda_{20} M_0\, g\, \alpha}{V_0} \cos\theta_0 \operatorname{ctg}\theta_0 - \\
& - \frac{\lambda_{10} M_0\, g}{V_0} \cos\theta_0 \operatorname{ctg}\theta_0 + \frac{\lambda_{10}\, \alpha\, M_0\, g}{V_0} \cos\theta_0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L_2 = {} & \frac{\lambda_{10}}{V_0} \overline{R}_0 - \lambda_{10} \overline{R}_{V_0} - \frac{2\lambda_{20}}{V_0} \overline{P}_0 - \frac{\lambda_{20}\, \alpha}{V_0} \overline{R}_0 + \lambda_{20} \overline{P}_{V_0} + \\
& + \frac{\lambda_{20}}{c_0} \overline{P}_0 - \frac{\overline{P}_0}{V_0} \operatorname{ctg}\theta_0 - \frac{\alpha\, \overline{R}_0}{V_0} \operatorname{ctg}\theta_0 - \frac{\lambda_{10} \alpha}{V_0} \overline{R}_0 \operatorname{ctg}\theta_0 - \\
& - \frac{\lambda_{20}\, \alpha}{V_0} \overline{P}_0 \operatorname{ctg}\theta_0 - \frac{\lambda_{10}}{c_0} \overline{R}_0 - \frac{\lambda_{10}}{V_0} \overline{P}_0 \operatorname{ctg}\theta_0 + \frac{\lambda_{10}\, \alpha\, \overline{R}_0}{V_0} \operatorname{ctg}\theta_0,
\end{aligned}$$

$$\overline{Z}_2 = \lambda_{10} M_0\, \alpha \sin\theta_0 - \lambda_{10} M_0\, \alpha \cos\theta_0,$$

$$\beta_1 = \frac{\alpha g}{V_0^2} - \frac{g}{V_0^2} \operatorname{ctg}\theta_0 + \frac{\alpha}{V_0} \alpha_1,$$

$$\beta_2 = \frac{\alpha}{V_0} \alpha_2 + \frac{\overline{P}_0}{M_0 V_0^2 \sin\theta_0} + \frac{\alpha\, \overline{R}_0}{M_0\, V_0^2 \sin\theta_0},$$

$$\gamma_1 = -\frac{M_0\, g}{c_0 V_0} - \frac{M_0}{c_0} \alpha_1,$$

$$\gamma_2 = -\left[\frac{\overline{R}_0}{c_0\, V_0 \sin\,\theta_0} + \frac{M_0}{c_0}\,\alpha_2\right],$$

$$\delta_1 = \frac{\alpha_{10}\, g}{c_0 V_0} + \frac{\alpha_{10}\, g}{V_0^2}\,\mathrm{ctg}^2\,\theta_0 - \frac{\lambda_{10}\,\alpha\, g}{V_0^2}\,\mathrm{ctg}\,\theta_0 +$$

$$+ \frac{\lambda_{20}\,\alpha\, g}{V_0^2} + \frac{\lambda_{20}\,\alpha^2\, g}{V_0^2}\,\mathrm{ctg}\,\theta_0 + \frac{\alpha}{M_0\, V_0^3 \sin^2\,\theta_0}\,\mathrm{ctg}\,\theta_0 + \alpha_1\,\overline{Y}_2,$$

$$\delta_2 = \frac{\lambda_{20}\,\overline{P}_0}{M_0 c_0 V_0 \sin\,\theta_0} + \frac{\lambda_{20}\,\alpha\,\overline{R}_0}{M_0\, c_0\, V_0 \sin\,\theta_0} - \frac{\lambda_{10}\,\overline{P}_0}{M_0\, V_0^2 \sin\,\theta_0}\,\mathrm{ctg}\,\theta_0 -$$

$$- \frac{\lambda_{10}\,\overline{R}_0\,\alpha}{M_0\, c_0\, V_0 \sin\,\theta} - \frac{\lambda_{20}\,\overline{P}_0}{M_0\, V_0^2 \sin\,\theta_0}\,\mathrm{ctg}\,\theta_0 + \alpha_2\,\overline{Y}_2,$$

$$\overline{Y}_2 = \frac{\lambda_{10}}{c_0} - \frac{\lambda_{10}}{V_0} - \frac{\lambda_{10}}{V_0}\,\alpha + \frac{\lambda_{20}}{V_0}\,\alpha,$$

$$\varepsilon_1 = -\frac{1}{M_0\, V_0^3 \sin^2\,\theta_0}\,\mathrm{ctg}\,\theta_0 + \frac{\lambda_{10}}{V_0}\,\alpha_1\,\mathrm{ctg}\,\theta_0 - \frac{2\lambda_{20}\, g}{V_0^2}\,\mathrm{ctg}\,\theta_0 -$$

$$- \frac{\lambda_{20}\,\alpha}{V_0}\,\alpha_1\,\mathrm{ctg}\,\theta_0 - \frac{\lambda_{20}\, g}{c_0 V_0} - \frac{\lambda_{20}}{V_0}\,\alpha_1,$$

$$\varepsilon_2 = -\frac{\lambda_{10}\,\overline{R}_0}{M_0\, V_0^2 \sin\,\theta_0}\,\mathrm{ctg}\,\theta_0 - \frac{\lambda_{20}\,\overline{R}_0}{M_0\, V_0^2 \sin\,\theta_0}\,\mathrm{ctg}\,\theta_0 -$$

$$- \frac{\lambda_{20}\,\alpha}{V_0}\,\alpha_2\,\mathrm{ctg}\,\theta_0 + \frac{\lambda_{20}\,\overline{R}_0}{M_0\, c_0\, V_0 \sin\,\theta_0} + \frac{\lambda_{20}}{c_0}\,\alpha_2 - \frac{2\lambda_{20}}{V_0}\,\alpha_2.$$

Pentru a da sub formă explicită soluția problemei în primă aproximație, trebuie să cunoaștem variația densității cu înălțimea.

După cum se știe, densitatea descrește cu înălțimea și legea comun adoptată este de forma

$$\rho = \rho_0\, e^{-\frac{z}{z_{00}}}, \tag{23}$$

unde ρ_0 și z_{00} sînt constante avînd respectiv valorile $\rho_0 = 1{,}42.10^{-3}$ și $z_{00} = 7\,170$.

Cu aceasta, ținînd seama de (19), avem

$$V^{(1)} = V_0 - \left(\alpha_1\, z_0 - \alpha_2\, z_{00}\, \rho_0 e^{-\frac{z_0}{z_{00}}}\right) + \alpha_1\, z - \alpha_2\, z_{00}\, \rho_0\, e^{-\frac{z}{z_{00}}},$$

$$\theta^{(1)} = \theta_0 - \left(\beta_1\, z_0 - \beta_2\, z_{00}\, \rho_0\, e^{-\frac{z_0}{z_{00}}}\right) + \beta_1\, z - \beta_2\, z_{00}\, \rho_0\, e^{-\frac{z}{z_{00}}};$$

$$M^{(1)} = M_0 - \left(\gamma_1\, z_0 - \gamma_2\, z_{00}\, \rho_0\, e^{-\frac{z_0}{z_{00}}}\right) + \gamma_1\, z - \gamma_2\, z_{00}\, \rho_0\, e^{-\frac{z}{z_{00}}}, \tag{24}$$

$$\lambda_1^{(1)} = \lambda_{10} - \left(\delta_1 z_0 - \delta_2 z_{00} \rho_0 e^{-\frac{z_0}{z_{00}}}\right) + \delta_1 z - \delta_2 z_{00} \rho_0 e^{-\frac{z}{z_{00}}},$$

$$\lambda_2^{(1)} = \lambda_{20} - \left(\varepsilon_1 z_0 - \varepsilon_2 z_{00} \rho_0 e^{-\frac{z_0}{z_{00}}}\right) + \varepsilon_1 z - \varepsilon_2 z_{00} \rho_0 e^{-\frac{z}{z_{00}}}.$$

Avînd aceste funcţii calculele pot fi reluate în a doua sau a treia aproximaţie, după gradul de precizie dorit.

Trebuie remarcat că avînd acum o lege aproximativă de variaţie cu z pentru masa M a rachetei, din a patra ecuaţie (14) vom scoate pentru calculele în a doua aproximaţie $\alpha = \alpha(V, z)$.

Ca o verificare se poate observa de exemplu în legea de variaţie a masei, că ea conţine cunoscuta lege liniară ($\gamma_1 < 0$).

Primită la redacţie la 30 aprilie 1963

К ЗАДАЧЕ ПОДЪЕМА РАКЕТ ЗА МИНИМАЛЬНОЕ ВРЕМЯ

РЕЗЮМЕ

В работе исследуется задача минимального времени подъема ракеты, рассмотренная как задача условного экстремизма. С помощью уравнений Эйлера и уравнений движения (в направлении касательной к траектории и нормали) находится система дифференциальных уравнений экстремалей. Даются в первом приближении законы изменения скорости, угла наклона касательной к траектории и остальных параметров, делающих минимальным функционал времени подъема.

BIBLIOGRAFIE

1. М. БАРРЕРЕ и др., *Движение ракет*. Издательство иностранной литературы, Москва, 1959.
2. P. CICALA, E. MIELE, J.A.S., **22**, 286—288 (1955).
3. L. GEORGE, J. F. VERNET, *La mécanique du vol*. Librairie polytechnique Ch. Béranger, Paris—Liège. 1960.
4. AL. MARINESCU, *Asupra urcării optime a rachetelor sol-aer*. Revista transporturilor, *11* (1962).
5. M. A. LAVRENTIEV, L. A. LIUSTERNIC, *Curs de calcul variaţional*. Edit. tehnică, Bucureşti, 1955.
6. C. IACOB, *Curs de matematici superioare*. Edit. tehnică, Bucureşti, 1957.

NOTE

ASPECTE PRIVIND PROPRIETĂȚILE DE ANTIUZURĂ ALE UNOR ADITIVI DE EXTREMĂ PRESIUNE, LA TEMPERATURI RIDICATE

DE

DAN PAVELESCU, IVAN ILIUC și SANDA BARBUL

621.89

Pentru a studia comportarea aditivilor de extremă presiune la temperaturi ridicate, a fost utilizată instalația realizată în laboratorul de radiații al Institutului de mecanică aplicată „Traian Vuia'' al Academiei R.P.R. [1].

Cuplul de frecare, compus dintr-o bucșă de material de antifricțiune și o placă plană de oțel dur, a fost cufundat în lubrifiantul studiat. Sistemul de aplicare a forței, prin articulație, a fost astfel realizat încît a asigurat distribuirea uniformă a sarcinii pe întreaga suprafață de contact. Pentru a mări sarcina specifică s-a tăiat un șanț la mijlocul suprafeței laterale a bucșelor de material antifricțiune; această modificare a condus la mărirea sarcinii specifice de 1,5 ori și în același timp a contribuit la menținerea distribuției uniforme a sarcinii, chiar după ce a apărut uzura bucșei.

Condițiile de lucru au fost :
sarcina specifică — 5 560 kgf/cm^2;
turația — 355 rot/min, corespunzînd o viteză de alunecare de 0,35 m/s;
temperatura —100°C;
cuplul de frecare :

a) bucșe din material STAS Bz9, cu următoarele caracteristici : rezistența la tracțiune 20 kgf/mm^2; alungire 12; duritate Brinell 60 kgf/mm^2;

b) oțel arbore STAS 33, Mo C 11.

REZULTATE ȘI CONCLUZII

În tabelele de mai jos sînt redate principalele rezultate obținute asupra uleiurilor romînești STAS : V_x 5 012, 10 004 V și 408, cu diferiți aditivi.

Tabela 1

Nr. exp.	Ulei	Timp de lucru [min]	Uzură [mg]	Viteză de uzură [mg/oră]	Valoare caracteristică [mg/oră]
64	V_x 5012	30	4,3	8,6	
65		60	2,1	4,2	
66		90	1,6	3,2	
67		120	1,9	3,8	3,7
68	V_x 5012 + +5% MontogearB	30	2,7	5,4	
69		60	1,8	3,6	
70		90	2,1	4,2	
71		120	2,2	4,4	4,4
73	V_x 5012 + +1% disulfură de dibenzil	30	3,9	7,8	11,1
74		60	3,8	7,6	
75		90	5,6	11,2	
76		120	5,5	11,0	
77	V_x 5012 + + 6% RCl[1]) + 2% TFZn	30	2	4	
78		60	1,5	3	
79		90	1,4	2,8	3,6
80		120	2,3	4,6	

[1]) Prescurtări: RCl–parafină clorurată; TFZn–alchifenol ditiofosfat de zinc.

Tabela 2

Nr. exp.	Ulei	Timp de lucru [min]	Uzură [mg]	Viteză de uzură [mg/oră]	Valori caracteristice [mg/oră]
81	10 004 V	30	4,7	9,4	
82		60	8,0	16	
83		90	5,7	11,4	11
84		120	4,3	8,6	
85		150	4,9	9,8	
86	10 004 V + + 1% disulfură de dibenzil	30	9,3	18,6	
87		90	14,8	14,8	17
88		120	8,9	17,8	
89	10 004 V + 6% R Cl + 2% TFZn	30	5,0	10,0	
90		60	4,7	9,4	9,6
91		90	4,7	9,4	
92	10 004 V + 5% Montogear B	30	5,1	10,2	
93		60	4,8	9,6	9,9
94		90	5,0	10,0	
95		120	4,9	9,8	

Tabela 3

Nr. exp.	Ulei	Timp de lucru [min]	Uzură [mg]	Viteză de uzură [mg/oră]	Valori caracteristice [mg/oră]
99	408	5	34,8	417,6	
101	408 + 5% Montogear	30	7,4	14,8	14,8
102		60	7,4	14,8	
107	408+6% RCl+2% TFZn	10	1,6	9,6	7,9
108		40	3,6	7,2	
109		70	3,5	7,0	
111	408+ 1% disulfură de dibenzil	15	12,3	49,2	23
112		45	16	32	
113		75	11,8	23,6	
114		105	11,3	22,6	

Valorile înscrise la ultima rubrică reprezintă valorile cele mai caracteristice.

Utilizarea aceleiaşi bucşe a impus eliminarea primelor rezultate din aceeaşi serie de experienţe, întrucît s-a constatat că, datorită acţiunii aditivilor asupra suprafeţei de frecare a bucşei, rezultatele la un moment dat sînt funcţie de condiţiile determinărilor anterioare. Aspectul sesizat şi în lucrarea [1], a fost reverificat.

Se menţionează de asemenea că două valori care diferă între ele cu 10—15% nu pot fi considerate întotdeauna ca diferite, deoarece intră în eroarea de măsură a instalaţiei [1].

Pe baza rezultatelor din tabelele de mai sus conchidem următoarele :

1. Lubrifianţii V_x 5 012 şi10 004 V (tabela 1, exp. 64—67 şi tabela 2, exp. 81—85) au condus la o viteză de uzură de 113 ori, şi respectiv de 38 ori, mai mică faţă de uleiul 408.

Diferenţa de viscozitate existentă între aceşti 3 lubrifianţi, neputînd justifica comportarea atît de diferită la uzură, se demonstrează prezenţa unor aditivi de extremă presiune eficace, în uleiurile V_x 5 012 şi 10 004 V.

Se constată în acelaşi timp că aditivarea suplimentară a uleiului V_x 5 012 nu aduce nici o îmbunătăţire a proprietăţilor de antiuzură. În ceea ce priveşte uleiul 10 004 V diferenţa între comportarea uleiului neaditivat şi a celorlalte formule de ungere încercate este prea mică pentru a justifica un consum suplimentar de aditiv.

2. *Rezultatele cuprinse în tabela 3 (exp. 99—109), indică posibilitatea întrebuinţării uleiurilor puţin vîscoase (408) aditivate în mod corespunzător, în condiţii de extremă presiune.*

3. Aditivul disulfură de dibenzil a dat uzura cea mai mare (tabela 1, exp. 73—76, tabela 2, exp. 86—88 şi tabela 3, exp. 111—114). Se constată că în cazul uleiurilor V_x 5 012 şi 10 004 V, aditivate cu disulfură de dibenzil, uzura a fost mai mare decît în cazul formulelor

de ungere simple. Pentru a verifica efectul negativ al acestui aditiv s-au efectuat încă o serie de experienţe ale căror rezultate sînt date în tabela 4.

Tabela 4

Nr. exp.	Ulei	Sarcina [kgf/cm²]	Timp de lucru [min]	Uzură [mg]	Viteză de uzură [mg/oră]	Valori caracteristice [mg/oră]
22	V_x 5012	4 650	60	0,8	0,8	0,6
23			120	0,4	0,4	
24	V_x 5012 + 1% disulfură de dibenzil	4 650	120	3,8	1,9	1,6
25			240	2,4	1,2	
26	V_x 5012	4 650	120	1,1	0,5	0,5
27			240	0,7	0,4	

Se constată că schimbarea lubrifiantului (V_x5012 → V_x5012 + 1% disulfură de dibenzil → V_x5012) într-un şir continuu de experienţe, în condiţii similare, a indicat mărirea vitezei de uzură în cazul folosirii lui V_x5012 + 1% disulfură de dibenzil. Modul de experimentare de mai sus dovedeşte încă o dată efectul special pe care îl are disulfura de dibenzil.

În cazul uleiului neaditivat (ulei 408), s-a constatat că disulfura de dibenzil are un efect de antiuzură, care rezultă din experienţele 111—114 (tabela 3), cînd uzura a fost redusă de circa 20 de ori; şi în acest caz aditivul menţionat este mai puţin eficace decît celelalte formule experimentate.

Pentru utilizarea acestui aditiv se impune însă să se studieze cauzele care produc un efect negativ asupra uleiurilor V_x5012 şi 10004; considerăm că ar trebui analizată compatibilitatea amestecurilor de aditivi.

4. Rezultatele de mai sus sînt valabile desigur pentru formulele de ungere încercate. Pentru a putea însă extinde concluziile la aditivii respectivi ca atare, se consideră necesar să se studieze în prealabil influenţa concentraţiei acestor aditivi şi stabilitatea lor în timp. Este de asemenea necesar să se asigure la toate probele de acelaşi fel, o compoziţie identică, prin respectarea riguroasă a aceleiaşi reţete de fabricaţie.

5. Conform rezultatelor prezentate în tabela 5 rezultă o comportare mai bună a formulei 10004 V şi 6% RCl + 10% TFZn faţă de 10004V + 5% Montogear. Această concluzie trebuie considerată ţinînd seama de observaţiile de la punctul 4.

Faţă de rezultatele obţinute cu categoria de uleiuri arătată, în condiţii de ungere la temperatură ridicată şi extremă presiune, ajungem la următoarele concluzii:

— s-a demonstrat posibilitatea utilizării uleiurilor puţin vîscoase aditivate în condiţii de extremă presiune;

Tabela 5

Nr. exp.	Ulei	Timp de lucru [min]	Uzură [mg]	Viteză de uzură [mg/oră]	Observații
44	10004 V	30	5,5	11	
45	10004 V +	30	3,1	6,2	Sarcina 5350 Kg/cm²
47	+5 % Montogear	60	2,8	5,6	
48		90	2,8	5,6	
56	10004 V+	30	0,6	1,2	
57	+6 % RCl +	60	0,9	1,8	
58	+10 % TFZn	90	1,1	2,2	

— a apărut nejustificată, în raport cu efectul suplimentar obținut, aditivarea uleiurilor 10004 V și V_x 5012, cu aditivi de extremă presiune;

— s-a constatat un efect negativ, alături de calitățile de antiuzură ale aditivului disulfură de dibenzil;

— formulele care conțin parafină clorurată și alchilfenol ditiofosfat de zinc preparate în țară, s-au dovedit cel puțin tot atît de bune ca și aditivul de import Montogear B.

Efectuarea unor determinări cu uleiul 10004 V la temperatura de 150°C a condus la uzuri mult mai mari. Deoarece creșterea vitezei de uzură este mai mare decît cea care poate fi pusă pe seama viscozității, ar fi de asemenea util un studiu special pentru a explica cauzele acestui fenomen, care ar putea limita utilizarea aditivilor la temperaturi înalte.

În afară de concluziile privitoare la comportarea aditivilor, se constată că, în urma modificărilor aduse cuplului și modului de aplicare a forței față de [1], împrăștierea rezultatelor s-a restrîns într-o măsură apreciabilă, ceea ce a permis micșorarea numărului de experiențe.

Primită la redacție la 2 august 1963

О СВОЙСТВАХ ЗАЩИТЫ ПРОТИВ ИЗНОСА НЕКОТОРЫХ ПРИСАДОК КРАЙНИХ ДАВЛЕНИЙ ПРИ ВЫСОКИХ ТЕМПЕРАТУРАХ

РЕЗЮМЕ

Исследование поведения на износ при высоких температурах некоторых румынских масел и присадок крайних давлений, проведенное с установкой ИПМ [1], доказало возможность использования маловязких масел (STAS—408) с присадками, в условиях крайних давлений.

Бывают случаи, когда присадка двусернистый бензол обладает отрицательным эффектом противоизноса, а соединения, содержащие хлористый парафин и дитиофосфатный алкилфенол цинка отечественного производства оказались не менее хорошими, чем импортная присадка Монтоджир Б.

Делается вывод, что некоторые присадки теряют свойства защиты против износа при температуре порядка 150°C.

BIBLIOGRAFIE

1. D. PAVELESCU, I. ILIUC, S. BARBUL, *Studiul unei metode radioactive pentru aprecierea calităţilor lubrifiante ale uleiurilor aditivate, prin prisma uzurii suprafeţelor.* II. St. cerc. mec. apl., **XIII**, *1*, 193—203 (1962).

APARATE ŞI INSTALAŢII

AMPLIFICATOR DE CURENT CONTINUU CU 6 CANALE PENTRU MĂSURĂTORI TENSOMETRICE

DE

I. JAKAB, A. ZAHARESCU şi I. RUGINĂ

621.317

În ultimii ani în industrie se manifestă un interes din ce în ce mai mare pentru măsurătorile tensometrice dinamice, care pot aduce o contribuție importantă la îmbunătăţirea constructivă şi funcţională a multor tipuri de maşini.

În timp ce însă măsurătorile tensometrice statice se fac cu aparate relativ simple, care la ora actuală sînt destul de răspîndite, tensometria dinamică necesită aparatură de măsură şi înregistrare mai complicată şi mai costisitoare, a cărei lipsă frînează utilizarea largă a acestor măsurători.

În principiu aparatele destinate tensometriei statice pot fi folosite şi la măsurători dinamice, într-o anumită bandă de frecvență, în funcție de purtătoarea utilizată şi într-o anumită gamă de deformaţii, determinată de limitele de liniaritate ale detectorului aparatului. Întrucît de obicei este necesar să se măsoare simultan în mai multe puncte, pentru înregistrare nu se folosesc oscilografe catodice ci inscriptoare dinamice multicanale, cum sînt oscilografele cu bucle. Acestea necesită însă, pentru înregistrare, un curent de cîțiva mA, pe care cele mai multe din tensometrele de uz curent nu-l pot furniza.

Aceste considerente au condus la ideea elaborării unui amplificator special care să permită folosirea tensometrelor statice la măsurători dinamice.

Un asemenea amplificator trebuie să răspundă la o serie de cerințe destul de severe, impuse de condițiile de lucru. El va trebui să fie un amplificator de curent continuu; o bandă de ordinul a cîteva sute de Hz este suficientă pentru măsurătorile tensometrice curente.

Amplificarea necesară este determinată de mărimea semnalelor care se obțin de la tensometre în cazul măsurătorilor dinamice şi a curentului necesar buclelor de înregistrare. Astfel, în cazul tensometrului ORION EMG 2353 se obţine în medie un semnal de 10^{-4} V pentru o deformaţie

$\varepsilon = 10^{-6}$. Considerînd ca suficientă plaja de deformaţii $\varepsilon = \pm 1500 . 10^{-6}$ rezultă un semnal maxim de intrare în amplificator de ± 0,15 V. Curentul necesar buclelor de înregistrare, care au bandă de frecvenţă corespunzătoare, este de ordinul a cîtorva mA. Considerînd deci satisfăcător un curent maxim de ieşire de ± 5 mA, rezultă ca necesară pentru amplificator o pantă de aproximativ 30 mA/V.

În plaja determinată de semnalul maxim de ieşire, amplificatorul trebuie să lucreze liniar, cu o eroare care să nu depăşească 1—2%.

O altă condiţie care trebuie impusă amplificatorului este stabilitatea punctului de funcţionare în timpul lucrului, adică este necesar ca deriva de zero să fie neglijabilă faţă de semnalele utile. Poate fi admisă o derivă de lungă durată de 1—2%.

Amplificatorul a fost proiectat avîndu-se în vedere aceste condiţii. Ţinînd seama de necesităţile ivite în practică şi de posibilităţile oscilografului cu bucle pe care l-am avut în vedere (tip MPO-2), s-a considerat raţională construirea unei unităţi cu 6 canale de amplificare identice.

SCHEMA ELECTRICĂ DE PRINCIPIU A UNUI CANAL DE AMPLIFICARE ŞI PERFORMANŢELE ACESTUIA

Schema electrică de principiu adoptată pentru canalele amplificatorului de curent continuu este prezentată în figura 1.

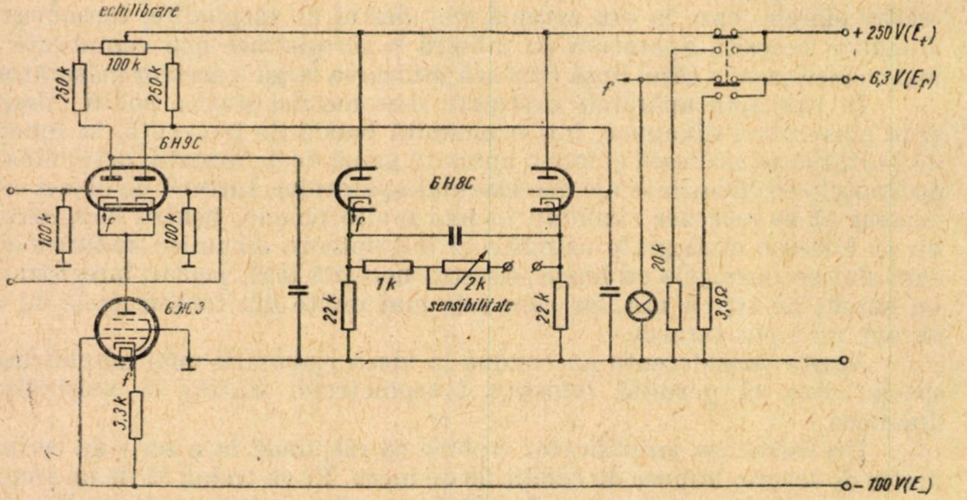


Fig. 1. — Schema electrică de principiu a unui canal de amplificare.

La alegerea ei s-a urmărit îndeplinirea cerinţelor menţionate privind sensibilitatea, liniaritatea, banda de frecvenţă şi stabilitatea regimului, cu mijloace pe cît posibil simple.

Întreg canalul de amplificare este simetric şi din acest motiv schimbările ce survin în regimul tuburilor datorită variaţiei tensiunilor de alimentare sau ale unor factori externi, precum şi prezenţa zgomotului de reţea, influenţează foarte puţin semnalul de ieşire.

S-au luat şi alte măsuri de stabilizare. Astfel, în primul etaj, rezistenţa dinamică foarte mare a pentodei 1Ж3 creează o puternică reacţie negativă pentru componentele în fază ale semnalului de intrare şi de derivă şi menţine constantă tot timpul suma curenţilor celor două triode (6H9C).

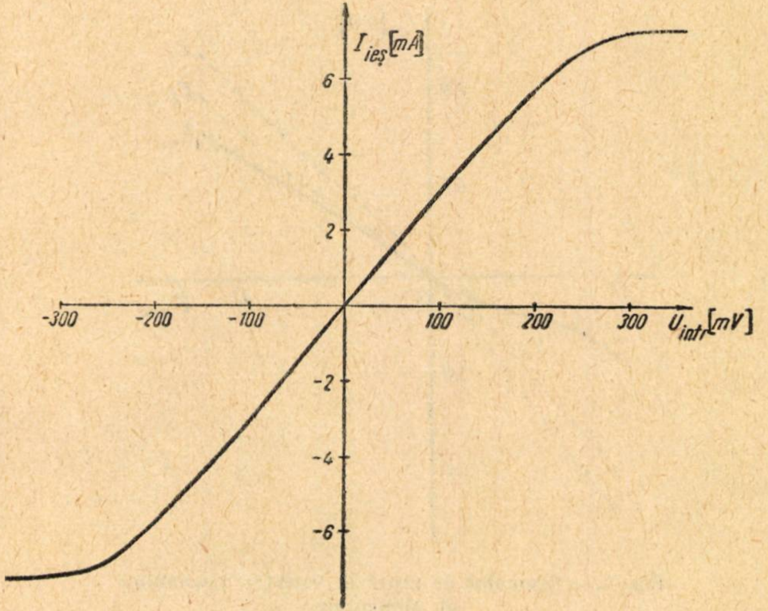


Fig. 2. — Caracteristica de amplitudine a unui canal de amplificare.

În acest fel, se asigură funcţionarea normală a acestui etaj chiar pentru componente în fază relativ mari ale semnalului de intrare şi se obţine o bună simetrie a semnalului de ieşire, chiar atunci cînd amplificatorul este atacat asimetric.

Prin măsurile menţionate, etajului de ieşire, care este un repetor catodic diferenţial, i se asigură un regim stabil de funcţionare.

Acest ultim etaj este destinat în primul rînd să debiteze curent pentru un oscilograf magnetic, dar poate fi folosit tot aşa de bine împreună cu un oscilograf catodic, un voltmetru sau miliampermetru, după împrejurări.

Panta maximă a întregului canal de amplificare este de 30 mA/V, liniaritatea este mai bună de 2 % în plaja de ± 5 mA, iar curentul de ieşire se limitează la 7,5 mA, aşa cum se poate vedea din caracteristica de amplitudine din figura 2. Limitarea curentului de ieşire la o valoare apropiată de curentul maxim de lucru asigură protecţia buclelor împotriva suprasarcinilor.

Banda de frecvenţă de aproximativ 200 Hz a canalului (limitată la această valoare cu ajutorul condensatorilor C_1, C_2, C_3) este suficientă pentru majoritatea măsurătorilor tensometrice dinamice; totodată pulsaţiile de 4 000 Hz ale semnalului furnizat de detectorul de fază al tensometrului ORION 2353 nu apar la ieşire.

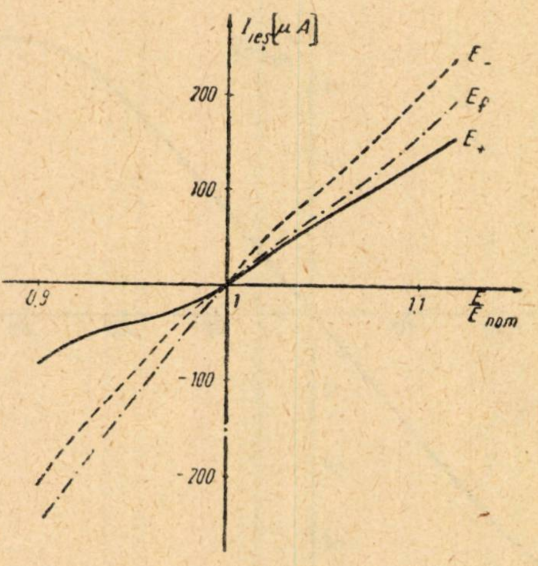


Fig. 3. — Semnalul de ieşire la variaţia tensiunilor de alimentare.

Semnalul de ieşire parazit, rezultat al dezechilibrului canalului de amplificare la variaţia tensiunilor de alimentare cu 10%, aşa cum se vede în figura 3, este cel mult 130 μA pentru variaţiile tensiunii sursei pozitive, 200 μA pentru variaţiile tensiunii sursei negative şi 250 μA pentru variaţiile tensiunii de filament.

ALIMENTATORUL AMPLIFICATORULUI DE CURENT CONTINUU

Pentru a asigura amplificatorului bune performanţe în funcţionare, chiar atunci cînd sursa de energie electrică are variaţii mari de tensiune, a fost proiectat şi realizat, într-un bloc separat, un alimentator pentru tensiuni continue şi alternative. Aşa cum se arată în figura 4, acest alimentator furnizează tensiunile continue de + 300 şi — 100 V stabilizate cu tuburi cu gaz. Tensiunea alternativă de 6,3V pentru alimentarea tuturor filamentelor se obţine dintr-un stabilizator cu ferosaturaţie, lucrînd cu buclă închisă.

Tensiunea de filament, este detectată de un detector special de valoare eficace; prin compararea semnalului rezultat cu o tensiune continuă de referinţă se obţine semnalul de eroare, care după ce este amplificat comandă premagnetizarea unui şoc şi prin aceasta tensiunea pe primarul transformatorului de reţea.

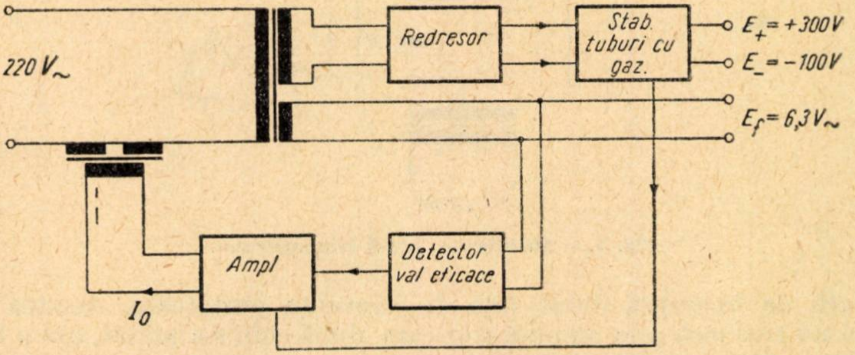


Fig. 4. — Schema-bloc a alimentatorului.

Pentru menţinerea constantă a sarcinii alimentatorului, atunci cînd nu se lucrează cu toate canalele amplificatorului de curent continuu, canalele care nu funcţionează sînt înlocuite cu rezistenţe adecvat alese.

Deriva de zero a oricăruia dintre canalele amplificatorului de curent continuu lucrînd cu alimentatorul stabilizat nu este mai mare de $\pm$ 50 μA pentru o oră de funcţionare după intrarea în regim stabil, iar dezechilibrul la variaţii bruşte de $\pm$ 10% ale tensiunii de reţea nu depăşeşte $\pm$ 70 μA.

ADAPTAREA TENSOMETRELOR STATICE PENTRU MĂSURĂTORI DINAMICE

Tensometrele statice nu au în general borne speciale pentru scoaterea semnalului demodulat. Pentru a se putea lucra cu amplificatorul de c.c. este necesară o mică modificare a schemei tensometrului, care însă nu afectează funcţionarea acestuia cînd nu se foloseşte amplificatorul de c.c.

În figura 5 este arătată schema de principiu a detectorului în inel al tensometrului ORION EMG 2353 cu modificările care au fost efectuate. Acestea constau din montarea unei borne suplimentare, aşezate pe partea laterală a aparatului şi introducerea unei rezistenţe de 1 kΩ, în modul arătat pe figură. Sarcina detectorului o constituie fie această rezistenţă (pe poziția de măsurare dinamică) fie microampermetrul aparatului (pe poziția de măsurare statică).

La borna de ieșire în c.c. apare semnalul demodulat împreună cu pulsații de frecvență dublă față de frecvența purtătoare. Acestea din urmă nu trec însă prin amplificator care, după cum s-a arătat, are o frecvență de tăiere mult mai joasă.

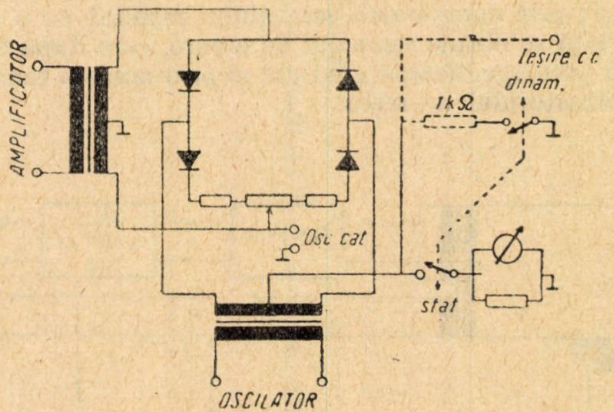


Fig. 5. — Modificarea adusă tensometrului.

Primită la redacție la 25 mai 1963

ШЕСТИКАНАЛЬНЫЙ УСИЛИТЕЛЬ ПОСТОЯННОГО ТОКА ДЛЯ ТЕНЗОМЕТРИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ

РЕЗЮМЕ

Электрические тензометры многих типов не могут отдавать ток, необходимый для привода в действие осциллографических шлейфов и по этой причине их нельзя использовать для записи динамических деформаций при многоточечных измерениях.

Описанный в работе усилитель делает возможным применение приборов указанного типа совместно с шлейфовыми осциллографами. При его разработке учитывались специфические условия таких измерений.

Для сохранения дрейфа усилителя в допускаемых пределах оказалось необходимым построение специальной единицы стабилизированного питания.

APARATE ŞI INSTALAŢII

TRADUCTOR PENTRU MĂSURAREA FORŢELOR

DE

M. P. POPOV, E. D. DECIU şi I. MITRICĂ

531.7

În diferite domenii de cercetare ale mecanicii aplicate se dovedeşte necesară măsurarea unor forţe care sînt funcţie de mai mulţi parametri, între care şi timpul. Un exemplu în acest sens îl constituie aşchierea metalelor unde măsurarea forţelor de aşchiere este utilă atît pentru studiul fenomenelor de aşchiere, cît şi pentru proiectarea sculelor. În vederea obţinerii datelor experimentale este necesară realizarea unei instalaţii experimentale de măsură, în care traductorul are un rol de seamă.

Traductorul care face obiectul lucrării de faţă are un domeniu larg de aplicare deoarece el poate fi montat pe diferite tipuri de suporturi executate după specificul piesei care urmează să fie măsurată. De asemenea, s-a mai urmărit ca să fie un traductor sensibil, precis, robust, uşor de executat şi adaptabil la diferite tipuri de punţi de măsură uzuale.

Traductorul montat pe suportul piesei a cărei solicitare se studiază joacă de fapt rolul unui reazem în care poate fi măsurată reacţiunea. După specificul piesei şi al solicitării acesteia, se stabileşte numărul şi poziţia traductoarelor necesare pentru măsurarea eforturilor la care este supusă piesa.

Principiul care a stat la baza construcţiei traductorului a fost măsurarea mărimilor mecanice pe cale electrică şi anume s-a urmărit măsurarea forţelor prin intermediul deformaţiei unui corp elastic, care la rîndul ei a fost transformată într-o mărime electrică.

În figura 1 se prezintă traductorul construit în cadrul Institutului de mecanică aplicată „Traian Vuia” al Academiei R.P.R. Astfel, corpul constă dintr-un pahar (*1*) prevăzut în partea inferioară cu filet exterior pentru montarea acestuia în suportul piesei. Contrapiuliţa (*2*) asigură blocarea paharului în suport în poziţia convenabilă. Paharul este închis în partea superioară printr-un capac (*3*) în care s-a practicat un orificiu pe unde ies firele spre instalaţia de măsură. Înainte de a se monta capacul, se înşurubează piuliţa (*4*) care fixează rigid pe periferie două lame elastice (*5*), montate ca în figură. Poziţia relativă a plăcilor elastice în pahar este fixată cu ajutorul a două piese de distanţă (*6*). La capete cele două lame susţin centric tija (*7*) care avînd la partea superioară un canal unde intră lamele face ca acestea să lucreze simultan. La partea inferioară tija se sprijină pe bila de rulment (*8*) care preia efortul ce se măsoară.

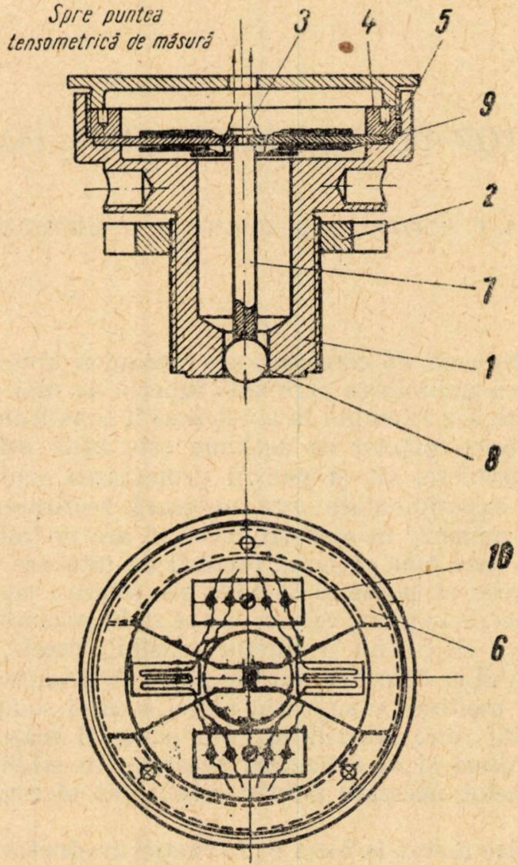


Fig. 1. — Traductorul pentru măsurarea forţelor.

Pe fiecare lamă elastică sînt lipite cîte două mărci tensometrice rezistive (*9*), una pe faţa superioară şi cealaltă pe faţa inferioară a lamei. Firele de conexiune electrică de la mărcile tensometrice sînt duse respectiv la două plăci de contacte (*10*), care sînt de asemenea fixate în pahar în golul dintre lamele elastice.

Mărcile tensometrice cu fir utilizate au avut baza de 10 mm şi rezistenţa electrică de 100 Ω.

Lipirea mărcilor tensometrice pe suprafeţele superioară şi inferioară ale lamelor elastice asigură o compensare termică şi face ca ele să lucreze diferenţial, ceea ce are drept efect o mărire a sensibilităţii traductorului. Montajul mărcilor este înfăţişat în figura 2 în două variante. Mărcile lipite pe feţele superioare ale plăcilor elastice, deci cele care lucrează la compresiune, sînt notate cu C_1 şi C_2; cele lipite pe feţele inferioare, deci cele care lucrează la tracţiune, sînt notate cu T_1 şi T_2. Din figura 2 se vede că mărcile tensometrice lucrează ca rezistenţe în braţele unei punţi Wheatstone. În varianta din figura 2 *a*, mărcile tensometrice lucrează cîte două în serie şi sînt plasate cu două braţe adiacente, rezistenţele R_1 şi R_2 aparţinînd punţii tensometrice. În varianta din figura 2, *b*, fiecare marcă tensometrică lucrează în cîte un braţ al punţii acest montaj conducînd la o sensibilitate mai mare decît cel din figura 2, *a*.

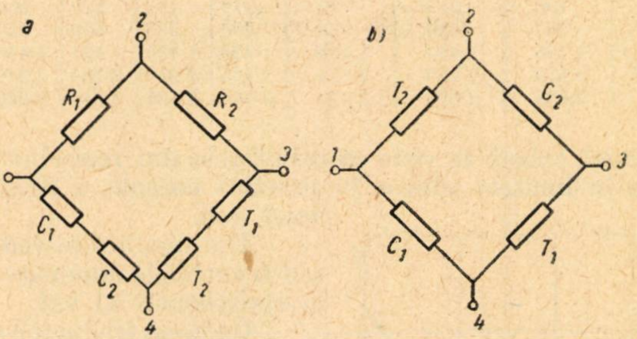


Fig. 2. — Montajul mărcilor tensometrice.

Frecvenţa proprie a traductorului este ridicată. Astfel, pentru lamele elastice construite din oţel de scule la grosimea $h = 2{,}4$ mm, s-a măsurat o frecvenţă proprie de aproximativ 5—5,5 kHz. Prin calcul, făcînd unele simplificări în ceea ce priveşte forma, s-a ajuns la valoarea 5,3 kHz, considerînd o grindă cu masă proprie de secţiune variabilă. Variind grosimea lamelor elastice între 2 şi 4 mm, prin calcul reiese că frecvenţa proprie a traductorului variază între 4,3 şi 8,6 kHz. Se vede deci că aceste frecvenţe sînt superioare frecvenţelor multor fenomene studiate uzual în mecanica aplicată, cum ar fi de exemplu procesul de aşchiere al metalelor. În ultimă instanţă însă trebuie ţinut seama de frecvenţa proprie a întregului sistem mecanic în care lucrează traductorul, adică inclusiv piesa de măsurat şi suportul ei.

Etalonarea traductorului a fost făcută static încărcîndu-l şi descărcîndu-l axial, succesiv cu greutăţi etalonate. Rezultatele obţinute sînt prezentate în tabelă, unde apar încărcările V [kgf] şi o mărime $k\varepsilon$, proporţională cu deformaţia ε măsurată la puntea tensometrică. În cazul experienţelor efectuate, constanta de proporţionalitate a avut valoarea $k = 0{,}425.10^{-6}$.

Tabelă

V [kgf]	kε									
	Experienţa I				Experienţa II					
	Încărcare	Descărcare	Încărcare	Descărcare	Încărcare	Descărcare	Încărcare	Descărcare	Încărcare	Descărcare
0	0	5	5	5	5	0	0	0	0	0
4,02	218	190	215	195	210	195	220	200	220	205
10,27	605	587	600	585	600	585	600	590	610	595
22,77	1 450	1 445	1 430	1 435	1 425	1 435	1 425	1 450	1 425	1 465
35,27	2 247	2 310	2 250	2 315	2 255	2 255	2 265	2 340	2 270	2 350
40,83	2 635	2 635	2 670	2 670	2 665	2 685	2 640	2 640	2 685	2 685

Din această tabelă se vede că rezultatele sînt reproductibile, erorile încadrîndu-se în limitele admise în practica curentă a măsurătorilor de acest gen.

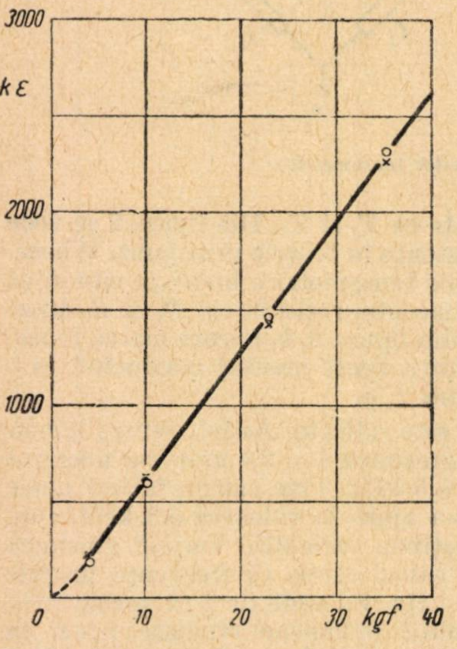


Fig. 3.—Curba de etalonare a traductorului.

Din figura 3 se vede că s-a obţinut o curbă de etalonare liniară pînă la aproximativ 41 kgf.

Cu acest traductor s-au efectuat experienţe preliminare în vederea determinării componenţei verticale P_z a forţei de aşchiere la strunjirea oţelului OL 50 (STAS 500-49). Traductorul a fost montat într-un suport al cuţitului de strung, anume construit, care la rîndul său se fixează în turela strungului. În figura 4 este prezentat un aspect din timpul efectuării experienţelor, unde se poate urmări montajul de ansamblu al instalaţiei experimentale.

Valoarea reală a componentei P_z se calculează ţinînd seama de dimensiunile geometrice ale cuţitului utilizat. În vederea micşorării erorilor de măsurare o etalonare se poate face direct pe suport, aplicînd pe vîrful cuţitului greutăţii etalonate şi urmărind semnalul dat de traductor. Înregistrarea etalonării direct pe suport şi valorile componentei P_z în timpul strunjirii s-a făcut cu ajutorul unui oscilograf magnetic (cu bucle).

Rezultatele obţinute în regim dinamic cu acest traductor au dat deplină satisfacţie. În figura 5 se prezintă o fotografie după o porţiune dintr-o oscilogramă ridicată la strunjirea oţelului OL 50 la două regimuri de lucru. În această figură se poate observa saltul forţei P_z la variaţia adîncimii de aşchiere de la $t = 0,5$ mm la $t = 1,0$ mm.

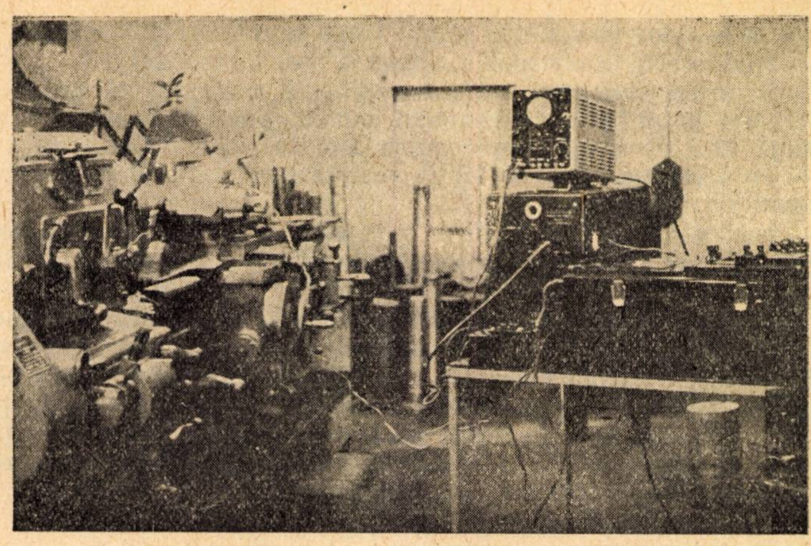


Fig. 4. — Instalaţia experimentală pentru măsurarea forţelor în procesul de aşchiere al metalelor.

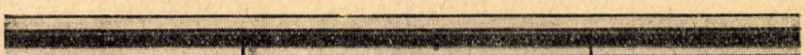


Fig. 5. — Oscilogramă obţinută la măsurarea componentei P_z a forţei de aşchiere în cazul strunjirii oţelului OL 50 (STAS 500-49) cu viteza $v = 84$ m/min, avansul $s = 0{,}25$ mm/rot şi adîncimea de aşchiere $t = 0{,}5$ mm şi $t = 1{,}0$ mm.

Pe baza celor prezentate se pot trage următoarele concluzii:

— traductorul este sensibil, robust și ușor de realizat;

— în urma etalonării traductorului, s-a constatat că are o curbă caracteristică liniară pentru domeniul pentru care a fost construit (4—41 kgf), fiind deci necesară o precomprimare (în cazul de față de 4 kgf);

— cu acest traductor se obțin rezultate reproductibile și nu apare fenomenul de histerezis;

— traductorul a fost verificat și în ceea ce privește funcționarea lui în regim dinamic, efectuînd experiențe de așchiere a metalelor la diferite regimuri;

— traductorul se poate adapta la diferite tipuri de punți tensometrice,

— acest traductor poate fi utilizat în diverse experiențe pentru determinarea solicitărilor mecanice, montînd în suporturi adaptate pieselor studiate un număr convenabil de traductoare. Astfel se creează posibilitatea de a măsura forțe în regim static sau dinamic, cînd frecvența este de ordinul cîtorva sute sau chiar mii de herzi și cînd nu apare o mișcare relativă între corpul studiat și traductor.

Primită la redacție la 2 august 1963

ДАТЧИК ДЛЯ ИЗМЕРЕНИЯ СИЛ

РЕЗЮМЕ

В работе описывается датчик для измерения сил, построенный на принципе измерения механических величин электрическим путем. С этой целью используются тензиометрические датчики сопротивления, приложенные на упругих пластинках. Датчик пригоден для измерений в статическом и динамическом режимах и имеет широкое поле применения.

BIBLIOGRAFIE

1. A. M. TURICIN, *Măsurarea electrică a mărimilor neelectrice*. Edit. tehnică, București, 1957.
2. S. TIMOSHENKO, *Théorie des vibrations*. Ed. Ch. Béranger, Paris-Liège, 1947.

MANIFESTĂRI ŞTIINŢIFICE PESTE HOTARE

COLOCVIUL INTERNAŢIONAL *RILEM* CU TEMA „MĂSURAREA ŞI INTERPRETAREA EFECTELOR DINAMICE ŞI ALE VIBRAŢIILOR CONSTRUCŢIILOR", BUDAPESTA, 7–11 IULIE 1963

DE

GH. BUZDUGAN
MEMBRU CORESPONDENT AL ACADEMIEI R.P.R.

În anul acesta, RILEM (Réunion internationale des laboratoires d'essais et de recherches sur les matériaux et les constructions) a organizat la Budapesta un colecviu internaţional, cu tema arătată mai sus.

La lucrări au participat circa 70 de delegaţi din ţări străine şi un număr aproximativ egal din R. P. Ungară, reprezentînd Academii de Ştiinţe, Institute de învăţămînt superior. Institute de cercetări şi întreprinderi de construcţii sau proiectări. Erau reprezentate o serie de ţări socialiste — U.R.S.S., R.P.R., R.P. Ungară, R.P.Polonă, R.D. Germană, R.S. Cehoslovacă, R.P. Bulgaria — precum şi o serie de ţări din Europa de Vest, America, Asia (Franţa, Italia, Anglia, R.F.G., S.U.A., Mexic, Canada, Japonia etc.).

La colocviu s-au prezentat aproape 50 de referate de specialitate, dintre care 43 au fost publicate în volumele I şi II de comunicări, iar restul, împreună cu referatele generale şi discuţiile, vor apare în volumul III.

Din partea delegaţiei romîne s-au prezentat 4 lucrări, referitoare la : metode de încercare la oboseală a traverselor din beton pretensionat (Gh. Buzdugan), coeficienţi de amortizare a vibraţiilor la poduri suspendate (Gh. Buzdugan şi R. Voinea), efectul forţelor tăietoare la acţiuni seismice (N. Korcinski) şi măsuri dinamice pe modele (H. Sandi, G. Şerbănescu, C. Niculescu).

Lucrările colocviului, de o deosebită importanţă practică, au suscitat vii discuţii urmate de o serie de propuneri interesante.

Colocviul s-a desfăşurat pe trei grupe, fiecare făcînd obiectul unui referat general al preşedintelui comitetului de organizare, Alexandru Májor, respectiv obiectul discuţiilor unei zile şi anume:

1. Măsurări şi aparate de măsură pentru vibraţii în general, comportarea materialelor de construcţii supuse la vibraţii şi caracteristicile dinamice ale elementelor structurale.
2. Fundaţii de maşini, studiul dinamic al solurilor.
3. Probleme dinamice ale construcţiilor şi structurilor.

O temă importantă, viu discutată la colocviu, a fost aceea a stabilirii unor criterii pentru aprecierea efectelor vibraţiilor asupra clădirilor şi oamenilor. În acest sens, un referat sintetic interesant, cu concluzii proprii, a fost prezentat de către J. I. Soliman, de la Universitatea din Londra. Pe aceeaşi temă s-au făcut propuneri valoroase de către R. Ciesielski, de la Politehnica din Cracovia, de I. Alpan şi Ts. Meidav de la Institutul tehnologic din Israel. B. G. Korenev, de la Academia de Construcţii a U.R.S.S., a făcut o prezentare a prescripţiilor şi caietelor de sarcini pentru analiza dinamică a construcţiilor, aplicate în U.R.S.S.

A suscitat un deosebit interes grupa de teme referitoare la calculul fundaţiilor de maşini unde s-au prezentat referate privind: caracteristicile elastice ale solurilor (G. Dawance — Franţa), dinamica fundaţiilor maşinilor (V. I. Sisoev — U.R.S.S., N. A. Weil — S.U.A., Y. Jullien — Franţa, M. Novák — R. S. Cehoslovacă), influenţa rigidităţii maşinii asupra vibraţiilor (L. Pust — R. S. Cehoslovacă), rezonanţa la trecerea prin turaţia critică (B. G. Korenev, N. A. Pikulev, I. S. Şeinin — U.R.S.S.), proprietăţile dinamice ale terenurilor (Y. Nishida — Japonia, C. N. Nagaraj şi A. Sridharan — India, H. A. Balakrishna Rao şi M. P. Jain — India), folosirea calculatoarelor electronice la studiul vibraţiilor (G. Ludvig — R. P. Ungară), efectul masei solului asupra vibraţiilor ciocanelor (E. Toşkov — R. P. Bulgaria), studiul vibraţiilor maşinilor pe covoare elastice de cauciuc (T. I. Savolainen — Finlanda). Prezenţa la colocviu a prof. Dr. E. Rausch (R. F. G) şi Dr. Al. Májor, autori a două tratate cunoscute de fundaţii de maşini, a asigurat reuşita acestei grupe de teme.

Subliniem de asemenea un studiu executat de M. Alexandre şi P. Guiaux (Belgia), referitor la determinarea frecvenţelor proprii ale navelor. În acest scop, s-au făcut măsurări de vibraţii atît cu nave în mers, la diferite viteze, cît şi în doc, folosind o maşină vibratoare de viteză variabilă, aşezată în vecinătatea elicei.

Un studiu interesant, executat de T. Pál şi B. Goschy, din R. P. Ungară, se referă la încercările de oboseală ale podurilor din beton armat, şi beton pretensionat, executate pe un stand realizat în Budapesta.

Alte lucrări se referă la încercări de oboseală ale grinzilor sau structurilor din beton armat, la aparate folosite în tehnica măsurării vibraţiilor, la studiul vibraţiilor barelor de secţiune variabilă (V. Koloušek), la reacţiunile interne ale barelor elastice sub efectul sarcinilor dinamice (M. P. White), vibraţii în zone seismice (I. Prince) etc.

Dată fiind importanța deosebită a problemelor de dinamica construcțiilor, de felul celor tratate la acest colocviu, s-a hotărît înființarea unui comitet permanent, în cadrul RILEM, pentru probleme de vibrații. În acest scop s-a creat un comitet de inițiativă, format din 10 persoane, unde a fost ales delegat al R.P.R. acad. prof. Aurel Beleș.

Organizarea colocviului a fost făcută, în bune condiții de către Institutul de cercetări științifice și tehnice în construcții — ÉTI, din Budapesta.

LE COLLOQUE INTERNATIONAL *RILEM* SUR LE THÈME «MESURE ET INTERPRÉTATION DES EFFETS DYNAMIQUES ET DES VIBRATIONS DES CONSTRUCTIONS», BUDAPEST, 7—11 JUILLET 1963

RÉSUMÉ

On présente succinctement les travaux du Colloque RILEM tenu à Budapest du 7 au 11 juillet 1963, et auquel ont participé environ 70 délégués de pays étrangers et un nombre sensiblement égal de la République Populaire Hongroise.

Les travaux ont été partagés entre les groupes suivants :

1. Mesures et appareils de mesure pour les vibrations en général; comportement des matériaux de construction soumis aux vibrations; caractéristiques dynamiques des éléments structuraux.
2. Fondations de machines; études dynamiques des sols.
3. Problèmes dynamiques des constructions et des structures,

chacun formant l'objet d'un rapport général du président du comité d'organisation, A. Májor, et, respectivement, l'objet des discussions d'une journée.

MANIFESTĂRI ŞTIINŢIFICE PESTE HOTARE

CONGRESUL INTERNAŢIONAL AL MATEMATICIENILOR
(Stockholm, 15—22 august 1962)

PROBLEME INTERESÎND MECANICA APLICATĂ

DE

D. MANGERON

Programul ştiinţific al celui de-al XIII-lea Congres internaţional a matematicienilor, ce s-a ţinut la Stockholm între 15—22 august 1962, s-a desfăşurat în cadrul următoarelor opt secţii : 1. Logica, Bazele şi Istoria matematicii ; 2. Algebra şi Teoria numerelor ; 3. Analiza matematică ; 4. Geometria algebrică ; 5. Topologia şi Geometria diferenţială ; 6. Probabilităţi şi Statistică ; 7. Matematici aplicate, Fizica matematică şi Analiza numerică ; 8. Educaţie, Învăţămînt 1).

La acest congres au fost prezenţi peste 2 400 de matematicieni veniţi din diferite colţuri ale lumii. S-au prezentat peste 900 de comunicări de specialitate, dintre care peste 70 au reprezentat conferinţe de sinteză în diferite domenii.

În imposibilitatea de a ne opri aici fie chiar şi cu precizări oricît de succinte asupra conţinutului celor 134 comunicări prezentate în cadrul secţiei a 7-a 2), menţionăm în cele ce urmează tematica problemelor dezbătute în cadrul unor şedinţe speciale consacrate mecanicii fluidelor, fluidosau gazomagnetodinamicii şi elasto- şi plastomecanicii, subliniind totodată şi cîteva titluri de probleme de matematică aplicată prezentate la acest congres, care ne-au părut deosebit de interesante.

---

1) O dare de seamă relativă la activitatea desfăşurată în cadrul secţiei a 8-a a apărut sub semnătura prof. I. Ilasievici în Gazeta matematică şi fizică, seria A, *1*, 51—52 (1963).

2) Menţionăm că numeroase probleme prezentate şi expuse în cadrul secţiei de analiză matematică, dintre care unele aparţinînd oamenilor de ştiinţă romîni (ca de exemplu, acad. Gr. C. Moisil, acad. M. Nicolescu, acad. Gh. Vrănceanu, acad. N. Teodorescu, acad. M. Haimovici, D. Mangeron ş.a.) reflectă, prin schematizările matematice studiate, aspecte interesînd totodată şi variate probleme de mecanică aplicată, ca sisteme de mecanisme automate cu relee şi contacte, probleme de termotehnică s.a.

a. E. W. Adams, O clasă de soluții asemenea pentru viteză și temperatura stratului limită în curgere axială și planar-simetrică în canal; J. Gillis și G. Weiss, Curgere vîscoasă între pereți plani neparaleli; M. Wolt, Calculul scurgerii turbionare prin metoda ecuațiilor integrale; A. N. Ergun, Mișcări fluide auto-superpozabile; A. F. Pillow, Convecție forțată a unui fluid vîscos cu număr Reynolds mic în cazul circulației cu un dipol în două dimensiuni; S. C. R. Dennis, Asupra mișcării încete a unui fluid vîscos prin corpuri cilindrice; K. B. Ranger, Curgere vîscoasă bidimensională în interiorul unui cilindru circular.

b. H. Grad, Probleme matematice de fluidomagnetodinamică și fizica plasmei; I. Ferrari, Asupra unei teoreme de unicitate pentru ecuațiile magnetodinamicii fluidelor; J. B. Helliwell, Șoc de gaz ionizat și unde de detonație în magnetodinamica gazelor; J. J. Moreau, Asupra nașterii cavitației într-un fluid incompresibil; J. Bonder, Asupra structurii tensoriale a sistemului diferențial al dinamicii gazelor reale; C. K. Thornhill, Analogia între explozii intense și zborul corpurilor cu viteze foarte mari; C. B. R. Seth, Analiza punctelor de inflexiune în cazul deformațiilor plastice; W. A. Nash, Încovoierea învelișurilor sferice subțiri susținute de o fundație elastică; E. Issacson, O membrană asferică sub acțiunea presiunii interioare; A. Dou, Comportarea elastică a unui cilindru sudat longitudinal; H. B. Keller, J. B. Keller și E. L. Reiss, Starea de încovoiere a plăcilor circulare; R. A. Ross, Soluția fundamentală pentru ecuația termoelastică a undelor; G. Paria, Unde plane longitudinale printr-un solid, termoelastice în cîmpuri magnetice; Z. Alterman, Propagarea pulsațiilor seismice într-o sferă; L. D. Fadeev, Construcția rezolvantei operatorului de energie a unui sistem de 3 particule și problema disipării; R. V. Gamkrelidze, Asupra regimurilor alunecătoare optimale; B. A. Fleishman, Suprapunerea regimurilor periodice sincrone în sisteme de control cu relee; J. Moser, Noi rezultate asupra stabilității mișcării periodice; V. M. Glușkov, Problema complectității și autoorganizării în teoria abstractă a automatelor; N. Wiener, Funcții aleatorii și mecanica statistică; M. A. Lavrentiev, Unele probleme de contur în teoria potențialului; R. P. Cesco, Asupra soluției generale a problemei celor trei corpuri.

Să ne oprim pentru a ilustra adîncimea, interesul și anvergura comunicărilor făcute la CIM 1962 asupra ideilor principale dezvoltate în comunicările menționate mai sus datorite prof. dr. V. M. Glușkov și R. V. Gamkrelidze, cunoscuți și mult apreciați de cercurile largi de specialiști de la noi.

I. Problema complectității se pune de regulă în teoria structurală a automatelor după fixarea unui alfabet interior (de cele mai dese ori binar). În cadrul teoriei abstracte a automatelor este necesar a se folosi în vederea abordării aceleiași probleme noțiunea generalizată de compoziție și înainte de toate noțiunea de produs generalizat de automate. Există cîteva definiții naturale ale complectității (complectitatea izomorfă, omomorfă și algoritmică). Se stabilesc condițiile necesare și suficiente de complectitate a unui sistem de automate abstracte, în corespondență cu diferite sensuri date definiției alese la bază.

Problema de autoorganizare se pune și ea de regulă în teoria structurală a automatelor. Punînd-o și în cadrul teoriei abstracte a automatelor și folosind noțiunile, ce se introduc în mod natural, de entropie de instruire și entropie de examen, se reușește a se obține evaluări cantitative ale capacității de autoorganizare a automatelor abstracte finite.

II. Principiul de maxim din teoria proceselor optimale indică condițiile necesare pe care le verifică comenzile și traiectoriile optimale. Aceste condiții permit determinarea procesului optimizant în ipoteza existenței acestui proces. Teorema de existență relativă la acest fapt se datorește lui A. F. Filippov.

Dacă condițiile teoremei de existență a lui Filippov nu sînt îndeplinite, nu există în general vorbind comandă optimă. Totdeauna există însă o succesiune minimizantă de comenzi. Succesiunea corespunzătoare de traiectorii converge către o curbă absolut continuă. Mișcarea de-a lungul acestei curbe se numește regim alunecător optimal, atunci cînd această mișcare nu este realizabilă de nici o comandă admisibilă.

Se pot găsi, combinînd principiul de maxim și teorema de existență, în cazurile cînd mulțimea valorilor admisibile ale comenzii este o mulțime compactă, succesiuni minimizante și regimuri optimale alunecătoare corespunzătoare.

Cel de-al XIII-lea Congres internațional al matematicienilor, reflectînd parțial prin conținutul lucrărilor expuse și un șir de probleme însemnate din domeniul mecanicii aplicate, a contribuit din plin la promovarea înțelegerii și colaborării între oamenii de știință din diferite țări ale lumii. El s-a bucurat între altele de participarea activă a unui număr însemnat de academicieni sovietici, în frunte cu A. N. Kolmogorov, L. S. Pontriaghin, I. N. Vekua, S. L. Sobolev, B. V. Gnedenko, Ju. A. Mitropolski, Ja. V. Linnik, S. B. Stecikin, M. A. Lavrentiev, academicieni unguri A. Rényi, B. Sz. Nagy, P. Turán, academicieni polonezi T. Wazewski, S. K. Zaremba, academicianul ceh M. Katetov, academicianul belgian L. Godeaux ș.a.

Menționăm, în fine, schimburile de idei, largile posibilități de adîncire a diferitelor probleme de specialitate cu prilejul unor vizite organizate în timpul Congresului, cum a fost de exemplu vizita la Institutul de matematică de la Djursholm.

CONGRÈS INTERNATIONAL DES MATHÉMATICIENS

(STOCKHOLM, 15—22 août 1962)

RÉSUMÉ

On présente, dans leurs grandes lignes, quelques-uns des problèmes concernant la mécanique appliquée et qui ont fait l'objet des communications présentées au Congrès International des Mathématiciens, qui s'est tenu à Stockholm du 15 au 22 août 1962.

RECENZII

GH. MIHOC și V. URSEANU, *Matematici aplicate în statistică*. Edit. Acad. R.P.R., București, 1962, 732 p.

Lucrarea tov. acad. prof. Gh. Mihoc și V. Urseanu conține o prezentare foarte completă a teoriilor statistice moderne. Față de lucrările similare anterioare apărute în literatura de specialitate romînă, cuprinde multe probleme noi, detaliate, ale statisticii matematice, oferind astfel cititorilor un material util și eficace în aplicațiile cele mai diverse asupra fenomenelor de masă din cele mai diferite domenii : industrie, agricultură, biologie, fizică, chimie etc. Întrunind expunerile asupra elementelor clasice de teoria probabilităților și de statistică matematică cu formulările și dezvoltările recente, efectuate de savanții străini, în special de cei sovietici (Glivenko, A. N. Kolmogorov, A. I. Hincin, B. V. Gnedenko etc.), precum și cu aportul original al autorilor și al altor oameni de știință romîni, lucrarea este deosebit de valoroasă fiind completată în ultimele capitole (partea VI) cu metodele moderne de calcul statistic, și anume calculul cu numere întîmplătoare precum și programarea liniară, teorii de importanță foarte mare în aplicațiile practice. Expunerea clară, exemplificată, conduce la o înțelegere ușoară a diferitelor probleme complexe. De altfel întreaga lucrare prezintă pe cît posibil elementele esențiale de teoria probabilităților și de statistică matematică sub o formă riguros științifică cu un aparataj matematic accesibil economiștilor și totodată completată cu demonstrațiile severe ce necesită cunoștințele superioare de matematici moderne.

Tratatul cuprinde 6 părți cu următoarele titluri :

— Calculul probabilităților,

— Elemente de analiză a distribuțiilor statistice,

— Analiza seriilor în timp (dinamice),

— Metoda indicilor,

— Metoda selecției,

— Metode moderne de calcul statistic.

În partea întîi, în opt capitole, se cuprinde fundamentarea axiomatică a lui Kolmogorov a teoriei probabilităților, scheme și legi clasice de probabilitate, valori medii și momente, funcția de repartiție și funcția caracteristică și se încheie cu legea numerelor mari. Se găsesc expuse concis axiomatizarea lui O. Onicescu avînd la bază mulțimea de evenimente ce constituie o latice, cu element unitate, complementată și numărabilă aditivă și metoda funcțiilor arbitrare a lui Hincin pentru determinarea probabilităților într-o serie de fenomene mecanice. În acest sens sînt expuse critic definiția clasică a probabilității ca și cea preconizată de R. Mises. Observațiile asupra legii numerelor mari lămurește complexul proprietăților de convergență și prezintă aspecte interesante ale acestei legi.

Partea a doua, în trei capitole, dezvoltă distribuțiile statistice cu o singură sau cu mai multe caracteristici, funcțiile experimentale, mărimile medii folosite în practica statisticii, condiționarea variabilelor statistice și analiza legăturii statistice prin corelație și regresiune Ambele părți cuprind numeroase exemple numerice.

În partea a treia, dezvoltată pe trei capitole, se cuprind problemele generale ale elaborării și analizei seriilor dinamice, despre ajustarea și interpolarea seriilor dinamice și metode de calcul ale ritmului mediu de dezvoltare. Sînt expuse reprezentarea grafică a seriilor dinamice, indicatorii numerici prin care seria dinamică oglindește procesul de schimbare și dezvoltare a unei colectivități statistice, diferite metode de ajustare și formule de interpolare. Calculul ritmului mediu de dezvoltare al fenomenelor social-politice se face prin diferite procedee în funcție de particularitățile fenomenelor cercetate și de sarcinile analizei statistice. Sînt prezentate metodele mediei geometrice, mediei parabolice, tendinței exponențiale, metoda lui Ficca.

Partea a patra cuprinde în patru capitole analiza indicilor a căror utilizare permite măsurarea schimbărilor intervenite în timp sau compararea în spațiu a fenomenelor și proceselor social economice. Datorită importanței acestei metode de apreciere, se pune accentul pe cunoașterea profundă a fenomenelor și a esenței indicilor, prezentîndu-se sistematizarea în clasificarea indicilor propusă de V. Peregudov. Sînt făcute exemplificări pentru indicii prețului de cost și pentru indicii productivității muncii. Un capitol se referă la analiza și metodele de calcul al indicilor teritoriali, prin care se compară datele diverselor regiuni, iar ultimele două capitole cuprind aplicații de analiză prin metoda indicilor și aplicarea legii numerelor mari la elaborarea indicilor.

În partea a cincea, cu patru capitole, se cuprinde structura diferitelor feluri de selecție, sondaje cu unul sau mai multe faze, sondajul de volum redus, verificarea ipotezelor. Partea a șasea cuprinde metodele moderne de calcul statistic.

Lucrarea de față se remarcă prin prezentarea diverselor aspecte critice, prin observațiile și concluziile generale asupra diverselor metode și procedee utilizate în statistica matematică. Totodată conține o serie de exemple strîns legate de practică în conformitate cu sarcinile economiei noastre socialiste. Cartea se situează printre lucrările absolut necesare în literatura de specialitate.

Chr. Pelecudi

H. M. IONESCU, *Statistica matematică*. Editura didactică și pedagogică, București, 1962, 415 p.

Importanța și utilitatea statisticii derivă desigur din multiplele ei aplicații asupra fenomenelor de masă în diferite domenii : biologie, fizică, chimie, agricultură, industrie etc. Statistica matematică, dezvoltată destul de recent, cuprinde un vast material care continuă să fie sistematizat pe principiile teoriei statistice. În strînsă legătură cu teoria probabilităților, statistica matematică elaborează metodele cele mai adecvate pentru obținerea, din datele experimentale, a concluziilor fundamentate asupra fenomenelor de masă supuse aceluiași complex de condiții repetate. Lucrările apărute în diferite țări și în special în U.R.S.S., unde dezvoltarea statisticii matematice a luat un mare avînt, au rezolvat o serie de probleme de bază în acest domeniu, creîndu-se în ultimul timp prin savanții sovietici Glivenko, A. N. Kolmogorov, A. I. Hincin, B. V. Gnedenko etc. fundamentele moderne ale teoriei probabilităților și statisticii matematice. În țara noastră au apărut lucrări valoroase în acest domeniu sub influența activității depuse de prof. O. Onicescu, acad. Gh. Mihoci etc. În prezent o serie de operațiuni în statistica matematică au ajuns în faza de standardizare.

Lucrarea sus-menționată conține sub o formă concisă, riguros științifică, metodele statisticii matematice. Împărțită în 22 de capitole, prezintă la început noțiunile strict necesare de statistică teoretică, urmate de elemente de teoria probabilităților, după care se dezvoltă problemele statisticii matematice. Astfel sînt redate distribuțiile statistice cu elementele lor caracteristice, reprezentarea grafică a datelor statistice, legătura între variabilele statistice prin corelație și regresiune. Sînt expuse (cap. I—IV) exemple concrete de selecții aleatoare din diferite colectivități statistice, ceea ce introduce pe cititor mai ușor în complexul problemelor. Capitolele V și VI, de teoria probabilităților, cuprind elemente de teoria generală a mulțimilor, fundarea axiomatică a lui Kolmogorov a probabilității pe un cîmp finit de evenimente, precum și definirea probabilității pe un cîmp infinit de evenimente, prin introducerea noțiunii de măsură. Capitolele VII—IX se referă la studiul distribuțiilor statistice uni- și multidimensionale, discrete și continue, utilizînd noțiunile de variabilă aleatoare, densitate de probabilitate, funcție de repartiție etc. Sînt detaliate distribuțiile clasice. Capitolele X—XII conțin teoria momentelor, a funcțiilor generatoare și a funcțiilor caracteristice cu proprietățile lor. În capitolul XIII este expusă legea numerelor mari și teoremele de convergență, precum și teoremele de distribuții limită. Capitolul XIV dezvoltă teoria corelației și a regresiunii, iar în capitolul XV se expune teoria distribuției funcțiilor variabilelor χ^2, Fischer și Student. În capitolele XVI—XVIII se prezintă teoria matematică a selecției cu distribuțiile de selecție, selecții din colectivități finite și infinite, estimarea corectă și absolut corectă, precum și metoda verosimilității maxime și metoda momentelor pentru estimarea parametrilor unei distribuții statistice specificate. Capitolele XIX și XX cuprind distribuția indicatorilor de probabilitate maximă și teoria construirii intervalelor de încredere. Capitolul XXI se referă la statistica ordinii, iar capitolul XXII prezintă teoria verificării ipotezelor statistice.

Din această enumerare sumară a conținutului se observă că lucrarea cuprinde un bogat material, atît teoretic cît și practic. Acesta se găsește expus sub o formă clară și bine sistematizat ceea ce împreună cu faptul că are și numeroase exemple practice, fac lucrarea ușor accesibilă unui mare număr de cititori. Formulările matematice sînt riguros științifice și acolo unde este cazul fac apel la cunoștințe superioare de matematică. Lucrarea se adresează în primul rînd studenților, economiștilor și tehnicienilor din producție, cărora le pune ușor la îndemînă cunoștințe suficiente, dar destul de bogate și complete, pentru rezolvarea diverselor probleme.

Chr. Pelecudi

VASILE MARCU, *Metalizarea prin pulverizare*. Edit. Acad. R.P.R., București, 1963, 338 p.

Unul din factorii cei mai de seamă ai progresului tehnic din timpurile noastre îl constituie materialele noi. Fenomene și procedee tehnologice cunoscute nu au putut fi aplicate în industrie pînă ce s-a rezolvat problema unui material special care intră în construcția mașinii sau instalației respective, deoarece materialele existente în perioada de timp respectivă nu erau corespunzătoare sub raport calitativ. Astfel, în tehnica motoarelor cu reacție sînt necesare materiale cu o rezistență termică apreciabilă și cu o rezistență mecanică deosebit de mare la temperaturi ridicate. În industria chimică, cu ponderea cea mai mare în dezvoltarea industrială actuală, realizările obținute sînt strîns legate de problema materialelor rezistente la coroziune care intră în construcția instalațiilor respective.

În țara noastră pentru desăvîrșirea unei puternice baze materiale, calitatea materialelor are o deosebită însemnătate.

Un rol important în obținerea de materiale noi, de îmbunătățire calitativă a celor existente, de obținere a materialelor de înlocuire și a unor procedee tehnologice productive și ieftine, îi revine în zilele noastre cercetării științifice, prin intermediul căreia, noul poate fi introdus în producție cu suficiente garanții de calitate și eficacitate economică.

Se poate considera că lucrarea care face obiectul recenziei de faţă se înscrie din plin pe linia contribuţiilor la cunoaşterea noului în direcţia materialelor şi a procedeelor tehnologice noi de metalizare. Merită de asemenea să fie relevat aportul autorului şi al colectivului respectiv adus în acest domeniu prin cercetări ştiinţifice proprii.

Lucrarea cuprinde patru părţi (16 capitole) în cadrul cărora se prezintă aspectele metalizării prin pulverizare, din punctele de vedere ale evoluţiei şi caracteristicilor, ale bazei materiale, ale tehnologiei şi ale aplicaţiilor. În capitolul I autorul redă în mod suficient procedeele de acoperiri metalice înrudite cu metalizarea prin pulverizare şi anume metalizarea prin cufundare în metale topite, placarea şi metalizarea electrolitică. În capitolul II se arată modul de obţinere a straturilor metalizate prin pulverizare, descriind procedeele de topire cu gaze şi electrice şi fazele formării straturilor de metale pulverizate. Se face de asemenea o analiză a structurilor metalizate sub raportul constituenţilor metalografici. Caracteristicile fizico-chimice ale straturilor metalizate, printre care granulaţia particulelor, porozitatea şi greutatea specifică, caracteristicile termice şi electrice, compoziţia chimică şi rezistenţa la coroziune sînt prezentate în capitolul III. Completarea caracteristicilor stratului, prin cele mecanice, se face în capitolul IV, neomiţîndu-se să se scoată în evidenţă faptul că prin trecerea sub formă de strat metalizat a unor metale, unele proprietăţi ale acestora scad ca de exemplu rezistenţa la tracţiune, alungirea etc., la altele, ca de exemplu la duritate, înregistrîndu-se îmbunătăţiri. Tot în acest capitol se tratează problema aderenţei pe metalul de bază a stratului metalizat, precum şi unele aspecte comparative între metalizarea prin pulverizare şi metalurgia pulberilor. În capitolele V, VI şi VII se descrie baza materială a metalizării prin pulverizare, arătîndu-se construcţia şi caracteristicile aparatelor de metalizare, aranjamentul în instalaţie al aparatelor şi accesoriilor, materialele de aport, precum şi aspecte cu privire la sursele de energie termică şi pneumatică folosite la metalizare. În capitolele care tratează despre tehnologia metalizării, şi anume în capitolul VIII : operaţii preliminarii, capitolul IX : efectuarea metalizării, capitolul X : prelucrarea şi controlul straturilor metalizate, capitolul XI : protecţia muncii şi capitolul XII : aspecte economice, standarde, sînt prezentate în mod cuprinzător elementele de realizare practică a operaţiei de metalizare prin pulverizare. Rolul important al metalizării în industrie este arătat în ultimele cinci capitole ale lucrării, prin numeroase şi variate exemple, semnalînd la fiecare caz în parte aspectele colaterale ale problemei care pot constitui căi pentru noi extinderi ale procedeului. Astfel, în capitolul XIII se dau exemple de recondiţionări şi remedieri de defecte la piese metalice (arbori cotiţi de motoare, axe cardanice etc.); în capitolul XIV se prezintă aspectele protecţiei suprafeţelor contra coroziunii obişnuite (straturi de zinc) şi contra coroziunii la temperaturi înalte (alitarea); în capitolul XV se tratează aspectul de material antifricţiune ale straturilor metalizate poroase cu aplicaţii la lagăre ; în capitolul XVI aplicaţiile metalizării în diferitele ramuri industriale (industria metalurgică, industria chimică, industria lemnului etc.); în capitolul XVII se tratează problema pulverizării materialelor nemetalice (mase plastice, ceramice) în vederea depunerii lor sub formă de straturi mai ales anticorosive pe diferite piese, ocazie cu care se prezintă şi noul procedeu, de mare interes pentru viitor datorită temperaturilor de peste 20 000°C ce pot fi realizate cu ajutorul lui, şi anume procedeul cu jet de plasmă. În ultimul capitol (XVIII), extinderea metalizării prin pulverizare, se prezintă răspîndirea procedeului în diferitele ţări, precum şi realizările în ţara noastră în această direcţie. Lucrarea se încheie cu ample indicaţii bibliografice grupate corespunzător cu cele patru părţi ale ei.

Conţinutul bogat şi multilateral, face ca această lucrare să fie de un real folos documentar în domeniul metalizării prin pulverizare, atît în direcţia de cercetare cît şi în aceea cu caracter aplicativ. Forma editorială îngrijită a lucrării poate fi considerată ca un succes al Editurii Academiei R.P.R.

Gh. Vasilca

В. А. МОСКАЛЕНКО, *Механизмы* (Mecanisme). Государственное научно-техническое издательство машиностроительной литературы, Москва, 1963, 240 p.

Datorită rolului important pe care îl are în creşterea producţiei, a productivităţii muncii şi a scăderii preţului de cost, mecanizarea şi automatizarea au căpătat o largă aplicare în toate domeniile industriei. Pentru a putea rezolva problemele care apar în introducerea mecanizării şi a automatizării proceselor de producţie, este necesar să se cunoască bine principiile de funcţionare şi construcţia diferitelor mecanisme folosite de către acei care lucrează în aceste domenii.

Cu toate că există o vastă literatură de specialitate, apar o serie de greutăţi în folosirea acestei literaturi, în special la alegerea mecanismelor care să corespundă cel mai bine scopului propus. Pornind de la acest fapt, autorul şi-a propus să selecţioneze şi să sistematizeze un bogat material cuprinzînd cele mai răspîndite mecanisme care se folosesc în mecanizare şi automatizare şi să le prezinte într-o formă cît mai accesibilă pentru a putea fi folosite de un cerc cît mai larg de lucrători din aceste domenii. Lucrarea cuprinde schemele cinematice şi constructive precum şi descrierea funcţionării celor mai caracteristice mecanisme de destinaţie generală. Aceste mecanisme au fost grupate după modul lor de funcţionare în nouă categorii, care formează şi cele nouă părţi ale cărţii.

În prima parte a lucrării sînt prezentate cele mai folosite mecanisme de cuplare şi de decuplare. Aici sînt descrise atît mecanismele cu comandă manuală cît şi cele cu comandă automată în funcţie de traiectorie, de viteză, de timp sau în funcţie de executarea ciclului respectiv.

Partea a doua a cărţii cuprinde descrierea mecanismelor de fixare. Sînt prezentate mecanismele folosite la fixarea poziţiei unui element, la fixarea poziţiei reciproce a două şi trei elemente, precum şi la fixarea unui element prin strîngere.

Mecanismele folosite la reversarea mişcării precum şi cele folosite la transformarea mişcării de rotaţie în mişcare de translaţie formează obiectul părţii a treia a cărţii. După ce sînt prezentate diferite mecanisme pentru reversarea mişcării, printre care un loc important îl ocupă reversoarele cu roţi dinţate, sînt descrise diferite mecanisme de transformare a mişcării de rotaţie în mişcare de translaţie : mecanismele cu şurub, cu roţi dinţate şi cremalieră, cu excentric, cu came, cu elemente flexibile sau mecanismul bielă-manivelă.

În continuare sînt descrise mecanismele mişcării intermitente (mecanisme cu clichet, cu roţi dinţate, cruce de Malta), mecanisme de transmisie cu roţi dinţate (planetare, diferenţiale, variatoare) precum şi mecanisme de siguranţă folosite atît în mişcarea continuă cît şi cele folosite în mişcarea periodică (cu arcuri, cu bile şi cu arcuri, cu discuri de fricţiune etc.).

Un capitol special este rezervat mecanismelor pentru controlul dimensiunilor. Aici sînt prezentate o mare varietate de mecanisme pentru controlul diametrelor atît al bilelor cît şi al pieselor cilindrice, precum şi mecanisme pentru controlul înălţimii şi lungimii pieselor.

Ţinînd seama de faptul că în prezent la liniile automate transportul pieselor între diferite operaţiuni se face automat, autorul a consacrat capitolul nouă al cărţii prezentării diferitelor mecanisme folosite în transportul automat cum sînt mecanismele pentru acumularea semifabricatelor, pentru orientarea lor, mecanismele pentru distribuirea cu bucata a semifabricatelor şi aducerea lor în zona de lucru.

Datorită avantajelor pe care le prezintă, dispozitivele de comandă cu acţionare pneumatică şi hidraulică tind să înlocuiască pe cele cu acţionare mecanică. Pentru a veni în ajutorul celor care folosesc, sau vor să folosească astfel de dispozitive de comandă, autorul îşi încheie lucrarea cu descrierea cîtorva scheme de acţionare pneumatică şi hidraulică precum şi prezentarea principiului de funcţionare al unor aparaturi de comandă pneumatică şi hidraulică : acţionare pneumatică cu diafragmă, cu palete, acţionare hidraulică rectilinie, rotitoare etc.

Autorul nu şi-a propus să prezinte calculele mecanismelor care au făcut obiectul acestei lucrări, ci doar prezentarea principiilor de funcţionare, a caracteristicilor lor constructive, precum şi să dea cîteva recomandări pentru alegerea şi aplicarea lor. Datorită acestui fapt cartea este accesibilă unui cerc larg de lucrători din domeniul automatizării şi mecanizării : ingineri, raţionalizatori, inventatori.

C. Paraschiv

M. M. ОРАХЕЛАШВИЛИ, *Износостойкость реактивных гидротурбин* (Rezistenţa la uzură a turbinelor hidraulice cu reacţie). Госэнергоиздат, Москва-Ленинград, 1960, 109 p.

Spre deosebire de numeroasele articole ce scot în evidenţă aspecte particulare ale uzurii turbinelor hidraulice, monografia lui M. M. Orahelaşvili conţine o expunere sistematică şi amplă asupra acestui fenomen, bazată pe îndelungate cercetări ale autorului asupra turbinelor unor uzine hidroelectrice în funcţiune, cît şi a consultării lucrărilor întreprinse de alţi cercetători (85 citate bibliografice).

Monografia este divizată în cinci capitole, al căror conţinut este schiţat în cele ce urmează.

Formularea problemei generale ce face obiectul monografiei este expusă în capitolul I, *Uzura turbinelor hidraulice şi problema măririi rezistenţei acestora la uzură.* Autorul studiază în exclusivitate uzura prin abraziune datorită aluviunilor în suspensie din curentul de apă. Un număr mare de fotografii ilustrează zonele diferitelor organe ale turbinelor hidraulice care sînt erodate de către aluviuni. Consecinţele tehnico-economice ale uzurii turbinelor hidraulice (scăderea randamentului, oprirea agregatelor pentru reparaţii, scăderea producţiei de energie electrică etc.) sînt analizate în detaliu şi cu competentă. Astfel, principalii factori care duc la intensificarea uzurii turbinelor hidraulice sînt : viteza relativă a curentului de apă faţă de organele turbinii, gradul de prelucrare a suprafeţelor acestor organe, mărimea, forma, duritatea şi concentraţia aluviunilor curentului de apă ce trece prin turbină.

Mărirea rezistenţei la uzură a turbinelor poate fi realizată în special prin perfecţionarea metodelor de proiectare, deoarece s-a constatat că utilizarea unor materiale cu duritate ridicată şi decantarea avansată a apei nu pot depăşi anumite limite şi nu conduc la evitarea completă a uzurii.

Datorită importanţei deosebite pe care o are structura cinematică a curentului de apă şi forma geometrică a organelor principale ale turbinelor, autorul a consacrat capitolul al II-lea al lucrării, *Analizei mişcării apei în turbinele hidraulice cu reacţie*.

Analiza calitativă a structurii cinematice a curentului de apă în carcasa spirală, în aparatul, director, în rotor şi în aspiratorul turbinelor hidraulice, ţinînd seama de apariţia circulaţiei transversale, de influenţa formei geometrice a organelor considerate şi de regimul de funcţionare a turbinei, a pus în evidenţă variaţia în timp şi spaţiu a cîmpului de viteze şi apariţia locală a cavitaţiei, ceea ce favorizează acţiunea erozivă a aluviunilor.

În capitolul al III-lea, *Sporirea rezistenţei la uzură a organelor principale*, pe baza rezultatelor din capitolul precedent şi anume că părţile cele mai expuse uzurii sînt muchiile pieselor în contact cu apa, iar la rotoare extradosul paletelor, rezultă că pentru sporirea rezistenţei la uzură a acestor părţi trebuie ca turbina să aibă o rapiditate ceva mai mică decît cea critică, iar vitezele medii în secţiunile cele mai expuse să fie micşorate. De asemenea, trebuie modificate adecvat muchiile de intrare şi de ieşire ale paletelor rotorului, forma curbei meridiane a coroanelor acestuia, iar aparatul director trebuie să fie construit conic. Actualmente încă nu pot fi rezolvate complet pe cale teoretică toate aceste probleme.

În capitolul al IV-lea sînt studiate *Regimurile de funcționare ale labirinților de etanșare a turbinelor hidraulice*. Se expun scheme noi și interesante de labirinți care conduc la împingeri axiale mai mici decît cele uzuale.

Ultimul capitol al lucrării, *Construcția de turbine hidraulice rezistente la uzură și problemele de cercetare*, indică materialele cele mai adecvate pentru construirea organelor turbinelor hidraulice și analizează procedeele de mărire a rezistenței acestora. Este prezentată o listă de recomandări privind tematica cercetării în domeniul sporirii rezistenței la uzură a mașinilor hidraulice. Unele din măsurile propuse de autor pot fi utilizate și pentru construcția pompelor centrifuge și axiale.

Prin conținutul său cartea suscită interesul cercetătorilor și constructorilor de mașini hidraulice precum și al inginerilor ce exploatează astfel de mașini, întrucît autorul aduce contribuții noi și interesante, specificînd totodată problemele care nu sînt încă rezolvate.

Șt. Zarea

A. SOMMERFELD, *Partielle Differentialgleichungen der Physik* (Ecuații cu derivate parțiale ale fizicii). Ed. a 5-a, Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig K.-G., Leipzig, 1962, XII+298 p.

Ultimul[1]) dintre cele șase volume de „Lecții de fizică teoretică", apărut după moartea autorului, prelucrat și completat de Fr. Sauter, este destinat ecuațiilor cu derivate parțiale ale fizicii. De fapt, după cum ține să precizeze autorul, în acest volum este mai puțin vorba de ecuațiile fizicii matematice cît de matematica fizică; Sommerfeld a vrut să se ocupe nu atît de formularea matematică a faptelor fizice cît, mai ales, de fundamentarea fizică a metodelor matematice.

Lucrarea este împărțită în șase capitole, urmate de o culegere de probleme și de soluțiile corespunzătoare.

Capitolul I este destinat seriilor și integralelor Fourier. Se dau exemple de funcții cu discontinuități de prima speță și se remarcă fenomenul lui Gibbs și convergența neuniformă. Se fac apoi unele considerații cu privire la convergența seriilor Fourier. Autorul trece după aceea, fără demonstrații detaliate, la integrala Fourier și introduce funcțiile sferice. Menționăm unele generalizări cu privire la aproximarea oscilatoare și osculatoare a funcțiilor și cu privire la analiza Fourier anarmonică.

În capitolul al II-lea se dau rezultate cu caracter general privitoare la ecuațiile cu derivate parțiale. Se clasifică ecuațiile și se introduce teoria caracteristicilor. Se introduce apoi teorema lui Green și funcția lui Green pentru ecuațiile de tip eliptic în special pentru cele scrise sub forma normală; cu această ocazie se definește izvorul și soluția fundamentală, pentru un număr arbitrar finit de dimensiuni. Pentru ecuațiile de tip hiperbolic se prezintă metoda lui Riemann. În ceea ce privește ecuația căldurii (de tip parabolic) se folosește teorema lui Green.

---

[1]) Primele două volume au fost recenzate în St. cerc. mec. apl., **XII**, *4*, 933 (1961) și **XIV**, *1*, 264 (1963).

Unele probleme la limită în cazul propagării căldurii sînt trecute în revistă în capitolul al III-lea. Menţionăm astfel cazul unidimensional (tratat cu ajutorul transformatelor Laplace) şi problema temperaturii pămîntului. Problema unicităţii soluţiei este de asemenea luată în considerare.

Capitolul al IV-lea este dedicat problemelor cilindrice şi sferice. Se introduc astfel funcţiile Bessel şi Hankel, forma lor integrală şi reprezentarea asimptotică. Se face legătura dintre funcţiile sferice şi teoria potenţialului; menţionăm funcţiile sferice ordonate de indice negativ, reprezentarea lor integrală şi normarea lor. Se introduce funcţia lui Green în teoria potenţialului, pentru o sferă; menţionăm transformarea prin raze reciproce şi reflectarea sferică în teoria potenţialului. Autorul consideră apoi funcţii sferice de indice neîntreg precum şi funcţii sferice de speţa a doua.

Funcţiile şi valorile proprii sînt studiate în capitolul al V-lea. În primul rînd se determină valorile şi funcţiile proprii pentru cazul membranei vibrante. Apoi se consideră problemele la limită ale acusticii şi ale propagării căldurii. Funcţia lui Green este introdusă pentru ecuaţia undelor; se consideră atît vibraţiile libere cît şi vibraţiile forţate. Se trece apoi la cazul domeniului infinit şi la spectrul continuu al valorilor proprii. Autorul consideră de asemenea unele probleme din mecanica ondulatorie; introduce astfel termenii lui Balmer şi forma lui Rutherford în fizica nucleară. În trei anexe la acest capitol se prezintă şi normarea funcţiilor proprii într-un domeniu infinit, cîteva metode de rezolvare a problemelor la limită ale ecuaţiei undelor (de exemplu transformarea Watson) şi studiul undelor sferice într-un domeniu infinit cu un număr arbitrar finit de dimensiuni.

Capitolul al VI-lea cuprinde probleme ale telegrafiei fără fir. Se introduce dipolul lui Hertz într-un mediu omogen. Cazurile de antene orizontale şi verticale sînt de asemenea luate în considerare; menţionăm şi studiul antenei magnetice. Autorul prezintă apoi date privitoare la energia de radiaţie şi la absorbţia pămîntului. Într-o anexă sînt date rezultate asupra telegrafiei fără fir pe pămîntul considerat sferic.

Cartea lui A. Sommerfeld are mai ales un caracter didactic, devenind o lucrare clasică, destinată — în special — facultăţilor de fizică; datorită însă numeroaselor observaţii şi comentarii proprii autorului ea prezintă interes şi pentru cercetătorii ştiinţifici.

P. P. Teodorescu

E. KRÖNER, *Kontinuumstheorie der Versetzungen und Eigenspannungen* (Teoria deformaţiilor şi tensiunilor iniţiale continue). Ergebnisse der angewandten Mathematik, *5*, Springer-Verlag, Berlin—Göttingen—Heidelberg, 1958, VIII + 180 p.

Teoria deformaţiilor şi tensiunilor iniţiale continue cuprinde studiul mecanic macroscopic al solidelor mono- şi policristaline. Teoria este deosebit de valoroasă pentru cercetarea ştiinţifică, deoarece permite să se înţeleagă proprietăţile mecanice ale corpurilor solide, folosind un formalism matematic, pornind de la constituţia cristalină a acestora şi de la fenomene fizice fundamentale. În ultimul timp această teorie a început să capete o mare importanţă şi în aplicaţiile inginereşti. Ea poate fi considerată ca un exemplu de disciplină bine fundamentată din punct de vedere axiomatic în cadrul fizicii teoretice.

Max von Laue a arătat în 1912, în urma unor experienţe cu ajutorul razelor X, că structura multor corpuri solide, de exemplu a tuturor metalelor şi semiconductorilor, este cristalină ; a devenit astfel clar că structura cristalină a corpurilor solide are o foarte mare importanţă pentru proprietăţile lor mecanice. Un fenomen mecanic important pe care-l prezintă materialele cristaline este plasticitatea. Între 1926 şi 1929, J. Frenkel, M. Polanyi şi E. Schmidt şi-au pus problema determinării tensiunii tangenţiale critice (la care începe curgerea plastică) numai cu ajutorul constantelor elastice ale cristalului. În jurul lui 1928, I. Prandtl, A. Smekal, U. Dehlinger şi alţii încep să recunoască defectele ce apar în cristale şi importanţa pe care o au ele pentru explicarea fenomenelor de anelasticitate şi recristalizare. În sfîrşit, în 1934, E. Orowan, M. Polanyi şi G. I. Taylor arată în mod independent că *dislocaţiile de tip pană* pot face ca un cristal să capete proprietăţi plastice. Descoperirea acestor deformaţii iniţiale, ca şi descoperirea *dislocaţiilor de tip elice*, de către J. M. Burgers în 1939, au făcut să ia naştere o teorie nouă : *teoria dislocaţiilor* care a căpătat, mai ales în ultimii ani, o dezvoltare din ce în ce mai mare.

În lucrarea sa Ekkehart Kröner, specialist recunoscut în această direcţie, face o prezentare a stadiului actual al acestor teorii şi a problemelor care se pun actualmente. Cartea se dezvoltă pe cinci capitole, urmată de o anexă privitoare la descompunerea tensorilor şi indicaţii bibliografice (180 de titluri).

Capitolul I este dedicat geometriei deformaţiilor în interiorul unui corp continuu. După ce se introduc distorsiunile după Volterra, elastice şi plastice, se stabileşte ecuaţia geometrică fundamentală a mecanicii corpului solid continuu, folosind vectorul lui Burgers. O atenţie specială se acordă invarianţilor cîmpului de distorsiuni. Se stabileşte cauza geometrică a tensiunilor din temperatură, cîmp magnetic sau a concentrărilor de tensiune. De asemenea, se pun condiţiile la limită pentru distorsiuni (în sensul de dislocaţii) şi se studiază dislocaţiile de suprafaţă. Menţionăm faptul că se iau în considerare şi distorsiunile mari.

În capitolul al II-lea se tratează statica deformaţiilor într-un mediu continuu. Se introduce tensorul funcţiilor de tensiune şi se enunţă un mod de rezolvare a problemei în cazul tensiunilor iniţiale. Cu ajutorul energiei elastice, se formulează apoi problema variaţională a mediului continuu cu tensiuni iniţiale. De asemenea, se cercetează forma pe care o capătă tensorul funcţiilor de tensiune pe contur. Rezultatele obţinute sînt extinse în cazul mai general al unei anizotropii elastice. O atenţie specială este acordată de autor deformaţiilor singulare în domeniul elastic. Este interesant şi modul în care deformaţiile sînt privite ca o sursă de tensiuni iniţiale.

Dacă primele două capitole cuprind teoria continuului din punct de vedere teoretic, în capitolul al III-lea se trece la corpurile reale, considerînd corpul de studiat ca un cristal. Se stabilesc astfel ecuaţiile de natură geometrică pentru corpurile cristaline, în teorie microscopică şi macroscopică, prin introducerea vectorului lui Burgers. În particular se consideră distribuţia plană a dislocaţiilor în interiorul unui cristal şi distribuţia dislocaţiilor, în cazul unui cristal cubic, centrat pe feţele sale. Menţionăm de asemenea comportarea neliniară a dislocaţiilor singulare.

Geometria neriemanniană a dislocaţiilor este cuprinsă în capitolul al IV-lea. Se dezvoltă astfel teoriile lui Kondo, Bilby, Bullough şi Smith. Este interesant de remarcat că în cadrul acestor teorii joacă un rol important cercetările de geometrie neriemanniană ale acad. G. Vrănceanu.

Capitolul al V-lea cuprinde diferite aplicaţii. Menţionăm astfel consolidarea metalelor cristaline, din sistemul cubic cu feţe centrate, considerarea atomilor străini ca dipoli elastici sau centre de polarizare, calculul aproximativ al energiei proprii a dislocaţiilor singulare etc.

Lucrarea prof. E. Kröner, de la Institutul politehnic din Stuttgart, este o monografie de cercetare ştiinţifică, cuprinzătoare pînă la anul de apariţie (1958), dedicată unor probleme moderne de fizica corpului solid. Este interesant de remarcat că, cu toate că aceste studii sînt foarte importante în cadrul unei teorii fenomenologice a plasticităţii, un rol deosebit de important îl joacă problemele de teoria elasticităţii, corpurile reale, cristaline fiind aproximate — din punct de vedere microscopic — drept corpuri elastice. În felul acesta cartea prezintă interes pentru toţi cercetătorii din domeniul mecanicii corpului solid deformabil.

P. P. Teodorescu

W. PRAGER, *Introduction to mechanics of continua* (Introducere în mecanica continuului). Ginnand Co., Boston—New York—Chicago—Atlanta—Dallas—Palo Alto—Toronto—London, 1961, X + 230 p.

Monografia prof. W. Prager, de la Brown University, a fost scrisă de autor cu ocazia unei vizite şi a unui ciclu de lecţii ţinute la Institutul politehnic din Zürich şi a apărut aproape în acelaşi timp cu o ediţie asemănătoare elveţiană, intitulată „Einführung in die Kontinuumsmechanik", Birkhäuser Verlag, Basel. Ea are un caracter general şi poate constitui o bază pentru studiul ulterior mai aprofundat a numeroase alte discipline ca hidro- şi gazodinamica, teoria elasticităţii şi teoria plasticităţii; de asemenea, considerăm că lucrarea de mai sus poate fi deosebit de utilă şi pentru cei ce sînt interesaţi în ramuri ale mecanicii continuului care au apărut mult mai recent şi care sînt în continuă dezvoltare. Monografia poate fi consultată cu interes şi de cei care nu sînt specialişti în această direcţie deoarece lectura ei nu necesită cunoştinţe deosebite de ordin matematic, elementele de calcul tensorial folosite fiind dezvoltate în cuprinsul lucrării.

Lucrarea este împărţită în zece capitole, fiecare capitol cuprinzînd un anumit număr de secţiuni. Primele 8 capitole sînt urmate de enunţuri de probleme care ilustrează cuprinsul capitolului respectiv şi corespund la diferite secţiuni ale acestuia.

Primele trei capitole sînt destinate studiului stării de deformaţie şi a stării de tensiune. După ce se dau unele rezultate cu privire la noţiunile de scalar, vector şi tensor, se trece la tensorul total antisimetric ε şi la studiul direcţiilor principale ale unui tensor simetric de ordinul al doilea; de asemenea, se consideră cîmpuri tensoriale, se stabilesc unele teoreme integrale (de exemplu teoremele lui Green şi se dau şi cîteva noţiuni cu privire la utilizarea coordonatelor curbilinii. Se introduce apoi tensorul tensiune şi se stabilesc ecuaţiile de echilibru; folosind rezultatele anterioare se trece la variaţia tensiunilor în jurul unui punct (tensiuni principale, cercurile lui Mohr în caz bi- şi tridimensional, cvadrica lui Cauchy) şi se dau apoi şi cîteva noţiuni de hidrostatică, în special pentru cazul echilibrului izoterm. Se introduc apoi tensorul deformaţie şi vectorul rotaţie, precum şi tensorul vitezelor de deformaţie şi vectorul vitezelor de rotaţie; se consideră, în particular, cazul mişcării plane şi se stabilesc apoi condiţiile de integrabilitate şi ecuaţia de continuitate a masei.

Capitolele IV, V şi VI se ocupă de unele rezultate cu caracter general şi cuprind, în special, probleme de mecanica fluidelor. Se prezintă astfel consecinţele teoremelor generale ale mecanicii: teorema impulsului, teorema momentului cinetic şi teorema energiei; se stabilesc apoi ecuaţiile fluidelor newtoniene: vîscoase sau, în particular, perfecte. În cazul fluidelor vîscoase se prezintă ecuaţiile generale şi se fac unele consideraţii în privinţa rezolvării problemelor la limită pentru mişcarea unui fluid incompresibil în jurul unui obstacol; de asemenea, autorul dă unele indicaţii cu privire la comportarea nenewtoniană a fluidelor incompresibile. În ceea ce priveşte fluidele perfecte se dau ecuaţiile generale şi se insistă asupra noțiunii de vîrtej și asupra liniilor de vîrtejuri; o atenție specială este acordată mișcării staționare și mișcării irotaționale, stabilindu-se formula lui Bernoulli și considerîndu-se cîteva probleme concrete la limită.

Problemele solidelor deformabile sînt dezvoltate în capitolele VII și VIII. Se dau întîi ecuațiile constitutive ale corpurilor vîscoplastice și perfect plastice (menționăm astfel relațiile Hohenemser-Prager); se prezintă apoi ecuațiile de mișcare și studiile lui Oldroyd, o atenție deosebită fiind acordată curgerii plastice plane. Autorul consideră după aceea corpurile hipoelastice pentru care stabilește ecuațiile constitutive (Jaumann, Truesdell, Green, Cotter, Rivlin) și cîteva proprietăți fundamentale; sînt luate în considerare în special corpurile liniar sau cvasiliniar hipoelastice. În cazul corpurilor perfect elastice se stabilesc ecuațiile statice fundamentale și se consideră problema răsucirii barei cilindrice (aplicație pentru bara de secțiune eliptică); se prezintă apoi unele principii variaționale pentru cazul unor deplasări virtuale și pentru cazul unor variații virtuale ale stării de tensiune. Autorul face de asemenea cîteva considerații cu privire la undele elastice, insistînd asupra undelor de tip Rayleigh.

Ultimele două capitole sînt dedicate unor probleme speciale. Se dau astfel unele rezultate în legătură cu problema deformațiilor finite, introducîndu-se tensorii deformație ai lui Almansi și Green, precum și tensorii tensiune ai lui Lagrange și Kirchhoff. Se arată apoi, după Noll, legătura dintre corpurile hipoelastice și corpurile perfect elastice; de asemenea, se introduc corpurile hiperelastice (teoria lui Mooney), menționîndu-se în special cazul incompresibil. Pentru aceste probleme, autorul consideră și unele teoreme de unicitate și stabilitate.

Monografia prof. Prager, foarte clară și concisă, atît în ansamblu cît și în amănunt, este binevenită în literatura de specialitate, permițînd o vedere de ansamblu într-un domeniu care s-a dezvoltat mult în ultimul timp; ea poate fi folosită cu succes atît de matematicienii și mecanicienii care vor să obțină cunoștințe cu caracter general cît și de cercetătorii științifici în această direcție.

P. P. Teodorescu

W. GOLDSMITH, *Impact. The theory and physical behaviour of colliding solids* (Despre impact. Teoria și comportarea fizică a corpurilor solide la lovire). Edward Arnold Publ. LTD, London, 1960, XV + 379 p.

Cartea conține un vast material ce se referă la șocuri între corpuri solide, deformabile sau nedeformabile. Ea conține atît probleme teoretice cît și multe rezultate experimentale. În primul rînd sînt expuse problemele clasice, lovirea stereomecanică, în care nu se consideră deformarea corpurilor ce se lovesc, toate calculele fiind bazate pe teorema impulsului și a momentului cinetic. Apoi este luată în considerare deformarea elastică a corpurilor și fenomenul propagării undelor elastice. Se insistă în special asupra propagării undelor longitudinale, dar și asupra problemei undelor de încovoiere, în bare a căror arie a secțiunii transversale nu este prea mare (deci teoria unidimensională). Este considerată și problema lovirii transversale a cablurilor flexibile. Aici însă nu este considerată problema generală a firelor extensibile oarecare, azi destul de bine studiată, ci este expus numai cazul mișcării plane a firelor elastice lovite transversal cu o viteză constantă. Problema propagării perturbațiilor în corpuri liniar vîscoelastice de tip Kelvin-Voigt și Maxwell este de asemenea discutată.

Capitolul IV al cărții este dedicat problemei de contact în corpurile elastice. Este expusă teoria lui Hertz și unele dezvoltări ale ei și apoi sînt examinate o serie de probleme particulare importante pentru tehnică.

Partea a doua a cărţii (cap. V, VI şi VII) este dedicată unor probleme mai moderne : şocuri în care se ţine seama şi de deformarea plastică a solidelor. În capitolul V este expusă aşa-numita teorie hidrodinamică a propagării undelor plastice şi teoria clasică a propagării undelor plastice longitudinale în bare subţiri ; nu este dată totuşi teoria lui Rahmatulin asupra existenţei undei de descărcare, fiind date în schimb unele metode grafice mai puţin riguroase, dar uneori mai practice. Sînt expuse de asemenea rezultatele clasice (Taylor, Lee etc.) referitoare la propagarea undelor plastice în bare scurte şi discuţia asupra influenţei vitezei de deformare după Malvern. Apoi sînt expuse şi numeroase rezultate cu privire la lovirea transversală a barelor şi plăcilor şi formarea (dinamică) articulaţiilor plastice. Nu se face nici un fel de referire la problema dinamică în mai multe dimensiuni şi deci la o teorie generală a propagării undelor.

Capitolul VI este dedicat rezultatelor experimentale, în care autorul are o vastă experienţă. Sînt expuse scheme de aparate şi date diagrame experimentale pentru problemele expuse mai sus. În continuare, capitolul VII este dedicat proprietăţilor dinamice ale materialelor care sînt expuse comparativ cu cele statice (sînt comparate curbele caracteristice statice şi dinamice).

Lucrarea se încheie cu o foarte vastă bibliografie. În afară de bibliografia utilizată în carte, care conţine 442 titluri, este dată şi o bibliografie suplimentară grupată după problemele conţinute în diferite capitole. Este regretabil că în carte s-au strecurat şi unele greşeli tipografice, atît în text cît şi în figuri. Ea este totuşi o carte deosebit de valoroasă care interesează în special pe cercetătorii ştiinţifici, dar şi pe ingineri.

N. Cristescu

PUBLICAȚII PRIMITE PRIN SCHIMB LA REDACȚIE

- — *Istoria tehnikii. Bibliograficeskii ukazatel 1956.* Izd. AN SSSR, Moskva, 1963, 141 p.
- — BORIS VLADIMIROVICI DERIAGHIN. Izd. AN SSSR, Moskva, 1962, 85 p.
- — Dokladî TSHA. Mehanizația i elektrificația selskogo hoziaistva, nr. 81, 86, 1963.
- — Zpravodaj Vzlu, nr. 1, 2, 1963.
- — IZVUZ, Tvetnaia Metallurghia, nr. 6, 1962; nr. 3, 1963.
- — Avtomatika i telemehanika, nr. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 1963.
- — Referativnîi Jurnal, Mehanika, nr. 7, 1963.
- — Zavodskaia laboratoria, nr. 8, 1963.
- — Gep, nr. 6, 7, 1963.
- — Schweisstechnik, nr. 4, 5, 1963.
- — Atomnaia energhia, nr. 6, 1963.
- — Quarterly Review of Scientific Publications of the Polish Academy of Sciences, 1, 2, 3. 1962.
- — Jurnal prikladnoi mehaniki i tehniceskoi fiziki, nr. 3, 1963.
- — Injenerno-fiziceskii jurnal, nr. 3, 4, 5, 1963.
- — Archiwum budowy maszyn, nr. 1, 1963.
- — Prikladnaia matematika i mehanika, nr. 3, 1963.
- — Injenernîi Jurnal, nr. 1, 2, 1963.
- — Izvestia Akademii Nauk Armianskoi SSR, nr. 2—3, 1963.
- — Acta Mathematica Sinica, nr. 4, 5, 1963.
- — Physica status solidi, nr. 7, 8, 1963.
- — Transactions of Chalmers University of Technology, nr. 266, 267, 268, 269, 270, 1963,
- — Technische Berichte (Heinrich-Hertz-Institut für Schwingungsforschung, Berlin). nr. 46, 51, 53, 61, 63, 1962.
- — Report on Research 1961—1962. Royal College of Science & Technology Glasgow, 43 p.

J. D. GILCHRIST, *Fuels and Refractories*. Pergamon Press, London, 1963, 158 p.

P. T. MATTHEWS, *Introduction to quantum mechanics*. McGraw-Hill, London, 1963.

A. E. J. HAYES, *Applied Thermo-Dynamics*. Pergamon Press, London, 1963.

J. K. DUKOWICZ, *The efficiency of energy transfer associated with magnetically driven shock waves in a T-tube*. UTIA, Technical Note nr. 52, 1963.

P. H. STEPHEN, *Asymmetry of annular jet flow in ground proximity. II*. UTIA, Technical Note nr. 63. 1962.

R. C. TENNYSON, *A review of the theory of photoelasticity*. UTIA Review, nr. 23, 1963.

S. R. SWANSON, *An investigation of the fatigue of aluminium alloy due to random loading*. UTIA Report nr. 84, 1963.

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM KÖZPONTI KÖNYVTÁRA 1848

G. K. Korbacher, *Performance and operation of quasi two-dimensional jet flaps*. UTIA Report nr. 90, 1963.

— *National Engineering Laboratory Annual Report 1962*. Department of Scientific and Industrial Research, London.

— Proceedings. Institution of Mechanical Engineers, London, vol. 177, nr. 1, 2, 3, 4, 5. 6, 1963.

A. J. Alexander, *Experiments on a Delta Wing Using Leading Edge Blowing to Remote the Secondary Separator*. CoA Report nr. 161, 1963.

T. Marsh, *The Free-Molecule Flow of a Polyatomic Gas*. CoA Report nr. 159, 1963.

A. H. Atkinson, *Statistical Parameters in Planning Aero-Engine Production*. CoA Report nr. 158, 1963.

D. J. Johns, *The flutter of thin, plane elliptic panels*. CoA Note, nr. 136.

De la Istituti di Meccanica Applicata e di Aerodinamica del Politecnico di Torino

C. Ferrari, *Il Centro di studio per la dinamica dei Fluidi*, Torino (extras).

E, Mettioli, *L'ipotesi di reye nella risoluzione dei problemi sui freni a tamburo* (extras).

A. Romiti, *Studio della linearizzazione equivalente sui servomeccanismi non lineari mediante analoghi meccanici* (extras).

E. Matioli, *Un micromanometro con lettura diretta della velocità del vento* (extras).

G. Jarre, *Considerazioni sul bilanco entropico nei problemi termodinamici* (extras).

C. Ferrari, *Il problema fondamentale insoluto della „Aerodinamica transonica"* (extras).

C. G. Pasquarelli, *Un problema meccanico particolare nella registrazione e riproduzione fonica a bordo di veicoli.*

De la Deutsche Versuchsanstalt für Luft- und Raumfahrt

Bericht nr. 246, E. Meister, *Die instationäre Unterschallströmung durch ein schwingendes. gestaffeltes Gitter mit halbunendlich tiefen Profilen. I.*

Bericht nr. 262, O. Volkersen, *Die eingespannte, an den Rändern versteifte, dünne Rechteckplatte grosser Durchbiegung mit gleichmässig verteilter Belastung.*

— Technical Reports of the Engineering Research Institute Kyoto University, vol. XIII nr. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 1963.

— Werkstattbücher — Herausgeber H. Haake, Heft 35, Mauri H., Vorrichtungsbau II. Teil. Sechste Auflage, Springer-Verlag, 1963, p. 68.

— *Theory and fundamental research in heat transfer*. Proceedings of the annual meeting of the American Society of Mechanical Engineers, edited by Professor J.A. Clark, University of Michigan, Pergamon Press, 1963. 220 p.

— Friction and wear in machinery (tradus din Trenie iznos v mașinah, vol. 14, 1960), 308 p.

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÎNE
INSTITUTUL DE MECANICĂ APLICATĂ „TRAIAN VUIA"

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

Tomul XIV 1963

INDEX ALFABETIC

STUDII

	Nr.	Pag.
ARON I. IOAN, Studiul mişcării giroscopului astatic rapid, în regim tranzitoriu	2	373
BIŢĂ OLGA şi DINCĂ I., Aspecte ale comportării la uzură a unor materiale de lagăre	2	319
BLUMENFELD M., Calculul discurilor de grosime variabilă în mişcare de rotaţie prin metoda de recurenţă a celor trei necunoscute	1	71
BLUMENFELD M., Relaţiile generalizate ale metodei de recurenţă a celor trei necunoscute, pentru studiul sistemelor elastice	3	715
BODNĂRESCU DAN, Combinarea generalizată a prăjinilor de pompare la oboseală	3	651
BOGDAN C. RADU, Utilizarea analizei armonice în studiul grupelor assurice plane de aspectul II şi III	2	365
BRĂDEANU PETRE, Programarea optimă a direcţiei tracţiunii unei rachete balistice care se mişcă în aer	3	591
BRĂDEANU PETRE şi PĂVĂLOIU ION, Regimuri optime de dirijare a tracţiunii unor rachete	4	805
BUZDUGAN GH., O nouă metodă pentru calculul coeficientului de siguranţă la solicitări variabile prin cicluri asimetrice	4	827
CARAFOLI E. şi BERBENTE C., Caracteristicile aerodinamice ale profilelor în regim supersonic-hipersonic, în cazul neglijării pierderilor de sarcină datorite undelor de şoc	4	751
CONSTANTINESCU V. N., Determinarea presiunilor în lagărele lubrificate cu gaze formate din suprafeţe plane dreptunghiulare	2	289
CONSTANTINESCU V. N., Determinarea aproximativă a distribuţiei presiunilor în lagărele lubrificate cu gaze în regim turbulent	6	1415
CROITORU ELENA, Asupra unor invarianti cinematici de ordin superior în mişcarea spaţială a solidelor rigide	1	157
DINCĂ FL., Vibraţiile disipative ale autovehiculelor. I.	4	909
DUDIŢĂ FL., Turatii critice la încovoiere în transmisia cardanică a automobilului	4	925
DUMITRESCU LUCIAN, O metodă pentru etalonarea dinamică a traductoarelor de presiune	3	605
HANGAN M., Structuri statice la care apar simultan *n* articulaţii plastice	6	1249
IAMANDI CONSTANTIN, Determinarea lungimii saltului hidraulic	1	205

	Nr.	Pag.
IOAN CONSTANTIN SABIN, Jeturi plane compresibile mărginite de pînze de jet subţiri	6	1449
IONESCU BUJOR CLAUDIU, Introducere în studiul intrinsec al clasei mişcărilor permanente ale plasmei perfecte într-un cîmp magnetic staţionar	3	537
IONESCU DAN GH., Metoda funcţiilor analitice în hidrodinamica lichidelor vîscoase	1	169
IOSIPESCU N., Stabilirea şi experimentarea unui procedeu nou pentru încercarea oţelurilor la forfecare pură	2	419
JAKAB I., RUGINĂ I. şi ZAHARESCU A., Automatizarea controlului de aspect al bilelor de rulmenţi	5	1163
KEINTZEL EINAR, Calculul cadrelor spaţiale etajate axial-simetrice prin ecuaţii cu diferenţe finite	1	83
LIVOVSCHI LEON, Proiectarea mecanismelor hidraulice cu elemente bipoziţionale	1	133
MANEA V., Consideraţii asupra teoriei plăcilor plane elastice subţiri	4	851
MANEA V., Construirea soluţiei ecuaţiilor plăcilor plane elastice subţiri din teoria fără ipoteza Love-Kirchhoff prin metoda funcţiilor analitice	5	1145
MANEA V., Calculul plăcilor circulare elastice subţiri în teoria fără ipoteza Love-Kirchhoff	6	1277
MARINESCU AL., Consideraţii privind răspunsul dinamic al structurii rachetei în timpul zborului perturbat	3	559
MARINESCU AL., Efectul comenzii la palele elastice ale rotorului de elicopter	5	1073
MARINESCU AL., Asupra problemei urcării în timp minim a rachetelor	6	1465
MIŞICU M., Structuri reologice	1	7
MUNTEANU STELIAN A. şi VIDRAŞCU MARIA, Asupra nomografierii unor funcţii cu patru variabile din domeniul hidraulicii canalelor (cu referire specială la canalele de amenajare a torenţilor)	5	1179
NICOLAU EDUARD, Microbeton cu liant epoxidic pentru modele ale construcţiilor	4	897
NIŢĂ M. M., O manevră de transfer între două orbite eliptice necoplanare	3	573
OROVEANU T., Unele consideraţii asupra scurgerii fluidelor compresibile prin medii poroase neomogene	3	497
OROVEANU T., Aplicaţii ale unui procedeu aproximativ de determinare a valorilor proprii în problema Sturm-Liouville	4	781
OROVEANU T. şi OSNEA AL., Asupra scurgerii liniare a unui lichid compresibil printr-un mediu poros	5	1011
PANTAZOPOL D. şi IOAN C.S., O metodă pentru studiul jeturilor plane incompresibile mărginite de pînze de jet subţiri	4	769
PANTAZOPOL D. şi COMĂNESCU TR., Influenţa unei pînze de jet asupra devierii unui jet plan	5	1029
PASCAL H., Curgerea tranzitorie a gazelor în conducte magistrale. II. Determinarea coeficientului de frecare hidrodinamic	1	223
PASCAL H., Asupra prelucrării datelor de presiune şi debit obţinute la curgerea tranzitorie a gazelor în zăcămînt, fără întreruperea exploatării sondei	2	301
PASCAL H., Asupra constantei dielectrice a mediului poros saturat cu fluid şi posibilitatea aplicării acesteia la investigarea geofizică a sondelor	3	507
PASCAL H., Determinarea proprietăţilor elastice ale rocilor sedimentare prin metode ultrasonice	5	1089
PAVELESCU DAN, Cu privire la erorile de măsură şi ponderea acestor erori, în cazul studiului uzurii cu izotopi radioactivi	3	621
PAVELESCU DAN şi ILIUC IVAN, Aspecte privind evoluţia uzurii şi temperaturii unor cupluri radioactive bronz-oţel	1	95
PELECUDI CHR., Asupra mecanismelor utilizate pentru controlul automat al suprafeţelor pieselor sferice	2	355
PELECUDI CHR., Analogia electrică în cinematica mecanismelor plane pe baza variabilelor complexe	6	1339
PELECUDI CHR. şi PARASCHIV C., Contribuţii la metoda proiecţiilor folosită în cinematica mecanismelor plane	6	1387

	Nr.	Pag.
PETCU VALERIU, Articulaţia plastică în calculul plastic al structurilor de beton armat	1	55
PETCU VALERIU, Generalizarea metodei indirecte de calcul plastic al structurilor de beton armat	2	441
PETCU VALERIU, Principiile calculului plastic al cadrelor de beton armat	3	705
PETCU VALERIU, O concepţie nouă în calculul plastic al structurilor de beton armat	6	1259
PETRE AUGUSTIN, Flambajul conductelor forţate datorit presiunii interioare	1	27
PETRE AUGUSTIN, Divergenţa aeroelastică la suprafeţe portante în rotaţie ţinînd seama de efectul forţelor centrifuge	5	1065
PETRE AUGUSTIN şi STĂNESCU CRISTIAN, Efecte aeroelastice asupra comenzilor ţinînd seama de restrîngerile de fixare	6	1323
POPINCEANU N.G. şi GAFIŢEANU M.D., Contribuţii asupra proiectării şi construcţiei economice a roţilor dinţate	2	385
POPOV M. P., MITRICĂ I. şi DECIU E.D., Influenţa unghiurilor de aşezare asupra uzurii sculei aşchietoare	3	641
PRIŞCU RADU şi OLTEANU GHEORGHE, Studiu asupra barajelor de greutate cu paramentul amonte negativ	4	817
PÎRVULESCU NICOLAE S., Ascensiunea gazului prin lichid în tuburi verticale	3	523
PÎRVULESCU NICOLAE S., Asupra flambajului superelastic al barelor de oţel	4	867
PÎRVULESCU NICOLAE S., Turtirea superelastică a burlanelor	5	1115
SĂVULESCU ŞT. N. şi TOMA V., Studiul experimental al tranziţiei provocate de interacţiunea dintre un jet de intensitate mică cu stratul limită incompresibil al unei plăci plane	5	1037
SOARE MIRCEA, Teoria încovoierii simetrice a paraboloidului de rotaţie pleoştit pe contur circular	4	837
SZÉKELY I., Studii asupra unui angrenaj cilindro-conic	1	145
TANNENBAUM MARCEL, Calculul la starea limită de rezistenţă a elementelor de beton precomprimat solicitate la încovoiere	3	675
TANNENBAUM MARCEL, Metode practice de calcul la starea limită de rezistenţă a elementelor de beton precomprimat solicitate la compresiune excentrică cu excentricitate mică	5	1131
TEODORESCU P. P., Asupra problemei plane a teoriei elasticităţii în coordonate curbilinii oarecare. III. Formularea matematică a problemei. Metode de calcul	1	37
TEODORESCU P. P., Consideraţii în legătură cu problema plană a teoriei elasticităţii în coordonate rectilinii oarecare	2	403
TIPEI N., Lubrificaţia hidrodinamică a lagărelor axiale cu sectoare	2	279
TIPEI N., Efecte ale microgeometriei suprafeţelor în lubrificaţia hidrodinamică	5	995
TUTUNARU D. şi MURGULESCU ELENA, Mecanisme matematice rezultate din mecanismul lui Isaac Newton	6	1359
VASILCA GH. şi NICA AL., Aspecte de structură în suprafaţa activă la unele materiale antifricţiune pentru lagăre	2	311
VASILCA GH. şi NICA AL., Contribuţii la determinarea pe cale experimentală a parametrilor funcţionali de la lagărele motoarelor cu ardere internă. II. Rezultate experimentale şi concluzii	3	611
VASILCA GH., NICA AL., BIŢĂ O. şi DINCĂ I., Aspecte ale influenţei tipului de structură asupra comportării la alunecare şi uzură la unele aliaje de aluminiu	6	1431
VASILESCU M. şi LUCA GH., Asupra comportării rocilor străbătute de tunelul de aducţiune al hidrocentralei „V. I. Lenin" de la Bicaz	6	1303
VLADIMIRESCU I. şi BĂDESCU R., Unde de translaţie cu pierderi pe traseu prin infiltraţie. Mişcarea frontului undei şi variaţia debitului	4	793
VOINEA P. RADU şi ATANASIU C. MIHAIL, Contribuţii la determinarea stării cinematice a unui mecanism prin metoda sistemelor conjugate	1	103
VOINEA P. RADU şi ATANASIU C. MIHAIL, Contribuţii la determinarea pe cale analitică a vitezelor şi acceleraţiilor la un mecanism plan	2	331

NOTE

Nr. Pag.
LEBEDEV P. A., Despre o aplicare a integralelor curbilinii în mecanică . 4 937
PAVELESCU DAN, ILIUC IVAN şi BARBUL SANDA, Aspecte privind proprietăţile de antiuzură ale unor aditivi de extremă presiune, la temperaturi ridicate 6 1479

APARATE ŞI INSTALAŢII

JAKAB I., ZAHARESCU A. şi RUGINĂ I., Amplificator de curent continuu cu 6 canale pentru măsurători tensometrice 6 1485
POPOV M. P., DECIU E. D. şi MITRICĂ I., Traductor pentru măsurarea forţelor 6 1491

REFERATE ŞTIINŢIFICE ŞI TEHNICE

GABRIELESCU VASILE, Studiul baterii piloţilor 2 447
MARCU V., Cercetări experimentale asupra lagărelor cu cuzineţi din metale pulverizate 5 1201

MANIFESTĂRI ŞTIINŢIFICE PESTE HOTARE

BUZDUGAN GH., Colocviul internaţional RILEM cu tema „Măsurarea şi interpretarea efectelor dinamice şi ale vibraţiilor construcţiilor", Budapesta, 7—11 iulie 1963 . . . . 6 1497
MANGERON D., Prima conferinţă de teoria mecanismelor şi maşinilor din regiunea Baltică 1 251
MANGERON D., Al şaptelea Congres de mecanică teoretică şi aplicată, Bombay, 23—26 decembrie 1961 . . . . 2 467
MANGERON D., A doua conferinţă asupra vibraţiilor neliniare organizată de Academia poloneză de ştiinţe împreună cu Academia cehoslovacă de ştiinţe, Varşovia, 18—21 septembrie 1962 . . . . 4 947
MANGERON D., A IV-a sesiune politehnică a universităţii tehnice din Dresda (7—9 noiembrie 1962) 4 955
MANGERON D., Al XIII-lea congres internaţional de astronautică, Varna, R.P. Bulgaria, 23—29 septembrie 1962 . . . . 5 1217
MANGERON D., Congresul internaţional al matematicienilor, Stockholm, 18—22 august 1962. Probleme interesînd mecanica aplicată 6 1501

ANIVERSĂRI ŞTIINŢIFICE DE SEAMĂ

MANGERON D., Un deceniu de activitate centralizată de informare ştiinţifică în domeniul mecanicii teoretice şi aplicate 4 963

RECENZII

PUBLICAŢII PRIMITE PRIN SCHIMB LA REDACŢIE

ACADÉMIE DE LA RÉPUBLIQUE POPULAIRE ROUMAINE
INSTITUT DE MÉCANIQUE APPLIQUÉE «TRAIAN VUIA»

ÉTUDES ET RECHERCHES DE MÉCANIQUE APPLIQUÉE

Tome IV 1963

INDEX ALPHABÉTIQUE

ÉTUDES

	N°	Page
АРОН И. ИОАН, Исследование движения быстрого астатического гироскопа в переходном режиме	2	373
BIȚĂ OLGA and DINCĂ I., Aspects of the behaviour of some bearing materiarials subjected to wear	2	319
BLUMENFELD M., Calcul des disques d'épaisseur variable, en mouvement de rotation, par la méthode de récurrence des trois inconnues	1	71
БЛЮМЕНФЕЛЬД М., Обобщенные соотношения реккурентного метода трех неизвестных для исследования упругих систем	3	715
BODNĂRESCU DAN, Eine allgemeine Zusammenstellung der Pumpenstangen auf Grund der Dauerfestigkeit	3	651
БОГДАН К. РАДУ, Использование гармонического анализа в исследовании плоских групп ассуры II и III вида	2	365
BRĂDEANU PETRE, Optimum programming of the thrust direction of a ballistic rocket moving in air	3	591
БРЭДЯНУ ПЕТРЕ и ПЭВЭЛОЮ ИОН, Оптимальные режимы управления тягой некоторых ракет	4	805
BUZDUGAN GH., Une nouvelle méthode pour le calcul du coefficient de sécurité, dans le cas de sollicitations variables, par cycles asymétriques	4	827
CARAFOLI E., BERBENTE C., Aerodynamic characteristics of profiles in supersonic-hypersonic flow in the case of neglecting pressure losses due to shock waves	4	751
CONSTANTINESCU V. N., Determination of pressures in gas lubricated bearings consisting of rectangular plane surfaces	2	289
CONSTANTINESCU V. N., Détermination approximative de la distribution des pressions dans les paliers lubrifiés à gaz en régime turbulent	6	1415
КРОИТОРУ ЕЛЕНА, О некоторых кинематических инвариантах высшего порядка в пространственном движении жестких твердых тел	1	157
DINCĂ FL., Les vibrations dissipatrices des automobiles. I.	4	909
ДУДИЦЭ Ф., Критические обороты при изгибе в карданной передаче автомобиля	4	925
DUMITRESCU LUCIAN, A method for the dynamic calibration of pressure transducers	3	605
HANGAN M., Static structures in which *n* plastic hinges occur simultaneously	6	
IAMANDI CONSTANTIN, Détermination de la longueur du saut hydraulique	1	205
IOAN CONSTANTIN SABIN, Jets plans compressibles limités par des nappes de jet minces	6	1449

	N°	Page
IONESCU BUJOR CLAUDIU, Introduction à l’étude intrinsèque de la classe des écoulements permanents du plasma parfait dans un champ magnétique stationnaire	3	537
IONESCU DAN GH., La méthode des fonctions analytiques dans l’hydrodynamique des liquides visqueux	1	169
IOSIPESCU N., Determination and experimentation of a new procedure for testing steels subjected to pure shear	2	419
ЯКАБ И., РУДЖИНЭ И. и ЗАХАРЕСКУ А., Автоматизация контроля общего аспекта поверхности подшипниковых шариков	5	1163
KEINTZEL EINAR, Berechnung axialsymmetrischer räumlicher Stockwerkrahmen mit Hilfe von Differenzengleichungen	1	83
LIVOVSCHI LEON, Design of hydraulic systems with bipositional elements	1	133
MANEA V., Considérations sur la théorie des plaques planes minces, élastiques	4	851
МАНЯ В., Построение решения уравнений плоских тонких упругих пластинок из теории без гипотезы Лове-Кирхгоффа, методом аналитических функций	5	1145
MANEA V., Calcul des plaques minces circulaires élastiques dans la théorie sans l’hypothèse de Love-Kirchhoff	6	1277
МАРИНЕСКУ АЛ., К вопросу о динамическом ответе структуры ракеты во время возмущенного полета	3	559
MARINESCU AL., Effet de la commande donnée aux pales élastiques d’un rotor d’hélicoptère	5	1073
МАРИНЕСКУ АЛ., К задаче подъема ракет за минимальное время	6	1465
MISICU M., Rheologic structures	1	7
MUNTEANU STELIAN A. et VIDRAȘCU MARIA, Sur la construction des nomogrammes de certaines fonctions à quatre variables. dans le domaine de l’hydraulique des canaux (surtout des canaux d’aménagement des torrents)	5	1179
NICOLAU EDUARD, Resin microconcrete with epoxy binder for construction models	4	885
NIȚĂ M.M., A transfer monoeuvre between two noncoplanar elliptical orbits	3	573
OROVEANU T., Considérations sur l’écoulement des fluides compressibles à travers des milieux poreux non homogènes	3	497
OROVEANU T., Applications d’un procédé approximatif de détermination des valeurs propres dans le problème Sturm-Liouville	4	781
OROVEANU T. et OSNEA AL., Sur l écoulement linéaire d’un liquide compressible dans un milieu poreux	5	1011
PANTAZOPOL D. and IOAN C.S., A method for studying incompressible plane jets bounded by thin sheets	4	769
PANTAZOPOL D. et COMĂNESCU TR., Influence d’une nappe de jet sur la déviation d’un jet plan	5	1029
PASCAL H., Ecoulement transitoire des gaz dans les conduites principales. II.	1	223
PASCAL H., Sur l’étude des données de pression et débit fournies par l’écoulement transitoire des gaz dans un gisement, sans interruption de l’exploitation de la sonde	2	301
PASCAL H., On the dielectric constant of the saturated porous medium and the possibility of its application to the log investigation of oil wells	3	507
ПАСКАЛ Х., Определение упругих свойств осадочных пород ультразвуковыми методами	5	1089
ПАВЕЛЁСКУ ДАН, Об измерительных ошибках и их относительных весах в случае исследования износа с помощью радиоактивных изотопов	3	621
PAVELESCU DAN and ILIUC IVAN, On the evolution of wear and temperature of radioactive bronze-steel lubricated systems	1	95
PELECUDI CHR., Über die zur automatischen Prüfung der Oberflächen sphärischer Körper angewandten Getriebe	2	355
PELECUDI CHR., Electrical analogy in the kinematics of plane mechanisms	6	1339

N° Page

ПЕЛЕКУДИ К. и ПАРАСКИВ К., К методу проекций, использованному в кинематике плоских механизмов . . . 6 1387

PETCU VALERIU. The plastic hinge in the plastic design of reinforced concrete structures . . . 1 55

PETCU VALERIU, Generalization of the indirect method for the plastic design of reinforced concrete structures . . . 2 441

ПЕТКУ ВАЛЕРИУ, Принципы пластического расчета железобетонных рам . . . 3 705

PETCU VALERIU, A new concept in the plastic design of reinforced concrete structures . . . 6 1259

PETRE AUGUSTIN, Buckling of forced conduits due to internal pressure . . . 1 27

PETRE AUGUSTIN, Divergence aéro-élastique dans les surfaces portantes en rotation, compte tenu de l'effet des forces centrifuges . . . 5 1065

PETRE AUGUSTIN and STĂNESCU CRISTIAN, Aeroelastic effects on the aileron effectiveness of wing by using the end restraints . . . 6 1323

ПОПИНЧЕАНУ Н. Г. и ГАФИЦЯНУ М. Д., Экономическое проектирование зубчатых и червячных передач . . . 2 385

ПОПОВ М. П., МИТРИКЭ И. и ДЕЧУ Е. Д., Влияние задних углов на износ режущего инструмента . . . 3 641

PRIŞCU RADU et OLTEANU GHEORGHE, Etude des barrages-poids à parement amont négatif . . . 4 817

PÎRVULESCU NICOLAE S., Ascension du gaz dans un liquide dans des tubes verticaux . . . 3 523

PÎRVULESCU NICOLAE S., Sur le flambage hyperélastique des barres d'acier . 4 867

PÎRVULESCU NICOLAE S., L'aplatissement hyperélastique des tuyaux de sondage . . . 5 1115

SĂVULESCU ŞT. N. und TOMA V., Experimentelles Studium des Umschlages laminar-turbulent, hervorgerufen durch die Interaktion zwischen einem Strahl geringer Intensität und der inkompressiblen Grenzschicht einer ebenen Platte . . . 5 1037

SOARE MIRCEA, Theory of symmetrical bending of the shallow paraboloid of revolution on circular planform . . . 4 837

СЕКЕЛИ И., Исследование цилиндро-конического зацепления . . . 1 145

TANNENBAUM MARCEL, The ultimate strength design in flexure of prestressed concrete members . . . 3 675

TANNENBAUM MARCEL, Méthodes pratiques pour le calcul, à l'état limite de résistance, des éléments de béton précontraint. sollicités à la compression excentrique (aux faibles excentricités) . . . 5 1131

TEODORESCU P. P., Sur le problème plan de la théorie de l'élasticité en coordonnées curvilignes quelconques. III. Formulation mathématique du problème, méthodes de calcul . . . 1 37

TEODORESCU P. P., Considérations sur le problème plan de la théorie de l'élasticité en coordonnées rectilignes quelconques . . . 2 403

TIPEI N., Hydrodynamic lubrication of tilting-pad thrust bearings . . . 2 279

TIPEI N., Effets de la microgéométrie des surfaces sur la lubrification . . . 5 995

TUTUNARU D. and MURGULESCU ELENA, Mathematical mechanisms resulting from Newton's mechanism . . . 6 1359

VASILCA GH. und NICA AL., Betrachtungen über die Struktur der aktiven Laufflähe bei einigen Lagermetallen . . . 2 311

VASILCA GH., and NICA AL., Contributions to the experimental determination of the operating parameters of the bearings of internal combustion engines 3 611

VASILCA GH. NICA AL., BIŢĂ O. and DINCĂ I., Some aspects of the effects of the structural type of two aluminium alloys on their sliding and wear resisting performance . . . 6 1431

ВАСИЛЕСКУ М. и ЛУКА Г., О поведении пород, пройденных подводящим туннелем ГЭС им. В. И. Ленина в Биказе . . . 6 1303

ВЛАДИМИРЕСКУ И. БЭДЕСКУ Р., Поступательные волны с потерями на тракте путем инфильтрации, движение фронта волны и изменение расхода . . . 4 793

	N°	Page
VOINEA P. RADU and ATANASIU C. MIHAIL, Contributions to the determination of the kinematic state of a mechanism by using the method of conjugate systems	1	103
VOINEA P. RADU and ATANASIU C. MIHAIL, Contributions to the analytical determination of velocities and accelerations in a plane mechanism . .	2	331

NOTES

	N°	Page
LEBEDEV P. A., On an application of the curvilinear integrals in mechanics . .	4	937
ПАВЕЛЕСКУ ДАН, ИЛЮК ИВАН и БАРБУЛ САНДА, О свойствах защиты против износа некоторых присадок крайних давлений при высоких температурах	6	1479

APPAREILS ET INSTALLATIONS

	N°	Page
ЯКАБ И., ЗАХАРЕСКУ А. и РУДЖИНЭ И., Шестиканальный усилитель постоянного тока для тензометрических измерений	6	1485
ПОПОВ М. П., ДЕЧУ Е. Д. и МИТРИКЭ И., Датчик для измерения сил	6	1491

RAPPORTS SCIENTIFIQUES ET TECHNIQUES

	N°	Page
ГАБРИЭЛЕСКУ ВАСИЛЕ, Исследование свайных работ	2	447
MARCU V., Recherches expérimentales sur les paliers à coussinets en métal projeté	5	1201

PARTICIPATIONS À LA VIE SCIENTIFIQUE À L'ÉTRANGER

	N°	Page
BUZDUGAN GH., Le colloque international RILEM sur le thème « Mesure et interprétation des effets dynamiques et des vibrations des constructions », Budapest, 7—11 juillet 1963	6	1497
MANGERON D., Erste Getriebslehre-Konferenz der Baltischen Sozialistischen Sowjetrepubliken	1	251
MANGERON D., The Seventh Indian Congress of Theoretical and Applied Mechanics, Institute of Technology, Bombay, December 23—26, 1961 . .	2	467
МАНЖЕРОН Д., Вторая Конференция по нелинейным колебаниям, организованная Польской и Чехословацкой академиями наук, Варшава, 18—21 сентября 1962 г.	4	947
MANGERON D., IVe Session polytechnique de l'Université technique de Dresde (7—9 novembre 1962)	4	955
MANGERON D., The XIIIth International Congress of Astronautics, Varna, the People's Republic of Bulgaria, September 23—29, 1962	5	1217
MANGERON D., Congrès international des mathématiques (Stockholm, 15—22 août 1962)	6	1501

ANNIVERSAIRES SCIENTIFIQUES

	N°	Page
MANGERON D., A decade of centralized activity of scientific information in the field of theoretical and applied mechanics	4	963

REVUE BIBLIOGRAPHIQUE

LIVRES REÇUS À LA RÉDACTION